[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XVIII, 1967]

UNIVERSITAS COMENIANA

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA

PUBL. XVIII

1967

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO

BRATISLAVA

Austausch von Publikationen erbeten
Prière d'échanger des publications
We respectfully solicit the exchange of publications
Se suplica el canje de publicaciónes

Sborník Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Vydá Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasinkova 5, čís. tel. 645- Povolilo Povereníctvo kultúry číslom 2265/56-IV/1. Tlač. Polygrafické závo n. p., závod 02, Bratislava.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN., MATHEMATICA XVIII — 1967)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XVIII-1967

On the resonance case in ordinary linear differential equation of n[th] order, particularly with constant coefficients

RAHMI IBRAHIM IBRAHIM ABDEL KARIM

Cairo, University, Faculty of Science, Mathematical Dep.

§ 1. Main results

In the differential equation

$$(1)\qquad L[x] \equiv x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + a_2(t)\, x^{(n-2)} + \ldots + a_n(t)\, x = f(t)$$

all the coefficients and the function $f(t)$ are assumed to be continious periodic functions of the same period P (not necessary the smallest one)

$$(2)\qquad a_\nu(t + P) = a_\nu(t)\ (\nu = 1, 2, \ldots, n),\ f(t + P) = f(t).$$

By putting

$$x_1 = x,\ x_2 = x',\ \ldots,\ x_n = x^{(n-1)}$$

the D.E.[1] takes the vector form

$$(3)\qquad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{f}\,(t)$$

with

$$(4)\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & 1 \\ -a_n(t), & -a_{n-1}(t), & \ldots, & -a_2(t), & -a_1(t) \end{bmatrix},\ \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

[1] Abbreviation of „differential equation".

The corresponding homogenoeus D.E. is

(5) $$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + a_2(t)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0.$$

Assuming that the first $(n - \nu)$ derivatives of the functions $a_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ exist, then the adjoint equation to (5)

(6) $$\overline{L}[z] \equiv (-1)^n z^{(n)} + (-1)^{n-1}(a_1(t)z)^{(n-1)} + (-1)^{n-2}(a_2(t)z)^{(n-2)} + \\ + \ldots + a_n(t)z = 0$$

takes by using the system of equations

(9) $$\begin{cases} z_n = z \\ z_{n-1} = -z_n' + a_1 z_n = a_1 z - z' \\ z_{n-2} = -z_{n-1}' + a_2 z_n = a_2 z - (a_1 z)' + z'' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_1 = -z_2' + a_{n-1} z_n = a_{n-1} z - (a_{n-2} z)' + (a_{n-3} z)'' - \ldots + (-1)^n z^{(n-1)} \\ 0 = -z_1' + a_n z_n \equiv \overline{L}[z] \end{cases}$$

the vector form

(8) $$\mathbf{z}' = -A^T(t)\mathbf{z},$$

where A^T denotes the transposed matrix of A
and

(7) $$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Now if $z(t)$ is a periodic solution with period P of the adjoint D.E. (6), then one obtains by virtue of (7) a corresponding solution with period P of (8). Thus there is a unique correspondence between the periodic solutions $z(t)$ with period P of (8) and the periodic solutions with period P of (6). Let now $\mathbf{z}(t)$ be a periodic vectorial solution of (8), then from (9) and (4) we get

(10) $$\int_0^P \mathbf{z}^T(t)\mathbf{f}(t)\,dt = \int_0^P z(t)\, f(t)dt.$$

From this preparatory introduction and referring to [1], § 1 we have the following:

Definitions: *The inhomogeneous D.E. (1) is in the resonance case, if there is a periodic solution z(t) of period P of the adjoint equation (6), such that*

$$(11) \qquad \int_0^P z(t)\, f(t)\mathrm{d}t = C \neq 0.$$

Equation (1) is in the principal case, if there are no periodic solutions of (6) of period P; and in the exceptional case if there are no periodic solutions of (6) of period P satisfying (11).

Referring to the results in [1] theorems 1, 2, 3 and the previous definitions, we obtain immediately the following:

Theorem 1: *The inhomogenous equation (1) has bounded with P periodic solutions, if the adjoint equation (6) has either periodic solutions z with period P for which* $\int_0^P z(t)\, f(t)\mathrm{d}t = 0$ *(exceptional case), or no periodic solutions with period P at all (principal case). Otherwise (in the resonance case) every solution x(t) — independent of the initial values — takes on arbitrarily large absolute values for t large enough.*

In this paper will be studied the power order of the solutions of (1) and its c — 1 derivatives in the resonance case; particularly for D.E. with constant oefficients; and furthermore by using elementary methods.

In § § 2, 3, 4. it will be shown

Theorem 2: *In the study of the resonance case by a linear differential equations of n-th order with constant coefficients, there is a basic difference between the ordinary case* $a_n \neq 0$ *and the special case:*

$$a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-j+1} = 0, \quad a_{n-j} \neq 0 \quad (j \geqslant 1).$$

While namely in the ordinary case all the derivatives $x^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ of the solutions $x(t)$ of (1) — independent of the initial values — takes on the same power order as $x(t)$ itself, i. e. equals at least a certain power t^m with m from (50); we find that in the preceding mentioned special case, under the assumption that $f(t)$ is of mean value different from zero or $m \leqq j$, the power orders of the derivatives $x^{(k)}(t)$ decrease monotonically by 1, starting from $x(t)$ with power order t^j, till $x^{(j-m)}$, and remain from this value constant and equal to t^m. But if $f(t)$ is of mean value zero, or $m > j$; then the first statement holds.

§ 2. On the power order of the solutions of the inhomogenous differential equations (1) in the resonance case.

In this paragraph and the next ones, the coefficients a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ of (1) will be assumed to be constant.

We solve the homogeneous D.E. (5) by using the trial solution $y = e^{\alpha t}$. This leads to the characteristic equation

$$(12) \qquad (\alpha - \alpha_1)^{m_1} (\alpha - \alpha_2)^{m_2} \ldots, (\alpha - \alpha_s)^{m_s} = 0$$

with mutually different values $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$; where with a complex α_μ appears also a complex root $\bar{\alpha}_\mu$. Then the general solution of (5) is

$$(13) \qquad y(t) = \sum_{\nu=1}^{s} e\alpha^{\alpha_\nu t} p_\nu(t),$$

where $p_\nu(t)$ is an arbitrary polynom of grade $m_\nu - 1$:

$$(14) \qquad p_\nu(t) = c_{\nu 1} + c_{\nu 2} t + c_{\nu 3} \frac{t^2}{2!} + \ldots + c_{\nu, m_\nu} \frac{t^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!}.$$

The homogeneous D.E. (5) possesses then exactly solutions with period p, if there exists integral multiple of $\frac{2\pi i}{p}$ between the solutions $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ of the characteristic equation (12). We shall assume that the values $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ are integral multiple of $\frac{2\pi i}{p}$, while the rest of the α_s' are not integral multiple of $\frac{2\pi i}{p}$. Writing in general

$$(15) \qquad \alpha_\nu = \beta_\nu + i\gamma_\nu,$$

then the values α_ν (for $\nu = 1, \ldots, \varrho$) form a sequence of mutually different values $i\gamma_1, \ldots, i\gamma_\varrho$; where γ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, \varrho)$ are integral multiple of $\frac{2\pi}{p}$.

For the eigenvalues $\alpha_\nu(\nu = 1, \ldots, \varrho, \ldots, s)$ one can make the limitation

$$(16) \qquad -\frac{\pi}{P} < I(\alpha_\nu) = \gamma_\nu \leqq \frac{\pi}{P}.$$

Similarly using for the adjoint equation (6) the trial solution $z = e^{-\alpha t}$, one obtains the charachteristic equation

$$(\alpha + \alpha_1)^{m_1} \cdot (\alpha + \alpha_2)^{m_2} \dots (\alpha + \alpha_s)^{m_s} = 0, \tag{17}$$

which leads to the general solution of (6):

$$z(t) = \sum_{\nu=1}^{s} e^{-\alpha_\nu t}\left(c^*_{\nu_1} + c^*_{\nu_2} t + c^*_{\nu_3} \frac{t^2}{2!} + \dots + c^*_{\nu, m_\nu} \frac{t^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!}\right). \tag{18}$$

Thus the resonance and exceptional conditions (see the preceding definitions and (11)) take the form:

$$\int_0^P e^{-i\gamma_\nu t} f\,(t)\,dt = c \begin{cases} \neq 0 & \text{resonance case} \\ \neq 0 & \text{exceptional case.} \end{cases} \tag{19}$$

Now let for the indices $\nu = 1, \dots, \sigma (\sigma \leqq \varrho)$ the relation

$$\int_0^P e^{-i\gamma_\nu t} f(t)\,dt \neq 0 \text{ (partial resonance case)} \tag{20}$$

holds, while for the indices $\nu = \sigma + 1, \dots, \varrho$ holds the relation

$$\int_0^P e^{-i\gamma_\nu t} f(t) = 0 \text{ (partial exceptional case).} \tag{21}$$

We shall denote every index ν as „resonance index" or „exceptional index", if for this index holds the partial-resonance case or partial — exceptional case.

The general solution of (1) will be

$$x(t) = x^*(t) + y(t), \tag{22}$$

where $x^*(t)$ is a particular solution of (1), and

$$y(t) = \sum_{\nu=1}^{\varrho} e^{i\gamma_\nu t} p_\nu\ (t) + \sum_{\nu=\varrho+1}^{s} e^{(\beta_\nu + i\gamma_\nu)t}\ p_\nu\ (t), \tag{23}$$

with $p_\nu(t)$ from (14). The 1st term (for $\nu = 1, \dots, \varrho$) is of degree

$$m = \max_{(\nu=1,\dots\varrho)} (m_\nu - 1), \tag{24}$$

while the 2nd part (for $\nu = 1, \dots, s$) is of exponential order.

We want in future to consider only those solutions $x(t)$ of (1), which do not include summations of exponential order „i. e. of order $e^{\alpha t}$ with $R(\alpha) \neq 0$". Such solutions will be called „normal solutions".

We subdivide the function $f(t)$ in the form

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \tag{25}$$

where

(26) $$f_1(t) = \sum_{\nu=1}^{\varrho} b_\nu .\ e^{i\gamma_\nu t},$$

with the Fourier coefficients $b_\nu(t)$, and $f_2(t)$ is such that

(27) $$\int_0^P f_2(t) e^{-i\gamma_\nu t}\, dt = 0.$$

Here follows immediately

(28) $$b_\nu = 0 \text{ for } \nu = \sigma + 1, \ldots, \varrho,$$

while for $\nu = 1, \ldots, \sigma$ they are different from zero. The particular solution $x^*(t)$ of (1) is subdivided now into two parts

(29) $$x^*(t) = x_1^*(t) + x_2^*(t)$$

corresponding to the two parts $f_1(t)$ and $f_2(t)$. For $x_1^*(t)$ we make the substitution

(30) $$x_1^*(t) = \sum_{\nu=1}^{\varrho} A(t)\, e^{i\gamma_\nu t},$$

where the functions $A_\nu(t)$ can be determined as polynomials of degree m_ν as follows:
Writing (1) by using (12) in the form

(31) $$(D - \alpha_1)^{m_1}\ (D - \alpha_2)^{m_2} \ldots (D - \alpha_s)^{m_s} x_1^*(t) = f_1(t),$$

we obtain by using (26) and (30) the D. E.

(32) $$(D - \alpha_1)^{m_1}\ (D - \alpha_2)^{m_2} \ldots (D - \alpha_s)^{m_s} \left(\sum_{\nu=1}^{\sigma} b_\nu(t)\, e^{i\gamma_\nu t} \right) = \sum_{\nu=1}^{\sigma} b_\nu\, e^{i\gamma_\nu t}.$$

It follows for $\nu = 1, \ldots, \sigma$ the equations

(33) $$e^{i\gamma_\nu}(D - (\alpha_1 - i\gamma_\nu))^{m_1} . (D - (\alpha_2 - i\gamma_\nu))^{m_2} \ldots D^{m_\nu} \ldots,$$
$$(D - (\alpha_s - i\gamma_\nu)^{m_s} A_\nu(t) = e^{i\nu_\nu t} . b_\nu .$$

Making for $A_\nu(t)$ the substitution

(34) $$A_\nu(t) = c_\nu \frac{t^{m_\nu}}{m_\nu!},$$

this gives for $A_\nu(t)$ the equation

(35) $$c_\nu = b_\nu / \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{s} \quad (i\gamma_\nu - \alpha_\mu)^{m_\mu}$$

and we obtain for $x_1^*(t)$

$$x_1^*(t) = \sum_{\nu=1}^{\sigma} c_\nu \frac{t^{m_\nu}}{m_\nu!} e^{t\gamma_\nu t}. \tag{36}$$

By using Green's Function

$$G(t-\tau) = \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\mu=1}^{m_\nu} b_{\nu\mu} \frac{(t-\tau)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} e^{\alpha_\nu(t-\tau)}, \tag{37}$$

which as functions of t satisfies the homogeneous D. E. (5), we obtain the solution of (1) for $x_2^*(t)$ in the form

$$x_2^*(t) = \int_0^t G(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau + y_2^*(t), \tag{38}$$

The constants $b_{\nu\mu}$ are to be determined, such that $G(t)$ satisfies the condition

$$G^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ (for } k = 0, 1, \ldots, n-2) \\ 1 \text{ (for } k = n-1), \end{cases} \tag{39}$$

where $y_2^*(t)$ is a solution of the homogeneous D. E. (5), which can be determined, such that $x_2^*(t)$ has the period P. Equation (37) is satisfied, as it can be shown easily, when the constants $A_{\nu\mu}$ satisfy the equations

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{s} b_{\nu 1} = 0 \\ \sum_{\nu=1}^{s} b_{\nu 1}\alpha_\nu + b_{\nu 2} = 0 \\ \sum_{\nu=1}^{s} b_{\nu 1}\alpha_\nu^2 + {}^2c_1 A_{\nu 2}\alpha_\nu + A_{\nu 3} = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{\nu=1}^{s} b_{\nu 1}\alpha_\nu^{n-1} + {}^{n-1}C_1 b_{\nu_1}\alpha_\nu^{n-2} + {}^{n-1}C_2\alpha_\nu^{n-3} + \ldots + A_{\nu m_\nu}\alpha_\nu^{n-m_\nu} = 1. \end{cases} \tag{40}$$

Since the determinant of the coefficients, considered as the „Wronski determinant" of this fundamental system (see (13), (14)) is at the point $t = 0$ different from zero, thus the constants in the equations (40) can be uniquely determined. That $x_2^*(t)$ satisfies the D. E. (1) can be shown as follows: By differentiating (38), we obtain successively

$$
(41)\qquad \begin{cases}
\overset{*}{x}_2(t) = \displaystyle\int_0^t G(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau + \overset{*}{y}_2(t) \\
\overset{*}{x}_2{}'(t) = G(0)f_2(t) + \displaystyle\int_0^t G'(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau + \overset{*}{y}_2{}'(t) \\
\overset{*}{x}_2{}''(t) = G'(0)f_2(t) + \displaystyle\int_0^t G''(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau + \overset{*}{y}_2{}''(t) \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\overset{*}{x}_2{}^{(n-1)}(t) = G^{(n-2)}(0)f_2(t) + \displaystyle\int_0 G^{(n-1)}(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau + \overset{*}{y}_2{}^{(n-1)}(t) \\
\overset{*}{x}_2{}^{(n)}(t) = G^{(n-1)}(0)f_2(t) + \displaystyle\int_0^t G^{(n)}(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau + \overset{*}{y}_2{}^{n)}(t).
\end{cases}
$$

Thus it follows

$$
(42)\qquad \begin{cases}
\overset{*}{x}_2{}^{(n)} + a_1\overset{*}{x}_2{}^{(n-1)} + a_2\overset{*}{x}_2{}^{(n-2)} + \ldots + a_n\overset{*}{x}_2 \\
= f(t) + \displaystyle\int_0^t \Big(G^{(n)}(t-\tau) + a_1G^{(n-1)}(t-\tau) + a_2G^{(n-2)}(t-\tau) \\
+ \ldots + a_nG(t-\tau)\Big)f_2(\tau)\,d\tau + \overset{*}{y}_2{}^{(n)}(t) + a_1\overset{*}{y}_2{}^{(n-1)}(t) \\
+ a_2\overset{*}{y}_2{}^{(n-2)}(t) + \ldots + a_n\overset{*}{y}_2(t) = f_2(t).
\end{cases}
$$

We have now to determine the constant $c_{\nu\mu}$ in the expansion

$$
(43)\qquad \overset{*}{y}_2(t) = \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{m_\nu} c_{\nu\mu}\, e^{\alpha_\nu t}\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!},
$$

so that $\overset{*}{x}_2$ has the period P. With the notations

$$
(44)\quad x_{\nu\mu}(t) = b_{\nu\mu}\int_0^t \frac{(t-\tau)}{(\mu-1)!}\, e^{\alpha_\nu(t-\tau)}\, f_2(\tau)\,d\tau + c_{\nu\mu}\, e^{\alpha_\nu t}\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\ \begin{matrix}\text{for } \nu = 1,\ldots,s \\ \text{and } \mu = 1,\ldots,m_\nu\end{matrix}
$$

the periodicity of $\overset{*}{x}_2(t)$ follows, if each $x_{\nu\mu}(t)$ satisfies the condition

$$
(45)\qquad x_{\nu\mu}(P) = x_{\nu\mu}(0) \qquad \begin{pmatrix}\text{for } \nu = 1,\ldots,s) \\ \text{(and } \mu = 1,\ldots,m_\nu).\end{pmatrix}
$$

Then it follows also that the sum $x_2^*(t) = \sum_{\gamma=1}^{s} \sum_{\mu=1}^{m_\nu} x_{\gamma\mu}(t)$

$$x_2^*(p) = x_2^*(0) \tag{46}$$

as solution of the D. E. (1), having with P periodic function f_2, is from itself periodic with period P. The equations (41) lead to the condition for the constants $c_{\nu\mu}$ (for $\nu = 1, \ldots, s$ and $\mu = 1, \ldots, m_\nu$) to be periodic with the period P.

$$\begin{aligned} 0 = x_{\nu\mu}(p) - x_{\nu\mu}(0) = b_{\nu\mu} \int_0^P \frac{(P-\tau)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} e^{\alpha_\nu(P-\tau)} \; f_2(\tau)\, d\tau + \\ + \frac{c_\nu \mu}{(\mu-1)!} (P^{\mu-1} e^{\alpha_\nu P} - \varepsilon_\mu) \end{aligned} \tag{47}$$

with

$$\varepsilon_\mu = \begin{cases} 1 \text{ for } \mu = 1 \\ 0 \text{ for } \mu \neq 1 \end{cases} \tag{48}$$

For $\nu = \varrho + 1, \ldots, s$ the factors of $c_{\nu\mu}$ are always different from zero, so that $c_{\nu\mu}$ is uniquely determined. For $\nu = 1, \ldots, \varrho$ and $\mu \neq 1$ the factors of $c_{\nu\mu}$ are also different from zero, so that here also the constants $c_{\nu\mu}$ are uniquely determined. Only for $\nu = 1, \ldots, \varrho$ but $\mu = 1$, the factors of $c_{\nu\mu}$ vanish. But since the integrals $\int_0^P e^{-\alpha_\nu \tau} f_2(\tau)\, d\tau$ for($y = 1, \ldots, \varrho$), because of the conditions (27), vanish also at the same time, then these equations are varified from itself for arbitrary $c_{\nu 1}$.

Thus we can from this deduce that the solution $x_2^*(t)$ has the period P. Referring to (29) and (36), it follows immediately that a particular solution $x^*(t)$ takes on values of the power order t^m with

$$m = \max(m_1, \ldots, m_\sigma). \tag{49}$$

Thus we have (see also the first section of page 5)

Theorem 3: *If the partial resonance case holds for $\nu = 1, \ldots, \sigma > 0$, then the power order of a normal solution $x(t)$ of (1) is equal*

$$\begin{gathered} m = \operatorname{Max}(m_\nu) \\ (\nu = 1, \ldots, \sigma) \\ (\nu \text{ Resonance}) \end{gathered} \tag{50}$$

§ 3. The Case $a_n \neq 0$

We note that in case

(51) $$a_n \neq 0$$

in equation (1), the homogeneous D. E. (5) cannot have constant solutions.i.e. (see (13), (14), (15))

(52) $$\gamma_\nu \neq 0 \; (\nu = 1, 2, \ldots, \varrho).$$

If on the other hand $y(t) = \text{const.}$ is a solution of (5), then all the terms with $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ in the D. E. will vanish, and we obtain from the equation

$$y.\, a_n = \text{const.}\, a_n = 0,$$

which leads to a contradiction.

It follows directly (see (36), (46), (14))

Theorem 4: *Under the condition (51) all the derivatives $x^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ of a normal solution of (1) always takes on the same power order.*

§ 4. The reduced differential equation

Since the case (51) in the preceding § is already treated, we shall assume now that

(53) $$a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-j+1} = 0, \; a_{n-j} \neq 0 \; (1 \leqq j \leqq n-1)^{2}.)$$

Writing

(54) $$\hat{x}(t) = x^{(j)}(t), \quad y(t) = y^{(j)}(t)$$

the equations (1) & (5) are reduced to

(55) $$\hat{L}[\hat{x}] \equiv \hat{x}^{(n-j)} + a_1\hat{x}^{(n-j-1)} + \ldots + a_{n-j}\hat{x} = f(t)$$

(56) $$\hat{L}[\hat{y}] \equiv \hat{y}^{(n-j)} + a_1\hat{y}^{(n-j-1)} + \ldots + a_{n-j}\hat{y} = 0.$$

The corresponding adjoint homogeneous D. E. is

(57) $$\hat{L}[\hat{z}] \equiv (-1)^{n-j}\hat{z}^{(n-j)} + (-1)^{n-j-1}a_1\hat{z}^{(n-j-1)} + \ldots + a_{n-j}\hat{z} = 0.$$

Each solution of (57) is at the same time solution of (6).

One can easily show that all the periodic solutions of the reduced homogeneous D. E. (56) are functions of mean value zero. If one namely substitute in (56) a periodic function $\hat{y}(t)$, then all the terms, which are multiplied $\hat{y}'$,

---

[2] The trivial case $j = n$ leads to the D. E. $x^{(n)}(t) = f(t)$ with the reduced equation (see (54), (55)), $\hat{x} = x^{(n)} = f(t)$. Clearly the resonance case or exceptional case occurs if the mean value of $f(t)$: $1/p \int_0^p f(t)\, dt$ equals zero or differs from zero.

$\hat{y}'', \ldots, \hat{y}^{(n-j)}$, have the mean value zero. Thus also the last terms: $a_{n-j}\hat{y}(t)$ must have the mean value zero. One can also see this primary remark directly by considering (13), (14), (15) and (52). The same preceding statement holds also for the adjoint D. E. (57). On the solutions of the homogeneous D. E. (5), we have the following:

Theorem 5. *Let the reduced D. E.* (56) *has* ϱ *independent with* P *periodic solutions* $\hat{y}_{(1)}, \hat{y}_{(2)}, \ldots, \hat{y}_{(\varrho)}$, *and since for all these solutions* $\hat{y}_{(\nu)}(t)$ $\nu = 1, \ldots, \varrho)$ *(see the preceding part)*

$$\int_0^P y_{(\nu)}(t)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{58}$$

then (5) *possesses exactly* $\varrho + 1$ *independent with* P *periodic solutions.*

For proof, one needs the following simple lemma:

Lemma 1: *Let* $g(t)$ *be a periodic function with period* P, *for which*

$$\int_0^P g(t)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{59}$$

Then there is exactly a leriodic function $h(t) = \int g(t)\,\mathrm{d}t$ *with period* P, *for which at the same time*

$$\int_0^P h(t)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{60}$$

Proof: With each constant $h(0)$ we have

$$h(t) = \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + h(0)$$

with P periodic. Equation (60) holds then also, with a uniquely determined constant $h(0)$.

The application of this lemma for the proof of theorem 5 proceeds as follows:

We integrate j times the functions $\hat{y}_{(\nu)}(t)$ $(\nu = 1, \ldots, \varrho)$, where each time the constant of integration is to be determined as stated in the lemma. Similarly we gain, starting from the trivial solution $y_0(t) \equiv 0$, the function $y_0(t) \equiv$ $\equiv$ constant $\neq 0$ as a further periodic solution of (5) with period P. That this solution is independent from the already determined solutions $y_{(\nu)}(t)(\nu =$ $= 1, 2, \ldots, \varrho)$ follows from the fact, that all these $y_{(\nu)}(t)$ have the mean value zero, while $y_0(t)$ has a mean value different from zero. That moreover $y_{(\nu)}(t)$ $(\nu = 1, \ldots, \varrho)$ are mutually linear independent, follows after differentiation j times, from the linear independence of the functions $\hat{y}_{(\nu)}(t)$.

Cor: Theorem 5 is also applicable for the reduced adjoint homogeneous D. E. (57) and the adjoint D. E. n-th order (6).

Thus if the fundamental system of solutions of (56) is

$$\hat{y} = (\hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(2)}, \ldots, \hat{y}^{(s)}) \tag{61}$$

with

$$\hat{y}^{(\nu)} = e^{i\gamma_\nu t}\left(1, t, \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^{\hat{m}_\nu} - 1}{(\hat{m}_\nu - 1)!}\right) e^{\beta_\nu t} \text{ for } \nu = 1, \ldots, s, \tag{62}$$

then a fundamental solution of (5) takes the form

$$y^{(\nu)} = (y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(s)}), \tag{63}$$

where through suitable combinations of the elements of $y^{(\nu)} (\nu = 1, 2, \ldots, s)$ one can obtain

$$\begin{cases} y^{(\nu)} = \hat{y}^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s) \\ y^{(0)} = \left(1, t, \dfrac{t^2}{2!}, \ldots, \dfrac{t^{j-1}}{(j-1)!}\right) \end{cases} \tag{64}$$

with

$$\begin{cases} m_\nu = \hat{m}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s) \\ m_0 = j. \end{cases} \tag{65}$$

Now we return to the study of the resonance case in the D. E. (1). If the reduced D. E. (55) is in the resonance case, then in general for small values of j, the partial resonance case for the index $\nu = 0$ will not yet be of a useful meaning. But if j is great enough, then m_0 weights more than all the other orders $m_1, \ldots, m_\sigma$; and it is necessary to know, whether m_0 is a resonance-index or not. Thus, we need to know the periodic solution $z_0(t)$ of period P of the adjoint D. E. (6). First, it will be shown that $z_0(t)$ must be a constant. For this purpose, one starts from (1) with a function $f(t)$ of mean value zero. By integrating j-times one can, by using lemma 1, obtain an equation

$$\mathrm{L}[x] \equiv x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-j} x^{(j)} = F(t), \tag{66}$$

with a function $F(t)$ of mean value zero. Since $\hat{x}(t)$ prossesses the power order $\hat{m}$ (see (50), (64)), then the same power order holds also for $x(t)$. Since $m_0 = j$ (see (65)), then for $j > \hat{m}$, $\nu = 0$ must be an exceptional index, then it must be

$$\int_0^P z_0(t) F(t)\, dt = 0. \tag{67}$$

Thus the hypothesis

$$z_0(t) = c + \tilde{z}_0(t), \tag{68}$$

where $\tilde{z}_0(t)$ is of mean value zero and c in a constants, will lead to a contradiction with (67), if one chooses

$$F(t) = \tilde{z}_0(t).$$

Thus we must have in (68):

(69) $$\tilde{z}_0(t) \equiv 0 \text{ and } z_0(t) = c \neq 0.$$

The fact that $z_0(t)$ is a constant coincides with the cor. of theorem 5 and the similar expressions to (64) and (22) for the adjoint D. E. (6) (see also (18) and (15)). Referring to (11) it follows:

Theorem 6: *For the D. E. (1) the index $\nu = 0$ is a resonance index, if $f(t)$ has a mean value different from zero, and an exceptional index, if the mean value of $f(t)$ in zero (see also F. N. 2)).*

Fourthermore it will be proved

Theorem 7: *The mean value of the periodic function $\hat{x}_2{}^*(t)$ (see (46)) equals he mean value of $f(t)$ divided by a_{n-1}*; i. e.

(70) $$\int_0^P \hat{x}_2^*(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{a_{n-1}} \int_0^P f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Proof: Since $f_1(t)$ is of mean value zero (see (25), (26) (52)), then

)71) $$\int_0^P f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^P f_2(t)\, \mathrm{d}t.$$

Now let $f_2(t)$ be subdivided into

(72) $$f_2(t) = k + \tilde{f}_2(t),$$

such that

(73) $$\begin{cases} k = \dfrac{1}{P}\displaystyle\int_0^P f_2(t)\, \mathrm{d}t \\ \displaystyle\int_0^P \tilde{f}_2(t)\, \mathrm{d}t = 0. \end{cases}$$

Similarly let $\hat{x}_2^*(t)$ be subdivided into

(74) $$\hat{x}_2^*(t) = \hat{x}_2^{*\circ}(t) + \tilde{\hat{x}}_2^*(t)$$

corresponding to the two parts k and $\tilde{f}_2(t)$. Evidently

$$(75) \qquad \hat{x}_2^{*0}(t) = \frac{k}{a_{n-j}}$$

satisfies the D. E.

$$\hat{x}^{(j-j)} + a_1 \hat{x}^{(n-j-1)} + \ldots + a_{n-j}\hat{x} = k.$$

Moreover the periodic function $\hat{x}_2^*(t)$ must be of mean value zero, i. e.

$$(76) \qquad \int_0^P \tilde{\hat{x}}_2^*(t)\, dt = 0,$$

otherwise all the terms in the D. E.

$$\hat{x}^{(n-j)} + a_1\hat{x}^{(n-j-1)} + \ldots + a_{n-j}\hat{x} = \hat{f}_2(t)$$

will be of mean value zero, except the term including $\hat{x}$. Referring to (74), (75), (76), the 1st equation (73), and (71) we obtain

$$\int_0^P \hat{x}_2^*(t)\, dt = \frac{k}{a_{n-j}}\, p = \frac{1}{a_{n-j}} \int_0^P f(t)\, dt.$$

Thus the theorem is proved.

Consider now the case, where $\nu = 0$ is a resonance index. From the theorems 6 and 7 it follows

$$(77) \qquad \int_0^P f(t)\, dt \neq 0$$

and thus

$$(78) \qquad \int_0^P \hat{x}_2^*(t)\, dt \neq 0.$$

Let

$$(79) \qquad \hat{x}(t) = \hat{x}_1^*(t) + \hat{x}_2^*(t) + \hat{y}(t)$$

be a solution of (55). Integrating (79) j times under consideration of (36), (46), (23), (52), (78) and lemma 1, it can be easily shown that a normal solution $x(t)$ of (1) takes on values of order t^ω with

$$(80) \qquad \omega = \mathrm{Max}\ (j, m),$$

which coincides with the statement of theorem 3.

By differentiating $x(t)$, the order of the derivatives $x^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, j - m$) decreases monotonically by one, till the derivative $x^{(j-m)}$ (case $j > m$), which will be of order t^m, and whose coefficient is not identically zero, since it is the sum of two linearly independent terms: The first is a constant $\neq 0$ which originates from the mean value of $\hat{x}_2^*(t)$, and the second is a periodic function of mean value zero (see (52)), which comes from $\hat{x}_1^*(t)$. The remaining derivatives $x^{(k)}(t)$ $(k = j - m + 1, \ldots, n - 1)$ have the same power order t^m.

Thus we have

Theorem 6: *In both cases, if $f(t)$ is of mean value zero, or of mean value different from zero but $j \leqq m$ with m from (50), then all derivatives of a normal solution $x(t)$ of (1) take on the same power order as $x(t)$ itself. In the case that $f(t)$ is of mean value different from zero and at the same time $j > m$, the power order of the derivatives $x^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, j - m)$ decreases beginning from t^j monotonically by one, till $x^{(j-m)}$ and remain from this value constant and equal to t^m.*

References

[1] Rahmi I. I. A. Karim: *Über den Resonanzbegriff bei Systemen von n linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Arch. Rational Mech. Anal. 6, 21—28 (1961).*

Autorova adresa: Rahmi Ibrahim Ibrahim Abdel Karim, U. A. R. (Egypt), Cairo/Elmaniel, Havez Baghet Str. 4

Do redakcie prišlo 15. októbra 1966.

Prípad rezonancie v obyčajných lineárnych diferenciálnych rovniciach n-tého rádu, špeciálne s konštantnými koeficientami.

RAHMI IBRAHIM IBRAHIM ABDEL KARIM,
Kahira

Resumé

V práci sa vyšetruje diferenciálna rovnica (1), ktorej koeficienty $a_i(t)$ a pravá strana $f(t)$ splňujú podmienku (2). Rezonancia nehomogénnej rovnice nastane, ak jestvuje periodické riešenie $z(t)$ periody P adjungovanej rovnice (6), ktoré splňuje vzťah (11). V prípade rezonancie je každé riešenie nehomogénnej rovnice neohraničené. V práci sa vyšetruje tento prípad, zvlášť pre rovnicu s konštantnými koeficientami.

Случай резонанса в обыкновенных линейных дифференциальных уравнениях n-того порядка, особенно с постоянными коэффициентами

РАХМИ ИБРАХИМ ИБРАХИМ АБДЕЛ КАРИМ,
Кахира

Резюме

В работе исследуется дифференциальное уравнение (1), коэффициенты которого $a_i(t)$ и правая сторона $f(t)$ исполняют условие (2). Резонанс неоднородного уравнения имеет место эсли существует периодическое решение $z(t)$ периода P сопряженого уравнения (6), которое исполняет (11). В случае резонанса всякое решение неоднородного уравнения неограничено. В работе исследуется этот случай, именно для уравнения с постоянными коэффициентами.

(ACTA R. F. N. UNIV. COMEN., MATHEMATICA XVIII — 1967)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XVIII-1967

О колебиялемости решений уравнен $y^{(IV)} + A(x)y' + B(x)y = 0.$

Г. МАМРИЛЛА

В настоящей работе мы будем рассматривать уравнение

$$y^{(IV)} + A(x)y' + B(x)y = 0. \tag{a}$$

О функциях $A'(x)$, $B(x)$ мы будем предпологать, что они непрерывны на интервале $\langle x_0, \infty)$, $x_0 > 0$ (очевидно, предположение $x_0 > 0$ не существенно).

Решение $y(x)$ уравнения (a) называется колеблющимся на $\langle x_0, \infty)$, если в каждом интервале $\langle \bar{x}, \infty)$, $\bar{x} > x_0$ имеет по крайней мере один нуль и неколеблющимся в противном случае, т. е. существует интервал $\langle \bar{x}, \infty)$, $\bar{x} > x_0$, в котором решение $y(x)$ уравнения (a) не имеет нуля.

Так как ниже будут приведены теоремы о колеблемости решений уравнения (a) в зависимости от неколеблющихся решений уравнения

$$4v''' - A(x)v = 0, \tag{b}$$

припомним сначала некоторые известные результаты о существовании неколеблющихся решений уравнения (b).

Лемма 1. *Если $A(x) > 0$ и $v(x)$ такое решение уравнения (b), что $v(x_0) = v'(x_0) = v''(x_0) > 0$, то $v(x)$ возрастает правее x_0 вместе с первой и второй производными.*

Лемма 2. *Если $A(x) < 0$, то всегда существует неколеблющееся монотонно убывающее решение, такое решение единственно с точностью до постоянного множителя. Если, кроме того, предположим, что $\int^{\infty} |A| x^2 dx < \infty$ ($A < 0$), то это решение стремится к постоянной не равной нулю.*

Лемма 3. *Пусть функции $C(x)$ и $F(x)$ непрерывны на $\langle x_0, \infty)$ и уравнение*

$$\omega'' + C(x)\omega = 0$$

неколебательное, т. е. всякое его решение (за исключением $\omega \equiv 0$) неколеблющееся и $F(x)$ не меняет знака, то также уравнение

$$\omega'' + C(x)\omega = F(x)$$

неколебательное.

Доказательство леммы 1 и первой части леммы 2 можно найти в [1]. Вторая часть леммы 2 вытекает из [1; 2]. Лемму 3 в [3].

Как нетрудно проверить, для колеблемости всех решений уравнения $y^{(IV)} + A_1 y' + B_1 y = 0$ (где A_1, B_1 — постоянные) достаточно, чтобы $B_1 > \frac{3}{4} A_1 \sqrt[3]{\frac{A_1}{4}}$. Теоремы 1,1′ и 2 обобщают этот результат.

Теорема 1. *Пусть $A(x) > 0$ и $v(x)$ — решение уравнения (b) с начальными условиями в точке $x_0 : v(x_0) = v'(x_0) = 0$, $v''(x_0) = 1$ (вообще > 0). Пусть, кроме того,*

$$\int^{\infty} \frac{\int_{x_0}^{x} A v^2\, dt}{v^2} \mathrm{d}x = \infty \quad \text{и} \quad B(x) - \frac{3}{4}\frac{(Av)}{v} \geqslant \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v},$$

тогда все решения уравнения (a) колеблются.

Доказательство. Как нетрудно проверить, дифференциальное уравнение (a) можно записать в виде (для достаточно больших x)

$$(a_1) \qquad (vy'' - 2v'y' + 3v''y)'' + \left(Bv - \frac{3}{4}(Av)'\right)y = 0,$$

где $v(x)$ — любое неколеблющееся решение уравнения (b).

В дальнейшем за $v(x)$ возьмем решение уравнения (b) с двойным нулем в точке x_0, которое, на основании леммы 1, является положительным вместе со своими первой, второй и третьей производными при $x > x_0$.

Сначала докажем, что $\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v} > 0$ при $x > x_0$. Действительно,

$$\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v} > \frac{4}{x}\frac{v''}{v} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} = \frac{4}{xv}\left(v'' - \frac{v'}{x}\right) =$$

$$=\frac{4}{xv}\left[1+\int_{x_0}^{x}\frac{A}{4}v\,dt-1+\frac{x_0}{x}-\frac{1}{x}\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t}\frac{A}{4}v\,d\tau\right)dt\right]=$$

$$=\frac{4x_0}{x^2v}+\frac{1}{xv}\int_{x_0}^{x}Av\,dt\,.\left[1-\frac{x-\xi}{x}\right]>0,\ \text{где } x_0<\xi<x$$

(вторая теорема о среднем интегрального исчисления).

Предположим, что существует неколеблющееся решение $\bar{y}(x)$ уравнения (a_1). Без потери общности можно считать, что $\bar{y}(x)>0$ при $x>x_1\geqslant x_0$ (x_1 — последняя его нулевая точка, если такая существует).

Обозначим

$$z(x)=v\bar{y}''-2v'\bar{y}'+3v''\bar{y} \tag{c}$$

Из уравнения (a_1) вытекает, что функция $z(x)$ — вогнутая вниз функция (дуга графика функции $z(x)$ вогнута вниз).

Рассмотрим уравнение

$$vy''-2v'y'+3v''y=z(x), \tag{d}$$

где $z(x)$ — та же функция, что и в (c). Решение $\bar{y}(x)$ уравнения (a_1) очевидно, является решением уравнения (d).

Из вогнутости вниз функции $z(x)$ вытекает, что или $z(x)<0$, или $z(x)\geqslant m>0$ (m — постоянная) при $x>x_2$ ($\geqslant x_1$). Сначала покажем, что если $z(x)<0$, то уравнение (d) не имеет положительных решений, и потому, если $\bar{y}(x)>0$, то должно быть $z(x)\geqslant m>0$.

Действительно, сделав в уравнении (d) замену $y=u(x)\,.\,v(x)$, получим

$$u''+\frac{4vv''-2v'^2}{v^2}u=\frac{z}{v^2}. \tag{d_1}$$

Пусть $y(x)>0$, т. е. $u(x)>0$ (потому что $v(x)>0$), то из уравнения (d_1) вытекает, что $u''(x)<0$, так как $4vv''-2v'^2=\int_{x_0}^{x}Av^2\,dt>0$ и значит, $u'(x)$ убывает и, следовательно, либо $u'(x)<0$ при $x>x_3\geqslant x_2$, либо $u'(x)>0$.

Рассмотрим первый случай: $u''<0$, $u'<0$. Отсюда следует, что $u'(x)<-k<0$ и, проинтегрировав последнее неравенство, мы получим $u(x)\to-\infty$ при $x\to\infty$, что является противоречием. Остается рассмотреть случай $u''<0$, $u'>0$, $u>0$. Из последнего вытекает, что $u(x)>k_1>0$ при $x>x_3$, но после интегрирования уравнения (d_1) в (x_3, x) получим

$$u'(x) = u'(x_3) + \int_{x_3}^{x} \frac{z}{v^2}\,dt - \int_{x_3}^{x} \frac{\int_{x_0}^{t} Av^2\,d\tau}{v^2}\, u(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant u'(x_3) + \int_{x_3}^{x} \frac{z}{v^2}\,dt - k_1 \int_{x_3}^{x} \frac{\int_{x_0}^{t} Av^2\,d\tau}{v^2}\,dt \rightarrow -\infty$$

при $x \to \infty$, что противоречит предположению $u' > 0$.

Рассмотрим теперь уравнение (d), если $z(x) \geqslant m > 0$ при $x > x_2$. После введения подстановки $y = \dfrac{u}{v}$ в уравнение (d) имеем

$$(d_2) \qquad u'' - 4\frac{v'}{v}u' + \frac{2vv'' + 4v'^2}{v^2}u = z$$

Умножив уравнение (d_2) на x^{-1} и проинтегрировав его в (x_2, x) получим

$$(d_3) \qquad \frac{u'}{x} - \left(\frac{4}{x}\frac{v'}{v} - \frac{1}{x^2}\right)u + \int_{x_2}^{x} \left(\frac{2}{t^3} - \frac{4}{t^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{t}\frac{v''}{v}\right)u\,dt = k_2 + \int_{x_2}^{x} \frac{z}{t}\,dt,$$

где k_2- постоянная.

Докажем, что $\int^{\infty} \left(\dfrac{2}{t^3} - \dfrac{4}{t^2}\dfrac{v'}{v} + \dfrac{6}{t}\dfrac{v''}{v}\right)u\,dt = \infty$. Из того, что $\int^{\infty} \dfrac{z}{x}\,dx = \infty$. и $\left(\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{4}{x^2}\dfrac{v'}{v} + \dfrac{6}{x}\dfrac{v''}{v}\right) u > 0$ вытекает, что если бы $\int^{\infty} \left(\dfrac{2}{t^3} - \dfrac{4}{t^2}\dfrac{v'}{v} + \dfrac{6}{t}\dfrac{v''}{v}\right)u\,dt < \infty$, то функция $g(x) = \dfrac{u'}{x} - \left(\dfrac{4}{x}\dfrac{v'}{v} - \dfrac{1}{x^2}\right)u$ имеет предел равен $+\infty$ при $x \to \infty$. Из последнего вытекает, что $u = \left[\int_{x_3}^{x} \dfrac{t^2 g}{v^4}\,dt + k_3\right]\dfrac{v^4}{x}$, где $k_3 > 0$ (x_3 выбрано так, что при $x > x_3$ функция $g(x) > 0$)

и, значит $u(x) > k_3 \frac{v^4}{x} > k_3 x^7$. Отсюда следует, что $\int^{\infty}\left(\frac{2}{t^3} - \frac{4}{t^2}\frac{v'}{v} + \right.$ $\left. + \frac{6}{t}\frac{v''}{v}\right) u\, \mathrm{d}t = \infty$, так как $\int\limits_{x_3}^{x}\left(\frac{2}{t^3} - \frac{4}{t^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{t}\frac{v''}{v}\right) u\,\mathrm{d}t > \int\limits_{x_3}^{x} \frac{2}{t^3} u\,\mathrm{d}t >$ $> 2k_3 \int\limits_{x_3}^{x} t^4\,\mathrm{d}t \to \infty$ при $x \to \infty$. Итак, $\int^{\infty}\left(\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v}\right) u\,\mathrm{d}t = \infty$.

Интегрируя уравнение (a_1) в интервале $(x_3,\ x)$ мы получим $(vy'' -$ $- 2v'y' + 3v''y)' = k_4 - \int\limits_{x_3}^{x}\left[B - \frac{3}{4}\frac{(Av)'}{v}\right] vy\,\mathrm{d}t \leqslant k_4 - \int\limits_{x_3}^{x}\left(\frac{2}{t^3} - \frac{4}{t^2}\frac{v'}{v} + \right.$ $\left. + \frac{6}{t}\frac{v''}{v}\right) u\,\mathrm{d}t \to -\infty$ при $x \to \infty$.

Итак, предположение, что существует неколеблющееся решение $\bar{y}(x)$ уравнения (a_1) влечет за собой $v\bar{y}'' - 2v'\bar{y}' + 3v''\bar{y} = z(x) \geqslant m > 0$, а с другой стороны выходит, что $v\bar{y}'' - 2v'\bar{y}' + 3v''\bar{y} = z < -m_1 < 0$ при $x > x_4 \geqslant x_3$, значит, все решения уранения (a_1) и тем самым уравнения (a) колеблются.

Замечание. Очевидно, не необходимо мы должны брать решение уравнения (b) с двойным нулем в точке x_0. Если мы это делаем, так только ради простоты доказательства. За $v(x)$ можно взять и другие неколеблющее решение, но условие $\int^{\infty} \frac{\int\limits_{x_0}^{x} Av^2\,\mathrm{d}t}{v^2}\,\mathrm{d}x = \infty$ нужно заменить за условие

$$\int^{\infty} \frac{k + \int\limits_{x_0}^{x} Av^2 \mathrm{d}t}{v^2}\,\mathrm{d}x = \infty, \text{ где } k = 4v(x_0)v''(x_0) - 2v'^2(x_0).$$

Пример: Все решения уравнения $y^{\mathrm{IV}} + 4y' + B(x)y = 0$, где $B(x) \geqslant$ $\geqslant 3 + \frac{6}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ колеблются, так как $v = e^x$, $k = 2e^{x_0}$ и

$$\int\limits^{\infty} \frac{k + \int\limits_{x_0}^{x} Av^2\, dt}{v^2}\, dx = \int\limits^{\infty} 2\, dx = \infty.$$

Но если $B(x) = 3$, то наше уравнение имеет общее решение

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + (c_3 \sin \sqrt{2}x + c_4 \cos \sqrt{2}x)e^{x}.$$

Из доказательства теоремы 1 ясно, что ее можно обобщить следующим образом:

Теорема 1'. *Пусть* $A(x) > 0$ $\int\limits^{\infty} \frac{\int\limits_{x_0}^{x} Av^2\, dt}{v^2}\, dx = \infty$ и пусть $(0 <) B - \frac{3}{4}\frac{(Av)'}{v} \geqslant$ $\geqslant s'' + 4\frac{v'}{v}s' + 6\frac{v''}{v}s \geqslant 0,$

где $s(x)$ — произвольная положительная дважбы диффренцируемая в (x_0, ∞) функция обладающая свойствами

$$\int\limits^{\infty} \left(s'' + 4\frac{v'}{v}s' + 6\frac{v''}{v}s\right) sv^4\, dt = \infty, \qquad \int\limits^{\infty} zs\, dx = \infty,$$

причем непрерывная функция $z(x) > m > 0$ и $v(x)$ — решение уравнения (b) с двойным нулем в точке x_0, тогда все решение уранения (a) колеблются.

Специально, положив за $s = \frac{1}{x}$ мы получаем теорему 1.

Пример: Мы уже показали, что для колеблемости всех решений уравнения $y^{(IV)} + 4y' + B(x)y = 0$ достаточно, чтобы $B(x) \geqslant 3 + \frac{6}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}$. На основании теоремы 1' можно это улучшить. Взяв за $s = \frac{1}{x \ln x}$, мы видим, что для колеблемости нашего уравнения достаточно, чтобы

$$B(x) \geqslant 3 + \frac{2 + 3\ln x + 2\ln^2 x - 4x\ln x - 4x\ln^2 x + 6x^2\ln^2 x}{x^3 \ln^3 x} =$$

$$= 3 + \Phi(x).$$

Нетрудно проверить, что для достаточно большого x справедливо неравенство

$$\Phi < \frac{6}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}.$$

Теорема 2. *Пусть* $A(x) < 0$ *и* $v(x)$ — *неколеблющееся (положительное) решение уравнения (b), и пусть* $\int^{\infty} \frac{k + \int_{x_0}^{x} Av^2\,\mathrm{d}t}{v^2}\,\mathrm{d}x = \infty$, *где* $k = 4v(x_0)v''(x_0) - 2v'^2(x_0)$. Пусть, кроме того, $B(x) - \frac{3}{4}\frac{(Av)}{v} \geqslant M(x)$, *где* $M(x) = \max\limits_{x > x_0}\left\{\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v},\ S(x)\right\}$ причем $S(x)$ — некоторая непрерывная функция обладающая свойством

$$\int^{\infty} S(x)\,.\,\frac{v^4}{x}\left[\int_{x_3}^{x} \frac{t^2 g(t)}{v^4(t)}\,\mathrm{d}t + k_3\right]\mathrm{d}x = \infty,$$

где k_3, x_3 — *положительные постоянные, а непрерывная функция* $g(x)$ *обладает свойством* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\ln x} = m_1 > 0$ *или* $= +\infty$. *Постоянная* x_3 *выбрана так, что* $g(x) > 0$ *при* $x > x_3$. *Тогда все решения уравнения (a) колеблются.*

Доказательство: Так как $A(x) < 0$, то, на основании леммы 2, существует решение $v(x)$ уравнения (b) со свойством $v(x) > 0$, $v'(x) < 0$, $v''(x) > 0$, итак, $\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v} > 0$. Покажем, что $k + \int_{x_0}^{x} Av^2\,\mathrm{d}t > 0$ при $x > x_0$. Допустим противное. Пусть $F(\bar{x}) = k + \int_{x_0}^{\bar{x}} Av^2\,\mathrm{d}t \leqslant 0$, то $F(x) < -m^2 < 0$ при $x > \bar{x}$, так как $F'(x) < 0$, т. е. $F(x) = 4vv'' - 2v'^2 < -m^2 < 0$ (m — постоянная). Мы пришли к противоречию, так как $v' \to 0$ при $x \to \infty$, значит, для неколеблющего решения $v(x)$ уравнения (b) существует постоянная $k > 0$ так, что $k + \int_{x_0}^{x} Av^2\,\mathrm{d}t > 0$.

Метод доказательства теоремы 2 тот же самый, что и теоремы 1. Предположим, что существует неколеблющееся (положительное) решение $\bar{y}(x)$

уранения (a_1), то существует такая вогнутая вниз функция $z(x)$, что $\bar{y}(x)$ является решением уравнения

$$(d) \qquad vy'' - 2v'y' + 3v''y = z.$$

(Хотя коэффициенты уравнений (d) — (d_3) в доказательстве теоремы 2 другие чем в доказательстве теоремы 1, их обозначения оставим те же самые).

Доказательство того, что $z(x)$ не может быть отрицательна тоже самое что в теореме 1.

Пусть $z(x) > m > 0$, то после введения подстановки $y = uv$ в уравнение (d), умножения уравнения (d_2) на x^{-1} и интегрирования в (x_2, x) мы получим

$$(d_3) \qquad \frac{u'}{x} - \left(\frac{4}{x}\frac{v'}{v} - \frac{1}{x^2}\right)u + \int_{x_2}^{x}\left(\frac{2}{t^3} - \frac{4}{t^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v}\right)u\,\mathrm{d}t = k_2 + \int_{x_2}^{x}\frac{z}{t}\mathrm{d}t.$$

Если $\int^{\infty}\left(\frac{2}{t^3} - \frac{4}{t^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{t}\frac{v''}{v}\right)u\,\mathrm{d}t = \infty$, то доказательство теоремы 2 то же самое что теоремы 1.

Если же последний интеграл сходится, то функция $g(x) = \frac{u'}{x} - \left(\frac{4}{x}\frac{v'}{v} - \frac{1}{x^2}\right)u$ имеет предел равный ∞ при $x \to \infty$. Решив уравнение

$$u' - \left(4\frac{v'}{v} - \frac{1}{x}\right)u = x\,g(x),$$

где $g(x)$ — функция обладающая свойством $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\ln x} = \bar{k} > 0$ или $=\infty$, получим

$$u(x) = \left[\int_{x_3}^{x}\frac{t^2 g(t)}{v_4}\,\mathrm{d}t + k_3\right]\frac{v^4}{x},$$

где x_3, k_3 имеют тот же смысл что и в доказательстве теоремы 1.

После интегрирования уравнения (a_1) в интервале (x_3, x) мы имеем

$$(vy'' - 2v'y' + 3v''y)' = k_3 - \int_{x_0}^{x}\left[B - \frac{3}{4}\frac{(Av)'}{v}\right]yv\,\mathrm{d}t \leqslant k_4 - \int_{x_0}^{x}M(t)u\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant k_4 - \int_{x_3}^{x} S(t)\frac{v^4}{t}\left[\int_{x_3}^{t}\frac{\tau g(\tau)}{v^4(\tau)}\,\mathrm{d}\tau + k_3\right]\mathrm{d}t \to -\infty$$

при $x \to \infty$.

Итак, мы получили противоречие (как при доказательстве теоремы 1), значит, все решения уравнения (a_1), и подавно уравнения (a) колеблются.

Пример. Пусть $A(x) = -4$, то $v(x) = e^{-x}$. Постояния $k = 2e^{-x_0}$ и $\int\limits^{\infty}\frac{2e^{-x_0} + 2[e^{-2t}]^*}{e^{-2x}}x_0 - \mathrm{d}x = \infty$. Пусть $B(x) \geqslant 3 + M(x)$, где $M(x) = \max\limits_{x>x_0}\left\{\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v},\ S(x)\right\} = \max\limits_{x>x_0}\left\{\frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x},\ S(x)\right\}$. За функцию $S(x)$ достаточно взять $\frac{s}{x}$, $s > 6$, потому что $\int\limits^{\infty} S(x)\frac{v^4}{x}\left[\int\limits_{x_3}^{x}\frac{t^2g(t)}{v^4}\,\mathrm{d}t + k_3\right]\mathrm{d}x > \int\limits^{\infty}\left\{\frac{S}{xe^{4x}}\int\limits_{x_3}^{x} t^2e^{4t}g(t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x > s\int\limits^{\infty}\frac{\int\limits_{x_3}^{x} t^2e^{4x}g(t)\,\mathrm{d}t}{x^2e^{4x}}\,\mathrm{d}x = \infty.$

Итак, если $B(x) \geqslant 3 + \frac{s}{x}$, $s > 6$, то уравнение $y^{(IV)} - 4y' + B(x)y = 0$ колебательное (все решение колеблющиеся), но если $B = 3$, то уравнение $y^{IV} - 4y' + 3y = 0$ имеет общее решение вида $y = (c_1 + c_2x)e^{x} + (c_3 \sin\sqrt{2}x + c_4 \cos\sqrt{2}x)e^{-x}$.

Если в теоремах 1,1′ и 2 требуется, чтобы коэффициент $/A/$ был достаточно „большим”, то в следующих теоремах (3,3′, 4) мы потребуем, наоборот, чтобы коэффициент $/A/$ был достаточно малый.

Теорема 3. *Пусть* $A(x) > 0$, $\int\limits^{\infty} Ax^2\,\mathrm{d}x < \infty$, $B - \frac{3}{4}\frac{(Av)'}{v} \geqslant \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v}$, *где* $v(x)$ — *решение уравнения* (b) *с двойным нулем в точке* $x_0(v''(x_0) > 0)$, *тогда все решения уравнения* (a) *колеблются.*

Доказательство. Точно так, как в доказательстве теоремы 1 можно указать, что $\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v} > 0$ (если $A = 0$, то $v = kx^2$ и $\frac{2}{x^3} -$

$-\frac{4}{x^2}\frac{v'}{v}+\frac{6}{x}\frac{v''}{v}=\frac{6}{x^3}>0$. Предположение, что существует неколеблющееся решение $\bar{y}(x)>0$ уравнения (a_1) влечет за собой, что существует вогнутая вниз функция $z(x)$ такая, что $\bar{y}(x)$ является решением уравнения

$$(d)\qquad vy''-2v'y'+3v''y=z$$

Если $z(x)>m>0$ при $x>x_1$, то повторив те же рассуждения что в доказательстве теоремы 1, мы получим противоречие.

Если $z(x)<0$ при $x>x_1$, то после введения подстановки $y=uv$ в уравнение (d), имеем

$$(d_1)\qquad u''+\frac{\int\limits_{x_0}^{x}Av^2\,\mathrm{d}t}{v^2}u=\frac{z}{v^2}.$$

Покажем, что уравнение (d_1) не имеет неколеблющихся положительных решений и тем самым получим противоречие, потому что мы предполагаем, что $u(x)=\frac{\bar{y}(x)}{v(x)}>0$ является решением уравнения (d_1).

Действительно, предположив что $u>0$, мы получим $u''<0$ при $x>x_1$. Отсюда вытекает: $u'(x)>0$ ($u'(x)$-монотонна и если бы $u'(x)<0$, то $u'(x)<-k<0$ для достаточно больших x и после интегрирования получим $u\to-\infty$ при $x\to\infty$, но это в противоречии с предположением $u>0$) и из того, что $u>0$ вытекает $u>k_1>0$ при $x>x_2>x_1$ и $y=uv>\bar{k}_1x^2>0$ при $x>x_2$. После подставления последнего неравенства в уравнение (a_1) получим

$$(e)\qquad (vy''-2v'y'+3v''y)''=-(B-\frac{3}{4}\frac{(Av)'}{v}yv\leqslant-\left(B-\frac{3}{4}\frac{(Av)'}{v}\right)\bar{k}_1x^4$$

при $x>x_2$.

Из $\int\limits^{\infty}\left[B-\frac{3}{4}\frac{(Av)'}{v}\right]x^2dx=\infty$ вытекает, что $(vy''-2v'y'+3v''y)'\to-\infty$ и тем более $(vy''-2v'y'+3v''y)\to-\infty$ при $x\to\infty$.

Покажем теперь, что если $\int\limits^{\infty}\frac{z''}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\infty$, то тоже $\int\limits^{\infty}\frac{z}{x^4}\,\mathrm{d}x=-\infty$ где $z(x)=vy''-2v'y'+3v''y$.

Обозначив $z/x^4=s(x)$, мы получим

$$(f) \qquad z'' = s''x^4 + 8s'x^3 + 12sx^2 \leqslant -\left(B - \frac{3}{4}\frac{(Av)'}{v}\right)\bar{k}_1 x.$$

После умножения неравенства на x^{-2} и обозначения $-s = \bar{z}$ имеем

$$x^2\bar{z}'' + 8x\bar{z}' + 12\bar{z} \geqslant \left(B - \frac{3}{4}\frac{(Av)'}{v}\right)\bar{k}_1 x^2.$$

Интегрируя последнее неравенство в интервале (x_3, x), $x_3 \geqslant x_2$, получим

$$x^2\bar{z}' + 6x\bar{z} + 6\int\limits_{x_3}^{x} \bar{z}\,dt \geqslant k_2 + k_1\int\limits_{x_3}^{x}\left(B - \frac{3}{4}\frac{(Av)'}{v}\right)t^2\,dt.$$

Отсюда вытекает, что $\int\limits_{x_3}^{\infty} \bar{z}\,dt = \infty$. Действительно, функция $\bar{z}$ не меняет знака и, значит, или $\int\limits_{x_0}^{x} \bar{z}\,dt$ сходится, или расходится при $x \to \infty$. Допустим, что $\int\limits^{\infty} \bar{z}\,dt < \infty$ $(\bar{z} > 0)$, но тогда функция $\omega = x^2\bar{z}' + 6x\bar{z} \to \infty$, если $x \to \infty$. Решив уравнение $x^2\bar{z}' + 6x\bar{z} = \omega(x)$, мы получим

$$\bar{z}(x) = \left[\int\limits_{x_4}^{x} \frac{\omega}{t^2}t^6\,dt + k_3\right]\frac{1}{x^6}, \quad k_3 > 0$$

и $\omega(x) > 0$ при $x > x_4 \geqslant x_3$, откуда, как нетрудно проверить, вытекает $\lim\limits_{x\to\infty} x\bar{z} = \infty$ и $\bar{z} > k_4 x^{-1} > 0$ при $x > x_5 \geqslant x_4$, что противоречит $\int\limits^{\infty} \bar{z}dx < \infty$.

Значит $\int\limits^{x} \bar{z}\,dt = -\int\limits^{x} s\,dt = -\int\limits^{x} \frac{z}{t^4}\,dt \to \infty$ при $x \to \infty$.

Возвращаясь к уравнению (d_1) находим, что $u' \to -\infty$ и $u \to -\infty$ если $x \to \infty$, так как $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{z}{v^2}\,dt \to -\infty$ при $x \to \infty$, потому что существуют постоянные $m, n > 0$ так, что $mx^2 \leqslant v \leqslant nx^2$ и $\int\limits^{x} \frac{z}{v^2}\,dt \leqslant \frac{1}{n^2}\int\limits^{x} \frac{z}{t^4}\,dt \to -\infty$ при $x \to \infty$. Но это в противоречии с $u > 0$. Теорема 3 полностью доказана.

Теорема 3′. *Пусть* $A \geqslant 0$, $\int\limits^{\infty} Ax^2\,\mathrm{d}x < \infty$, $\int\limits^{\infty} x\dfrac{\int\limits_{x_0}^{x} Av^2\,\mathrm{d}t}{v^2}\,\mathrm{d}x < \infty$ *и* $B -$

$-\dfrac{3}{4}\dfrac{(Av)'}{v} > 0$, $\int\limits^{\infty}\left[B - \dfrac{3}{4}\dfrac{(Av)'}{v}\right]x^2\,\mathrm{d}x = \infty$, *где* $v(x)$*-решение уравнения* (b) *с двойным нулем в точке* $x_0(v''(x_0) > 0)$, *то все решения уравнения* (a) *колеблются.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что уравнение

$$(d_2) \qquad u'' - 4\frac{v'}{v}u' + \frac{2vv'' + 4v'^2}{v^2}u = z,$$

где $z(x) > m > 0$ и m — постоянная, обладает свойством: если существует неколеблющееся положительное решение $u(x)$ уравнения (d_2), то $u > k_1x^2 > 0$, где k_1 — постоянная.

Действительно, уравнение (d_2) эквивалентно с уравнением

$$(d_4) \qquad \begin{aligned}(u - k_1x^2)'' - 4\frac{v'}{v}(u - k_1x^2)' + \frac{2vv'' + 4v'^2}{v^2}(u - k_1x^2) &= \\ = z - k_1\left(2 - 8x\frac{v'}{v} + \frac{2vv'' + 4v'^2}{v^2}x^2\right)&.\end{aligned}$$

где $k_1 > 0$ выбрано так, что $f(x) = z - k_1\left(2 - 8x\dfrac{v'}{v} + \dfrac{2vv'' + 4v'^2}{v^2}x^2\right) > 0$.

Покажем сначала, что существует $k_1 > 0$ так, что $f(x) > 0$ начиная с некоторого x. Для этого достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to\infty} x\dfrac{v'}{v} = m_1$ и $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\dfrac{v''}{v} = m_2$, где m_1 и m_2 — постоянные.

Действительно,

$$\lim_{x\to\infty} x\frac{v'}{v} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(x - x_0) + x\int\limits_{x_0}^{x}(x - t)Av\,\mathrm{d}t}{\dfrac{(x - x_0)^2}{2} + \int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{(x - t)^2}{2}Av\,\mathrm{d}t} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x - x_0 + \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)Av\,dt + x\int\limits_{x_0}^{x} Av\,dt}{x - x_0 + \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)Av\,dt} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \dfrac{x_0}{x} + \int\limits_{x_0}^{x} Av\,dt + \dfrac{\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)Av\,dt}{x}}{1 - \dfrac{x_0}{x} + \dfrac{\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)Av\,dt}{x}} = m_1,$$

так как $\int\limits^{\infty} Av\,dt = m_3 \geqslant 0$. Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\dfrac{v''}{v} = m_2 \geqslant 0$. Значит, можно достичь того, что $f(x) > 0$ при $x > x_5 > x_0$ Заменой $u - k_1x^2 = v^2\omega$ уравнение (d_4) переходит в уравнение

$$(d_5) \qquad \omega'' + \frac{\int\limits_{x_0}^{x} Av\,dt}{v^2}\omega = \frac{f}{v^2} > 0$$

На основании леммы 3 решение уравнения (d_5) или $\omega > 0$, или $\omega < 0$ при $x > x_6 \geqslant x_5$.

Рассмотрим случай $\omega < 0$. Из уравнения (d_5) вытекает $\omega'' > 0$ и, значит, $\omega' < 0$ (так как $\omega' > 0$ ведет к противоречию с $\omega < 0$), а поскольку $\omega < 0$, то $\omega < -k < 0$, т. е. $u - k_1x^2 = v^2\omega \leqslant -kx^4$ и подавно $u \leqslant -kx^4 + k_1x^2 (k > 0,\ k_1 > 0)$ при $x > x_7 \geqslant x_6$, но это противоречит допущенному.

Итак, $u - k_1x^2 = \omega v^2 > 0$.

Теорему 3' можно считать полностью доказанной, потому что доказательство того, что уравнение

$$(d) \qquad vy'' - 2v'y' + 3v''y = z,$$

где $z < 0$, не имеет положительных решений то же самое, что и в теореме 3.

Следствие. Положив $A = 0$, мы получим известный результат доказанный В. А. Кондратьевым [1].

Замечание: При некоторых $A(x)$ (например, убывающих) из условия

$\int\limits^{\infty} Ax^2\, dx < \infty$ вытекает условие $\int\limits^{\infty} \frac{x\int\limits_{x_0}^{x} Av\, dt}{v^2}\, dx < \infty$, но вероятно это не верно в общем случае.

Теорема 4. Пусть $A(x) < 0$, $\int\limits^{\infty} /A/x^2\, dx < \infty$, $B - \frac{3}{4}\frac{(Av)'}{v} \geqslant \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v}$ и $\int\limits^{\infty}\left(B - \frac{3}{4}\frac{(Av)'}{v}\right) dx = \infty$, *где* $v(x)$*-неколеблющееся решение уравнения* (b) *обладающее свойством* $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = k\overset{\vee}{o}n\overset{\vee}{s}t > 0$, *тогда все решения уравнения* (a) *колеблются.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 и 3.

Метод доказательства теоремы 1 и 2 можно применить без всяких трудностей для доказательства ,,более общего'' уравнения четвертого порядка, вида

$$(1) \qquad y^{(IV)} + A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y \doteq 0,$$

где функции A'', B', C предполагаются непрерывными на интервале $< x_0, \infty)$, $x_0 > 0$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $A \leqslant 0, B - A' \geqslant 0$ *(не равна тождественно нулю ни в каком промежутке интервала* $< x_0, \infty)$*),* $\int\limits^{\infty} \frac{\int\limits_{x_0}^{x} (B - A')v^2\, dt}{v^2}\, dx = \infty$ *и* $C - \frac{(3v'' + Av)''}{v} \geqslant \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v} + \frac{A(x)}{x} > \frac{1}{x^4}$, *где* $v(x)$*-решение уравнения:*

$$(2) \qquad 4v''' + 2Av' + (2A' - B)v = 0$$

с начальными условиями в точке $x_0 : v(x_0) = v'(x_0) = 0$, $v''(x_0) = \frac{1}{4}$ *(вообще* $v''(x_0) > 0$*), тогда все решения уравнения (1) колеблются.*

Замечание 1. Ясно, что теорему 5 можно обобщить в том смысле как теорему 1, и тоже, мы же обязательно должны брать решение с двойным нулем в точке x_0.

Замечание 2. Условие $\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v} + \frac{A}{x} > \frac{1}{x^4}$ выполнено, например, если $A \leqslant 0$, $B \geqslant 0$ и $A' \geqq 0$.

Действительно,

$$\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v} + \frac{A}{x} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2x}\left(\frac{4v'' + 2Av}{v}\right) + \frac{4}{xv}\left(v'' - \frac{v'}{x}\right) = \frac{2}{x^3} +$$

$$+ \frac{1}{2x}\,\frac{1 + \int\limits_{x_0}^{x} Bv\,\mathrm{d}t}{v} + \frac{1}{xv}\left[1 - 2Av + \int\limits_{x_0}^{x} Bv\,\mathrm{d}t - \frac{x - x_0}{x} + \frac{\int\limits_{x_0}^{x} 2Av\,\mathrm{d}t}{x} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{x}\int\limits_{x_0}^{x}(x - t)Bv\,\mathrm{d}t\right] = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2x}\,\frac{1 + \int\limits_{x_0}^{x} Bv\,\mathrm{d}t}{v} + \frac{1}{xv}\left[\frac{x_0}{x} + \frac{\xi_1}{x}\int\limits_{x_0}^{x} Bv\,\mathrm{d}t -\right.$$

$$\left. - 2Av\frac{\xi_2}{x}\right] > \frac{2}{x^3}, \text{ где } x_0 < \xi_1, \xi_2 < x.$$

Доказательство. Решение $v(x)$ уравнения (2) с двойным нулем в точке $x_0 (v''(x_0) > 0)$ не обращается в нуль при $x > x_0$. Это вытекает из интегрального тождества $4vv'' - 2v'^2 + Av^2 = \int\limits_{x_0}^{x}(B - A')v^2\,\mathrm{d}t$ (его можно получить следующим образом: умножить (2) на v и проинтегрировать в (x_0, x)). Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 с тем различием, что нужно уравнения (a_1), (d), (d_1), (d_2), (d_3) заменить уравнениями

$$(\bar{a}_1) \qquad [vy'' - 2v'y' + (3v'' + Av)y]'' + [Cv - (3v'' + Av)'']y = 0,$$

$$(\bar{d}) \qquad vy'' - 2v'y' + (3v'' + Av)y = z(x),$$

$$(\bar{d}_1) \qquad u'' + \frac{\int\limits_{x_0}^{x}(B - A')v^2\,\mathrm{d}t}{v^2}u = \frac{z}{v^2},$$

$$(\bar{d}_2) \qquad u'' - 4\frac{v'}{v}u' + \frac{2vv'' + 4v'^2 + Av^2}{v^2}u = z$$

$$(\bar{d}_3) \qquad \frac{u'}{x} - \left(\frac{4}{x}\frac{v'}{v} - \frac{1}{x^2}\right)u + \int\limits_{x_2}^{x}\left(\frac{2}{t^3} - \frac{4}{t^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{t}\frac{v''}{v} + \frac{A}{t}\right)u\,\mathrm{d}t = k_2 + \int\limits_{x_2}^{x}\frac{z}{x}\,\mathrm{d}t.$$

Теорема 6. *Пусть выполненны следующие условия:* $B - A' \leqslant 0$ *(неравна тождественно нулю ни в каком промежутке интервала* $\langle x_0, \infty)$*),*

$$\int^{\infty} \frac{k + \int\limits_{x_0}^{x} (B - A')v^2\,\mathrm{d}t}{v^2}\,dx = \infty, \quad C - \frac{(3v'' + Av)''}{v} \geqslant M(x), \text{ где } M(x) =$$

$$= \max\left\{\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v} + \frac{A}{x},\ S(x)\right\},$$ *причом* v — *неколеблющееся решение уравнения (2) такое, что* $\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v} + \frac{A}{x} > 0$ *и* $S(x)$ — — *некоторая непрерывная на* (x_0, ∞) *функция, обладающая свойством*

$$\int^{\infty} S(x)\frac{v^4}{x}\left[\int\limits_{x_0}^{x} \frac{t^2 g(t)}{v^4}\,\mathrm{d}t + K_3\right]\mathrm{d}x = \infty, \text{ где } \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{\ln x} > 0$$ *и* k_3, x_3 — *положительные постоянные. Постояния* x_3 *выбрана так, что* $g(x) > 0$ *при* $x > x_3$, *тогда все решения уравнения (1) колеблются.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание. Возникает вопрос, при каких условиях выражение $\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\frac{v'}{v} + \frac{6}{x}\frac{v''}{v} + \frac{A}{x} > 0$? В работе [4] доказано существование положительного монотонно убывающего решения $v(x)$ уравнения (2), если выполнены следующие условия: $B - A' \leqslant 0$, $A \leqslant 0$.

В заключении автор приносит глубокую благодарность проф. Грегушу и доц. Шеде за ценные советы при подготовке настоящей статьи.

Литература

1. Кондратьев В. А., О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка, Труды Московского математического общества, т. 8, 1959 г.
2. A. Ghizetti: Un teorema sul corponatmento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari omogenee. Rendiconti di matematicae delle sul applicazioni (5), 8, (1949), 28—42.
3. M. Švec: On various properties of the solutions of third- and fourth order linear differential equations. Differential equations and their applications. Procedings of the conference held in Prague in September 1962.

4. M. Greguš: Über einige Eigenschaften der lösungen der Differentialgleichung $y''' + 2Ay' + (A' + b)y = 0$, A—0. Math. I, 11 (86) (1961).
Autorova adresa: Katedra matematickej analýzy PFUK, Bratislava, Šmeralova 2.
Do redakcie prišlo 10. decembra 1966.

O oscilatoričnosti riešení diferenciálnej rovnice

$$y^{(IV)} + A(x)y' + B(x)y = 0.$$

J. Mamrilla

Resumé

V práci sú vyšetrované oscilatorické vlastnosti riešení rovnice (a). Sú dané postačujúce podmienky, kedy všetky riešenia rovnice (a), resp. obecnejšej rovnice (1) sú oscilatorické.

Okrem toho sú dané niektoré príklady, objasňujúce nakoľko sú tieto výsledky dobré.

Über die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(IV)} + A(x)y' + B(x)y = 0.$$

J. Mamrilla

Zusammenfassung

In der Arbeit sind oszillatorische Eigenschaften der Lösungen der Gleichung (a) untersucht. Einige oszillatorische Bedingungen sind dafür gegeben, damit alle Lösungen der Gleichung (a), bzw. der allgemeineren Gleichung (1) oszillatorisch seien.

An einigen Beispielen wird es gezeigt, dass diese Resultate in gewissem Sinne die schärfsten sind.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN., MATHEMATICA XVIII—1967)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XVIII-1967

Einige Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung 3. Ordnung $y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$

L. MORAVSKÝ

Die Arbeit ist in zwei Teile geteilt.

Im ersten Teil wird untersucht unter welchen Bedingungen einige Lösungen der Differentialgleichung

$$(a) \qquad y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$$

oszillieren, oder zusammen mit ihrer ersten Ableitung für $x \to \infty$ zu Null konvergieren.

Im zweiten Teil wird über ein Kriterium der Oszillationsunfähigkeit der Lösung der Differentialgleichung (a) verhandelt.

I.

Es seien in der Differentialgleichung (a) $A'(x)$, $b(x)$, $p(x)$ stetige Funktionen $x \in (-\infty; \infty)$.

Die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) bezeichnen wir als nichtoszillatorisch in $I = (a; \infty)$ $a > -\infty$ wenn sie in I eine endliche Anzahl von Nullstellen hat. Die Differentialgleichung (a) bezeichnen wir als nichtoszillatorisch in I, wenn in diesem Intervall alle ihre Lösungen nichtoszillatorisch sind.

Es ist bekannt [6], dass für jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) die Integralidentität

$$(1^0)\quad \left[y(x)y''(x) - \frac{1}{2}y'^2(x) + A(x)y^2(x)\right]e^{\int\limits_a^x p\,dt} + \frac{1}{2}\int\limits_a^x py'^2 e^{\int\limits_a^t p\,du}\,dt + \\ + \int\limits_a^x (b - Ap)y^2 e^{\int\limits_a^t p\,du}\,dt = y(a)\,y''(a) - \frac{1}{2}y'^2(a) + A(a)\,y^2(a)$$

gilt.

Lemma 1. *Es seien $A'(x)$, $p(x) \geqslant 0$, $b(x) - A(x)\,p(x) \geqslant 0$ stetige Funktionen $x \in (-\infty;\ \infty)$, wobei wenigstens eine der Funktionen $b(x) - A(x)p(x)$, $p(x)$* in keinem Teilintervall identisch gleich Null ist. Wenn die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) im Punkte a die Bedingung

$$(1)\qquad y(a)y''(a) - \frac{1}{2}y'^2(a) = A(a)y^2(a) \leqslant 0,$$

erfüllt, gilt dann in jedem Punkte $x > a$

$$y(x)y''(x) - \frac{1}{2}y'^2(x) + A(x)y^2(x) < 0.$$

Der Beweis folgt aus der Integralidentität (1^0).

Folgerung 1. *$y(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft (1), dann hat die Lösung $y(x)$ rechts vom Punkte a keine doppelte Nullstelle.*

Lemma 2. *Es seien $A'(x)$, $A(x) \geqslant 0$, $p(x) \geqslant 0$, $b(x) - A(x)p(x) \geqslant 0$ stetige Funktionen $x \in I = (a;\ \infty)$, dabei ist wenigstens eine der Funktionen $p(x)$, $b(x) - A(x)p(x)$ nicht identisch gleich Null in keinem Teilintervall des Intervalls I. Dann teilen sich die Nullstellen der Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) und ihrer ersten Ableitung rechts vom Punkte a ab, in welchem gilt*

$$(1)\qquad k = y(a)y''(a) - \frac{1}{2}y'^2(a) + A(a)y^2(a) \leqslant 0.$$

Beweis. Das Lemma beweisen wir indirekt. Es seien zum Beispiel $a < x_1 < x_2$ zwei aufeinander folgende Nullstellen $y'(x)$ und dabei $y(x) \neq 0$ für $x \in \langle x_1;\ x_2\rangle$.

Aus der Beziehung

$$\left[\frac{y'}{y}\right]' = \frac{yy'' - y'^2}{y^2}$$

und aus der Integralidentität (1^0) folgt

$$\left[\frac{y'}{y}\right]' = -\frac{y'^2}{2y^2} - A + \frac{ke^{-\int_a^x p\,dt}}{y^2} - \frac{e^{-\int_a^x p\,dt}}{2y^2}\int_a^x py'^2 e^{\int_a^t p\,du}\,dt +$$

$$+\frac{e^{-\int_a^x p\,dt}}{y^2}\int_a^x (Ap-b)y^2 e^{\int_a^t p\,du}\,dt.$$

Nach der Integration der letzen Beziehung in $\langle x_1;\, x_2\rangle$ erhalten wir

$$0 = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{ke^{-\int_a^x p\,dt}}{y^2} - \frac{y'^2}{2y^2} - A - \frac{e^{-\int_a^x p\,dt}}{2y^2}\int_a^x py'^2 e^{\int_a^t p\,du}\,dt -\right.$$

$$\left.\frac{e^{-\int_a^x p\,dt}}{y^2}\int_a^x (b-Ap)y^2 e^{\int_a^t p\,du}\,dt\right]dx < 0$$

was ein Widerspruch ist.

Weiter zeigen wir, dass zwischen den nebeneinanderliegenden Nullstellen $a < x_1' < x_2'$ der Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) gerade eine Nullstelle $y'(x)$ existiert. Dem Rolleschen Satz gemäss ist es ersichtlich, dass wenigstens eine existiert. Falls zwei existieren sollten, dann ist zwischen ihnen die Nullstelle der Lösung $y(x)$, was ein Widerspruch ist.

Satz 1. *$A(x) \geqslant 0$, $A'(x) + b(x) \geqslant m_1 > 0$, $b(x) - A(x)p(x) \geqslant m_2 > 0$ seien stetige Funktionen $x \in I = (a;\ \infty)$ $a > -\infty$. Es sei* $\int_a^\infty p\,dx < \infty$ Dann oszilliert jede Lősung der Differentialgleichung (a), *welche im Punkte (a) (1) erfüllt auf $(a;\ \infty)$ oder konvergiert für $x \to \infty$ zusammen mit ihrer ersten Ableitung zu Null.*

Beweis. Es kann einer von folgenden Fällen entstehen:

a) die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) hat unendlich viele Nullstellen in $(a;\ \infty)$;

b) von einem bestimmten $\bar{x} > a$ ist $y(x) \neq 0$.

Im Falle b) erwägen wir der Einfachheit halber $y(x) > 0$. Dann ist entweder $y'(x) > 0$, oder $y'(x) < 0$, oder $y'(x)$ hat endlich viele Nullstellen. Es ist ersichtlich, dass wir den lezten Fall separat erwägen müssen.

Zeigen wir, dass der erste Fall des Falles b) nicht entstehen kann. Es sei

$y(x) > 0$ und $y'(x) < 0$ für $x > \bar{x} > a$. Dann aber existiert ein solches $\bar{x}_1 > \bar{x}$, dass für $x > \bar{x}_1$ $y(x) \geqslant c > 0$ gilt.
Aus der Differentialgleichung (a) folgt dann für $x > \bar{x}_1$

$$y'''(x) + p(x)y''(x) \leqslant -m < 0.$$

Aus der letzten Ungleichheit ist auch die Ungleichheit

$$y'''(x)e^{\int_{\bar{x}_1}^{x} p dt} + p(x)y''(x)e^{\int_{\bar{x}_1}^{x} p dt} \leqslant -m < 0$$

ersichtlich, d. h.

$$\left[y''(x)e^{\int_{\bar{x}_1}^{x} p dt} \right]' \leqslant -m.$$

Durch Integration der letzen Ungleichheit von x_1 bis $x > \bar{x}_1$ erhalten wir

$$y''(x)e^{\int_{\bar{x}_1}^{x} p dt} - y''(\bar{x}_1) < -m(x - \bar{x}_1) \tag{2}$$

Aus der Ungleichheit (2) folgt

$$y''(x) \leqslant -k_1 < 0$$

für $x > \bar{\bar{x}}$, wo $\bar{\bar{x}} > \bar{x}_1$ genug gross ist.
Durch Integration der letzten Ungleichheit von $\bar{\bar{x}}$ bis $x > \bar{\bar{x}}$ erhalten wir

$$y'(x) - y'(\bar{\bar{x}}) \leqslant -k_1(x - \bar{\bar{x}})$$

woraus folgt, dass $y'(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$ ist. Was ein Widerspruch damit ist, dass $y'(x) > 0$.

Ersichtlich kann $y'(x)$ in $(a; \infty)$ nicht unendlich viele Nullstellen haben. Wenn dies jedoch der Fall wäre, dann hätte gemäss Lemma 2 auch $y(x)$ unendlich viele Nullstellen, aber das ist im Widerspruch damit weil $y(x) > 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass von einem bestimmten $x > a$ ist $y'(x) < 0$, $y(x) > 0$, dann ist $y(x) \to 0$, $y'(x) \to 0$ für $x \to \infty$.
Wenn $y(x) > k_2 > 0$, dann

$$\int_a^\infty \left[\frac{1}{2} py'^2 + (b - Ap)y^2 e^{\int_a^t p du} \right] dt = \infty,$$

aber gemäss (1^0) würde gelten

$$y(x)y''(x) - \frac{1}{2} y'^2(x) \to -\infty.$$

Aus der letzen Beziehung aber folgt $y(x) \to -\infty$. Und dies ist ein Widerspruch. Also $y(x) \to 0$ für $x \to \infty$ und auch $y'(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Lemma 3. *Es sei $y(x)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (a) und $z(x)$ eine beliebige Lösung der Differentiagleichung*

$$z'''(x) - p(x)z''(x) = 0 \tag{c}$$

dann gilt für $a < x \in (-\infty; \infty)$ die Identität

$$\begin{aligned} y''(x)z''(x) = y''(a)z''(a) + 2A(a)y(a)z''(a) - 2A(x)y(x)z''(x) - \\ \int_a^x (b - A' - 2Ap)yz''\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3}$$

Den Beweis führen wir einfach derart durch, dass die Differentialgleichung (a) mit der Funktion $z''(x)$ multipliziert wird und integrieren Glied nach Glied von a bis x und berichtigen.

Satz 2. *Es sei $A(x) \geqslant 0, p(x) \geqslant 0, b(x) - A(x)p(x) \geqslant m > 0, b(x) - A'(x) - 2A(x)p(x) \geqslant n > 0$ seien stetige Funktionen $x \in I = (a; \infty)$, $a \in (-\infty; \infty)$ Und $\int_a^\infty p\,\mathrm{d}x$ konvergiere. Dann oszilliert jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a), welche im Punkte a der Bedingung (1) entspricht, auf $(a; \infty)$ oder konvergiert für $x \to \infty$ zusammen mit ihrer ersten Ableitung zu Null.*

Beweis: Es können dieselben Fälle entstehen wie im Satz 1. Wir zeigen, dass von einem gewissen $x > a$ kann $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$ entstehen, wenn dabei $y(x)$ im Punkte a die Eigenschaft (1) erfüllt. Setzen wir das Gegenteil voraus. Für $x > \bar{x} > a$ sei $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$. Dann gilt für $x > \bar{x}_1 > \bar{x}$, $y(x) \geqslant c > > 0$. Wenn wir auf die erwogene Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) die Identität (3) anwenden, wo $z(x)$ die Lösung der Differerentialgleichung (c) mit der Eigenschaft $z(\bar{x}_1) = 0, z'(\bar{x}_1) = 0, z''(\bar{x}_1) > 0$ für ein genügend grosses x ist, erhalten wir

$$y''(x) \leqslant -s < 0$$

weil, da wie es bekannt ist

$$z''(\bar{x}_1) = z''(\bar{x}_1)e^{\int_{\bar{x}_1}^{x} p\,\mathrm{d}t} > 0.$$

Aus der lezten Ungleichheit für $x \to \infty$ folgt $y'(x) \to -\infty$. Dies ist im Widerspruch mit der Voraussetzung.

In weiteren Fällen würden wir ähnlich vorgehen wie im Satz 1.

II.

Lemma 4. *Es sei $\omega(x) \in C_2(I)$, $I = (a; \infty)$; $-\infty < a < \infty$, $p(x) \in C_1(I)$ und für alle $x \in I$ gelte*

$$(4)\qquad A(x) = -\frac{1}{2}\left[\omega' + \frac{1}{3}\omega^2 + \frac{2}{3}pw,\right] \; b(x) = \frac{1}{6}\left[\omega'' + 2\omega\omega' + 2p'\omega + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}p\omega^2 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9}\omega^3\right].$$

Dann ist die Differentialgleichung (a) in I nicht-oszillatorisch.

Beweis. Wenn die Funktion $\omega(x) \in C_2(I)$, $p(x) \in C_1(I)$ und für die Koeffizienten der Differentialgleichung (a) gelten die Beziehungen (4) ist ersichtlich, dass

$$A'(x) = -\frac{1}{2}\left[\omega'' + \frac{2}{3}\omega\omega' + \frac{2}{3}p\omega' + \frac{2}{3}p'\omega\right],$$

$$A'(x) + b(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{9}\omega^3 - \omega'' + \frac{1}{3}p\omega^2 - p\omega'\right]$$

und die Differentialgleichung (a) hat die Form

$$(5)\qquad y''' + py'' - \left[\omega' + \frac{1}{3}\omega^2 + \frac{2}{3}p\omega\right]y' + \frac{1}{3}\left[\frac{2}{9}\omega^3 - \omega'' + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}p\omega^2 - p\omega'\right]y = 0.$$

Durch die Substitution

$$(6)\qquad y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\int_a^x \omega dt} z(x)$$

geht die Differentialgleichung (5) in die Form

$$(7)\qquad z'''(x) + [p(x) + \omega(x)]z''(x) = 0$$

über.

Mit Rücksicht auf die Substitution (6) haben die Differentialgleichungen (5) und (7) den gleichen oszillatorischen Charakter. Die Gleichung (7) ist in I ersichtlich nicht-oszillatorisch. Also ist auch die Gleichung (5) in I nicht-oszillatorisch.

Erwägen wir weiter die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$(8)\qquad v''(x) + \frac{2}{3}p(x)v'(x) + \frac{2}{3}A(x)v(x) = 0.$$

Es sei z. B.

$$p(x) = e^x, \quad b(x) = \frac{1 + 3e^x}{4}, \quad A(x) = -\frac{3 + 4e^x}{8}$$

dann gilt ersichtlich

$$p\,(x) = e^x, \quad A'(x) = -\frac{1}{2}e^x.$$

Die Funktion $v_0 = e^{\frac{x}{2}}$ ist dann die Lösung der Differentialgleichung (8) und es gilt

$$A' + 3b + (4A - 2p')\frac{v_0'}{v_0} + p\,\frac{v_0'''}{v_0} = 0.$$

Satz 3. *Es seien* $A'(x)$, $b(x)$, $p'(x)$ *stetige Funktionen* $x \in I = (a; \infty)$, $-\infty < < a + \infty$. *Es sei* v_0 *die Lösung der Differentialgleichung* (8) *mit der Eigenschaft* $v_0(x) \neq 0$, $x \in I$. *Weiter gelte für alle* $x \in I$

$$A' + 3b + (4A - 2p')\frac{v_0'}{v_0} + p\,\frac{v_0'''}{v_0} = 0. \tag{9}$$

Dann ist die Differentialgleichung (a) in I nicht-oszillatorisch.

Beweis. Es sei $v_0(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ die Lösung der Differentialgleichung (8) mit der Eigenschaft (9). Dann entspricht die Funktion

$$\omega(x) = 3\,\frac{v_0''(x)}{v_0(x)} \tag{10}$$

in I der Differentialgleichung

$$\omega' + \frac{1}{3}\omega^2 + \frac{2}{3}p\omega = -2A \tag{11}$$

und weil $A(x) \in C_1(I)$, $p(x) \in C_1(I)$, ist $\omega(x) \in C_2(I)$. Multiplizieren wir die Beziehung (9) mit dem Ausdruck $\frac{4}{3}v_0^2(x)$ und wir erhalten

$$\frac{4}{3}A'v_0^2 + 4bv_0^2 + \frac{16}{3}Av_0v_0' - \frac{8}{3}p'v_0v_0' + \frac{4}{3}pv_0v_0'' = 0,$$

woraus

$$4bv_0^2 = 2v_0\left(-\frac{2}{3}A'v_0 - \frac{2}{3}Av_0' - \frac{2}{3}pv_0'' - \frac{2}{3}p'v_0'\right) + 4p'v_0v_0' - 4Av_0v_0' \tag{12}$$

folgt.

Jedoch

$$v_0'' = -\frac{2}{3} p v_0' - \frac{2}{3} A v_0, v_0''' = -\frac{2}{3} p' v_0' - \frac{2}{3} p v_0'' - \frac{2}{3} A' v_0 - \frac{2}{3} A v_0.$$

Aus der Beziehung (8) erhalten wir dann

$$(13) \qquad 4bv_0^2 = 2v_0 v_0''' + 4p' v_0 v_0' - 4A v_0 v_0'$$

Wenn wir im Ausdruck $4Av_0v_0'$ anstatt

$$A v_0 = -\frac{3}{2} v_0'' - p v_0'$$

einsetzen was aus der Gleichung (8) folgt, erhalten wir aus der Beziehung (13)

$$(14) \qquad -4p' v_0 v_0' - 4p v_0'^2 + 4bv_0^2 = 2v_0 v_0''' + 6v_0' v_0''.$$

Wenn wir $U(x) = v_0^2(x) \neq 0$ bezeichnen, gilt ersichtlich

$$U'(x) = 2v_0 v_0', \; U'' = 2v_0'^2 + 2v_0 v_0'', \; U'''(x) = 6v_0' v_0'' + 2v_0 v_0'''.$$

Nach Einsetzen in (14) erhalten wir

$$(15) \qquad U'''(x) = -p(x)\frac{U'^2(x)}{U(x)} - 2p'(x)U'(x) + 4b(x)U(x).$$

Das heist aber, dass $U(x) = v_0^2(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (15) ist, und in I keine einzige Nullstelle hat. Ersichtlich gilt

$$U' = 2v_0 v_0', \frac{U'}{U} = \frac{2v_0'}{v_0}, \quad \frac{3}{2}\frac{U'}{U} = \frac{3v_0'}{v_0}$$

für alle $x \in J$. Daher erfüllt die Funktion

$$\frac{3U'(x)}{2U(x)} = \omega(x)$$

die Identität

$$(16) \qquad \omega'' + 2\omega\omega' + \frac{4}{9}\omega^3 + \frac{2}{3}p\omega^2 + 2p'\omega = 6b.$$

Davon überzeugen wir uns durch Einsetzung indem wir (15) in Erwägung ziehen. Es existiert also eine Funktion $\omega(x) \in C_2(I)$, welche gleichzeitig die Differentialgleichungen (11) und (16) erfüllt. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3 erfüllt und die Differentialgleichung (a) ist in I nicht-oszillatorisch, was zu beweisen war.

Literatur

[1] M. Greguš: *Über die asymptotischen Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Annali di Matematica pur ed applicata (IV), Vol. LXIII, pp 1—10, 1963*

[2] M. Greguš: *Über die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung. Wiss. Z. Univ. Halle Math.-Nath. XII/3, S. 265—286, März 1963*

[3] J. Mamrilla: *O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice* $y^{IV} + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$. *Acta. Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae, VIII, 11, mathem. 1963*

[4] J. Moravčík: *O jednom neoscilatorickom kritériu diferenciálnej rovnice* $y''' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$ (Rukopis).

[5] M. Švec: *Sur une propriété des intégrales de l'équation* $y^{(n)} + Q(x)y = 0$, $n = 3, 4$. *Čechoslov. matem. žurnál., 7 (82) 1957, Praha*

[6] L. Moravský: *Einige oszillatorische und asymptotische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung* $y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$. *Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Com.* (v tlači)

Autorova adresa: Katedra matematiky a Dg BF VŠT, Švermova 3, Košice.

Do redakcie prišlo 15. októbra 1966.

Некоторые особенности решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка

$$y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$$

Л. Моравски

Работа разбита на две части.

В первой части исследуются условия осцилляции некоторых решений дифференциального уравнения

$$(a) \quad y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$$

или конвертирования к нулю вместе со своей первой производной для $x \to \infty$.

В второй части рассматривается одна критерия неосцилирования решений дифференциального уравнения (a).

Niektoré vlastnosti riešení lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho radu

$$y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$$

Výťah

L. Moravský

Práca je rozdelená do dvoch častí.

V prvej časti sa vyšetruje za akých podmienok niektoré riešenia diferenciálnej rovnice

$$(a) \quad y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$$

oscilujú, alebo konvergujú k nule spolu so svojou prvou deriváciou pre $x \to \infty$.

V druhej časti sa pojednáva o jednom kritériu neoscilatoričnosti riešení diferenciálnej rovnice (a).

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN., MATHEMATICA XVIII — 1967)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XVIII-1967

Über die Eigenschaften der Menge der Quasimetriken

A. SETTARI, *Brno*

Unsere Arbeit befaßt sich mit einigen Eigenschaften der Menge der Quasimetriken $\mathscr{D}_0(P)$ des topologischen metrisierten Raumes P. Unter dem Begriff „Quasimetrik" versteht man die Klasse der auf bestimmte Art äquivalenten Metriken, welche im P gegebene Topologie induzieren. $\mathscr{D}_0(P)$ ist teilweise geordnet.

Man beweist folgende Behauptungen:

1. Sei entweder $P = \mathbf{E}_1$ mit natürlicher Topologie, oder existiere im P ein Häufungspunkt a und seine Umgebung U so, daß kein anderer Häufungspunkt aus P in U liegt. Dann existiert Untermenge $M \subset \mathscr{D}_0(P)$, welche eine Gegenkette ist und es gilt $card\ M = exp\ \aleph_0$.

2. $\mathscr{D}_0(P)$ ist ein Vereinigungshalbverband.

3. Sei P ein kompakter Raum. In jeden Raum $\bar{\varrho} \in \mathscr{D}_0(P)$ läßt sich eine Metrik einführen. Ist jetzt jede wachsende Cauchy — Folge $\{\varrho_i\} \in \bar{\varrho}$ im $\bar{\varrho}$ konvergent, so besitzt jede abzählbare Menge $M \subset \mathscr{D}_0(P)$ eine obere Grenze.

Wir werden übliche Symbolik benutzen, welche im Buche [2] erklärt ist. Sei P ein topologischer metrisierter Raum. Wir bezeichnen mit $\mathscr{D}(P)$ die Menge allen Metriken, welche im P gegebene Topologie induzieren. Zwischen Elementen von $\mathscr{D}(P)$ definieren wir nach [1] folgende Relationen:

Definition 1: *Sei $\varrho \in \mathscr{D}(P)$, $\sigma \in \mathscr{D}(P)$. Gilt es für einige $\alpha > 0$ ($\beta > 0$) und für alle $x, y \in P$*

$$\varrho(x, y) \geqslant \alpha\sigma(x, y) \quad (\sigma(x, y) \geqslant \beta\varrho(x, y),)$$

so schreiben wir $\varrho \geqslant \sigma$ ($\sigma \geqslant \varrho$).

Definition 2: *Wenn für $\varrho, \sigma \in \mathscr{D}(P)$ gleichzeitig $\varrho \geqslant \sigma$, $\sigma \geqslant \varrho$ gilt, nennen wir diese äquivalent und schreiben $\varrho = \sigma$.*

Bezeichne man jetzt $\mathscr{D}_0(P)$ die Menge aller Klassen der Metriken, welche in eben erklärtem Sinne äquivalent sind. Für die Elemente dieser Menge wurden in [1] der Name „Quasimetriken" eingeführt. Wir werden im $\mathscr{D}_0(P)$ die teilweise Ordnung, welche mit Definition 1 festgestellt ist, betrachten; dabei ist es nötig, beliebig erwählte Repräsentanten der gegebenen Klassen zu vergleichen. Nun werden wir einige Eigenschaften $\mathscr{D}_0(P)$, welche mit ihrer Ordnung zusammenhängen, studieren.

1.

Stellen wir jetzt die Frage, ob $\mathscr{D}_0(P)$ die Kette, d. h. total geordnete Menge ist. Zur negatieven Antwort ist es hinreichend, zwei unvergleichbare Metriken auszufinden; dann auch die Klassen, welche diese repräsentieren, werden unvergleichbar.

Hilfssatz 1: Zwei Metriken $\varrho, \sigma \in \mathscr{D}(P)$ sind unvergleichbar dann und nur dann, wenn im $P \times P$ die Folgen $\{a_i, b_i\}$, $\{c_i, d_i\}$ existieren, für welche

$$inf \left\{ \frac{\varrho(a_i, b_i)}{\sigma(a_i, b_i)} \right\} = 0, \quad inf \left\{ \frac{\sigma(c_i, d_i)}{\varrho(c_i, d_i)} \right\} = 0 \text{ gilt.}$$

Beweis: Dieser folgt unmittelbar aus der Definition 2, welche sich in der Form $\alpha \leqq \frac{\varrho(x, y)}{\sigma(x, y)} \leqq \beta$ schreiben läßt. Für unvergleichbare Metriken existiert weder α, noch β ,was schon die Behauptung nach sich zieht.

Bemerkung: Man kann leicht sehen, daß es möglich ist im Hilfsatz *lim* statt *inf* zu schreiben

1.1 **Satz 1:** *Sei $P = \mathbf{E}_1$ mit natürlicher Topologie. Dann existiert eine Untermenge $M \subset \mathscr{D}_0(\mathbf{E}_1)$, deren Mächtigkeit exp $\aleph_0$ ist, und welche zugleich eine Gegenkette, d. h. total ungeordnete Menge, ist.*

Beweis: Sei $a \in \mathbf{E}_1$ beliebig, aber fest. Für $x \in \mathbf{E}_1$ bezeichnen wir $X = x - a$. Wir setzen $\varrho_a(x, y) = |X^2 - Y^2|$, falls $sgn\ X = sgn\ Y$

$= X^2 + Y^2$, falls $sgn\ X \neq sgn\ Y$.

ϱ_a ist eine Metrik. Für $x \neq y$ ist $X \neq Y$, sodaß $\varrho_a(x, y) > 0$. Von den übrigen Axiomen ist es nötig nur die Dreiecksungleichung zu beglaubigen. Es genügt, diese Fälle zu betrachten:

1. $X, Y, Z > 0$. Dann $\varrho_a(x, y) + \varrho_a(y, z) = |X^2 - Y^2| + |Y^2 - Z^2| \geqslant \geqslant |X^2 - Z^2| = \varrho_a(x, z)$.

2. $X, Y > 0, Z < 0$. Dann $\varrho_a(x, y) + \varrho_a(y, z) = |X^2 - Y^2| + Y^2 + Z^2 \geqslant \geqslant X^2 + Z^2 = \varrho_a(x, z)$. Ferner ist es $\varrho_a(x, z) + \varrho_a(z, y) = X^2 + Y^2 + 2Z^2 = = |X^2 + Y^2| + 2Z^2 \geqslant |X^2 - Y^2| = \varrho_a(x, y)$.

ϱ_a induziert in $\mathbf{E}_1$ natürliche Topologie. Sei $x_0 \in \mathbf{E}_1$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Man kann leicht einsehen, daß die Menge aller x, für welche $\varrho_a(x, x_0) < \varepsilon$ gilt, ein offenes Intervall ist. Wir werden jetzt zeigen, daß für $a \neq b$ die Metriken ϱ_a, ϱ_b unvergleichbar sind. Wir nehmen $a < b$ an. Sei $\{x_n\}$ beliebige Folge, für deren Glieder stets $x_n > b$ ist und ferner $\{x_n\} \to b$. Dann ist:

$$\frac{\varrho_b(x_n, b)}{\varrho_a(x_n, b)} = \frac{(x_n - b)^2}{(x_n - a)^2 - (b - a)^2} = \frac{x_n - b}{(x_n - a) + (b - a)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varrho_b(x_n, b)}{\varrho_a(x_n, b)} = \frac{1}{2(b - a)} \lim_{n\to\infty} (x_n - b) = 0.$$

Ferner sei $\{y_n\} \to a$ die Folge, für deren Glieder $y_n < a$ gilt. Dann ist:

$$\frac{\varrho_a(y_n, a)}{\varrho_b(y_n, a)} = \frac{a - y_n}{(b - y_n) + (b - a)}, \lim_{n\to\infty} \frac{\varrho_a(y_n, a)}{\varrho_b(y_n, a)} = 0.$$

Nach Hilfssatz 1 sind also ϱ_a und ϱ_b unvergleichbar. Bezeichnen wir mit $\bar{\varrho}_a$ jene Klasse aus $\mathscr{D}_0(P)$, für welche $\varrho_a \in \bar{\varrho}_a$ ist und setzen wir $M = \{\bar{\varrho}_a\}$ $[a \in \mathbf{E}_1]$. M ist eine Gegenkette und *card* $M =$ *card* $\mathbf{E}_1 =$ *exp* $\aleph_0$.

1.2 **Hilfssatz 2:** Es existiert ein System der schlichten Folgen $\{a_n^i\}_{n=1}^{\infty}[i \in J]$ mit diesen Eigenschaften:

1. Für jede i ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n^i \subset (0, 1\rangle$ und $\lim_{n\to\infty} a_n^i = 0$.
2. Für $i \neq j$ gilt: $inf \left\{\frac{a_n^i}{a_n^j}\right\} = 0$, $inf \left\{\frac{a_n^j}{a_n^i}\right\} = 0$.
3. *card* $J =$ *exp* $\aleph_0$.

Beweis: Zuerst werden wir die Mengen K_1, K_2, welche wir weiter brauchen werden, konstruieren. Führen wir im $(0, \infty)$ eine Aquivalenzrelation ein: Die Punkte x, y sind äquivalent, wenn $x = r \,.\, y$ gilt, wo r beliebige rationale Zahl ist. Jede Klasse ist abzählbar und die Klassen sind paarweise durchschnittsfremd. Bezeichne man τ die Menge aller Klassen T. Es ist $\bigcup_{T \in \tau} T =$ $(0, \infty)$; aus *card* $T = \aleph_0$ folgt (wenn *card* $\cup T =$ *exp* $\aleph_0$) *card* $k_i =$ *exp* $\aleph_0$. Wählen wir jetzt $a \in (0, \infty)$, fest. Nehmen wir die Menge $K_1 = \{k_1^i\}$ $[i \in J]$ der Repräsentanten aller Klassen, mit Ausnahme der Klasse, welche a enthält. (Also ist keine k_1^i mit a äquivalent.) Wir setzen für $x \in K_1 : f(x) = a - x$. Offenbar gilt für $x, y \in K_1$ (wir betrachten die übliche Ordnung) $x > y => f(x) < f(y)$. Ferner ist kein x mit seinem $f(x)$ äquivalent. Sei nämlich $x = r \,.\, f(x)$, dann muß $\frac{f(x)}{x} = \frac{a - x}{x} = \frac{a}{x} - 1 = r$ sein, was aber ein Widerspruch wäre, da $\frac{a}{x}$ keine rationale Zahl ist. Bezeichne man endlich $K_2 = f(K_1) = \{f(k_1^i)\} = \{k_2^i\}. [i \in J]$.

Setzen wir jetzt für $i \in J : a_n^i = e^{-k^i_1 n}$ für n gerade
$= e^{-k^i_2 n}$ für n ungerade.

Das System dieser Folgen besitzt schon folgende Eigenschaften:

Jede Folge ist schlicht. Setzen wir voraus, daß für bestimmte n, m $e^{-k^i_1 n} = e^{-k^i_2 m}$ ist. Dann wird $\frac{k^i_1}{k^i_2} = \frac{m}{n} = r$ sein, was aber unmöglich ist, da $k^i_2 = f(k^i_1)$.

$\{a^i_n\}$ hat keinen von Null verschiedenen Häufungspunkt und es ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a^i_n\} \subset \langle 0, 1\rangle$.

Sei $i \neq j$. Dann $\frac{a^i_n}{a^j_n} = e^{-(k^i_1 - k^j_1)n}$ für n gerade und $\frac{a^i_n}{a^j_n} = e^{-(k^i_2 - k^j_2)n}$ für n ungerade. In Hinsicht auf geführte Zuordnung ist $sgn\ (k^i_1 - k^j_1) = -\ sgn\ (k^i_2 - k^j_2)$, woraus schon 3. folgt.

Schließlich ist offenbar $card\ J = exp\ \aleph_0$.

Hilfssatz 3: Sei (P, ϱ) ein metrischer Raum mit dieser Eigenschaft: Es existiert ein Häufungspunkt $a \in P$ und solche seine Umgebung U, daß im U kein weiterer Häufungspunkt von P liegt. Sei ferner σ die Metrik auf U, welche dort relative Topologie induziert und wenn U eine (ϱ, ε) — Umgebung ist, dann gelte für $x \in U$ auch $\sigma(a, x) < \varepsilon$. Wir setzen $\tau(x, y) =$
$= \varrho(x, y)$ für $x, y \in P - U$
$= \sigma(x, y)$ für $x, y \in U$
$= \varrho(x, a)$ für $x \in P - U, y \in U$.
Dann ist τ eine Metrik auf P, welche dort gegebene Topologie induziert.

Beweis: τ ist eine Metrik. Es ist offenbar $2\varepsilon \geqslant sup\{\varrho(x, y)\}\ [x, y \in U] \geqslant sup\{\sigma(x, y)\}\ [x, y \in U]$. Dann ist für $x, y \in U, z \in P - U$: $\tau(x, z) = \varrho(a, z) \geqslant \varepsilon$, $\tau(y, z) = \varrho(a, z) \geqslant \varepsilon$, $\tau(x, y) = \sigma(x, y) \leqslant 2\varepsilon$, woraus $\tau(x, y) + \tau(y, z) \geqslant \tau(x, z)$ folgt. Übriges ist trivial. τ induziert im P gegebene Topologie, denn U kann man immer so wählen, daß $U = \overline{U}$ ist. Ist $U \neq \overline{U}$, so existiert eine Umgebung V, für welche $\overline{V} \subset U$ ist, da P ein R — Raum ist (nach der Symbolik von [2]). Dann ist schon $\overline{V} = V$.

Satz 2: *Sei P ein metrisierter Raum mit der Eigenschaft aus Hilfssatz* 3. *Dann gilt: Im $\mathscr{D}_0(P)$ existiert eine Untermenge M mit Mächtigkeit $exp\ \aleph_0$, welche eine Gegenkette ist.*

Beweis: Sei $\varrho \in \mathscr{D}(P)$ eine beliebige Metrik auf P. Nur einfachheitshalber werden wir voraussetzen, daß $U = \overline{U}$ und U eine $(\varrho, 1)$ — Umgebung von a ist. Wir setzen

$$U = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \quad x \in A_n \langle=\rangle \frac{1}{n} \leqslant \varrho(a, x) < \frac{1}{n-1}$$

und definieren auf $U \times U$ mit Hilfe gewisser Funktion $f(n)[n \in N]$ die Funktion
$\sigma(x, y) = (n-1)\varrho(x, y)\ \inf_{i \neq n} \{|f(n) - f(i)|\}$ für $x, y \in A_n$
$= |f(n) - f(m)|$ für $x \in A_n$

$y \in A_m \ \sigma(x, a) = f(n)$ für $x \in A_n$

$$\sigma(x, x) = \sigma(a, a) = 0.$$

Jetzt setzen wir $f(n) = a_n \in \{a_n\}_{n=2}^{\infty}$, wo $\{a_n\} = \{a_n^i\}$ eine beliebige Folge aus Hilfsatz 2 ist. (Index i lassen wir aus.) Dann ist σ eine Metrik. Da Folge $\{a_n\}$ schlicht ist und $\{a_n\} \to 0$, gilt $\inf_{i \neq n}\{|a_n - a_i|\} > 0$, woraus $\sigma(x, y) > 0$ für $x \neq y$ folgt. Die Dreiecksungleichung ergibt sich z. B. für $x = a,\ y,\ z \in A_n$ folgendermaßen: $\varrho(y, z) < \dfrac{2}{n-1}$ und $\sigma(y, z) \leqslant 2\inf_{i \neq n} \{|a_n - a_i|\} < 2a_n = \sigma(x, y) + \sigma(x, z)$. Ähnlich in übrigen Fällen.

σ induziert in U gegebene Topologie, denn alle von a verschiedenen Punkte sind isoliert. Zu σ kann man also im Hilfssatz 3 beschriebene Metrik τ schaffen; die zu $\{a_n^i\}$ $[i \in J]$ angehörende Metrik wird jetzt τ^i bezeichnet. Wir behaupten, daß für $i \neq j$ τ^i und τ^j unvergleichbar sind. Dazu nehmen wir die Folge $\{x_n, a\}_{n=2}^{\infty}$, wo $x_n \in A_n$ ist. Dann erhalten wir $\dfrac{\tau^i(x_n, a)}{\tau^j(x_n, a)} = \dfrac{\sigma^i(x_n, a)}{\sigma^j(x_n, a)} = \dfrac{a_n^i}{a_n^j}$ und aus den Hilfssätzen 2 und 3 folgt, daß τ^i und τ^j unvergleichbar sind. Setzen wir jetzt $M = \{\bar{\tau}^i\}$ $[i \in J]$ (wo $\tau^i \in \bar{\tau}^i$ ist), wird der Beweis beendet.

2.

2.1 **Satz 3:** *$\mathscr{D}_0(P)$ ist ein Vereinigungshalbverband.*

Beweis: Wir sollen zeigen, daß zu jeden zwei Klassen $\bar{\varrho},\ \bar{\sigma} \in \mathscr{D}_0(P)$ eine Klasse $\bar{\tau} \in \mathscr{D}_0(P)$ existiert, $\bar{\tau} = \sup\,(\bar{\varrho}, \bar{\sigma})$. Wir wählen beliebige Metriken $\varrho \in \bar{\varrho}$, $\sigma \in \bar{\sigma}$ und setzen $\tau(x, y) = \max\,[\varrho(x, y), \sigma(x, y)]$. τ ist eine Metrik; man zeigt leicht, daß $\tau \in \mathscr{D}(P)$. Ist $\tau \in \bar{\tau}$, so bezeichnen wir $\bar{\nu}$ als andere Klasse, für welche $\bar{\nu} \geqslant \bar{\varrho}$, $\bar{\nu} \geqslant \bar{\sigma}$ ist. Wir erwählen $\nu \in \bar{\nu}$ beliebig. Aus $\nu \geqslant \varrho$, $\nu \geqslant \sigma$ folgt $\nu(x, y) \geqslant \alpha\varrho(x, y)$, $\nu(x, y) \geqslant \beta\sigma(x, y)$ bei passenden α, $\beta > 0$. Dann gilt offenbar auch $\nu(x, y) \geqslant \gamma \max\,[\varrho(x, y), \sigma(x, y)] = \gamma\tau(x, y)$, wo $\gamma = \min\,(\alpha, \beta)$ ist. Es gilt also $\nu \geqslant \tau$ und auch $\bar{\nu} \geqslant \bar{\tau}$.

2.2 Sei P ein kompakter Raum, $\bar{\varrho} \in \mathscr{D}_0(P)$. In Raum $\bar{\varrho}$ kann man folgendermaßen die Metrik r einführen: Für $\varrho_1, \varrho_2 \in \bar{\varrho}$ ist es $r(\varrho_1, \varrho_2) = \sup\,\{|\varrho_1(x, y) - \varrho_2(x, y)|\}\,[x, y \in P]$. Wegen Beschränkheit ϱ_1, ϱ_2 ist $r(\varrho_1, \varrho_2) < \infty$. Die Dreiecksungleichung folgt aus: $\sup\{|\varrho_1 - \varrho_2|\} + \sup\{|\varrho_2 - \varrho_3|\} = \sup\,\{|\varrho_1 - \varrho_2| + |\varrho_2 - \varrho_3|\} \geqslant \sup\,\{|\varrho_1 - \varrho_3|\}$. Ebenso läßt sich $\mathscr{D}(P)$ metrisieren. Es sind folgende drei Behauptungen richtig:

(1) $(\mathscr{D}(P), r)$ und $(\bar{\varrho}, r)$ sind keine vollständigen Räume.

Wir werden eine Folge $\{\varrho_i\}$ $[i \in \mathbf{N}]$, $\varrho_i(x, y) = \frac{1}{i}\varrho(x, y)$ betrachten. Bezeichnen wir $S = sup\ \{\varrho(x, y)\}$ $[x, y \in P]$, so gilt $r(\varrho_k), \varrho_e = \left|\frac{1}{k} - \frac{1}{l}\right| S$; also $\{\varrho_i\}$ ist eine Cauchy — Folge. Existiere jetzt die Metrik $\sigma = \operatorname{Lim}_{i\to\infty} \varrho_i$. Dann für $\varepsilon > 0$ und passende $k \in \mathbf{N}$, gilt $r(\sigma, \varrho_k) < \varepsilon$. Offenbar ist es $sup\ \{\sigma(x, y)\} \leqslant sup\ \{\varrho_i(x, y)\}$ für alle i. Dann ist $\varepsilon > sup \left\{\left|\frac{\varrho(x, y)}{k} - \sigma(x, y)\right|\right\} \geqslant$ $\geqslant \frac{S}{k} - sup\ \sigma(x, y) \geqslant 0$. Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir $sup\ \sigma(x, y) \leqslant 0$. Also ist σ keine Metrik.

(2) $(\bar{\varrho}, r)$ ist kein kompakter Raum.

Ist nämlich $\varrho \in \bar{\varrho}$, so ist auch $k\varrho \in \bar{\varrho}$ für beliebige $k > 0$. Dann ist $r(\varrho, k\varrho) =$ $= (k - 1)\ sup\ \{\varrho(x, y)\}$; also $(\bar{\varrho}\ r)$, kann nicht kompakt sein.

(3) Jede wachsende Cauchy — Folge $\{\varrho_i\} \subset \mathscr{D}(P)$ (im Sinne $\varrho_i(x, y) \leqslant$ $\leqslant \varrho_{i+1}(x, y)$ für alle $x, y \in P$) ist konvergent im $(\mathscr{D}(P), r)$.

Ist $\{\varrho_i\}$ eine Cauchy — Folge, so ist $\{\varrho_i(x, y)\}$ für jeden $(x, y) \in P \times P$ eine Cauchy — Folge im $\mathbf{E}_1$. Da $\mathbf{E}_1$ ein vollständiger Raum ist, existiert $\lim_{i\to\infty} \varrho_i(x, y) =$ $= \sigma(x, y)$. Offenbar ist σ eine Metrik. Existiert solche $k \in \mathbf{N}$, daß $\sigma(x, y) -$ $\sigma_k(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $\varepsilon > 0$ und alle $x, y \in P$. Dann gilt für $a \in P : \varrho_k(x, a) <$ $< \frac{\varepsilon}{2} => \sigma(x, a) < \varepsilon$. Anderseits ist $\sigma(x, a) < \varepsilon => \varrho_k(x, a) < \varepsilon$. Also σ induziert dieselbe Topologie, wie ϱ_k.

Satz 4: *Sei P ein kompakter Raum. Sei jede wachsende Cauchy — Folge $\{\varrho_i\}_{i=1}^{\infty}$ $[\varrho_i \in (\bar{\varrho}, r)]$ konvergent im $(\bar{\varrho}, r)$. Dann besitzt jede abzählbare Menge $M \subset \mathscr{D}_0(P)$ die obere Grenze.*

Beweis: Sei $M = \{\bar{\varrho}_i\}$ $[i \in \mathbf{N}]$. Man kann solche $\varrho_i \in \bar{\varrho}_i$ auswählen, daß $sup\ \{\varrho_i(x, y)\} = 1[x, y \in P]$ ist. Setzen wir $\tau(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\varrho_i(x, y)}{1 + \varrho_i(x, y)}$.

Wir werden zeigen, daß die Klasse, welche τ enthält, die gesuchte obere Grenze ist. Vor allem ist τ eine Metrik. Man sieht leicht, daß jede Funktion $\frac{\varrho_i(x, y)}{1 + \varrho_i(x, y)}$ eine Metrik ist und die Reihe für τ gleichmässig konvegiert. Benützen wir jetzt die Dreiecksungleichung, so erhalten wir

$$\tau(x, y) + \tau(y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \left(\frac{\varrho_i(x,y)}{1 + \varrho_i(x,y)} + \frac{\varrho_i(y,z)}{1 + \varrho_i(y,z)} \right) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\varrho_i(xz),}{1 + \varrho_i(x, z)} =$$

$$= \tau(x, z).$$

τ induziert in P dieselbe Topologie, wie z. B. ϱ_1. Da $\varrho_1(x, y) \leqslant 1$ ist, gilt $\tau(x, y) > \frac{1}{2} \frac{\varrho_1(x, y)}{1 + \varrho_1(x, y} \geqslant \frac{1}{4} \varrho_1(x, y)$. Dann gilt es für beliebigen Punkt $a \in P : \tau(a, x) < 4\varepsilon = \delta_1 = > \varrho_1(a, x) < \varepsilon$. Ferner müssen wir zeigen, daß δ_2 existiert, für welche $\varrho_1(a, x) < \tau(a, x) < \varepsilon$ ist. Man kann solche i_0 finden, daß $\sum_{i_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\varrho_i(x, y)}{1 + \varrho_i(x, y)} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x, y \in P$ ist. Ferner existieren solche δ_i daß $\varrho_1(a, x) < \delta_i = > \frac{1}{2^i} \frac{\varrho_i(a, x)}{1 + \varrho_i(a, x)} < \frac{\varepsilon}{2(i_0 - 1)}$, $i = 1, \ldots, i_0 - 1$, ist. Setzen wir jetzt $\delta_2 = \min \{\delta_i\}$, so gilt a fortiori $\varrho_1(a, x) < \delta_2 \Rightarrow$ $= > \tau(a, x) < (i_0 - 1) \frac{\varepsilon}{2(i_0 - 1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Es gilt offenbar $\tau \geqslant \bar{\varrho}_i$ für alle i. Nehmen wir jetzt an, daß für eine Klasse $\bar{\sigma} \in \mathscr{D}_0(P)$ $\bar{\sigma} \geqslant \bar{\varrho}_i$ gilt. Wir zeigen dann $\bar{\sigma} \geqslant \bar{\tau}$. Wählen wir die Metriken $\sigma_i \in \bar{\sigma}$, für welche $\sigma_i(x, y) \geqslant \varrho_i(x, y)$ $[x, y \in P]$ gilt, aus und setzen wir $\sigma(x, y) = = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\sigma_i(x, y)}{1 + \sigma_i(x, y)}$. σ ist offenbar eine Metrik. Ähnlicherweise wie oben kann man zeigen, daß $\sigma \in \mathscr{D}(P)$ ist. Bezeichnen wir jetzt noch $S_n = = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\sigma_i(x, y)}{1 + \sigma_i(x, y)}$, so erhalten wir leicht, daß jede S_n eine Metrik ist und gilt $S_n \in \mathscr{D}(P)$. Jede metrik $\frac{\sigma_i(x, y)}{1 + \sigma_i(x, y)}$ ist aus der Klasse $\bar{\sigma}$, mit Hilfe der transfiniten Induktion kann man bewiesen, daß auch $S_n \in \bar{\sigma}$ für jedes n gilt. Jetzt gilt $r(S_n, S_m) = sup \left\{ \sum_{i=n}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{\sigma_i(x, y)}{1 + \sigma_i(x, y)} \right\} <$ $< \frac{1}{2^{min(m,n)-1}}$, sodaß $\{S_n\}$ eine Cauchy — Folge ist und wegen $r(S_n, \sigma) = = \frac{1}{2^{n-1}}$ ist $\sigma = \lim_{n \to \infty} S_n$ Nach der Voraussetzung ist also $\sigma \in \bar{\sigma}$. Aus $\sigma_i(x, y) \geqslant$

$\geqslant \varrho_i(x, y)$ folgt jetzt $\dfrac{\sigma_i(x, y)}{1 + \sigma_i(x, y)} \geqslant \dfrac{\varrho_i(x, y)}{1 + \varrho_i(x, y)}$. Daraus ergibt sich schließlich $\sigma \geqslant \tau$ und also $\bar{\sigma} \geqslant \bar{\tau}$. Damit ist $\bar{\tau} = sup\ M$ bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] Miroslav Katětov: О квазиметрических свойствах Studia Mathematica, tom 21, 1963, séria specjalna, zeszyt 1 — konferencija analizu funkcij.

[2] Eduard Čech: Topologické prostory, NČAV 1959.

Autorova adresa: Brno 38, Hašková 1.

Do redakcie prišlo 15. mája 1966.

O vlastnostech množiny kvazimetrik

A. SETTARI, Brno

Práce se zabývá některými vlastnostmi množiny kvazimetrik $\mathscr{D}_0(P)$ topologického metrizovatelného prostoru P. Pojmem „kvazimetrika" se rozumí třída jistým způsobem ekvivalentních metrik, které indukují v P danou topologii. $\mathscr{D}_0(P)$ je částečně uspořádána.

Jsou dokazována následující tvrzení:

1. Nechť je buď $P = E_1$ s přirozenou topologií, anebo existuje hromadný bod $a \in P$, v jehož jistém okolí U neleží žádný další hromadný bod z P. Pak existuje množina $M \subset \mathscr{D}_0(P)$ mohutnosti $exp\ \aleph_0$, která je protiřetězec.

2. $\mathscr{D}_0(P)$ je horní polosvaz.

3. Nechť P je kompaktní prostor. Každý prostor $\varrho \in \mathscr{D}_0(P)$ lze metrizovat. Je-li nyní každá rostoucí Cauchyovská posloupnost $\{\varrho_i\} \subset \bar{\varrho}$ konvergentní v $\bar{\varrho}$, pak má každá spočetná množina $M \subset \mathscr{D}_0(P)$ supremum.

О свойствах множества квазиметрик

А. СЕТТАРИ, Брно

Следующая работа занимается некоторыми свойствами множества квазиметрик $\mathscr{D}_0(P)$ топологического метризуемого пространства P. Под означением „квазиметрика" разумеется класс метрик, определенным образом эквивалентных, индуцирующих заданную структуру на P. $\mathscr{D}_0(P)$ — частично упорядоченное.

Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть или $P = E_1$ с естественной топологией, или существует в P точка сгущения a и ее окрестность U так, что в U не находится уже никакая дальнейшая точка сгущения из P. Потом существует множество $M \subset \mathscr{D}_0(P)$ мощности $exp\ \aleph_0$, которое является совсем неупорядоченным.

2. $\mathscr{D}_0(P)$ — верхная полуструктура.

3. Пусть P — компактное пространство. В каждое пространство $\bar{\varrho} \in \mathscr{D}_0(P)$ возможн ввести метрику. Если теперь каждая возрастающая последовательность Коши $\{\varrho_i\} \subset$ н сходится в $\bar{\varrho}$, существует к каждому счетному множеству $M \subset \mathscr{D}_0(P)$ точная верхня граница.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN., MATHEMATICA XVIII — 1967)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XVIII-1967

Asociatívna operácia na triede všetkých sväzov

J. BADIDA, Košice

V práci [3] bol sformulovaný nasledujúci problém (pre grupy v [2]): nech $\mathfrak{M}$ je nejaká trieda sväzov. Chceme nájsť predpis („operáciu“), ktorý každej neprázdnej množine navzájom disjunktných sväzov $\Gamma = \{L_\nu\}$ $(\nu \in M)$, patriacich do triedy $\mathfrak{M}$, priraďuje sväz $\chi(\Gamma)$, patriaci do triedy $\mathfrak{M}$ tak, že platí:

a) pre každý sväz L_ν existuje v $\chi(\Gamma)$ podsväz P_ν, izomorfný so sväzom L_ν,

b) sväz $\chi(\Gamma)$ je vytvorený množinovým súčtom $\cup P_\nu$,

c) operácia χ je asociatívna, t. j. ak Γ je množinový súčet navzájom disjunktných množín $\Gamma_i (i \in N)$, potom

$$\chi(\Gamma) = \chi(\{\chi(\Gamma_i)\}).$$

Tento problém bol riešený na určitých triedach sväzov v prácach [3], [4], [5]; t. j. na triede sväzov, ktoré splňujú určité podmienky. V predloženej práci tento problém riešime pomerne jednoduchým spôsobom na triede všetkých sväzov.

Poznámka 1. Ľahko sa môžeme presvedčiť o tom, že nájdená operácia je tiež komutatívna. Vyplýva to z toho, že výsledok tejto operácie závisí len na množine Γ a nie na jej prípadnom usporiadaní.

V ďalšom texte budeme používať terminológiu ako v práci [3] a čiastočne ako v knihe [1]. Kardinálny súčin sväzov $A_\nu (\nu \in M)$ budeme označovať $\Pi^x A_\nu (\nu \in M)$ a voľný súčin $\Pi^* A_\nu (\nu \in M)$.

O množinách (sväzoch), o ktorých budeme hovoriť v tejto práci, budeme predpokladať, že môžu byť aj prázdne. Prázdnu množinu považujeme za podsväz každého sväzu.

Operácia η

Definícia 1. Nech S je ľubovoľný sväz, nech

$$S = A \oplus B, \tag{1}$$

pričom A, B sú podsväzy sväzu S. Budeme hovoriť, že ordinálny rozklad (1) má vlastnosť ($\mathscr{D}$), ak množina A (t. j. dolná trieda sväzu S) je distributívny podsväz sväzu S.

Keďže každý sväz S môžeme napísať v tvare $S = \emptyset \oplus S$, pričom tento ordinálny súčet sväzu S má vlastnosť ($\mathscr{D}$), potom z toho vyplýva, že každý sväz S sa dá aspoň jedným spôsobom rozložiť v ordinálny súčet svojich dvoch podsväzov tak, že je splnená vlastnosť ($\mathscr{D}$).

Lemma 1. *Nech S je ľubovoľný sväz. Nech* $\mathbf{S} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$, $\mathbf{S} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{D}$ *a nech oba tieto rozklady sväzu* $\mathbf{S}$ *majú vlastnosť* ($\mathscr{D}$). *Ak* $\mathbf{C} \not\subset \mathbf{A}$, *potom* $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$.

Tvrdenie je zrejmé (porov. dôkaz lemmy 2,1 v [4]).

Lemma 2. *Nech* $\mathbf{S}$ *je ľubovoľný sväz. Uvažujme všetky možné ordinálne rozklady, majúce vlastnosť* ($\mathscr{D}$), *sväzu* $\mathbf{S} : \mathbf{S} = \mathbf{A}^i \oplus \mathbf{B}^i$, *pričom* $\mathbf{i}$ *prebieha nejakú neprázdnu množinu indexov* N. *Označme* $\mathbf{A} = \cup \mathbf{A}^i$, $\mathbf{B} = \cap \mathbf{B}^i$. *Potom* $\mathbf{S} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ *a tento rozklad má vlastnosť* ($\mathscr{D}$).

Dôkaz. Ak $S = \emptyset$, potom tvrdenie lemmy je splnené triviálne. Nech $S \neq \emptyset$. Z lemmy 1 vyplýva, že množina $\{A^i\}$ sväzu S je usporiadaná (pomocou množinovej inklúzie) a teda $A = \cup A^i$ je tiež podsväzom sväzu S. Zrejme je tiež $B = \cap B^i$ podsväz v S. Pre každé $i \in N$ je $x \in A^i \cup B^i$. Ak pre každé $i \in N$ je $x \in B^i$, potom $x \in B$. Ak existuje $i \in N$ tak, že $x \notin B^i$, potom $x \in A^i$, teda $x \in A$. Ak pre každé $i \in N$ je $A^i = \emptyset$, potom tiež $A = \emptyset$ a teda $S = \emptyset \oplus B$ (t. j. každý prvok $x \in S$ patrí do B). Ak existuje $i \in N$ tak, že každý prvok $x \in S$ patrí do A^i, potom $x \in A$ a teda $B = \emptyset$, takže $S = A \oplus \emptyset$. Nech teraz existuje aspoň jeden ordinálny rozklad sväzu S (zrejme majúci vlastnosť ($\mathscr{D}$)), tak, že dolná a horná trieda sväzu S sú neprázdne množiny. Potom, ak $a \in A$, $b \in B$, existuje $i \in N$ tak, že $a \in A^i$. Keďže $b \in B$, je $b \in B^i$ (pre každé $i \in N$) a teda $a < b$. Tým sme dokázali, že $S = A \oplus B$.

Tvrdenie, že $A = \cup A^i$ je distributívny podsväz v S, vyplýva z toho, že množina $\{A^i\}$ je usporiadaná a že pre každé $i \in N$ podsväz A^i sväzu S je distributívny sväz.

Podľa lemmy 2 môžeme teda každému sväzu S priradiť sväzy, ktoré označme $S(X)$, $S(Y)$ tak, že

$$S = S(X) \oplus S(Y) \tag{2}$$

a tento rozklad (2) je „najväčším"rozkladom, majúcim vlastnosť ($\mathscr{D}$), v tom zmysle, že pre každý rozklad $S = A \oplus B$, ktorý má vlastnosť ($\mathscr{D}$), platí:

$$A \subset \mathrm{S}(X), \quad B \supset S(Y).$$

Teraz rozšírime definíciu kardinálneho súčinu sväzov (zavedenú v [6], § 2, def. 2,1) a voľného súčinu sväzov (zavedenú v [3], § 3, def. 3,2) nasledujúcim spôsobom:

Definícia 2. Nech $\{A_\nu\}$ ($\nu \in M$) je systém navzájom disjunktných sväzov, pričom pripúšťame možnosť, že $A_\nu = \emptyset$ alebo $M = \emptyset$.

1. Ak $M = \emptyset$, položíme $\Pi^x A_\nu = \Pi^* A_\nu = \emptyset$.

2. Nech $M \neq \emptyset$ a nech M' je množina všetkých tých $\nu \in M$, pre ktoré $A_\nu \neq \emptyset$;

a) ak $M' \neq \emptyset$, položíme $\Pi^* A_\nu (\nu \in M) = \Pi^* A_\mu (\mu \in M')$, $\Pi A^x{}_\nu (\nu \in M) = \Pi^x A_\mu (\mu \in M')$ (v tomto prípade výraz na pravej strane chápeme vo zmysle definície 3,2 v [3], respektíve vo zmysle definície 2,1 v [6]),

b) ak $M' = \emptyset$, potom položíme $\Pi^* A_\nu (\nu \in M) = \Pi^* A_\mu (\mu \in M') = \emptyset$, $\Pi^x A_\nu (\nu \in M) = \Pi^x A_\mu (\mu \in M') = \emptyset$.

Nech $\Gamma = \{A_\nu\}$ $(\nu \in M)$. Nech $\chi(\Gamma)$ je kardinálny respektíve voľný súčin sväzov A_ν. Nech pre množinu indexov M platí: $M = \cup M_i$ $(i \in N)$ a pre ľubovoľné $j, k \in N$ $(j \neq k)$ nech je $M_j \cap M_k = \emptyset$ $(M_j, M_k \neq \emptyset)$; $\Gamma = \cup \Gamma_i$, $\Gamma_i = \{A_\nu\}$ $(\nu \in M_i, i \in N)$. Ďalej označme M' množinu všetkých tých $\nu \in M$, pre ktoré $A_\nu \neq \emptyset$. Analogický význam nech má M'_i pre každé $i \in N$.

1. Ak $M = \emptyset$, potom tvrdenie, že operácia kardinálneho a voľného súčinu je asociatívna, je triviálne. Predpokladajme teda v ďalšom, že $M \neq \emptyset$. Ak pre každé $\nu \in M$ je $A_\nu \neq \emptyset$, potom z asociatívnosti kardinálneho respektíve voľného súčinu dostávame

$$\chi(\Gamma) \cong \chi(\{\chi(\Gamma_i)\}) \ (i \in N). \tag{K}$$

2. Ak pre každé $\nu \in M$ je $A_\nu = \emptyset$, potom podľa definície 2 je $\chi(\Gamma) = \emptyset$. Potom zrejme pre každé $i \in N$ je tiež $\chi(\Gamma_i) = \emptyset$ a teda aj $\chi(\{\chi(\Gamma_i)\}) = \emptyset$, z čoho vyplýva platnosť vzťahu (K).

3. Predpokladajme teraz, že pre niektoré (nie však pre všetky) $\nu \in M$ môže byť $A_\nu = \emptyset$. Potom platí:

$$\chi(\{A_\nu\}) \ (\nu \in M) = \chi(\{A_\mu\}) \ (\mu \in M'). \tag{K_1}$$

Analogicky, ak pre $i \in N$ je $M'_i \neq \emptyset$, potom

$$\chi(\{A_\nu\}) \ (\nu \in M_i) = \chi(\{A_\mu\}) \ (\mu \in M'_i) \tag{K_2}$$

Označme $\chi(\{A_\nu\}) \ (\nu \in M_i) = \Delta_i$, $\chi(\{A_\mu\}) \ (\mu \in M'_i) = \Delta'_i$ (pre každé $i \in N$). Keďže pre každé $i \in N$ je $\Delta_i = \Delta'_i$, potom

$$\chi(\{\Delta_i\}) = \chi(\{\Delta'_i\}) \ (i \in N). \tag{K_3}$$

Je zrejmé, že ak pre niektoré (nie však pre všetky) $i \in N$ je $\Delta_i = \emptyset$, potom tiež

$$\chi(\{\Delta_i\}) \ (i \in N) = \chi(\{\Delta_j\}) \ (j \in N'), \tag{K_4}$$

pričom N' je množina všetkých tých $i \in N$, pre ktoré $\Delta_i \neq \emptyset$.

Keďže podľa 1. je

$$\chi(\{A_\mu\}) \ (\mu \in M') \cong \chi(\{A_\mu\}) \ (\mu \in M'_j, \ j \in N'),$$

a platia vzťahy (K_1), (K_2), (K_3) a (K_4), potom z toho vyplýva, že vzťah (K) platí aj za predpokladu, ktorý je vyslovený na začiatku prípadu 3.

Tým sme teda preverili, že operácia χ je asociatívna aj v prípade 2. a 3. Nech $S_\nu = S_\nu(X) \oplus S_\nu(Y)$ je ordinálny rozklad sväzu S_ν, majúci vlastnosť $(\mathscr{D})$, pričom $S_\nu(X)$, $S_\nu(Y)$ majú význam ako $S(X)$, $S(Y)$ v ordinálnom rozklade (2) sväzu S.

Definícia 3. Nech $\Gamma = \{S_\nu\}$, $S_\nu = S_\nu(X) \oplus S_\nu(Y)$ $(\nu \in M)$, je systém navzájom disjunktných sväzov. Potom symbolom $\eta(\Gamma)$ budeme označovať sväz

$$\Pi^x S_\nu(X) \oplus \Pi^* S_\nu(Y) \ (\nu \in M).$$

Lemma 3. *Nech* $\{\mathrm{B}_\nu\}$ $(\nu \in \mathrm{M})$ *je systém navzájom disjunktných sväzov. Nech každý zo sväzov* B_ν *je nedistributívny. Potom sväz* $\mathrm{B} = \Pi^* \mathrm{B}_\nu$ $(\nu \in \mathrm{M})$ *je tiež nedistributívny.*

Tvrdenie je zrejmé.

Lemma 4. *Nech* Γ *má význam ako v definícii* 3. *Potom rozklad sväzu* $\eta(\Gamma)$ *v ordinálny súčet*

$$\eta(\Gamma) = \Pi^x \mathrm{S}_\nu(\mathrm{X}) \oplus \Pi^* \mathrm{S}_\nu(\mathrm{Y}) \ (\nu \in M) \tag{3}$$

má vlastnosť $(\mathscr{D})$.

Dôkaz. Podľa predpokladu pre každé $\nu \in M$ je $S_\nu(X)$ distributívny (alebo $\emptyset$). Potom tiež $\Pi^x S_\nu(X)$ je distributívny (alebo $\emptyset$), teda (3) má vlastnosť $(\mathscr{D})$.

Lemma 5. *Nech* $\mathbf{S} = \eta(\Gamma)$. *Nech* $\mathbf{S} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ *je rozklad sväzu* $\mathbf{S}$, *majúci vlastnosť* $(\mathscr{D})$. *Ak* $\Pi^x \mathrm{S}_\nu(\mathrm{X}) \subset \mathrm{A}$, *potom* $\Pi^x \mathrm{S}_\nu(\mathrm{X}) = \mathrm{A}$.

Dôkaz. Ak $S = \emptyset$, potom tvrdenie je zrejmé. Predpokladajme teda, že $S \neq \emptyset$. Ak sväz S je distributívny, potom $S_\nu(Y) = \emptyset$ pre každé $\nu \in M$, takže $\Pi^x S_\nu(X) = S$; zo vzťahu $\Pi^x S_\nu(X) \subset A$ potom vyplýva $\Pi^x S_\nu(X) = A$. Nech S je nedistributívny. Potom môžu nastať dve možnosti:

1. Ak pre každé $\nu \in M$ je $S_\nu(X) = \emptyset$, potom tiež $\Pi^x S_\nu(X) = \emptyset$ a teda $S = \Pi^* S_\nu(Y)$. Nech $A \neq \emptyset$. Potom $A \subset \Pi^* S_\nu(Y)$. Keďže $B \subset \Pi^* S_\nu(Y)$ (zrejme $B \neq \emptyset$, lebo v prípade $B = \emptyset$ by S bol distributívny sväz) a $A \cup B = S$, potom $\Pi^* S_\nu(Y) = A \oplus B$, čo je spor s tvrdením lemmy 2,5 v [4], a teda musí byť $A = \emptyset$, takže $\Pi^x S_\nu(X) = A$.

2. Nech teraz aspoň pre jedno $\nu \in M$j e rozklad $S_\nu = S_\nu(X) \oplus S_\nu(Y)$ taký, že $S_\nu(X)$, $S_\nu(Y) \neq \emptyset$. Potom zrejme $\Pi^x S_\nu(X)$, $\Pi^* S_\nu(Y) \neq \emptyset$. Podľa predpokladu $\Pi^x S_\nu(X) \subset A$. Označme $A - \Pi^x S_\nu(X) = E$. Ak $E = \emptyset$, potom $\Pi^x S_\nu(X) = A$. Predpokladajme teda, že $E \neq \emptyset$. Potom $E \subset \Pi^* S_\nu(Y)$, $E \cap B = \emptyset$, $E \cup B = \Pi^* S_\nu(Y)$ (zrejme E je podsväzom v $\Pi^* S_\nu(Y)$) a teda $\Pi^* S_\nu(Y) = E \oplus B$, čo je opäť spor s tvrdením v lemme 2,5 v práci [4], lebo $B \neq \emptyset$. Teda musí byť $E = \emptyset$ a teda $\Pi^x S_\nu(X) = A$, čím je tvrdenie lemmy 5 dokázané.

Lemma 6. *Nech* $\mathrm{S} = \eta(\Gamma)$. *Potom* $\mathrm{S(X)} = \Pi^x \mathrm{S}_\nu(\mathrm{X})$, $\mathrm{S(Y)}, = \Pi^* \mathrm{S}_\nu(\mathrm{Y})$.
Dôkaz vyplýva z lemmy 4 a z lemmy 5.

Veta 1. *Nech* $\Gamma = \{\mathrm{S}_\nu\}$, $\mathrm{S}_\nu = \mathrm{S}_\nu(\mathrm{X}) \oplus \mathrm{S}_\nu(\mathrm{Y})$ $(\nu \in \mathrm{M})$, *je systém navzájom disjunktných sväzov (majúcich vlastnosť* $(\mathscr{D})$*). Nech* $\eta(\Gamma) = \Pi^x \mathrm{S}_\nu(\mathrm{X}) \oplus \Pi^* \mathrm{S}_\nu(\mathrm{Y})$. *Potom platí:*

pre každý sväz S_ν *existuje v* $\eta(\Gamma)$ *podsväz* S'_ν *tak, že*

a) $\mathrm{S}'_\nu \cong \mathrm{S}_\nu$,

b) *ak množina indexov* M *je konečná, potom sväz* $\eta(\Gamma)$ *je vytvorený množinovým súčtom* $\cup\, \mathrm{S}'_\nu$.

Dôkaz. Nech $S_\nu = S_\nu(X) \oplus S_\nu(Y)$ (pre každé $\nu \in M$) je ľubovoľný sväz (majúci vlastnosť $(\mathscr{D})$). Nech $\eta(\Gamma) = \Pi^x S_\nu(X) \oplus \Pi^* S_\nu(Y)$ $(\nu \in M)$. Je zrejmé, že $\Pi^x S_\nu(X)$, $\Pi^* S_\nu(Y) \subset \eta(\Gamma)$ a prvky sväzu $\eta(\Gamma)$ sú triedy, ktoré označujeme $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$. Vyberme vo sväze $\Pi^x S_\nu(X)$ $(\Pi^* S_\nu(Y))$ tie prvky $\bar{x}$ $(\bar{y})$, ktoré obsahujú ako svoj prvok prvok $x \in S_\nu(X)$ $(y \in S_\nu(Y))$, pričom x (y) prebieha celú množinu $S_\nu(X)$ $(S_\nu(Y))$. Množinu takto vybratých prvkov označme $S'_\nu(X)$ $(S'_\nu(Y))$. Je známe, že $S'_\nu(X)$ $(S'_\nu(Y))$ je sväz (tiež podsväz v $\Pi^x S_\nu(X)$ $(\Pi^* S_\nu(Y)))$, izomorfný so sväzom $S_\nu(X)$ $(S_\nu(Y))$. Označme množinový súčet sväzov $S'_\nu(X)$, $S'_\nu(Y)$ symbolom S'_ν. Je zrejmé, že $S'_\nu = S'_\nu(X) \oplus S'_\nu(Y)$ je sväz, izomorfný so sväzom $S_\nu = S_\nu(X) \oplus S_\nu(Y)$ (pre každé $\nu \in M$), čím je tvrdenie a) dokázané.

Tvrdenie b) vyplýva z tvrdenia a), z konštrukcie sväzu $\eta(\Gamma)$ a z toho, že v prípade konečnej množiny M kardinálny súčin $\Pi^x S_\nu(X)$ je vytvorený množinovým súčtom $\cup\, S'_\nu(X)$.

Veta 2. *Nech* $\eta(\Gamma) = \Pi^x \mathrm{S}_\nu(\mathrm{X}) \oplus \Pi^* \mathrm{S}_\nu(\mathrm{Y})$ $(\nu \in \mathrm{M})$, *pričom* Γ *má význam ako v predchádzajúcom. Nech množina indexov* $\mathrm{M} = \cup\, \mathrm{M}_i$, *pričom* $\mathrm{i} \in \mathrm{N} \neq \emptyset$ *a pre ľubovoľné* $\mathrm{j}, \mathrm{k} \in \mathrm{N}$ *nech je* $\mathrm{M}_j \cap \mathrm{M}_k = \emptyset$ $(\mathrm{M}_j, \mathrm{M}_k \neq \emptyset)$; $\Gamma = \cup\, \Gamma_i$, $\Gamma_i = \{\mathrm{S}_\nu\}$ $(\nu \in \mathrm{M}_\nu)$. *Potom olperácia* η, *definovaná na triede všetkých sväzov, je asociatívna, t. j.*

$$\eta(\Gamma) \cong \eta(\{\eta(\Gamma_i)\}) \ (\mathrm{i} \in \mathrm{N}).$$

Dôkaz vyplýva z asociatívnosti kardinálneho a voľného súčinu.

Poznámka 2. Ľahko sa dá tiež dokázať, že sväz $\eta(\Gamma)$ sa dá získať, až na izomorfizmus, z voľného súčinu sväzov $S_\nu (\nu \in M)$ vhodnou kongruenciou (pozri napr. vetu 2, 3 v [5]).

Poznámka 3. Ak v definícii 1 v ordinálnom rozklade (1) sväzu S nahradíme požiadavku distributívnosti podsväzu A požiadavkou modulárnosti, potom prevedené úvahy ostávajú v platnosti.

Literatúra

[1] G. Birkhoff: Teorija struktur, Moskva 1952.
[2] A. G. Kuroš: Teorija grupp (1944 r.)

[3] J. Badida: Asociatívne operácie na niektorých triedach sväzov, Acta Fac. Nat. Univ. Comenian. Mathematica 7 (1963), 609—621.
[4] J. Badia: O asociatívnej operácii na určitej triede sväzov, Acta Fac. Nat. Univ. Comenian. Mathematica 9 (1964), 71—74.
[5] J. Badida: O asociatívnej operácii Δ na triede sväzov Ω_0, Acta Fac. Nat. Univ. Comenian. Mathematica. 10 (1966), 37-41
6] J. Badida: O asociatívnych operáciach na určitých triedach sväzov, Acta Fac. Nat. Univ. Comenian. Mathematica. 10 (1966), 31-48

Adresa autora: Katedra matematiky a deskriptívnej goemetrie BF VŠT, Košice, Švermova 3.
Do redakcie došlo: 15. 5. 1966.

Ассоциативная операция на классе всех структур

Я. БАДИДА, Кощице

Резюме

Настоящая работа занимается следующей проблемой: пусть $\mathfrak{M}$ является любым классом структур. Поставим задачу — определить, если существует правило („операция"), которое каждому множеству попарно непересекающихся структур $\Gamma = \{L\nu\}$ $(\nu \in M)$, принадлежащих к классу $\mathfrak{M}$, поставляет в соответствие структуру $\chi(\Gamma)$, принадлежашую в класс $\mathfrak{M}$ так, чтобы имело место:

а) для любого L_ν существует в $\chi(\Gamma)$ подструктура P_ν, изоморфная с L_ν,

б) структура $\chi(\Gamma)$ образована множественной суммой UP_ν,

в) операция χ — ассоциативная, т. е. если Γ — множественная сумма попарно не-) пересекающихся множеств Γ_i $(i \in И)$, потом

$$\chi(\Gamma) \cong \chi(\{\chi(\Gamma_i)\}),$$

г) операция χ не одинакова с кардинальным и свободным произведением.

В работе описывается операция с приведенными собственностями для класса всех стуктур.

Eine assoziative Operation in der Klasse aller Verbände

J. BADIDA, Košice

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt folgendes Problem:
Sei $\mathfrak{M}$ eine Verbandklasse. Wir wollen feststellen, ob eine Vorschrift („Operation" vorhanden ist, die jeder nichtleeren Menge gegenseitig disjunktiver Verbände $\Gamma = \{L_\nu\}(\nu \in M)$, $(L_\nu \cap L_\mu = \emptyset$, für $\nu, \mu \in M$, $\nu \neq \mu)$, die in die Klasse $\mathfrak{M}$ gehören, einen

in die Klasse $\mathfrak{M}$ gehörenden Verband $\chi(\Gamma)$ so zuordnet, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) für jedes L_ν gibt es in $\chi(\Gamma)$ einen Teilverband P_ν, der mit L_ν isomorph ist,

b) der Verband $\chi(\Gamma)$ ist durch die Menge $\cup P_\nu$ erzengt,

c) die Operation χ ist assotiativ, d. h. $\Gamma = \cup \Gamma_i$ $(i \in N)$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ für $i, j \in N$, $i \neq j$, so ist

$$\chi(\Gamma) \cong \chi(\{\chi(\Gamma_i)\})$$

d) die Operation χ ist sowie von Kardinalprodukt als auch vom freien Produkt verschieden.

In dieser Arbeit wird die Operation mit den angeführten Eigenschaften für die Klasse aller verbände beschrieben.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN., MATHEMATICA XVIII — 1967)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XVIII-1967

Charakteristika lineárnych zobrazovacích metód lineárnych priestorov

S. ZÁŇ, Žilina

I.

Úvodom všimnime si troch ukážok zobrazovacích metód.

a) Mongeova projekcia v E^3.

Každý bod je jednoznačne určený svojími dvoma priemetmi. Avšak nie každé dva body priemetní je možno považovať za priemety jedného bodu priestoru. Túto podmienku splňujú také dva body, ktorých spojnica je kolmá na os $x_{1,2}$ (resp. splývajúce).

b) Premietanie z jedného stredu S na nadrovinu R^{n-1} ($S \overline{\in} R^{n-1}$) v projektívnom priestore P^n. Každému bodu $X \in P^n$, $X \neq S$ je jednoznačne priradený priemet $\pi(X)$. Avšak priemetom $\pi(X)$ bod X nie je jednoznačne určený. Jeho stupeň volnosti je rovný jednej.

c) Bodu X v E^3 priradíme dva priemety $\pi(X)$ a $\nu(X)$ do roviny π a na priamku $n \perp \pi$. Premietame pritom z nevlastných útvarov $p_\infty \in \pi$ a $N_\infty \in n$. V tomto premietaní každému bodu X z E^3 sú jednoznačne priradené dva priemety $\pi(X)$ a $\nu(X)$ a naopak, každej dvojici bodov $Y \in \pi$; $Z \in n$ odpovedá jediný bod $X \in E^3$ tak, že $Y = \pi(X)$; $Z = \nu(X)$.

Zobrazovaciu metódu v ktorej je premietaný útvar určený priemetmi jednoznačne a naviac priemety sú viazané k nezávislými podmienkami ($k \geqslant 1$) nazveme *viazanou*, presnejšie k — *viazanou*. V príklade a) sa jedná o 1 — *viazanú* zobrazovaciu metódu.

Zobrazovaciu metódu v ktorej každému priemetu odpovedá h rozmerné množstvo útvarov ($h \geqslant 1$) nazveme metódou so stupňom *volnosti h*, krátko *h — volnou*. V príklade b) je zobrazovacia metóda so stupňom volnosti $h = 1$. Konečne zobrazovaciu metódu, kde každý útvar je jednoznačne určený svojími priemetmi a každá sústava priemetov jednoznačne určuje daný útvar nazveme metódou *ideálnou*. Pozri príklad c).

Vzniká prirodzená otázka charakterizovať všetky zobrazovacie metódy všetkých možných priestorov (afinných, projektívnych, hyperbolických, atď.) čo do stupňa určenosti ako bolo uvedené vyššie.

Zobrazovacou metódou rozumieme systém projekcií, t. j. usporiadaných štvoríc: *stred premietania, priemetňa, premietací útvar* a *premietaný útvar*.

V tejto práci je úplne vyriešená tá časť uvedenej úlohy v ktorej:

a) Pracovným priestorom je n-rozmerný projektívny priestor P^n ($n \geqslant 3$);

b) Všetky útvary vystupujúce v zobrazení sú lineárne;

c) Dimenzia zobrazovaného útvaru je menšia nanajvýš rovná $\frac{n-1}{2}$;

d) Zobrazovacia metóda je dvojčlenná.

Dohovor. Veľkými latinskými písmenami budeme značiť lineárne projektívne podpriestory pracovného n-rozmerného projektívneho priestoru P^n. Horným indexom v tomto prípade označujeme dimenziu tohoto priestoru.

II.

V tomto odstavci dokážeme tri vety, ktoré budú v ďalšom užívané ako pomocný aparát. Jedná sa o určenie dimenzie troch variet a to:

1. Variety $\mathfrak{L}^q_g \equiv \mathfrak{L}_q(G^g)$ všetkých q — rozmerných podpriestorov Q^q daného priestoru G^g.

2. Variety $\mathfrak{N}^{g,f}_q \equiv \mathfrak{N}_q(G^g, F^f)$ všetkých q-rozmerných priestorov Q^q pre ktoré $G^g \supset Q^q \supset F^f$;

3. variety $\mathfrak{M}^{g,f}_{q,k} \equiv \mathfrak{M}_{q,k}$ (G^g, F^f) všetkých q-rozmerných priestorov Q_q pre ktoré platí $Q^q \subset G^g$ a $\dim (Q^q \cap F^f) = k$.

Je zrejmé, že pre čísla f, g, q, k uvedených variet platia nerovnosti:

$$k \leqslant f \leqslant g; \quad q \leqslant g$$

a v dvoch prípadoch aj nerovnosť:

$$f \leqslant q.$$

Ďalej je zrejmé, že platí:

$$\mathfrak{L}_0(G^g) \equiv G^g; \quad \dim \mathfrak{L}^g_g = 0 \tag{1a}$$

$$\mathfrak{N}^{g,-1}_q \equiv \mathfrak{L}^g_q; \quad \dim \mathfrak{N}^{g,f}_f = 0 = \dim \mathfrak{N}^{g,f}_g \tag{1b}$$

$$\mathfrak{M}^{g,f}_{q,q} \equiv \mathfrak{N}^{g,f}_q \tag{1c}$$

Dosť často sa v našich úvahách objavia singularity, ktoré by značne skomplikovali výpočty. Našťastie množstvo singularít je vždy dosť malé a teda singulárne prípady nezasiahnu do dimenzie študovaných variet vôbec. Je totiž známe, že pre variety $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, ktoré sú dimenzií $a > b$ platí:

$$\dim (\mathfrak{A} \dot{-} \mathfrak{B}) = \dim \mathfrak{A}.$$

Singulárne prípady študovanej variety A vytvoria vo všetkých prípadoch, ktoré sa v našich úvahách vyskytnú, varietu A podobne ako sme hore uviedli.

Lema:

Nech D *a* H *sú dva dané priestory*; D + H *ich lineárny obal*; $D \cap H$ *ich prenik. Potom platí:*

$dim\ D + dim\ H = dim\ (D + H) + dim\ (D \cap H)$

Dôkaz: Pozri [1] str. 32.

K našim úvahám je potrebné dokázať niekoľko pomocných viet, ktoré v ďalšom budeme potrebovať.

Veta 1. *Nech je daný priestor* Q^q *a nech* $o \leqslant q \leqslant g$. *Potom pre množinu* $\mathfrak{L}_q(G^g)$ *všetkých* $Q^q \subset G^g$ *platí:*

$$dim\ \mathfrak{L}_q^g = (q + 1) \cdot (g - q) \tag{1}$$

Dôkaz: Indukciou vzhľadom ku q a g. Prípad $q = g$ je triviálny, preto v ďalšom predpokladáme $q < g$.

1. Nech $q = o$, potom $\mathfrak{L}_q^g \equiv \mathfrak{L}_0^g$ je g — rozmerný projektívny priestor a teda dim $\mathfrak{L}_0^g = g$, čo je v súhlase s (1).

2. Nech H^{g-1} je pevná nadrovina priestoru G^g. Aplikáciou lemy určíme, že dim $(Q^q \cap H^{g-1}) = q - 1$. Výnimku tvoria tie Q^q pre ktoré $Q^q \subset H^{g-1}$. Týchto je dim $\mathfrak{L}_q^{g-1}$ a preto ich možno zanedbať. Nech J^{g-q} je pevný priestor, pre ktorý platí $J + Q = G$ a dim $(J \cap Q) = \mathit{0}$ až na výnimočné prípady Q, ktoré sú zanedbateľné podobne ako bolo už raz ukázané. Každý priestor Q je jednoznačne určený priestormi $Q \cap J$ a $H \cap Q$ ako ich lineárny obal. Množina všetkých Q je izomorfná s množinou dvojíc $Q \cap J$ a $H \cap Q$ priestorov. Teda

$$\dim \mathfrak{L}_q^g = \dim J^{g-q} + \dim \mathfrak{L}_{q-1}^{g-1}$$

Použitím indukčného predpokladu dostaneme

$$\dim \mathfrak{L}_q^g = g - q + [(q - 1) + 1] \cdot [(g - 1) - (q - 1)]$$

po úprave

$$\dim \mathfrak{L}_q^g = (q + 1) \cdot (g - q).$$

V tomto dôkaze sme nerozoberali výnimočné prípady, ktoré pri určovaní dimenzií môžeme zanedbať. S touto výhradou treba uvážiť aj spomínaný izomorfizmus.

Veta 2. *Nech sú dané dva priestory* $F^f \subset G^g$ *a nech* $f \leqslant q \leqslant g$. *Potom pre množinu* $\mathfrak{N}_q(G^g, F^f)$ *všetkých* Q^q, *pre ktoré* $F^f \subset Q^q \subset G^g$ *platí:*

$$dim\ \mathfrak{N}_q^{g,f} = (g - q) \cdot (q - f) \tag{2}$$

Dôkaz: Triviálne prípady $f = q$ a $q = g$ vylúčime; teda v ďalšom $f < q < g$.

Nech H^h je doplnkovým priestorom ku F^f v G^g, t. j. $F \cap H = \emptyset$ a $F + H = G$. Aplikáciou lemy zistíme dim H^h: $h = g - (f + 1)$. Potom každý priestor Q^q je jednoznačne určený svojim podpriestorom $Q \cap H$ ako lineárny obal tohoto a pevného priestoru F^f. Ľahko zistíme, že $\dim Q \cap H = q - (f + 1)$. Teda

$$\dim \mathfrak{N}_q^{g,f} = \dim \mathfrak{L}_{q-(f+1)}(H^h) = \dim \mathfrak{L}_{q-(f+1)}^{g-(f+1)}.$$

Podľa vety (1) a po úprave dostávame

$$\dim \mathfrak{N}_q^{g,f} = (g - q) \,.\, (q - f).$$

Je zrejmé, že (1) je špeciálnym prípadom (2) pre $f = -1$.

Veta 3. *Nech je daný* F^f *a nech* $k \leqslant f$ *a* $k \leqslant q \leqslant g$. *Potom pre množinu* $\mathfrak{M}_{g,k}(G^g, F^f)$ *všetkých q rozmerných priestorov* G^g *pre ktoré platí dim* $(Q \cap F) = k$ *je*

$$\dim \mathfrak{M}_{g,k}(G^g, F^f) = (g - q) \,.\, (q - k) + (k + 1) \,.\, (f - k) \tag{3}$$

Dôkaz: Všetky priestory Q^q s priestorom F^f majú prenik $Q^q \cap F^f = K^k$. Potom dimenzia všetkých Q^q bude daná súčtom dimenzií všetkých Q^q v G^g, pričom $K^k \subset Q^q$ a všetkých $K^k \subset F^f$. Teda

$$\dim \mathfrak{M}_{q,k}(G^g, F^f) = \dim \mathfrak{N}_q^{g,k} + \dim \mathfrak{L}_k^f$$

Podľa viet (2) a (1) dostávame

$$\dim \mathfrak{M}_{q,k}(G^g, F^f) = (g - q) \,.\, (q - k) + (k + 1) \,.\, (f - k).$$

Singulárnymi priestormi v tomto prípade sú tie Q^q pre ktoré $\dim (Q \cap F) > k$, tieto totiž nenáležia do $\mathfrak{M}_{q,k}(G^g, F^f)$, avšak patria medzi $\mathfrak{N}_q^{g,k}$.

III.

V článku I. sme hovorili o zobrazovacej metóde ako o systéme projekcií. Teraz podrobnejšie popíšeme zobrazovacie metódy.

Každú zobrazovaciu metódu rozdelíme do jednotlivých projekcií, ktoré nazveme členmi zobrazovacej metódy. Členom zobrazovacej metódy (zobrazovací člen) nazveme usporiadanú dvojicu (S^s, A^a) disjunktných lineárnych priestorov, pre ktoré $s + a = n - 1$. Priestor S^s nazveme stredovým priestorom zobrazovacieho člena (stred premietania). Priestor A^a príslušným priemetným priestorom zobrazovacieho člena (priemetňa). Premietaný útvar X^k spolu so stredom premietania S^s je obalený lineárnym priestorom L^l, ktorý nazveme premietacím útvarom. Priestor $\alpha(X^k) \equiv A^a \cap L^l$ nazveme priemetom útvaru X^k zo stredu S^s do priemetne A^a.

Aby sme sa vyhli nepríjemným komplikáciam v dimenziách priestorov $\alpha(X^k)$ vylúčime z našich úvah tie premietané útvary X^k, ktoré nie sú disjunktné s S^s. To značí v ďalšom predpokladáme $s + k = l - 1$, čiže $\dim \alpha(X^k) = k$.

Poznamenávame, že voľba zobrazovacieho člena mala obe podmienky volené veľmi prirodzene. Keby totiž:

1. S^s a A^a neboli disjunktné, potom by $\alpha(X^k)$ nutne obsahoval ich prenik a bol by touto podmienkou zbytočne viazaný ($\Rightarrow s + a \leqslant n - 1$).

2. $s + a < n - 1$, potom by priestory S^s a $\alpha(X^k)$ neurčili L^l. Dokonca $\alpha(X^k)$ by mohla byť prázdnou množinou.

Z predpokladov položených na dimenzie vyplývajú relácie platné pre ľubovoľný člen zobrazovacej metódy:

$$s + a = n - 1 \tag{a}$$

$$s + k = l - 1 \tag{b}$$

$$k < n - s - 1 \tag{c}$$

$$k < a \tag{d}$$

$$2k + 1 \leqslant n \tag{e}$$

kde symboly s, a, n, l, k majú význam zavedený hore. Keby nerovnosť (c) neplatila, potom by $l = n$, t. j. priestor $L^l \equiv P^n$ a priemet by neudával žiadnu informáciu o polohe zobrazovaného člena. Nerovnosť (d) vyplýva okamžite z rozdielu rovníc (a), (b) a zrejmého vzťahu $l < n$.

IV.

Uvažujme zobrazovaciu metódu skladajúcu sa z dvoch členov (S^s, A^a) a (R^r, B^b). Okrem relácií (a), ..., (e) predošlého článku platných pre oba členy zobrazovania je nutné dodať nové podmienky.

Stredy premietania nech sú nezávislé, t. j.

$$S^s \cap R^r = \emptyset$$

t j.

$$s + r + 1 = t \tag{f}$$

kde $t = \dim T$ a $T = S^s + R^r$. Priestor T nazveme vrcholovým priestorom. Útvar X^k nazveme singulárnym ak $X^k \cap T \neq \emptyset$. Singulárne prípady úplne vylúčime z našich úvah.

Každému X^k sú jednoznačne priradené nesingulárne priemety $\alpha(X^k)$ a $\beta(X^k) \equiv M^m \cap B^b$, kde $M^m \equiv X^k + R^r$.

Nech $Y^k \subset A^a$ a $Z^k \subset B^b$ sú dva nesingulárne priestory dimenzie k. Je otázka, či

1. ľubovoľnej dvojici Y^k, Z^k je možno priradiť aspoň jedno X^k tak, aby platilo $\alpha(X^k) \equiv Y^k$, $\beta(X^k) \equiv Z^k$

2. existujú dvojice Y^k, Z^k, ktorým je možné priradiť jediné Y^k, tak aby platilo $\alpha(X^k) \equiv Y^k$, $B(X^k) \equiv Z^k$.

Premietanie je voľné ak splňuje prvú nie však druhú z uvedených podmienok. Premietanie je viazané ak splňuje druhú a nie prvú z uvedených podmienok. Premietanie, ktoré splňuje obidve podmienky súčasne je ideálne.

Nech teda Y^k, Z^k sú ľubovolné dané k-rozmerné priestory v A^a a B^b. Nech $L^l \equiv S^s + Y^k$ a $M^m \equiv R^r + Z^k$. Ak dim $(L^l \cap M^m) > k$ pre ľubovoľnú dvojicu Y^k, Z^k potom premietanie je voľné, pretože vždy je možné voliť $X^k \subset L^l \cap M^m$. Ak dim $(L^l \cap M^m) = k$, potom premietanie je ideálne, pretože $X^k \equiv L^l \cap M^m$ je určené jednoznačne. Konečne ak dim $(L^l \cap M^m) < k$, potom požadované X^k neexistuje. V tomto prípade je nutné voliť špeciálne priestory Y^k, Z^k a to tak, aby dim $(L^l \cap M^m) = k$. Takéto premietanie je viazané.

Veta 4. *Nech $k + r + s + 2 < n$, potom príslušná zobrazovacia metóda je viazaná, počet väzieb je rovný číslu $(k + 1)\varrho$, kde*

$$\varrho = n - (k + s + r + 2) \tag{g}$$

Dôkaz: Pre všeobecne volené Y^k a Z^k je podľa dôkazu vety (3)

$$\dim (L^l \cap M^m) = 2k + r + s + 2 - \dim (L^l + M^m)$$

Avšak dim $(L^l + M^m) \leqslant n$, preto podľa predpokladu je dim $(L^l \cap M^m) < k$ a premietanie je viazané. Hľadáme počet väzieb Y^k, Z^k sú volené tak, aby existovalo X^k, pre ktoré $\alpha(X^k) \equiv Y^k$ a $\beta(X^k) \equiv Z^k$. Potom pre priestor

$$S + R + X \equiv L + M \equiv S + R \perp Y + Z$$

platí

$$\dim (L + M) = k + s + r + 2.$$

Ak naopak sú Y, Z volené tak, aby dim $(L + M) = k + s + r + 2$, potom podľa lemy platí:

$$\dim (L \cap M) = \dim L + \dim M - \dim (L + M)$$

t. j.

$$\dim (L \cap M) = (k + s + 1) + (k + r + 1) - (k + s + r + 2) = k,$$

teda existuje $X^k \equiv l^1 \cap M^m$.

Ďalej uvažujeme priestor $W = Y + Z$. Vo všeobecnosti je možné voliť Y, Z nezávisle, t. j. dim $W = 2k + 1$. Pretože dim $(W \cap T) = \dim W + \dim T - \dim (W + T) = (2k + 1) + (s + r + 1) - \dim (L + M)$.

Teda nutná a postačujúca podmienka preto, aby Y^k a Z^k vyhovovali horeuvedeným podmienkam je

$$\dim (L + M) = k + s + r + 2$$

čiže

$$\dim(W \cap T) = (2k + 1) + (s + r + 1) - (k + s + r + 2) = k.$$

Ináč povedané priestory Y^k a Z^k je možné považovať za priemety útvaru X^k. Priestor X^k je priestormi Y^k a Z^k určený jednoznačne práve keď

$$\dim[(Y + Z) \cap T] = k \tag{h}$$

K úplnému dôkazu stačí nájsť počet podmienok kladených na priestory Y a Z, ktoré zaručia splnenie rovnice (h). Uvažujme tri priestory: W, T a P^n, ktorých dimenzie sú v danom poradí $2k + 1$, $s + r + 1$, n.

Rovnica (h) je splnená pre množinu priestorov $W \equiv Y + Z$, ktorých dimenzia je určená vzťahom

$$\dim \mathfrak{M}_{2k+1,k}(P^n, T^{r+s+1}) = (k + 1) \, . \, (n + s + r - 3k)$$

Množina všetkých možných W neviazaných podmienkou (h) je $\mathfrak{L}_{2k+1}(P^n)$, podľa vety (1) je

$$\dim \mathfrak{L}^n_{2k+1} = (2k + 2) \, . \, (n - 2k - 1) = (k + 1) \, . \, (2n - 4k - 2)$$

Zrejme $\mathfrak{M}_{2k+1,k}(P^n, T^{r+s+1}) \subset \mathfrak{L}^n_{2k+1}$ a počet podmienok určujúcich inklúziu $W \in \mathfrak{M}_{2k+1,k}(P^n, T^{r+s+1})$ je daný číslom

$$\dim \mathfrak{L}^n_{2k+1} - \dim \mathfrak{M}_{2k+1,k}(P^n, T^{r+s+1}) = (k + 1)\varrho$$

čo sme chceli dokázať.

Veta 5. *Nech $k + s + r + 2 > n$, potom príslušná zobrazovacia metóda je voľná, stupeň voľnosti je rovný číslu $(k + 1)\sigma$, kde*

$$\sigma = k + s + r + 2 - n \tag{i}$$

Dôkaz: Aplikáciou lemy na priestory L^e a M^m a užitím rovnice (b) vypočítame

$$\begin{aligned} \dim(L^l \cap M^m) &= \dim L^l + \dim M^m - \dim(L^l + M^m) = \\ &= l + m - n = 2k + r + s + 2 - n = \\ &= k + \sigma > k. \end{aligned}$$

Keby totiž $\dim(L^l + M^m) < n$, potom by priestory neboli volené všeobecne. Množina všetkých X^k v $L^l \cap M^m$ bola v článku II. označená $\mathfrak{L}_k(L^l \cap M^m)$ a podľa vety (1) je $\dim \mathfrak{L}_k(L^l \cap M^m) = (k + 1) \, . \, [(k + \sigma) - k)] = (k + 1)\sigma$, čo sme chceli dokázať.

Veta 6. *Nech je daná dvojčlenná zobrazovacia metóda parametrami k, r, s v P^n. Označme*

$$\varkappa = n - (k + r + s + 2) \tag{j}$$

Potom zobrazovacia metóda je

a) $\varkappa.(k+1)$ — *viazaná*, práve keď $\varkappa > 0$
b) $|\varkappa|.(k+1)$ — *voľná*, práve keď $\varkappa < 0$
c) *ideálna*, keď $\varkappa = 0$

Dôkaz: Tvrdenia a), b) sú totožné s tvrdeniami viet 4 a 5. Posledné tvrdenie vyplýva z toho, že prípady a), b) a c) sa vzájomne vylučujú.

Definícia: Číslo $\varkappa$ zavedené vzťahom (j) nazveme *charakteristikou* zobrazovacej metódy dvojčlennej.

V.

Dôsledky:

Ako dôsledok tejto práce uvedieme ideálne zobrazovanie v P^3, P^4 a P^5. Nech opäť k je dimenzia zobrazovaného útvaru; r a s dimenzie stredov zobrazenia; a, b dimenzie príslušných priemetní. Výsledky zhrnieme do tabuľky.

Zobrazovanie v P^3.

$$n = 3, \text{ t. j. } k + r + s + 2 = 3 \text{ čiže } k + s + r = 1.$$

k	s	r	a	b
0	1	0	1	2

Zobrazovanie v P^4.

k	s	r	a	b
0	2	0	1	3
0	1	1	2	2
1	1	0	2	3

Zobrazovanie v P^5

k	s	r	a	b
0	3	0	1	4
0	2	1	2	3
1	2	0	2	4
1	1	1	3	3
2	1	0	3	4

Bolo by zaujímavé venovať zvýšenú pozornosť tým zobrazovacím metódam, pre ktoré $r = s$. Navrhujeme im dať názov homogenné.

Z prvej tabuľky je zrejmé, že žiadna z bežne užívaných metód v trojroz-

mernom priestore nie je ideálnou. Nechceme tvrdiť, že jediná ideálna zobrazovacia metóda v tomto priestore je pre prax najvhodnejšia. Hľadisko, z ktorého sme slovo „ideálne" volili, nerešpektovalo vôbec otázku názornosti, ale kládlo hlavný dôraz na optimalizáciu abstraktných úvah, preto ideálne zobrazenia nadobúdajú svoj pravý význam až vo viacrozmerných priestoroch, kde o názornosti ťažko hovoriť. Tak napríklad v diferenciálnej geometrii sa veľmi študuje priamková geometria priestoru P^3 pomocou jej Kleinovho obrazu v P^5. Hoci je početne táto geometria značne spracovaná o syntetickom zobrazovaní nie sú doteraz (podľa autorovho vedomia) žiadne práce. Keby sme sa podujali na naznačenú úlohu, potom by podľa nášho názoru bolo vhodné voliť niektorú z dvoch ideálnych zobrazovacích metód, pravdepodobne homogennú.

Literatúra:

[1] W. Burau: Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie, DVW BERLÍN 1961

[2] O. A. Volberg: Deskriptívní geometrie, ČSAV PRAHA 1953

[3] M. Harant: Analytická geom. II., SPN BRATISLAVA 1957

Autorova adresa: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie VŠD, Žilina, ul. Marxa—Engelsa 25

Do redakcie prišlo 20. februára 1966.

Характеристика линейных отобразительных методов линейных пространств

С. ЗАНЬ

Выводы

В n-мерном проективном пространстве P^n рассматриваются отобразительные методы, в которых:

1. Изображаемой фигурой является κ-мерное линейное пространство X^k;

2. Изобразение состоит из двух проекций;

3. Проекция образованна парой (S^s; A^a) дополнительных пространств и любое пространство X^k проектируется из центра S^s, на пространство A^a.

4. Если обозначить $l = \dim (S^s + X^k)$ то в силе остаются релации (а), . . . , (е) из обзаца III.

Изобразительный метод назовем:

а) Условным если фигура определена проекциями однозначно но эти проекции зависият от каких-то условий.

б) Свободным если любимыми проекциями определена даже система фигур X^k, и

с) идеальным если любимыми проекциями определена фигура X^k однозначно.

В статье подана польная характеризация случаев а), б), с) и также количество условий (в случае а) и количество параметров свободности (в случае б). (Теорема 6.. В заключении дается система идеальных изображений пространств P^3, P^4, и P^5)

Charakterisation der linearen darstellenden Methoden der linearen Räumen.

S. ZÁŇ

Zusammenfassung.

Im n — dimensional projektiven Raum P^n betrachten wir folgende darstellende Methoden:

1. Das darstellende Gebilde ist der k — dimensional lineare Raum X^k;
2. Abbidlung ist zweigliederig;
3. Jedes Glied der Abbildung ist durch zweie komplementare Räume (S^s; A^a) gebildet und den beliebigen Raum X^k aus S^s auf A^a projektieren wird;
4. Bezeichnet man $l = \dim (S^s + X^k)$ so sind die Beziehungen (a), ..., (e) aus dem Abschnitt III. vorangesetz.

Die darstellende Methode wird als a) binde, b) freie oder c) ideale genannt je nachdem ob das Gebilde X^k

a) durch die Projektionen eindeutig bestimt wird, aber die Projektionen werden durch einige Bedingungen gebünden,

b) durch beliebige Projektionen, aber nicht eindeutig sondern mit einige Freiheitsgrade, oder

c) durch beliebige Projektionen immer eindeutig bestimmt wird.

In dieser Arbeit geben wir eine sämtliche Charakterisation der genanten Zufälle einschliesslich der Bestimmung der Zahl von Bindungsbedingungen (Fall a) und Zahl von Freiheitsgraden (Fall b). (Satz 6). Abschliessend ist die Berechung aller in Räumen P^3, P^4 und P^5 sich befindeten idealen Darstellungen festgestellt.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN., MATHEMATICA XVIII — 1967)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XVIII-1967

Poznámka k premietaniu v trojrozmernom hyperbolickom priestore

J. GATIAL

Roviny π, ν, keď $\pi \perp \nu$ sú priemetne. $[\pi\nu] = x$. Ku každému vlastnému bodu A hyperbolického priestoru môžeme priradiť v rovinách π a ν body A_1 (prvý priemet* bodu A), A_2 (druhý priemet bodu A) tým istým spôsobom, ako v ortogonálnom premietaní na dve priemetne v euklidovskom priestore.

$$\begin{array}{llll} A \in k, & A \in l, & [lk] = \alpha, & \overline{A_1X} = y_1 \\ k \perp \pi, & l \perp \nu, & [\alpha x] = X; & \overline{A_2X} = z_2, \\ [k\pi] = A_1; & [l\nu] = A_2; & & \overline{AA_2} = y, \\ & & & \overline{AA_1} = z. \end{array}$$

Veta 1. *Body A_1, A_2, ak $A_1 \in \pi$, $A_2 \in \nu$, A_1, $A_2 \notin x$ a $[A_1A_2] \perp x$ sú združenými priemetmi jediného vlastného bodu A vtedy a len vtedy, keď platí:* $1 >$ $> \operatorname{sh}\left|\frac{y_1}{c}\right| . \operatorname{sh}\left|\frac{z_2}{c}\right| > 0.$

D ô k a z: Strany trojpravouholníka AA_1XA_2 sú viazané vzťahom:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sh}\dfrac{y_1}{c} = \operatorname{sh}\dfrac{y}{c} : \operatorname{ch}\dfrac{z}{c} \\ \operatorname{sh}\dfrac{z_2}{c} = \operatorname{sh}\dfrac{z}{c} : \operatorname{ch}\dfrac{y}{c} \end{array}\right\}^{**} (1)$$

Zo vzťahu (1) priamo vyplýva, že body A_1, A_2 sú združenými priemetmi jediného vlastného bodu A vtedy a len vtedy, keď platí vzťah uvedený vo vete.

P o z n á m k a. Ak $A_1 \in x$, alebo $A_2 \in x$, alebo $A_1 \equiv A_2 \in x$, potom sú výsledky tie isté, ako pri podobnej situácii v premietaní na dve priemetne v euklidovskom priestore.

Definícia 1. *Priemet útvaru do roviny je množina priemetov všetkých bodov útvaru do roviny.*

Veta 2. *Priemetom priamky do priemetne môže byť polpriamka, úsečka, priamka, alebo bod; priemetom roviny do priemetne môže byť tá časť priemetne ohraničená dvoma ekvidištantami v ktorej leží ich spoločná základná priamka, časť priemetne ohraničená kružnicou v ktorej leží jej stred, časť priemetne ohraničená horicyklom, ktorej body sú vnútornými bodmi horicyklu, celá priemetňa, alebo priamka.****

Poznámka. Všetky útvary (úsečka, polpriamka, priamka, rovina a ich priemety) predpokladáme v ďalšom ako otvorené v prirodzenej topológii.

Definícia 2. *Úplnými priemetmi priamky a do priemetní* π *a* ν, *ak* $a \pm \pi$, $a \pm \nu$ *sú útvary* $\bar{a}_1 = [\alpha\pi]$, $\bar{a}_2 = [\beta\nu]$, *keď* $a \in \alpha$, $a \in \beta$, $\alpha \perp \pi$, $\beta \perp \nu$.

Veta 3. *Úplnými priemetmi priamky a, keď* $a_1 \pm \pi$, $a_1 \pm \nu$ *sú priamky* $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$.

Dôkaz. Dôkaz vyplýva z definície 2. a z vlastnosti uvedenej v základoch hyperbolickej geometrie, že dve navzájom kolmé roviny sa pretínajú v priamke.

Veta 4. *Nech* $\bar{a}_1 \in \pi$, $\bar{a}_2 \in \nu$ *sú dve priamky, z ktorých žiadna nie je kolmá na priamku x a nech existuje vlastný bod A, ktorého priemety* A_1, A_2 *ležiia v poradí na priamkach* $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, *potom existuje jediná priamka a majúca priamky* $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ *za svoje úplné priemety.*

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady vyslovené vo vete. $A_1 \in k$, $k \perp \pi$; $A_2 \in l$, $l \perp \nu$. Body A_1, A_2 sú združené priemety vlastného bodu A, teda $[kl] = A$.

$$\left.\begin{array}{l}\beta \perp \pi,\ \bar{a}_1 \in \Rightarrow k \in \alpha \\ \alpha \perp \nu,\ \bar{a}_2 \in \beta \Rightarrow l \in \beta\end{array}\right\} \Rightarrow [\alpha\beta] = a, \text{ ktorá je vlastná a jediná.}$$

Definícia 3. *Úplným priemetom roviny do priemetne je množina úplných priemetov všetkých priamok roviny do priemetne.*

Veta 5. *Úplným priemetom roviny do priemetne je alebo celá priemetňa, alebo priamka.*

Dôkaz: Dôkaz vyplýva priamo z vety 3. a z definície 3.

Veta 6. *Úplnými priemetmi priamky sú určené jej priemety.*

Dôkaz: Nech $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ sú úplné priemety a a L_1, L_2 sú združené priemety bodu $L \in a$. $\bar{a}_1 \in \alpha$, $\alpha \perp \pi$, $\bar{a}_2 \in \beta$, $\beta \perp \nu \Rightarrow L \in \alpha$, $L \in \beta$, $\Rightarrow [\alpha\beta] = a$. +Ak $a \| \pi$, potom $a_1 = M_1L_1$, keď $M_1 = [k\bar{a}_1]$, k $\perp \pi$, k$\|a$. Ak $[a\pi] = R$, potom $M_1N_1 = a_1 \in \bar{a}_1$, $M_1 = [k\bar{a}_1]$, $k \perp \pi$, $k \| a$, $N_1 = [l\bar{a}_1]$, $l \perp \pi$, $l \| a$, $M_1R = RN_1$. Ak $a \wedge \pi$, potom $a_1 = M_1N_1$, $M_1 = [k\bar{a}_1]$, $k \perp \pi$, $k \| a$, $N_1 = [l\bar{a}_1]$,

* Pod pojmom priemet rozumieme ortogonálny priemet.

** Pozri [1], [3].

*** Pozri [2].

$l \perp \pi$, $l \| a$. Analogické výsledky dostaneme aj pri konštrukcii druhého priemetu priamky a.

Veta 7. *Úplnými priemetmi dvoch rôznobežných, súbežných, alebo rozbežných priamok a, b do π a v sú určené priemety roviny $\alpha = [ab]$.*

Dôkaz. Veta je priamy dôsledok viet 2. a 6.

Literatúra:

[1] Kagan V. F.: *Osnovanija geometrii — 1949,*

[2] Gatial J.: *Ortogonálne premietanie do roviny v hyperbolickom priestore — SEFSVŠT 1964,*

[3] Nestorovič N. M.: *Geometričeskie postroenija v ploskosti Lobačevskogo — 1951.*

* Symbol $\|$ značí súbežnosť, symbol $/\backslash$ značí rozbežnosť.

Autorova adresa: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie SF SVŠT Bratislava Gottwaldovo nám. 2

Do redakcie prišlo 20. marca 1966.

Заметка к проекции в трехмерном гиперболическом пространстве

Й. ГАТИАЛ

Выводы

В данной статье определяется проекция фигуры на плоскость и полная проекция прямой и плоскости на плоскость в гиперболическом пространстве. Доказываются теоремы касающиеся проекций точки, прямой и плоскости а также польных проекций прямой и плоскости на две взаимно перпендикулярные плоскости. В конце статьи приводятся соотношения между проекцией и полной проекцией упомянутых фигур.

Bemerkung zu einer Projektion in dem dreidimensionalen hyperbolischen Raum.

J. GATIAL

Zusammenfassung.

In der Arbeit ist die Projektion der Gebilden auf eine Ebene und vollige Projektion der Gerade und der Ebene auf der Ebene im hyperbolischen Raum definiert. Man beweist einige Sätze über die Projektion des Punktes, der Gerade und der Ebene und auch vollige Projektion der Gerade und der Ebene auf zwei auf sich senkrecht stehende Ebenen. In den letzten Sätzen ist das Verhältniss zwischen der Projektion und volligen Projektion der Gebilde erwähnt.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XVIII-1967

Vydálo Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave — Schv. vým. SÚKK č. 327/I-67 — Náklad 1102 — Rukopis zadaný 2. júna 1967 — Vytlačené v októbri 1968 — Papier 5153-01, 70×10, 70 g — Vytlačili Polygrafické závody, n. p., závod 02, Bratislava — Tlačené zo sadzby Monotype, písmo Modern Extended — Technický redaktor Adam Hanák 03/2 — AH 3,750 — VH 3,854 — 67 — 015 — 68

Celý náklad prevzala Ústredná knižnica PFUK Bratislava, ul 29. augusta (Medická záhrada)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

sú fakultný sborník určený u publikácie vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých ašpirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracovávajú materiál získaný za pobytu na našej fakulte. Redakčná rada vyhradzuje si právo z toho pravidla urobiť výnimku.

Práce musia byť odporúčané katedrou. Práce študentov musia byť odporúčané študentskou vedeckou spoločnosťou a príslušnou katedrou.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom alebo anglickom, francúzskom alebo nemeckom. Práce podané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, obriadok, tak aby jeden riadok tvorilo 60 úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na účet autora.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšete názov práce, pod to meno autora. Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, sa uvádzajú všetky pracoviská. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba ich obidve uviesť.

Fotografie treba podať na čiernom lesklom papieri a uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba urobiť tušom na priehľadnom papieri (pauzák) alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať resumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam, publikovaným v cudzom jazyku, treba pripojiť resumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom v prípade publikácie v ruskom jazyku, alebo v ruskom jazyku v prípade publikácie v jazyku západnom. *Nezabudnite pri resumé uviesť vždy názov práce a meno autora v rovnakom poradí ako v základnom texte.* Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a stránkové korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny počas korektúry idú na ťarchu autorského honorára. Každý autor dostane okrem príslušného honorára i 50 separátov.

Redakčná rada.