(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN.— MATHEMATICA XVI, 1967)

UNIVERSITAS COMENIANA

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA

PUBL. XVI

1967
SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO
BRATISLAVA

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

Austausch von Publikationen erbeten
Piere d'échanger des publications
We respectfully solicit the exchange of publications
Se suplica el cauje de publicaciónes

Sborník Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Comenianae. Vydáva Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasinkova 5, čís. tel. 458-51. Povolilo Povereníctvo kultúry číslom 2265/56-IV/1. Tlač: Východoslov. tlačiarne, n. p., Košice 67-112-67 — 03/2 — AH 3,870 — VH 3,977 — K-07* Celý náklad prevzala knižnica PFUK, Bratislava, Šmeralova 2. Technický redaktor **Adam Hanák**

Korrekturen

Seite	Zeile	unrichtig	richtig
3	7 von unten	$D_{r+1,r}$	$D_{r-1,r}$
4	5 von oben	a_{n+1}	a_{n-1}
4	7 v. o.	b_{n+1}	b_{n-1}
8	12 v. u.	S'_{n-3}	$\bar{S}_{n-3}$
8	7 v. u.	S'_{n-3}	$\bar{S}'_{n-3}$
9	1 v. o.	$i=r+1$	$j=r+1$
10	10 v. u.	$\sum\limits_{i=0}^{n-1}$	$\sum\limits_{\substack{i=0\\ i\neq r}}^{n-1}$
15	5 v. o.	$S'^{S_k}_{+k}$	$S'^{S_k}_{r+k}$
15	18 v. o.	$\lambda_{r+1}, \lambda_{n-k-1}$	$\lambda'_{r+1}, \lambda'_{n-k-1}$
16	5 v. o.	$=r+1$	$j=r+1$
20	3 v. u.	S_{n-2}	S^c_{n-2}
23	11 v. u.	$\sum\limits_{i=0}^{r} a_j X_j$	$\sum\limits_{j=0}^{r} a_j X_j$
24	1 v. o.	dem Vergleich	den Unterraum
26	1 v. u.	$\binom{2n-1}{+2}$	$\binom{n-1+2}{2}$
27	1 v. o.	$\binom{n+1}{2}\ 1$	$\binom{n+1}{2} - 1$
28	12 v. u.	$S^{\smile h)}_{-1}$	$S^{(h)}_{n-1}$
30	1 v. o.	$S^{h)}_{n-2}$	$S^{(h)}_{n-2}$
37	16 v. u.	$S'^{S\ -1}_{n-2}$	$S'^{S_{r-1}}_{n-2}$
37	14 v. u.	$S_{\ -1}$	S'_{r-1}
40	2 v. u.	$X^{l'\ -h_r}_r$	$X^{l'_r-h_r}_r$
41	3 zd.	lineárnych	lineárnym
42	1 zh.	S	S_n

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
PUBL. XVI. MATHEMATICA 1967

Über eine birationale Transformation in S_n

J. ČIŽMÁR

Einleitung

1. Bezeichnungen

Ω – Universalkörper
$K \subset \Omega$ – algebraisch abgeschlossener Körper von der Charakteristik 0
S_n – n-dimensionaler projektiver Raum über dem Körper Ω
$(x) = (x_0, \ldots, x_n)$ – ein Punkt des Raumes S_n
$(X) = (X_0, \ldots, X_n)$ – ein System der $(n + 1)$ Variablen in homogenen Polynomen
$\xi_i, \eta_j, \ldots$ – über K transzendente Elemente des Körpers Ω
$\| \quad \|$ – eine Matrix

„Der Unterraum" heißt immer „der lineare Unterraum"
Der Begriff „die Varietät" braucht man im ausgedehnten Sinn, d.h. auch für die reduzible Varietäten.

2. In der vorliegenden Arbeit untersucht man eine spezielle geometrische Korrespondenz zwischen zwei Hyperebenen des Raumes S_n. Man zeigt darüber, daß sie eine birationale quadratische Korrespondenz ist, die sich für $n = 3$ in [4] (§ 13, S. 41) als „skew projection" befindet. Bei der Betrachtung der Varietäten, die den Unterräumen der ersten Hyperebene entsprechen, zeigt man, daß die Transformation *monoidal* im Sinn der Definition solcher Transformation in der Arbeit [6] ist. Die Terminologie richtet sich grundsätzlich nach dieser Arbeit mit der Ausnahme der Begriffen „Fundamental-" und „Hauptvarietät"; hier übersetzt man durch die Benennung „Fundamental-" den Begriff „fundamental", durch das Wort „Haupt-" den Begriff „principal" aus [4].

Diese Arbeit besteht aus 4 Teilen. Im ersten Teil definiert man die Transformation und sucht ihre Grundeigenschaften. Im zweiten Teil findet man Fundamental- und Hauptvarietäten, im dritten Teil untersucht man die Transformation der linearen Unterräume, im vierten Teil betrachtet man die Transformation spezieller Systeme der linearen Unterräume und schließlich werden die einfachsten Grundeigenschaften des Bildes einer Hyperfläche in der betrachteten Transformation angeführt.

I. Definition und Grundeigenschaften der Transformation

1. Es seien S_r, S_{n-r-1} zwei durch die Gleichungen

$$S_r : X_i = 0, \; i = r+1, \dots, n; \tag{1}$$

$$S_{n-r-1} : X_i = 0, \; i = 0, \dots, r \tag{2}$$

gegebene unabhängige Unterräume des Raumes S_n $(n \geqq 3)$.

Es gelte über die Zahl r:

$1 \leqq r \leqq n - r - 1$, d.h.

$$1 \leqq r \leqq \frac{n-1}{2}, \text{ genauer } 1 \leqq r \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]. \tag{3}$$

Definition I, 1. *Eine Gerade, die einen gemeinsamen Punkt mit dem Unterraum S_r auch S_{n-r-1} hat, heißt eine Transversale der Unterräume S_r, S_{n-r-1}.*

Aus der Lage der beiden Unterräume ist es offenbar, daß eine Gerade meistens einen gemeinsamen Punkt mit dem Unterraum S_r auch mit dem Unterraum S_{n-r-1} gleichzeitig haben kann.

Lemma. *Durch einen in keinem der Unterräume S_r, S_{n-r-1} liegenden Punkt geht eine und nur eine Transversale der Unterräume S_r, S_{n-r-1}.*

Beweis. Es sei ein Punkt $(x) \equiv (x_0, \dots, x_n) \in S_n$, $(x) \notin S_r$, $(x) \notin S_{n-r-1}$ gegeben. Die Projektion des Punktes (x) vom Unterraum S_{n-r-1} in den Unterraum S_r ist ein Schnittpunkt des Unterraumes S_r mit einem durch die Punkte $O_{r+1}, \dots, O_n, (x)$ bestimmten Unterraum, wobei die Punkte O_i Grundpunkte des Koordinatensystems in S_n sind. Die Gleichungen dieses Unterraumes sind:

$$X_0 : \dots : X_r = x_0 : \dots : x_r;$$

$$X_i = k_{n+1} x_i + k_i, \; i = r+1, \dots, n; \tag{4}$$

$k_i, k_{n+1} \in \Omega$.

Der Schnittpunkt dieses Unterraumes mit dem Unterraum S_r ist ein Punkt $({}^r x) = (x_0, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.

Analog ist die Projektion des Punktes (x) vom Unterraum S_r in den Unterraum S_{n-r-1} ein Punkt $({}^{n-r-1}x) \equiv (0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n)$. Durch die Punkte $({}^r x)$ und $({}^{n-r-1}x)$ ist eine einzige Gerade

$$X_0 : \dots : X_r = x_0 : \dots : x_r, \tag{5}$$

$$X_{r+1} : \dots : X_n = x_{r+1} : \dots : x_n$$

bestimmt.

Ist $x_r \neq 0$, $x_n \neq 0$, so ist z.B.

$$\left(\frac{x_0}{x_r}\xi_r, \dots, \frac{x_{r-1}}{x_r}\xi_r, \xi_r, \frac{x_{r+1}}{x_n}\xi_n, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\xi_n, \xi_n\right)$$

ein allgemeiner Punkt der Transversale.

2. Es seien S_{n-1}, S'_{n-1} zwei verschiedene Hyperebenen des Raumes S_n, deren keine weder den Unterraum S_r noch den Unterraum S_{n-r-1} enthält und welche verschiedene Schnittunterräume mit dem Unterraum S_r auch S_{n-r-1} haben.

Die Gleichungen dieser Hyperebenen seien:

$$S_{n-1} : \sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0, \; a_i \in \boldsymbol{K}; \tag{6}$$

$$S'_{n-1} : \sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0, \; b_i \in \boldsymbol{K}. \tag{7}$$

Der Rang der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_i \\ b_i \end{Vmatrix}$$

$(i = 0, \ldots, n)$ ist 2; es sei z.B. die Determinante

$$D_{n-1,n}(a, b) = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

von Null verschieden.

Weitere Bedingungen über die Hyperebenen sind folgendermaßen erfüllt:

Die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0, \tag{8}$$

$$\sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i = 0, \tag{9}$$

$$\sum_{i=0}^{r} b_i X_i = 0, \tag{10}$$

$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i = 0 \tag{11}$$

gelten nicht identisch für alle Punkte der Hyperebene S_{n-1} auch S'_{n-1};
der Rang der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_i \\ b_i \end{Vmatrix}$$

$(i = 0, \ldots, r)$ ist 2;
der Rang der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_i \\ b_i \end{Vmatrix}$$

$(i = r + 1, \ldots, n)$ ist 2;
es sei z.B. $a_r \neq 0, a_n \neq 0, b_r \neq 0, b_n \neq 0$,

$$D_{r+1,r}(a, b) = \begin{vmatrix} a_{r-1} & a_r \\ b_{r-1} & b_r \end{vmatrix} = \neq 0.$$

Ein allgemeiner Punkt der Hyperebene S_{n-1} ist z.B.

$$(\xi) \equiv \left(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}, -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} \xi_i\right)$$

ein allgemeiner Punkt der Hyperebene S'_{n-1} ist ; z. B.

$$(\eta) = \left(\eta_0, \ldots, \eta_{n-1}, -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{b_n} \eta_i\right).$$

Der Durchschnitt der Hyperebenen S_{n-1}, S'_{n-1} ist ein Unterraum S_{n-2}, dessen allgemeiner Punkt z.B.

$(\xi_0, \ldots, \xi_{n-2}, \bar{\xi}_{n-1}, \bar{\xi}_n)$ ist, wo

$$\bar{\xi}_{n+1} = \frac{1}{D_{n-1,n}(a, b)} \begin{vmatrix} -\sum_{i=0}^{n-2} a_i\xi_i & a_n \\ -\sum_{i=0}^{n-2} b_i\xi_i & b_n \end{vmatrix},$$

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{D_{n-1,n}(a, b)} \begin{vmatrix} a_{n+1} & -\sum_{i=0}^{n-2} a_i\xi_i \\ b_{n+1} & -\sum_{i=0}^{n-2} b_i\xi_i \end{vmatrix}$$

ist.

3. Nimmt man Koordinaten ξ_i, η_j ($i,j = 0, \ldots, n-1$) der allgemeinen Punkte von der Hyperebenen S_{n-1}, S'_{n-1} algebraisch unabhängig über K, so besitzt das Produkt $S_{n-1} \times S'_{n-1}$ einen allgemeinen Punkt (ξ, η) und ist eine absolut irreduzible Varietät ([5], Kap. IV, §1).

Die Transformation der Hyperebene S_{n-1} in die Hyperebene S'_{n-1} wird folgendermaßen definiert:

T ist eine Untervarietät des Produktes $S_{n-1} \times S'_{n-1}$ und ist die Gesamtheit derjenigen Punkte $(x, y) \in S_{n-1} \times S'_{n-1}$, für welche die Gerade $p \equiv (x)(y)$ eine Transversale der Unterräumen S_r, S_{n-r-1} ist.

Satz I, 1. *Die Transformation T ist eine irreduzible birationale quadratische Korrespondenz zwischen den Hyperebenen S_{n-1}, S'_{n-1}.*

Beweis. Es werde in S_n die Topologie von Zariski eingeführt. (Dadurch wird in offenbarer Weise auch die Topologie des Produktes $S_n \times S_n$ bestimmt.) Durch einen Punkt (x) der offenen Menge $U = S_n - S_r - S_{n-r-1}$ geht eine und nur eine Transversale der Unterräume S_r, S_{n-r-1}; ihre Gleichungen sind (5). Es sei $(x) \in U \cap S_{n-1}$. Ein allgemeiner Punkt der durch den Punkt (x) gehenden Transversale hat die Form

$$(\bar{x}) \equiv k_1({}^r x) + k_2({}^{n-r-1}x); \; (k_1, k_2) \neq (0, 0);$$

$k_1, k_2 \in \Omega$. Gemeinsame Punkte der Transversale und der Hyperebene S'_{n-1} erfüllen die Gleichung

$$k_1 \sum_{i=0}^{r} b_i x_i + k_2 \sum_{i=r+1}^{n} b_i x_i = 0, \tag{12}$$

die — falls sie nicht identisch gilt — eine einzige Lösung

$$k_1 = \sum_{i=r+1}^{n} b_i x_i, \; k_2 = -\sum_{i=0}^{r} b_i x_i \tag{13}$$

hat.

Der durch diese Parameter bestimmte Punkt (y) der Transversale hat Koordinaten

$$y_i = x_i \sum_{j=r+1}^{n} b_j x_j, \; i = 0, \ldots, r; \tag{14}$$

$$y_i = -x_i \sum_{j=0}^{r} b_j x_j, \; i = r+1, \ldots, n.$$

Die Gleichungen (14) drücken eine quadratische Transformation der Hyperebene S_{n-1} in die Hyperebene S'_{n-1} aus.

Analog entspricht durch die Transformation T^{-1} dem Punkt $(y) \in U \cap S'_{n-1}$ ein Punkt $(x) \in S_{n-1}$ mit Koordinaten

$$x_i = y_i \sum_{j=r+1}^{n} a_j y_j, \quad i = 0, \ldots, r; \tag{14'}$$

$$x_i = -y_i \sum_{j=0}^{r} a_j y_j, \quad i = r+1, \ldots, n.$$

Die Gleichungen (14) und (14') drücken aus, daß in der Abbildung $T: S_{n-1} \to S'_{n-1}$ jedem Punkt $(x) \in U \cap S_{n-1}$ ein einziger Punkt $(y) \in S'_{n-1}$ und in der Abbildung $T^{-1}: S'_{n-1} \to S_{n-1}$ jedem Punkt $(y) \in U \cap S'_{n-1}$ ein einziger Punkt $(x) \in S_{n-1}$ entspricht. Das bedeutet, daß die Abbildung T fast überall auf S_{n-1} auch auf S'_{n-1} rational ist, also, daß T eine birationale Korrespondenz ist. Genauer, die Gleichungen (14) und (14') zeigen, daß T eine Transformation T_{2-2} ist.

Durch die Transformation T nach den Gleichungen (14) entspricht dem allgemeinen Punkt $(\xi) \in S_{n-1}$ ein Punkt $(\zeta) \in S'_{n-1}$ mit Koordinaten

$$\zeta_i = \frac{1}{a_n} \xi_i \left(a_n \sum_{j=r+1}^{n-1} b_j \xi_j - b_n \sum_{j=0}^{n-1} a_j \xi_j \right),$$

$$i = 0, \ldots, r; \tag{15}$$

$$\zeta_i = -\xi_i \sum_{j=0}^{r} b_j \xi_j, \quad i = r+1, \ldots, n-1;$$

$$\zeta_n = -\frac{1}{b_n} \sum_{j=0}^{n-1} b_j \zeta_j = \frac{1}{a_n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j \xi_j \right) \left(\sum_{j=0}^{r} b_j \xi_j \right),$$

der – da seine Dimension über K $(n-1)$ ist – ein allgemeiner Punkt der Hyper ebene S'_{n-1} ist.

Analog entspricht dem allgemeinen Punkt $(\eta) \in S'_{n-1}$ ein Punkt $(\vartheta) \in S_{n-1}$ mit Koordinaten

$$\vartheta_i = \frac{1}{b_n} \eta_i \left(b_n \sum_{j=r+1}^{n-1} a_j \eta_j - a_n \sum_{j=0}^{n-1} b_j \eta_j \right),$$

$$i = 0, \ldots, r; \tag{15'}$$

$$\vartheta_i = -\eta_i \sum_{j=0}^{r} a_j \eta_j, \quad i = r+1, \ldots, n-1;$$

$$\vartheta_n = -\frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \vartheta_j = \frac{1}{b_n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j \eta_j \right) \left(\sum_{j=0}^{r} a_j \eta_j \right);$$

das ist ein allgemeiner Punkt der Hyperebene S_{n-1}.

Der Punkt (ξ, ζ) [oder (ϑ, η)] ist ein allgemeiner Punkt der Varietät T; das bedeutet daß T irreduzibel ist. Die Projektion der Varietät $T \subset S_{n-1} \times S'_{n-1}$ auf S_{n-1} hat den allgemeinen Punkt (ξ), d. h. sie ist die Hyperebene S_{n-1} selbst; die Projektion T auf S'_{n-1} hat den allgemeinen Punkt (ζ), d.h. sie ist die Hyperebene S'_{n-1} selbst.

Es gilt weiter:

$$\mathbf{K}(\eta) = \mathbf{K}(\zeta) \subset \mathbf{K}(\xi) \qquad \text{(nach (15))},$$
$$\mathbf{K}(\xi) = \mathbf{K}\,\vartheta) \subset \mathbf{K}(\eta) \qquad \text{(nach (15'))},$$

also $\mathbf{K}(\xi, \zeta) = \mathbf{K}(\vartheta, \eta) = \mathbf{K}(\xi) = \mathbf{K}(\eta)$.

Diese Resultate bestätigen wieder, daß T eine birationale Korrespondenz ist.

$\mathbf{K}(\xi) = \mathbf{K}(\zeta)$ bedeutet, daß lokale Ringe der allgemeinen Punkte $(\xi) \in S_{n-1}$ und $(\zeta) \in S'_{n-1}$ identisch sind; dies ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, damit die Korrespondenz T im Punkt (ξ) und im Punkt (ζ) (oder einfach – im Punkt (ξ) nach [5], Kap. IV, § 3) biholomorph sei. Das bedeutet, daß die Korrespondenz fast überall auf S_{n-1} auch S'_{n-1} biholomorph ist.

Die Punktmengen, in denen die Abbildung T nicht definiert (oder – nicht holomorph) wird, und die Punktmengen, wo sie nicht biholomorph ist, betrachtet man im II. Teil.

II. Fundamental- und Hauptvarietäten

1. Gehen mehrere Transversalen der Unterräume S_r, S_{n-r-1} durch den Punkt $(x) \in S_{n-1}$, so entspricht jeder gemeinsame Punkt dieser Transversalen und der Hyperebene S_{n-1} dem Punkt (x) in der Transformation T. Die Gesamtheit aller Punkte mit solcher Eigenschaft in der Hyperebene S_{n-1} bildet die Fundamentalvarietäten dieser Hyperebene; die Gesamtheit aller ihnen entsprechenden Punkte sind die Hauptvarietäten in S'_{n-1}.

Im Sinn der Terminologie von [5] sind die Fundamentalvarietäten solche Punktmengen, in denen die birationale Abbildung T nicht definiert wird, oder – mit anderen Worten – nicht holomorph ist.

2. Infolge der Bedingungen (8) – (11) sind Durchschnitte der Hyperebenen S_{n-1}, S'_{n-1} mit den Unterräumen S_r, S_{n-r-1} verschiedene $(r-1)$-bzw. $(n-r-2)$-dimensionale Unterräume. Es sind:

$$S_{r-1} \equiv S_r \cap S_{n-1} : X_{r+1} = \ldots = X_n = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0; \tag{16}$$

$$S_{n-r-2} \equiv S_{n-r-1} \cap S_{n-1} : X_0 = \ldots = X_r = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0; \tag{17}$$

$$S'_{r-1} \equiv S_r \cap S'_{n-1} : X_{r+1} = \ldots = X_n = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0; \tag{18}$$

$$S'_{n-r-2} \equiv S_{n-r-1} \cap S'_{n-1} : X_0 = \ldots = X_r = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0. \tag{19}$$

Ihre allgemeine Punkte sind z.B. dies:

$$S_{r-1}:(\xi)\equiv\left(\xi_0,\ldots,\xi_{r-1},-\sum_{i=0}^{r-1}\frac{a_i}{a_r}\xi_i,0,\ldots,0;\right)$$

$$S_{n-r-2}:(\xi)\equiv\left(0,\ldots,0,\xi_{r+1},\ldots,\xi_{n-1},-\sum_{i=r+1}^{n-1}\frac{a_i}{a_n}\xi_i\right);$$

$$S'_{r-1}:(\xi)\equiv\left(\xi_0,\ldots,\xi_{r-1},-\sum_{i=0}^{r-1}\frac{b_i}{b_r}\xi_i,0,\ldots,0\right);$$

$$S'_{n-r-2}:(\xi)\equiv\left(0,\ldots,0,\xi_{r+1},\ldots,\xi_{n-1},-\sum_{i=r+1}^{n-1}\frac{b_i}{b_n}\xi_i\right).$$

Die Unterräume S_{r-1}, S_{n-r-2} haben als Verbindungsraum einen $(n-2)$-dimensionalen Unterraum $\bar{S}_{n-2}$, der als Durchschnitt der Hyperebenen

$$\sum_{i=r+1}^{n}a_iX_i=0, \tag{20}$$

$$\sum_{i=0}^{r}a_iX_i=0$$

bestimmt ist und einen allgemeinen Punkt z.B.

$$\left(\xi_0,\ldots,\xi_{r-1},-\sum_{i=0}^{r-1}\frac{a_i}{a_r}\xi_i,\xi_{r+1},\ldots,\xi_{n-1},-\sum_{i=r+1}^{n-1}\frac{a_i}{a_n}\xi_i\right).$$

hat.

Nach den Bedingungen von I, 2 ist es offenbar, daß der Unterraum $\bar{S}_{n-2}$ vom Unterraum S_{n-2} verschieden ist.

Der Durchschnitt des Unterraumes $\bar{S}_{n-2}$ mit dem Unterraum S_{n-2} ist ein durch die Gleichungen

$$\sum_{i=r+1}^{n}a_iX_i=0,$$

$$\sum_{i=0}^{r}a_iX_i=0, \tag{21}$$

$$\sum_{i=0}^{n}b_iX_i=0$$

bestimmter $(n-3)$-dimensionaler Unterraum $\bar{S}'_{n-3}$; sein allgemeiner Punkt ist z.B.

$$\left(\xi_0,\ldots,\xi_{r-1},-\sum_{i=0}^{r-1}\frac{a_i}{a_r}\xi_i,\xi_{r+1},\ldots,\xi_{n-2},\right.$$

$$\frac{1}{a_rD_{n-1,n}(a,b)}\left[a_r\sum_{i=r+1}^{n-2}D_{ni}(a,b)\,\xi_i+a_n\sum_{i=0}^{r-1}D_{ri}(a,b)\,\xi_i\right],$$

$$-\frac{1}{a_r D_{n-1,\,n}(a,b)}\left[a_r \sum_{i=r+1}^{n-2} D_{n-1,\,i}(a,b)\,\xi_i + a_{n-1}\sum_{i=0}^{r-1} D_{ri}(a,b)\,\xi_i\right]\Bigg).$$

Analog hat der Verbindungsraum $\bar{S}'_{n-2}$ der Unterräume S'_{r-1}, S'_{n-r-2} die Gleichungen

$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i = 0, \qquad (22)$$

$$\sum_{i=0}^{r} b_i X_i = 0$$

und sein Durchschnitt mit dem Unterraum S_{n-2} ist ein durch die Gleichungen

$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{r} b_i X_i = 0, \qquad (23)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0$$

bestimmter Unterraum $\bar{S}_{n-3}$.

Die Gestalt allgemeiner Punkte der Unterräume $\bar{S}'_{n-2}$ und $\bar{S}_{n-3}$ ist offenbar.

3. Die folgende Sätze beschreiben Fundamentalvarietäten der Hyperebenen S_{n-1}, S'_{n-1}.

Satz II, 1. *Fundamentalvarietäten der Hyperebene S_{n-1} in der Transformation T sind dies:*

1. S_{r-1}
2. S_{n-r-2}
3. S'_{n-3}.

Satz II, 2. *Fundamentalvarietäten der Hyperebene S'_{n-1} in der Transformation T sind dies:*

1. S'_{r-1}
2. S'_{n-r-2}
3. S'_{n-3}.

Beweis des Satzes II, 1.

1. Setzt man Koordinaten eines beliebigen Punktes vom Unterraum S_{r-1} in die Gleichungen (14) ein, so verschwindet der Faktor $\sum_{j=r+1}^{n} b_j x_j$ in y_i $(i = 0, \ldots, r)$ und der Faktor x_i in y_i $(i = r+1, \ldots, n)$.

2. Analog: In y_i $(i = 0, \ldots, r)$ verschwindet der Faktor x_i, in y_i $(i = r+1, \ldots, n)$ verschwindet der Faktor $\sum_{j=0}^{r} b_j x_j$.

3. Durch das Einsetzen (23) in (14) verschwindet der Faktor $\sum_{i=r+1}^{n} b_j x_j$ in $y_i (i = 0, \ldots, r)$ und der Faktor $\sum_{j=0}^{r} b_j x_j$ in y_i $(i = r + 1, \ldots, n)$.

Der Beweis des Satzes II, 2 ist ganz analog.

4. Die Art der Hauptvarietäten charakterisieren folgende Sätze.

Satz II, 3. *Die Hauptvarietäten der Hyperebene S'_{n-1} sind dies:*

1. *Ein dem Fundamentalunterraum S_{r-1} entsprechender Unterraum $S'^{S_{r-1}}_{n-2}$;*
2. *Ein dem Fundamentalunterraum S_{n-r-2} entsprechender Unterraum $S'^{S_{n-r-2}}_{n-2}$;*
3. *Ein dem Fundamentalunterraum $\bar{S}_{n-3}$ entsprechender Unterraum $\bar{S}'_{n-2}$.*

Satz II, 4. *Die Hauptvarietäten der Hyperebene S_{n-1} sind diese:*

1. *Ein dem Fundamentalunterraum S'_{r-1} entsprechender Unterraum $S^{S'_{r-1}}_{n-2}$;*
2. *Ein dem Fundamentalunterraum S'_{n-r-2} entsprechender Unterraum $S^{S'_{n-r-2}}_{n-2}$;*
3. *Ein dem Fundamentalunterraum $\bar{S}'_{n-3}$ entsprechender Unterraum $\bar{S}_{n-2}$.*

Definition II, 1. *Die Unterräume $S'^{S_{r-1}}_{n-2}, S'^{S_{n-r-2}}_{n-2}$, $\bar{S}'_{n-2}$ heißen Hauptunterräume in S'_{n-1}, die Unterräume $S^{S'_{r-1}}_{n-2}$, $S^{S'_{n-r-2}}_{n-2}$, $\bar{S}_{n-2}$ heißen Hauptunterräume in S_{n-1}.*

Den Beweis des Satzes II, 4 durchführt man genau so wie beim Satz II, 3; deshalb läßt man den Beweis des Satzes II, 4 aus.

Beweis des Satzes II, 3.

1. Jede durch einen Punkt des Unterraumes S_{r-1} gehende und den Unterraum S_{n-r-1} schneidende Gerade ist eine Transversale von den Unterräumen S_r, S_{n-r-1}. Alle solchen Transversalen bilden eine Hyperebene $S^{S_{r-1}}_{n-1}$, die ein Verbingdunsraum der Unterräume S_{r-1}, S_{n-r-1} ist und durch die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0 \tag{24}$$

gegeben ist. Der Durchschnitt dieser Hyperebene mit der Hyperebene S'_{n-1} ist ein durch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0, \tag{25}$$
$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0$$

bestimmter Unterraum $S'^{S_{r-1}}_{n-2}$ mit einem allgemeinen Punkt

$$\left(\xi_0, \ldots, \xi_{r-2}, \frac{1}{D_{r-1,r}(a,b)}\left[a_r \sum_{\substack{i=0\\ i\neq r-1,r}}^{n} b_i\xi_i - b_r \sum_{i=0}^{r-2} a_i\xi_i\right], -\frac{1}{D_{r-1,r}(a,b)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[a_{r-1}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq r-1,r}}^{n} b_i\xi_i - b_{r-1}\sum_{i=0}^{r-2} a_i\xi_i\right], \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n\right).$$

Aus dem Einsetzen der ersten von Gleichungen (25) in die Gleichungen (14′) ist es offenbar, daß genau die Punkte des Unterraumes $S'^{S_{r-2}}_{n-2}$ auf den Unterraum S_{r-1} abgebildet werden.

2. Alle durch die Punkte des Unterraumes S_{n-r-2} gehenden Transversalen von den Unterräumen S_r, S_{n-r-1} bilden eine durch die Gleichung

$$\sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i = 0 \tag{26}$$

gegebene Hyperebene $S^{S_{n-r-2}}_{n-1}$, die ein Verbindungsraum der Unterräume S_{n-r-2}, S_r ist und mit der Hyperebene S'_{n-1} einen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^{n} b_i X_i &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

bestimmten Schnittunterraum hat. Der allgemeine Punkt dieses Unterraumes $S'^{S_{n-r-2}}_{n-2}$ ist z. B.

$$\left(\xi_0, \ldots, \xi_{r-1}, \frac{1}{a_n b_r}\left[-a_n\sum_{i=0}^{n-1} b_i\xi_i + b_n \sum_{i=r+1}^{n-1} a_i\xi_i\right],\right.$$

$$\left.\xi_{r+1}, \ldots, \xi_{n-1}, -\frac{1}{a_n}\sum_{i=r+1}^{n-1} a_i\xi_i\right).$$

3. Aus (22) und (23) ist es offenbar: $\bar{S}'_{n-2} \supset \bar{S}_{n-3}$.
Der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_{r+1} = \ldots = X_n &= 0, \\ \sum_{i=0}^{n} b_i X_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^{n} a_i X_i &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

bestimmte Unterraum $S'_{r-2} \equiv S'_{r-1} \cap S_{n-2}$ liegt im Unterraum $\bar{S}_{n-3}$ (auch im Unterraum $\bar{S}'_{n-3}$). Dasselbe gilt auch vom Unterraum $S'_{n-r-3} \equiv S'_{n-r-2} \cap S_{n-2}$, der durch die Gleichungen

$$X_0 = \ldots = X_r = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0, \tag{29}$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0$$

gegeben ist.

Betrachtet man einen Punkt $(x) \in S'_{r-2} \subset \bar{S}_{n-3}$ als Punkt der Hyperebene S_{n-1}. Jede durch den Punkt gehende und den Unterraum S'_{n-r-3} schneidende Gerade ist eine Transversale der Unterräume S'_{r-2}, S'_{n-r-3}, dadurch ist sie auch eine Transversae der Unterräume S'_{r-1}, S'_{n-r-2} und dadurch auch eine Transversale der Unterräumle S_r, S_{n-r-1}. Alle solchen Transversalen bilden einen Verbindungsraum $\bar{S}'_{n-4} \subset \bar{S}_{n-3}$ der Unterräume S'_{r-2}, S'_{n-r-3}, der durch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0,$$
$$\sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{r} b_i X_i = 0, \tag{30}$$
$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i = 0$$

gegeben ist.

Alle durch den Punkt $(x) \in S'_{r-2}$ gehenden Transversalen der Unterräume S'_{r-1}, S'_{n-r-2} bilden einen $(n - r - 1)$-dimensionalen Unterraum $S'^{x}_{n-r-1} \subset \bar{S}'_{n-2}$. Dieser Unterraum, der ein Verbindungsraum des Punktes (x) und des Unterraumes S'_{n-r-2} ist, ist in S'_{n-1} ein dem Punkt (x) entsprechender Hauptunterraum, wenn man den Punkt (x) als einen Punkt der Hyperebene S_{n-1} betrachtet. Ähnlich, alle durch den Punkt $(x) \in S'_{n-r-3}$ gehenden Transversalen der Unterräume S'_{r-1}, S'_{n-r-2} bilden einen r-dimensionalen Unterraum $S'^{x}_{r} \subset \bar{S}'_{n-2}$. Dieser Unterraum – der Verbindungsraum des Punktes (x) und des Unterraumes S'_{r-1} – ist in S'_{n-1} ein Hauptunterraum, der dem Punkt (x) entspricht, wenn man den Punkt (x) als Punkt der Hyperebene S_{n-1} betrachtet.

Außerdem schneidet jede Verbindungsgerade des Punktes $(x) \in S'_{r-2}$ (S'_{n-r-3}) mit dem Punkt $(z) \in S'_{n-r-1} - S'_{n-r-2}$ (bzw. $(z) \in S_r - S'_{r-1}$) die Hyperebene S'_{n-1} gerade im Punkt (x).

Durch jeden Punkt $(x) \in \bar{S}_{n-3} - S'_{r-2} - S'_{n-r-3}$ geht genau eine Transversale p^x der Unterräume S'_{r-1}, S'_{n-r-2}, die im Unterraum $\bar{S}'_{n-2}$ liegt, weil $\bar{S}'_{n-2}$ ein Verbindungsraum der Unterräume S'_{r-1}, S'_{n-r-2} ist. Das ist gleichzeitig auch eine einzige durch den Punkt (x) gehende Transversale der Unterräume S_r, S_{n-r-1}. Die Gerade p^x ist ein dem Punkt (x) in S'_{n-1} entsprechender Hauptunterraum.

Definition II, 2.

a) *Ein Fundamentalpunkt* $(x) \in S_{n-1}$ *heißt der Punkt des Typs* 0, *wenn die durch ihn gehende Transversale der Unterräume* S_r, S_{n-r-1} *mit der Hyperebene* S'_{n-1} *nur endlich viele Punkte gemeinsam hat.*

b) *Ein Fundamentalpunkt* $(x) \in S_{n-1}$ *heißt der Punkt des Typs* 1, *wenn die durch ihn gehende Transversale der Unterräume* S_r, S_{n-r-1} *mit der Hyperebene* S'_{n-1} *unendlich viele Punkte gemeinsam hat.*

Analog wird der Typ eines Fundamentalpunktes der Hyperebene S'_{n-1} definiert.

Man kann die Resultate vom Fundamentalraum $\bar{S}_{n-3}$ so zusammenfassen:

a) *Dem Fundamentalunterraum* $\bar{S}_{n-3} \subset S_{n-1}$ *im ganzen entspricht der Hauptunterraum* $\bar{S}'_{n-2}$ *im ganzen.*

b) *Alle Punkte des Unterraumes* S'_{r-2} (S'_{n-r-3}) *besitzen den Typ* 0 *auch* 1. *Die Punkte der Menge* $\bar{S}_{n-3} - S'_{r-2} - S'_{n-r-3}$ *sind vom Typ* 1.

c) *Der Unterraum* S'_{r-2} (S'_{n-r-3}) *ist als eine Menge von Punkten des Typs* 0 *invariant; er entspricht sich selbst so, daß jeder sein Punkt invariant ist, d.h. einem Punkt* (x) *als dem Punkt des Typs* 0 *entspricht gerade der Punkt* (x).

d) *Die den Punkten vom Unterraum* S'_{r-2} *bzw.* S'_{n-r-3} *als Punkten des Typs* 1 *(betrachteten als Punkte der Hyperebene* S_{n-1}*) entsprechenden Hauptunterräume sind* $(n-r-1)$*-bzw. r-dimensional. Dem Unterraum* S'_{r-2} (S'_{n-r-3}) *als der Menge von Fundamentalpunkten des Typs* 1 *entspricht in* S'_{n-1} *ein* $(n-3)$*-dimensionaler Unterraum, der ein Verbindungsraum der Unterräume* S'_{r-2}, S'_{n-r-2} (S'_{n-r-3}, S'_{r-1}) *ist. Dieser Unterraum ist offenbar in* $\bar{S}'_{n-2}$ *enthalten.*

e) *Die den Punkten von Menge* $\bar{S}_{n-3} - S'_{r-2} - S'_{n-r-3}$ *entsprechenden Hauptunterräume sind Geraden.*

Die Resultate a) – e) folgen auch aus der Bestimmung des allgemeinen Punktes eines allgemeinen Gliedes des Menge der Transversalen von Unterräumen, die durch alle Punkte der Menge $\bar{S}_{n-3} - S'_{r-2} - S'_{n-r-3}$ gehen. Ein allgemeines Glied dieser Menge besitzt nach Resultaten in I, 1 und II, 2 einen allgemeinen Punkt

$$\left(\left[-\frac{b_r}{\sum_{i=0}^{r-1} b_i \xi_i}\xi_r\right]\xi_0, \ldots, \left[-\frac{b_r}{\sum_{i=0}^{r-1} b_i \xi_i}\xi_r\right]\xi_{r-1}, \xi_r,\right.$$

$$\left[-\frac{b_r D_{n-1,\,n}(b,a)}{b_r \sum_{i=r+1}^{n-2} D_{n-1,\,i}(b,a)\,\xi_i + b_{n-1}\sum_{i=0}^{r-1} D_{ri}(b,a)\xi_i}\xi_n\right]\cdot \xi_{r+1}, \ldots,$$

$$\left[-\frac{b_r D_{n-1,\,n}(b,a)}{b_r \sum_{i=r+1}^{n-2} D_{n-1,\,i}(b,a)\,\xi_i + b_{n-1}\sum_{i=0}^{r-1} D_{ri}(b,a)\xi_i}\xi_n\right]\cdot \xi_{n-2},$$

$$\left.-\frac{b_r \sum_{i=r+1}^{n-2} D_{ni}(b,a)\,\xi_i + b_n \sum_{i=0}^{r-1} D_{ri}(b,a)\,\xi_i}{b_r \sum_{i=r+1}^{n-2} D_{n-1,\,i}(b,a)\,\xi_i + b_{n-1}\sum_{i=0}^{r-1} D_{ri}(b,a)\,\xi_i}\xi_n, \xi_n\right),$$

welcher ein allgemeiner Punkt des Unterraumes $\bar{S}'_{n-2}$ ist, wie man durch direkte Berechnung überzeugen kann.

Übrige Resultate sind auf den Eigenschaften der Fundamentalunterräumen S'_{r-2}, S'_{n-r-3} und des Unterraumes S_{n-2} begründet.

Bemerkung 1. Die Betrachtungen über den Unterraum S'_{r-2} bleiben sinnvoll nur bei der Voraussetzung $r \geqq 2$, d.h. $n \geqq 5$.

Bemerkung 2. Die Gleichungen der im Satz II, 4 angeführten Hauptunterräume $S_{n-2}^{S'_{r-1}}$, $S_{n-2}^{S'_{n-r-2}}$ sind:

$S_{n-2}^{S'_{r-1}}$:
$$\sum_{i=0}^{r} b_i X_i = 0, \tag{25'}$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0;$$

$S_{n-2}^{S'_{n-r-2}}$:
$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i = 0, \tag{27'}$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0.$$

Bemerkung 3. Ist $S_{r-2} \equiv S_{r-1} \cap S_{n-2}$, $S_{n-r-3} \equiv S_{n-r-2} \cap S_{n-2}$, $\bar{S}_{n-4}$ der Verbindungsraum der Unterräume S_{r-2}, S_{n-r-3}, so ist $S_{r-2} \equiv S'_{r-2}$, $S_{n-r-3} \equiv$ $\equiv S'_{n-r-3}$, $\bar{S}_{n-4} \equiv \bar{S}'_{n-4}$. Es ist eigentlich $S_{n-2} \equiv S_r \cap S_{n-2}$, $S_{n-r-3} \equiv S_{n-r-1} \cap$ $\cap S_{n-2}$, $\bar{S}_{n-4} \equiv \bar{S}_{n-3} \cap \bar{S}'_{n-3}$ ($\bar{S}_{n-3}$, $\bar{S}'_{n-3}$ liegen beide in S_{n-2}).

Bemerkung 4. Nimmt man in Betracht die Bemerkung 3, so besitzen alle Punkte der Menge $S_{r-1} - S_{r-2}$ bzw. $S_{n-r-2} - S_{n-r-3}$ im Sinn der Terminologie von der Definition II, 2 den Typ 0.

Bemerkung 5. Im Sinn der Terminologie von [5] (Kap. IV) drücken die Sätze II, 1 und II, 4 diese Eigenschaften der Transformation T aus:

Satz II, 1. *Die Menge von Punkten der Hyperebene S_{n-1}, in denen die birationale Abbildung T nicht definiert wird (nicht holomorph ist), ist eine Varietät $S_{r-1} \cup S_{n-r-2} \cup$ $\cup \bar{S}_{n-3}$.*

Diese Varietät ist in der Topologie von Zariski K-abgeschossen ([5], Kap. IV, § 3, P. 8, S. 94).

Satz II, 4. *Die Menge von Punkten der Hyperebene S_{n-1}, in denen die birationale Abbildung T nicht biholomorph ist, ist eine Varietät $S_{n-2}^{S'_{r-1}} \cup S_{n-2}^{S'_{n-r-2}} \cup \bar{S}_{n-2}$.*

Auch diese Varietät ist K-abgeschlossen (Folgerung aus P. 8).

Es folgt aus beiden diesen Resultaten:

Die Menge von Punkten der Hyperebene S_{n-1}, in denen die birationale Abbildung T holomorph, aber nicht biholomorph ist, ist eine K-offene Varietät $\left(S_{n-2}^{S'_{r-1}} \cup S_{n-2}^{S'_{n-r-2}} \cup \bar{S}_{n-2}\right) - \left(S_{r-1} \cup S_{n-r-2} \cup \bar{S}_{n-3}\right)$.

4. Den Unterräumen von Fundamentalunterräumen entsprechende Hauptvarietäten

Satz II, 5. *Die Hauptvarietät, die dem k-dimensionalen Unterraum S_k (S'_k) ($0 \leqq k \leqq$ $\leqq r - 2$) des Fundamentalunterraumes S_{r-1} (S'_{r-1}) entspricht, ist ein ($n - r + k - 1$)-dimensionaler Unterraum $S'^{S_k}_{n-r+k-1}$ $\left(S^{S'_k}_{n-r+k-1}\right)$ des Hauptunterraumes $S'^{S_{r-1}}_{n-2}$ $\left(S^{S'_{r-1}}_{n-2}\right)$.*

Beweis. Es sei

$(\xi_0, \ldots, \xi_k, \lambda_{k+1}(\xi_i), \ldots, \lambda_r(\xi_i), 0, \ldots, 0)$ ein allgemeiner Punkt des Unterraumes S_k, wo λ_j ($j = k + 1, \ldots, r$) von Konstanten a_i ($i=0, \ldots, n$) abhängige Linearformen von unabhängigen Unbestimmten $\xi_0, \ldots, \xi_k$ sind. [Die Linearformen λ_j sind selbstverständlich auch von anderen Konstanten des Körpers K abhängig; ist z.B. der Unterraum S_k als Durchschnitt des Unterraumes S_r mit ($r - k - 1$) linear unabhängigen Hyperebenen bestimmt (keine dieser Hyperebenen enthält den Unterraum S_{r-1} und keine enthält den Durchschnitt der übrigen Hyperebenen mit dem Unterraum S_{r-1}), so sind die Formen λ_j auch von Grassmann'schen Koordinaten dieser Hyperebenen abhängig.]

Die durch alle Punkte des Unterraumes S_k gehenden Transversalen von Unterräumen S_r, S_{n-r-1} bilden ein Verbindungsraum $S^{S_k}_{n-r+k}$ der Unterräume S_k, S_{n-r-1}; sein allgemeiner Punkt ist z.B.

$$(\xi_0, \ldots, \xi_k, \lambda_{k+1}(\xi_i), \ldots, \lambda_r(\xi_i), \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n);$$

$\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r$ sind Linearformen von Unbestimmten $\xi_0, \ldots, \xi_k$. Der Durchschnitt des Unterraumes $S^{S_k}_{n-r+k}$ mit der Hyperebene S'_{n-1} ist ein ($n - r + k - 1$)-dimensionaler Unterraum $S'^{S_k}_{n-r+k+1}$ mit einem allgemeinen Punkt z. B.

$$\left(\xi_0, \ldots, \xi_k, \lambda_{k+1}(\xi_i), \ldots, \lambda_r(\xi), \xi_{r+1}, \ldots, \xi_{n+1}, -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{b_n} \xi_j\right),$$

wo $i = 0, \ldots, k$ und als $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_r$ die Funktionen $\lambda_{k+1}(\xi_i), \ldots, \lambda_r(\xi_i)$ von Unbestimmten $\xi_0, \ldots, \xi_k$ in den Ausdruck $-\sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{b_n} \xi_j$ eingesetzt sind.

Der Unterraum $S'^{S_k}_{n-r+k-1} \subset S'^{S_{r-1}}_{n-2}$ ist ein dem Fundamentalunterraum $S_k \subset S_{r-1}$ in S'_{n-1} entsprechender Hauptunterraum.

Im speziellem Fall entspricht dem Punkt $(x) \equiv (x_0, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \in S_{r-1}$ ein ($n - r - 1$)-dimensionaler Hauptunterraum $S'^{x}_{n-r-1} \subset S'^{S_{r-1}}_{n-2}$ mit einem allgemeinen Punkt $\left(x_0, \ldots, x_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_{n-1}, -\sum_{i=0}^{r} \frac{b_i}{b_n} x_i - \sum_{i=r+1}^{n-1} \frac{b_i}{b_n} \xi_i\right)$.

Den zweiten Teil des Satzes, der von den in Klammern angeführten Unterräumen spricht, erhält man, indem man die Unterräume der Hyperebene S'_{n-1} durch die zugehörige Unterräume der Hyperebene S'_{n-1} und umgekehrt, die Konstanten a_i durch b_i und umgekehrt vertauscht.

Satz II, 6. *Die dem k-dimensionalen Unterraum S_k (S'_k) ($0 \leqq k \leqq n-r-3$) des Fundamentalunterraumes S_{n-r-2} (S'_{n-r-2}) entsprechende Varietät ist ein $(r+k)$-dimensionaler Unterraum $S'^{S_k}_{r+k}\left(S^{S'_k}_{r+k}\right)$ des Hauptunterraumes $S'^{S_{n-r-2}}_{n-2}\left(S^{S'_{n-r-2}}_{n-2}\right)$.*

Beweis. Es sei

$$(0, \ldots, 0, \lambda_{r+1}(\xi_i), \ldots, \lambda_{n-k-1}(\xi_i), \xi_{n-k}, \ldots, \xi_n)$$

ein allgemeiner Punkt des Unterraumes S_k; $\lambda_j(\xi_i)$ ($j = r+1, \ldots n-k-1$) sind von Konstanten a_i ($i = 0, \ldots, n$) abhängige Linearformen von unabhängigen Unbestimmten $\xi_{n+k}, \ldots, \xi_n$ (λ_j sind offenbar auch von anderen Konstanten des Körpers K abhängig).

Die durch alle Punkte des Unterraumes S_k gehenden Transversalen von Unterräumen S_r, S_{n-r-1} bilden ein Verbindungsraum der Unterräume S_k, S_r; das ist ein $(r+k+1)$-dimensionaler Unterraum $S^{S_k}_{r+k-1}$ mit einem allgemeinen Punkt

$$(\xi_0, \ldots, \xi_r, \lambda_{r+1}(\xi_i), \ldots, \lambda_{n-k-1}(\xi_i), \xi_{n-k}, \ldots, \xi_n).$$

Der Durchschnitt des Unterraumes $S^{S_k}_{r+k+1}$ mit der Hyperebene S'_{n-1} ist ein $(r+k)$-dimensionaler Unterraum $S'^{S_k}_{r+k} \subset S'_{n-1}$ mit einem allgemeinen Punkt

$$(\xi_0, \ldots, \xi_r, \lambda_{r+1}(\xi_i) \ldots, \lambda_{n-k-1}(\xi_i), \xi_{n-k}, \ldots, \xi_{n-1}, \lambda'_n(\xi_i)),$$

wo $\lambda'_{r+1}(\xi_i), \ldots, \lambda'_{n-k-1}(\xi_i), \lambda'_n(\xi_i)$ mittels Konstanten a_i, b_i ($i = 0, \ldots, n$) (und offenbar auch mittels anderen Konstanten vom Körper K) ausgedrückte Linearformen von Unbestimmten $\xi_0, \ldots, \xi_r, \xi_{n-k}, \ldots, \xi_{n-1}$ sind.

Der Unterraum $S'^{S_k}_{r+k} \subset S'^{S_{n-r-2}}_{n-2}$ ist ein in S'_{n-1} dem Fundamentalunterraum $S_k \subset S_{n-r-2}$ entsprechender Hauptunterraum.

Im speziellen Fall entspricht dem Punkt $(0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_n) \in S_{n-r-2}$ in S'_{n-1} ein r-dimensionaler Unterraum S^x_r mit einem allgemeinen Punkt

$$\left(\xi_0, \ldots, \xi_r, x_{r+1}, \ldots, x_{n-1}, -\sum_{i=0}^{r} \frac{b_i}{b_n}\xi_i - \sum_{i=r+1}^{n-1} \frac{b_i}{b_n}x_i\right).$$

Der Beweis des zweiten Teiles des Satzes (von den in Klammern angeführten Unterräumen) ist offenbar.

5.

Satz II, 7. *Jeder Punkt des Unterraumes S_{n-2} liegt im Unterraum, der diesem Punkt in der Korrespondenz T entspricht.*

Beweis. Jeder Punkt $(x) \in S_{n-2}$ erfüllt die Bedingungen (6) und (7), die man in der Form

$$\sum_{i=0}^{r} a_i X_i = -\sum_{j=r+1}^{n} a_j X_j, \tag{6'}$$

$$\sum_{i=0}^{r} b_i X_i = - \sum_{j=r+1}^{n} b_j X_j \tag{7'}$$

schreiben kann.

a) Für einen außerhalb der Durchschnitte des Unterraumes S_{n-2} mit den Fundamentalunterräumen der Hyperebenen S_{n-1}, S'_{n-1} liegenden Punkt gilt

$$\sum_{i=0}^{r} a_i x_i = - \sum_{=r+1}^{n} a_j x_j \neq 0,$$

$$\sum_{i=0}^{r} b_i x_i = - \sum_{j=r+1}^{n} b_j x_j \neq 0,$$

was in die Gleichungen (14) oder (14') eingesetzt

$$x_0 : \ldots : x_n = y_0 : \ldots : y_n$$

gibt, also der Punkt (x) fällt mit einem einzigen ihm entsprechenden Punkt (y) zusammen und ist in der Transformation T invariant. Solcher Punkt (x) besitzt nur den Typ 0.

b) Ist nun (x) ein Punkt des Durchschnittes des Unterraumes S_{n-2} mit dem Fundamentalunterraum S_{r-1} (S_{n-r-2} bzw. $\bar{S}_{n-3} - S_{r-2} - S_{n-r-3}$), so entspricht dem Punkt (x) außer ihm selbst auch ein durch ihn gehender $(n - r - 1)$-dimensionaler Unterraum (r-dimensionaler Unterraum bzw. eine Gerade). Es entspricht dem Punkt (x) in der Korrespondenz T jeder Punkt dieses Unterraumes, also u.a. auch der Punkt (x) selbst. Solcher Punkt (x) ist des Typs 0 auch 1.

Folgerung. *Jede Varietät $V \subset S_{n-2}$ ist eine Untervarietät der Varietät V', die der Varietät V in der Korrespondenz T entspricht.*

Die Inklusion $V \subset V'(V \not\equiv V')$ tritt ein, sobald der Durchschnitt der Varietät V mit den Fundamentalunterräumen nichtleer ist.

6. Inzidenzbeziehungen zwischen Fundamental- und Hauptunterräumen

Satz II, 8. *Je zwei Fundamentalunterräume der Hyperebene S_{n-1} (S'_{n-1}) liegen in einem $(n - 2)$-dimensionalen Unterraum der Hyperebene S_{n-1} (S'_{n-1}).*

Beweis.

1. Der Verbindungsraum der Unterräume S_{r-1}, S_{n-r-2} ist der Unterraum $\bar{S}_{n-2}$, wie es in II, 2 bewiesen war.

2. Der Verbindungsraum des Unterraumes S_{r-1} (Gleichungen (16)) und des Unterraumes $\bar{S}_{n-3}$ (Gleichungen (23)) ist ein durch die Gleichungen

$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0$$

bestimmter Unterraum; das ist der Hauptunterraum $S_{n-2}^{S_{n-r-2}}$.

3. Der Verbindungsraum des Unterraumes S_{n-r-2} (Gleichungen (17)) und des Unterraumes $\bar{S}_{n-3}$ (Gleichungen (23)) ist ein durch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{r} b_i X_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0$$

bestimmter Unterraum; das ist der Hauptunterraum $S_{n-2}^{S'_{r-1}}$.

Mann könnte analogische Resultate auch über die gegenseitige Lage der Fundamental- und Hauptunterräume in der Hyperebene S'_{n-1} gewinnen.

Die aus dem Beweises des Satzes II, 8 folgenden Resultate können auch so formuliert werden:

Satz II, 9.

1. *Der dem Fundamentalunterraum* S_{r-1} (S'_{r-1}) *entsprechende Hauptunterraum* $S'^{S_{r-1}}_{n-2}$ $\left(S^{S'_{r-1}}_{n-2}\right)$ *enthält die Fundamentalunterräume* S'_{n-r-2}, $\bar{S}'_{n-3}$ $(S_{n-r-2}, \bar{S}_{n-3})$ *und ist ihr Verbindungsraum.*

2. *Der dem Fundamentalunterraum* S_{n-r-2} (S'_{n-r-2}) *entsprechende Hauptunterraum* $S'^{S_{n-r-2}}_{n-2}$ $\left(S^{S'_{n-r-2}}_{n-2}\right)$ *enthält die Fundamentalunterräume* S'_{r-1}, $\bar{S}'_{n-3}$ $(S_{r-1}, \bar{S}_{n-3})$ *und ist ihr Verbindungsraum.*

3. *Der dem Fundamentalunterraum* $\bar{S}_{n-3}$ $(\bar{S}'_{n-3})$ *entsprechende Hauptunterraum* $\bar{S}'_{n-2}$ $\bar{S}(_{n-2})$ *enthält die Fundamentalunterräume* S'_{r-1}, S'_{n-r-2} (S_{r-1}, S_{n-r-2}) *und ist ihr Verbindungsraum.*

Weiter ist offenbar

Satz II, 10.

1. *Der Fundamentalunterraum* S_{r-1} (S'_{r-1}) *hat mit dem entsprechenden Hauptunterraum* $S'^{S_{r-1}}_{n-2}$ $\left(S^{S'_{n-r-2}}_{n-2}\right)$ *genau den Unterraum* S_{r-2} *gemeinsam.*

2. ***Der Fundamentalunterraum*** S_{n-r-2} (S'_{n-r-2}) ***hat mit dem entsprechenden Hauptunterraum*** $S'^{S_{n-r-2}}_{n-2}$ $\left(S^{S'_{n-r-2}}_{n-2}\right)$ ***genau den Unterraum*** S_{n-r-3} ***gemeinsam.***

3. ***Der Fundamentalunterraum*** $\bar{S}_{n-3}$ $(\bar{S}'_{n-3})$ ***hat mit dem entsprechenden Hauptunterraum*** $\bar{S}'_{n-2}$ $(\bar{S}_{n-2})$ ***genauden Unterraum*** $\bar{S}_{n-4}$ ***gemeinsam.***

Ebenso ist offenbar der

Satz II, 11.

1. ***Der Durchschnitt der Fundamentalunterräume*** S_{r-1} (S'_{r-1}), $\bar{S}_{n-3}$ $(\bar{S}'_{n-3})$ ***ist der Unterraum*** S_{r-2}.

2. ***Der Durchschnitt der Fundamentalunterräume*** S_{n-r-2} (S'_{n-r-2}), $\bar{S}_{n-3}$ $(\bar{S}'_{n-3})$ ***ist der Unterraum*** S_{n-r-3}.

Satz II, 12. *Der Hauptunterraum*

$S^{S'_{r-1}}_{n-2}\left(S'^{S_{r-1}}_{n-2}\right)$ *schneidet den Hauptunterraum* $S^{S'_{n-r-2}}_{n-2}\left(S'^{S_{n-r-2}}_{n-2}\right)$ *im Fundamentalunterraum* $\bar{S}'_{n-3}$ $(\bar{S}_{n-3})$. *Dieser Unterraum ist der Durchschnitt des Unterraumes* S_{n-2} *mit dem Unterraum* $S'^{S_{r-1}}_{n-2}\left(S'^{S'_{r-1}}_{n-2}\right)$ *auch mit dem Unterraum*

$S^{S'_{n-r-2}}_{n-2}\left(S'^{S_{n-r-2}}_{n-2}\right)$.

Folgerung. *Die Hauptunterräume* $S^{S'_{r-1}}_{n-2}\left(S'^{S_{r-1}}_{n-2}\right)$, $S^{S'_{n-r-2}}_{n-2}\left(S'^{S_{n-r-2}}_{n-2}\right)$ *haben gemeinsame Punkte nur im Unterraum* S_{n-2}.

Beweis des Satzes II, 12. Der Durchschnitt des Hauptunterraumes $S^{S'_{r-1}}_{n-2}$ mit dem Unterraum S_{n-2} ist durch die Gleichungen (25') und (7) gegeben, die äquivalent mit den Gleichungen (23) des Unterraumes $\bar{S}_{n-3}$ sind. Die den Durchschnitt des Unterraumes $S^{S'_{n-r-2}}_{n-2}$ mit dem Unterraum S_{n-2} bestimmende Gleichungen (27') und (7) sind mit den Gleichungen (23) des Unterraumes $\bar{S}_{n-3}$ äquivalent. Da die Unterräume $S^{S'_{r-1}}_{n-2}$, $S^{S'_{n-r-2}}_{n-2}$ verschieden sind, ist ihr $(n-3)$-dimensionaler Durchschnitt gerade der Unterraum $\bar{S}_{n-3}$.

Die Durchschnitte der Hauptunterräume $S^{S'_{r-1}}_{n-2} \cap \bar{S}_{n-2}$, $S^{S'_{n-r-2}}_{n-2} \cap \bar{S}_{n-2}$, die durch die Gleichungen

$S^{S'_{r-1}}_{n-2} \cap \bar{S}_{n+2}$: (25') und (21),

$S^{S'_{n-r-2}}_{n-2} \cap \bar{S}_{n-2}$: (27') und (21)

gegeben sind, besitzen keine wichtigere Eigenschaften. Beide Durchschnitte gehen durch den Unterraum $\bar{S}_{n-4}$ hindurch.

7. Beispiel. Die Transformation eines Linearsystems von Unterräumen eines Fundamentalunterraumes

Es sei ein Unterraum S_{k-1} $(k \leq r-2)$ im Durchschnitt des Fundamentalunterraumes S_{r-1} mit dem Unterraum S_{n-2} durch die Gleichungen

$$X_{r+1} = \ldots = X_n = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0, \tag{31}$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0, \tag{31}$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i^{(h)} X_i = 0, \quad h = 1, \ldots, r-k-1,$$

gegeben; der Rang der Matrix $\|c_i^{(h)}\|$ $(i = 0, \ldots, n;\ h = 1, \ldots, r-k-1)$ ist $r-k-1$. Das $(r-k-1)$-dimensionale Linearsystem von k-dimensionalen Unterräumen in S_{r-1} mit der Basis S_{k-1} besitzt die Grundunterräume

$$S_k^{(j)}: X_{r+1} = \ldots = X_n = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0, \tag{32}$$
$$\sum_{i=0}^{n} c_i^{(h)} X_i = 0;\ h = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, r-k-1;\ j = 1, \ldots, r-k-1;$$

$$S_k^{(r-k)}: X_{r+1} = \ldots = X_n = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0, \tag{33}$$
$$\sum_{i=0}^{n} c_i^{(h)} X_i = 0,\ h = 1, \ldots, r-k-1.$$

Durch die Transformation T entsprechen es den Unterräumen (32) und (33) in S'_{n-1} $(n-r+k-1)$-dimensionale Unterräume

$$S'^{(j)}_{n-r+k-1}: \sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0, \tag{34}$$
$$\sum_{i=0}^{r} b_i X_i = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{r} c_i^{(h)} X_i = 0;\ h = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, r-k-1;\ j = 1, \ldots, r-k-1;$$
$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0,$$

$$S'^{(r-k)}_{n-r+k-1}: \sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0, \tag{35}$$
$$\sum_{i=0}^{r} c_i^{(h)} X_i = 0;\ h = 1, \ldots, r-k-1;$$
$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0,$$

die im Hauptunterraum $S'^{S_{r-1}}_{n-2}$ enthalten sind und in ihm ein $(r - k - 1)$-dimensionales Linearsystem von $(n - r + k - 1)$-dimensionalen Unterräumen bestimmen. Die Basis dieses Systems ist ein $(n - r + k - 2)$-dimensionaler Unterraum

$$
\begin{aligned}
S'_{n-r+k-2}\colon & \sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0, \\
& \sum_{i=0}^{r} b_i X_i = 0, \\
& \sum_{i=0}^{r} c_i^{(h)} X_i = 0; \; h = 1, \ldots, r - k - 1; \\
& \sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

der dem Fundamentalunterraum $S_{k-1} \subset S_{r-1}$ entspricht. Die Unterräume (34) und (35) sind Grundunterräume dieses Linearsystems.

III. Den Unterräumen von der Hyperebene S_{n-1} entsprechende Varietäten

In diesem Teil werden die Varietäten betrachtet, die durch die Transformation der von Fundamental- und Hauptunterräumen verschiedenen Unterräume der Hyperebene S_{n-1} entstehen. Da die gegenseitige Beziehung der Hyperebenen S_{n-1}, S'_{n-1} in der Korrespondenz T symmetrisch ist, könnte man erhaltene Resultate in offenbarer Weise auch für die Transformation der Unterräume von S'_{n-1} formulieren.

Die Unterräume in S_{n-1} werden als Durchschnitte der Hyperebene S_{n-1} mit der zugehörigen Anzahl der linear unabhängigen Hyperebenen bestimmt, also eine Grundaufgabe ist die Transformation eines $(n - 2)$-dimensionalen Unterraumes der Hyperebene S_{n-1} als eines Durchschnittes der Hyperebene S_{n-1} mit einer beliebigen von S_{n-1} verschiedenen Hyperebene.

1. Die dem (n — 2)-dimensionalen Unterraum $S^c_{n-2} \subset S_{n-1}$ entsprechende Varietät

Satz III, 1. *Es sei ein von S_{n-2} verschiedener und die Fundamentalunterräume S_{r-1}, S_{n-r-2}, $\bar{S}_{n-3}$ nicht enthaltender $(n - 2)$-dimensionaler Unterraum $S^c_{n-2} \subset S_{n-1}$ gegeben. Die dem Unterraum S^c_{n-2} in S'_{n-1} entsprechende Varietät ist eine irreduzible $(n - 2)$-dimensionale Quadrik.*

Beweis. Der Unterraum S_{n-2} sei ein Durchschnitt der Hyperebene S_{n-1} mit der Hyperebene S^c_{n-1}, deren Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} c_i X_i = 0; \; c_i \in K; \tag{37}$$

ist;

der Rang der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_i \\ c_i \end{matrix} \right\|$$

$(i = 0, \ldots, n)$ ist 2.

Die Gleichungen des Unterraumes S^c_{n-2} sind

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i X_i = 0. \tag{38}$$

Die Bedingungen des Satzes sind z.B. so erfüllt:
$c_r \neq 0$; der Rang der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_i \\ c_i \end{matrix} \right\|$$

$(i = 0, \ldots, r)$ ist 2; es sei

$$D_{r-1,\,r}(a, c) = \begin{vmatrix} a_{r-1} & a_r \\ c_{r-1} & c_r \end{vmatrix} \neq 0;$$

$c_n \neq 0$; der Rang der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_i \\ c_i \end{matrix} \right\|$$

$(i = r+1, \ldots, n)$ ist 2; es sei

$$D_{n-1,\,n}(a, c) = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ c_{n-1} & c_n \end{vmatrix} \neq 0;$$

der Rang der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{matrix} \right\|$$

$(i = 0, \ldots, n)$ ist 3; es sei

$$D_{n-2,\,n-1,\,n}(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ein allgemeiner Punkt des Unterraumes S^c_{n-2} ist z.B.

$$\left(\xi_0, \ldots, \xi_{n-2}, \frac{1}{D_{n-1,\,n}(a, c)} \sum_{i=0}^{n-2} D_{ni}(a, c)\, \xi_i, \; -\frac{1}{D_{n-1,\,n}(a, c)} \sum_{i=0}^{n-2} D_{n-1,\,i}(a, c)\, \xi_i\right);$$

die Bedeutung von $D_{ni}\,(a, c)$, $D_{n-1,\,i}(a, c)$ ist offenbar.

Durch die Transformation (14′) entspricht es dem durch die Gleichungen (38) gegebenen Unterraum S^c_{n-2} in S'_{n-1} eine durch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0, \tag{39}$$

$$\sum_{r=0}^{r} c_i X_i \sum_{j=r+1}^{n} a_j X_j - \sum_{i=r+1}^{n} c_i X_i \sum_{j=0}^{r} a_j X_j = 0 \tag{39}$$

bestimmte Varietät; es sind die Gleichungen einer Quadrik in S_{n-1} von der Dimension $d \leqq n-2$.

Durch die Transformation T entspricht es dem allgemeinen Punkt (ξ) des Unterraumes S^c_{n-2} auf der Quadrik (39) ein Punkt (η) mit Koordinaten:

$$\eta_i = \xi_i \left\{ \sum_{j=r+1}^{n-2} b_j \xi_j - \frac{1}{D_{n,n-1}(a,c)} \left[\sum_{j=0}^{n-2} (b_{n-1} \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot D_{nj}(a,c) - b_n D_{n-1,j}(a,c)) \xi_j \right] \right\}, \; i = 0, \ldots, r;$$

$$\eta_i = -\xi_i \sum_{j=0}^{r} b_j \xi_j, \; i = r+1, \ldots, n-2;$$

$$\eta_{n-1} = \left(\frac{1}{D_{n,n-1}(a,c)} \sum_{i=0}^{n-2} D_{ni}(a,c)\, \xi_i \right) \left(\sum_{j=0}^{r} b_j \xi_j \right),$$

$$\eta_n = -\left(\frac{1}{D_{n,n-1}(a,c)} \sum_{i=0}^{n-2} D_{n-1,i}(a,c)\, \xi_i \right) \left(\sum_{j=0}^{r} b_j \xi_j \right).$$

Da ξ_i $(i = 0, \ldots, n-2)$ über dem Körper K algebraisch unabhängig sind, sind auch η_i $(i = 0, \ldots, n-2)$ algebraisch unabhängig; die Dimension des Punktes (η) ist $n-2$, d.h. die höchste, welche ein Punkt der Quadrik (39) besitzen kann. Darum ist der Punkt (η) ein allgemeiner Punkt der Quadrik. Nach dem zweiten Irreduzibilitätskriterium in [7], S. 110, ist die Quadrik irreduzibel; bezeichne man sie Q'^c_{n-2}.

Die Durchschnitte des Unterraumes S^c_{n-2} mit den Fundamentalunterräumen der Hyperebene S_{n-1} sind durch die Gleichungen

$$S^c_{r-2} \equiv S^c_{n-2} \cap S_{r-1} : \sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} c_i X_i = 0, \quad X_{r+1} = \ldots = X_n = 0; \tag{40}$$

$$S^c_{n-r-3} \equiv S^c_{n-2} \cap S_{n-r-2} : \sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} c_i X_i = 0, \quad X_0 = \ldots = X_r = 0; \tag{41}$$

$$\bar{S}^c_{n-4} \equiv S^c_{n-2} \cap \bar{S}_{n-3} : \sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0, \tag{42}$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i X_i = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{r} b_i X_i = 0, \tag{42}$$
$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i = 0$$

gegeben.

In der Korrespondenz T entsprechen ihnen die Unterräume

$$S'^{S^c_{r-2}}_{n-3}: \sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0, \tag{43}$$
$$\sum_{i=0}^{r} c_i X_i = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0;$$

$$S'^{S^c_{n-r-3}}_{n-3}: \sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i = 0,$$
$$\sum_{i=r+1}^{n} c_i X_i = 0, \tag{44}$$
$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0$$

und die Varietät

$$V'^{\bar{S}^c_{n-4}}_{n-3}: \sum_{i=0}^{r} c_i X_i \sum_{j=r+1}^{n} a_j X_j - \sum_{i=r+1}^{n} c_i X_i \cdot \sum_{i=0}^{r} a_j X_j = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{r} b_i X_i = 0, \tag{45}$$
$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i = 0.$$

Die Betrachtung gilt allgemein nur bei der in der Bemerkung 1 in II, 3 angeführten Voraussetzung.

Satz III, 2. *Die Quadrik Q'^c_{n-2} besitzt diese Eigenschaften:*

1. *Sie enthält die Fundamentalunterräume S'_{r-1}, S'_{n-r-2}, $\bar{S}'_{n-3}$ von der Hyperebene S'_{n-1}.*

2. *Sie enthält die Hauptunterräume $S'^{S^c_{r-2}}_{n-3}$, $S'^{S^c_{n-r-3}}_{n-3}$ und die Hauptvarietät $V'^{\bar{S}^c_{n-4}}_{n-3}$, die den Durchschnitten S^c_{r-2}, S^c_{n-r-3}, $\bar{S}^c_{n-4}$ des Unterraumes S^c_{n-2} mit den Fundamentalunterräumen S_{r-1}, S_{n-r-2}, $\bar{S}_{n-3}$ der Hyperebene S_{n-1} entsprechen.*

3. *Sie enthält dem Vergleich* $S^c_{n-3} \equiv S^c_{n-2} \cap S_{n-2}$.

Beweis.

1. Aus der Vergleichung der Gleichungen (18), (19), (21) und (39) ist die Behauptung offenbar.

2. Es ist offenbar aus (43), (44), (45) und (39).

3. Der Unterraum S^c_{n-3} ist durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0,\\ &\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0, \qquad (46)\\ &\sum_{i=0}^{n} c_i X_i = 0\end{aligned}$$

bestimmt.

Die Erfüllung der Gleichungen (39) durch Koordinaten jedes Punktes vom Unterraum S^c_{n-3} ist offenbar.

Satz III, 3. *Die Quadrik* Q'^c_{n-2} *enthält zwei Systeme* ${}^1\mathbf{S}$, ${}^2\mathbf{S}$ *von* $(n-3)$*-dimensionalen Unterräumen.*

Beweis. Die Systeme von $(n-3)$-dimensionalen Unterräumen auf der Quadrik Q'^c_{n-2} besitzen allgemeine Glieder:

$$\begin{aligned}&{}^1\mathbf{S}: \sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0,\\ &u\sum_{i=0}^{r} c_i X_i = v\sum_{i=0}^{r} a_i X_i, \qquad (47)\\ &u\sum_{i=r+1}^{n} c_i X_i = v\sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i;\end{aligned}$$

$u, v \in \Omega$ sind transzendent über K;

$$\begin{aligned}&{}^2\mathbf{S}: \sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0,\\ &p\sum_{i=0}^{r} c_i X_i = q\sum_{i=r+1}^{n} c_i X_i, \qquad (48)\\ &p\sum_{i=0}^{r} a_i X_i = q\sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i;\end{aligned}$$

$p, q \in \Omega$ sind transzendent über K.

$(n-3)$-dimensionale Unterräume der Quadrik entstehen durch eine Spezialisierung

$(u, v) \to (u', v') \neq (0, 0)$; $u', v' \in K$;

$(p, q) \to (p', q') \neq (0, 0)$; $p', q' \in K$.

Durch jeden Punkt $(x) \in Q'^{c}_{n-2}$, der im durch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0,$$

$$\sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{r} c_i X_i = 0,$$

$$\sum_{i=r+1}^{n} c_i X_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0$$

bestimmten Unterraum V'^{c}_{n-5} nicht liegt, geht genau ein Unterraum des Systems ${}^{1}\boldsymbol{S}$ auch des Systems ${}^{2}\boldsymbol{S}$. Eine besondere Stellung besitzen Punkte des Unterraumes $\bar{S}'_{n-3}$, bei denen der durch sie gehende Unterraum vom Systems ${}^{1}\boldsymbol{S}$ festbleibt – es ist der Unterraum $\bar{S}'_{n-3}$ selbst; der Unterraum des zweiten Systems ist durch die Parameter

$$p' : q' = - \sum_{i=r+1}^{n} c_i X_i : \sum_{i=0}^{r} c_i X_i$$

bestimmt.

Analogische Bedeutung haben auch die Hauptunterräume $S'^{S^c_{r-2}}_{n-3}$, $S'^{S^c_{n-r-3}}_{n-3}$; sie gehören zum zweiten System.

Da die Quadrik Q'^{c}_{n-2} irreduzibel ist, ist die Zahl $(n - 3)$ die höchste Dimension der Unterräume, die die Quadrik enthält.

Folgerung. *Die Quadrik* Q'^{c}_{n-2} ist von der Art $\varrho \geqq n - 4$.

Beweis. Eine Quadrik Q'_{n-2} von der Art ϱ in S'_{n-1} enthält einen $(\varrho - 1)$-dimensionalen Unterraum $V'_{\varrho-1}$ von singulären Punkten – einen Doppelunterraum der Quadrik. Ein mit $V'_{\varrho-1}$ linear disjunkter Unterraum $S'_{n-\varrho-1} \subset S'_{n-1}$ schneidet die Quadrik Q'_{n-2} in einer regulären Quadrik $Q'_{n-\varrho-2}$. Die höchste Dimension der auf der Quadrik $Q'_{n-\varrho-2}$ liegenden Unterräume ist $d = \left[\frac{n - \varrho - 2}{2}\right]$. Die Unterräume der Qudrik Q'_{n-2} sind außer den Unterräumen der Quadrik $Q'_{n-\varrho-2}$ auch Verbindungsräume von diesen Unterräumen und den Unterräumen des Doppelunterraumes $V'_{\varrho-1}$ (dabei zählt man zu Unterräumen von $V'_{\varrho-1}$ auch den Unterraum $V'_{\varrho-1}$ selbst). Die Dimension von diesen Unterräumen ist höchstens $\varrho + \left[\frac{n - \varrho - 2}{2}\right]$.

Die höchste Dimension von auf der Quadrik Q'^{c}_{n-2} liegenden Unterräumen ist $(n - 3)$. Danach gilt es über ϱ:

$$\varrho + \frac{n - \varrho - 2}{2} \geqq n - 3;$$

daraus folgt $\varrho \geqq n - 4$.

Satz III, 4. *Die Quadrik Q'^{c}_{n-2} ist von der Art* (n − 4).

Beweis. Der Doppelunterraum der Quadrik ist der durch die Gleichungen (49) gegebene Unterraum V'^{c}_{n-5}. Es folgt z.B. aus [5], Kap. VIII, § 6, Satz 13, S. 217.

Folgerungen.

1. *Ein mit dem Doppelunterraum V'^{c}_{n-5} disjunkter Unterraum $S'_3 \subset S'_{n-1}$ schneidet die Quadrik Q'^{c}_{n-2} in einer Quadrik Q'^{c}_{2}. $(n-3)$-dimensionale Unterräume der Quadrik Q'^{c}_{n-2} sind Verbindungsräume vom Doppelunterraum V'^{c}_{n-5} und von Geraden der Quadrik Q'^{c}_{2}.*

2. *Die Quadrik Q'^{c}_{n-2} besitzt im allgemeinen keine singulären Punkte für $n \leqq 4$. Besitzt sie für $n = 3$ einen singulären Punkt, ist sie reduzibel.*

Bemerkung. Aus den Gleichungen (21) und (49) ist es klar, daß der Doppelunterraum V'^{c}_{n-5} der Quadrik Q'^{n}_{c-2} ein eigener Unterraum des Fundamentalunterraumes $\bar{S}'_{n-3}$ ist.

2. Die Unterräume S^{c}_{n-2} spielen in der Hyperebene S_{n-1} eine Rolle von Hyperebenen. Die ihnen in S'_{n-1} entsprechenden Quadriken Q'^{c}_{n-2} sind homaloide Hyperflächen und müssen bekannte Bedingungen eines homaloidischen Systems genügen, d.h. ein Durchschnitt von je $(n-1)$ linear unabhängigen Quadriken $Q'^{(i)}_{n-2}$ $(i = 1, \ldots, \ldots, n-1)$, deren linear unabhängige Urbilde $S^{(i)}_{n-2}$ die Bedingungen des Satzes III, 1 erfüllen, muß außer allen Fundamentalunterräumen nur aus einem einzigen dem Schnittpunt aller Unterräume entsprechenden Punkt bestehen. Mit anderen Worten, die Gesamtheit der Fundamentalunterräume in S'_{n-1} – und infolge der Symmetrie der Korrespondenz T, die gerade aus der Definition folgt, auch in S_{n-1} – muß zugehörige Äquivalenzbedingungen (Terminologie nach [4], [6]) genügen. Man zeigt in weiterem Verlauf, wie diese Bedingungen erfüllt werden.

Die Resultate über die Fundamentalunterräume und über die Eigenschaften der homaloiden Hyperflächen führen zu einem wichtigen Satz von der Art der Korrespondenz.

Satz III, 5. *Die Transformation T ist monoidal.*

Beweis. Der Unterraum $\bar{S}'_{n-3}$ ist auf jeder homaloiden Quadrik Q'^{c}_{n-2} einfach (d.h. (2 − 1)-fach) enthalten (Satz II, 2; Bemerkung nach dem Satz III, 4). Dadurch ist die Bedingung der Definition einer monoidalen Transformation nach [6], S. 3 erfüllt.

Die Fundamentalunterräume in S'_{n-1} genügen auch in [6] durch Beschränkungen 1−4 (Kap. I, Abs. 3, S. 6−7) angeführte Bedingungen (Satz II, 2; II, 8; II, 11). Es gelten ebenso auch dort angeführte Sätze a)−f). Man kann auf diesem Grund die Resultate der Arbeit [6] an die Transformation T anwenden. Z.B. aus Kap. I, Abs.11, S.20, Satz e) folgt ein hier schon festgestellter Resultat (Satz II, 2), daß die Transformation T symmetrisch (im Sinn der Definition in Kap. I, Abs. 6, S.10 in [6]) ist. Weiter z.B. Satz II, 4 ist eine Spezialisierung des Satzes II, §3, Kap. XVIII, S. 274 aus [3, III].

3. Postulationszahlen der Fundamentalunterräume

Der Unterraum $S^{c}_{n-2} \subset S_{n-1}$ ist durch $(n-1)$ linear unabhängige Punkte eindeutig bestimmt; seien sie von Fundamentalpunkten verschieden. Die entsprechenden $(n-1)$ linear unabhängigen Punkte in S'_{n-1} müssen eine homaloide Hyperfläche Q'^{c}_{n-2} eindeutig bestimmen. Da die Quadrik Q'^{c}_{n-2} durch eine Gruppe von $\binom{2n-1}{+2}$

$- 1 = \binom{n+1}{2} 1$ — einfachen für die Bestimmung der Quadrik unabhängigen Punkten oder durch gleiche Anzahl von anderen einfachen unabhängigen Bedingungen bestimmt wird, müssen die in jeder Quadrik Q'^c_{n-2} liegenden Fundamentalunterräume $\binom{n+1}{2} - 1 - (n-1) = \binom{n+1}{2} - n$ einfache für die Bestimmung der Quadrik unabhängige Punkte oder gleiche Anzahl von anderen einfachen unabhängigen Bedingungen vertreten. Die Anzahl von diesen durch die Inzidenz der Quadrik Q'^c_{n-2} mit einem Fundamentalunterraum verursachten Bedingungen heißt Postulationszahl dieses Unterraumes.

Satz III, 6. *Postulationszahlen von den Fundamentalunterräumen* S'_{r-1}, S'_{n-r-2}, $\bar{S}'_{n-3}$ *sind:*

1. $S'_{r-1} : r$
2. $S'_{n-r-2} : n - r - 1$
3. $\bar{S}'_{n-3} : \binom{n+1}{2} - 2(n-1) - 1.$

Beweis folgt aus [6]:
Die Behauptungen 1. und 2. folgen aus dem Satz a), Abs. 4, Kap. I, S.8, die Behauptung 3. folgt aus der Formel (5) des 2. Absatzes, Kap. I, S.5.

Also insgesamt ist Postulationszahl aller Fundamentalunterräume

$$\binom{n+1}{2} - 2(n-1) - 1 + r + n - r - 2 = \binom{n+1}{2} - 1 - (n-1),$$

was mit jener Bedingung übereinstimmt, daß die Quadrik Q'^c_{n-2} eindeutig durch übrige $(n-1)$ linear unabhängige Punkte, die den $(n-1)$ linear unabhängigen den Unterraum $S^c_{n-2} \subset S_{n-1}$ bestimmenden Punkten entsprechen, bestimmt wird.

4. Äquivalenzzahl der Fundamentalunterräume

Lemma. *Der Durchschnitt von k $(2 \leqq k \leqq n-1)$ irreduziblen $(n-2)$-dimensionalen Quadriken in $(n-1)$-dimensionalem Unterraum, von denen je zwei sich in einer rein $(n-3)$-dimensionalen Varietät schneiden und alle diese Schnittvarietäten verschieden sind, ist eine $(n-k-1)$-dimensionale Varietät von der Ordnung 2^k.*

Bemerkung. Die im Lemma behandelten Quadriken sind in keinem Zusammenhang mit Quadriken, die Homaloiden der betrachteten quadratischen Transformation sind.

Beweis. Je zwei Quadriken vom System $Q^{(i)}_{n-2}$ $(i = 1, \ldots, k)$ genügen die Voraussetzungen des Bézout'schen Satzes ([3, II], Kap. XII, S.174, Satz II).

Beweis durch die vollständige Induktion:
I. Für $k = 2$ ist es der auf zwei Hyperflächen von der Dimension $(n-2)$ und der Ordnung 2 in $(n-1)$-dimensionalem Raum angewandte Bézout'sche Satz.
II. Induktionsvoraussetzung: Der Durchschnitt von k die Voraussetzungen des Lemmas genügenden Quadriken $Q^{(i)}_{n-2}$ ist eine Varietät Q_{n-k-1} von der Dimension $(n-k-1)$ und von der Ordnung $g = 2^k$. Eine weitere die Voraussetzungen des Lemmas genügende Quadrik $Q^{(k+1)}_{n-2}$ hat nach dem Bézout'schen Satz mit der Varie-

tät Q_{n-k-1} als einen Durchschnitt eine Varietät Q_{n-k-2} von der Dimension $(n - k - 2)$ und von Ordnung $g = 2.2^k = 2^{k+1}$.

Das war zu beweisen.

Das auf einen Durchschnitt von $(n - 1)$ linear unabhängigen homaloiden Hyperlächen der Transformation T angewandte Lemma führt zu einer Bedingung:

Die gesamte Äquivalenzzahl aller Fundamentalunterräume der Hyperebene S'_{n-1} ist $2^{n-1} - 1$.

Satz III, 7. *Äquivalenzzahlen der Fundamentalunterräume* S'_{r-1}, S'_{n-r-2}, $\bar{S}'_{n-3}$ *sind:*

1. *Für* $S'_{r-1} : r$
2. *Für* $S'_{n-r-2} : n - r - 1$
3. *Für* $\bar{S}'_{n-3} : 2^{n-1} - n$.

Beweis. Die Behauptungen 1. und 2. folgen aus dem Satz c), Abs. 4, S.8, Kap. I in [6], die Behauptung 3. aus einer Folgerung des Satzes a), Abs. 2, S.5, Kap. I dortselbst.

5. Den k-dimensionalen Unterräumen $S_k \subset S_{n-1}$ entsprechende Varietäten

Es sei ein Unterraum $S_k \subset S_{n-1}$ $(1 \leqq k \leqq n - 2)$ als Durchschnitt der Hyperebene S_{n-1} mit $(n - k - 1)$ linear unabhängigen Hyperebenen $S^{(h)}_{n-1}$ $(h = 1, \ldots, \ldots, n - k - 1)$ gegeben. Es besitzen die Hyperebenen $S^{(h)}_{n-1}$ diese Eigenschaften:

1. Jede von ihnen ist von S_{n-1} verschieden;
2. Keine von ihnen enthält einen von Unterräumen S_{n-2}, S_{r-1}, S_{n-r-2}, $\bar{S}_{n-3}$;
3. Die Durchschnitte dieser Hyperebenen mit jedem von Unterräumen S_{n-2}, S_{r-1}, S_{n-r-2}, $\bar{S}_{n-3}$ sind einander verschieden.

Die Gleichungen des Unterraumes S_k seien

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0\,, \tag{50}$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i^{(h)} X_i = 0\,;\; c_i^{(h)} \in K\,;\; h = 1, \ldots, n - k - 1.$$

Jede Gleichung von (50) außer der ersten drückt eine von Hyperebenen $S^{(h)}_{n-1}$ aus. Um die Voraussetzungen über die Hyperebenen $S^{(h)}_{n-1}$ erfüllt werden, muß es gelten: Der Rang der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_i \\ b_i \\ c_i^{(h)} \end{matrix} \right\|$$

$(i = 0, \ldots, n)$ ist 3 für jede Zahl h $= 1, \ldots, n - k - 1$; dadurch ist es gesichert, daß der Rang jeder Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_i \\ c_i^{(h)} \end{matrix} \right\|$$

$(i = 0, \ldots, n; h = 1, \ldots, n - k - 1)$ 2 ist;

der Rang der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} c_i^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_i^{(n-k-1)} \end{matrix} \right\|$$

($i = 0, \ldots, n$) ist $n - k - 1$;
der Rang der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} c_i^{(h)} \\ c_i^{(m)} \end{matrix} \right\|$$

($h, m = 1, \ldots, n - k - 1; h \neq m$)
ist gleich 2 für $i = 0, \ldots, r$ auch für $i = r + 1, \ldots, n$ bei allen Paaren h, m ($h \neq m$);
der Rang der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_i \\ c_i^{(h)} \end{matrix} \right\|$$

ist gleich 2 für jede Zahl $h = 1, \ldots, n - k - 1$ bei $i = 0, \ldots, r$ auch bei $i = r + 1, \ldots, n$.

Satz III, 8. *Dem Unterraum $S_k \subset S_{n-1}$ mit den gegebenen Eigenschaften entspricht in S'_{n-1} eine Varietät Q'_k, die nach dem Weglassen einiger festen Varietäten k-dimensional ist.*

Beweis. Alle Punkte, die den Punkten des durch die Gleichungen (50) bestimmten Unterraumes entsprechen, bilden in S'_{n-1} eine durch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{r} c_i^{(h)} X_i \sum_{j=r+1}^{n} a_j X_j - \sum_{i=r+1}^{n} c_i^{(h)} X_i \sum_{j=0}^{r} a_j X_j = 0, \tag{51}$$

$$h = 1, \ldots, n - k - 1,$$

gegebene Varietät Q'_k. Das ist – angesichts der linearen Unabhängigkeit von Hyperebenen $S_{n-1}^{(h)}$ und dadurch auch der linearen Unabhängigkeit der Quadriken $Q_{n-1}^{(h)}$ [$Q_{n-1}^{(h)}$ sind in S_n durch die einzelne Gleichungen (51) (außer der ersten) gegebene Quadriken] nach dem Weglassen einiger festen Bestandteile, deren Dimension auch höher als k sein kann – eine Varietät von der Dimension k.

Einzelne durch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0, \tag{52}$$

$$\sum_{i=0}^{r} c_i^{(h)} X_i \sum_{j=r+1}^{n} a_j X_j - \sum_{i=r+1}^{n} c_i^{(h)} X_i \sum_{j=0}^{r} a_j X_j = 0$$

bestimmten Quadriken $Q'^{(h)}_{n-2}$ ($h = 1, \ldots, n - k - 1$) der Hyperebene S'_{n-1} entsprechen den durch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i^{(h)} X_i = 0 \tag{53}$$

gegebenen $(n-2)$-dimensionalen Unterräumen $S_{n-2}^{(h)}$ $(h = 1, \ldots, n-k-1)$ der Hyperebene S_{n-1}. Die Varietät Q'_k ist Durchschnitt von allen diesen Quadriken.

Einige festen Varietäten des vollständigen Durchschnittes mit der Dimension höher als k müssen aus dem Durchschnitt weggelassen werden. Es sind im 1. Teil des folgenden Satzes angeführte Varietäten.

Satz III, 9. *Die Varietät Q'_k besitzt diese Eigenschaften:*

1. *Sie enthält die Fundamentalunterräume S'_{r-1}, S'_{n-r-2}, $\bar{S}'_{n-3}$ der Hyperebene S'_{n-1}.*

2. *Sind Durchschnitte des Unterraumes S_k mit Fundamentalunterräumen S_{r-1}, S_{n-r-2}, $\bar{S}_{n-3}$ nichtleer, enthält die Varietät Q'_k die diesen Durchschnitten entsprechenden Hauptunterräume und Hauptvarietät.*

3. *Sie enthält den Unterraum $S_{k-1} \equiv S_k \cap S_{n-2}$.*

Beweis.

1. Die Fundamentalunterräume der Hyperebene S'_{n-1} liegen auf jeder Quadrik $Q'^{(h)}_{n-2}$.

2. Die Behauptung ist aus der Beziehung zwischen den Fundamentalunterräumen und ihnen entsprechenden Hauptunterräumen und Hauptvarietät (II. Teil, Abs. 3, 4, Sätze II, 5; II, 6) offensichtlich. Der Durchschnitt $S_k \cap S_{r-1}$ ist gewiß nichtleer, wenn $k \geqq n-r$ ist, der Durchschnitt $S_k \cap S_{n-r-2}$ ist immer nichtleer, wenn $k \geqq r+1$ ist, der Durchschnitt $S_k \cap \bar{S}_{n-3}$ ist gewiß nichtleer, wenn $k \geqq 2$ ist. Existieren diese Durchschnitte und sind sie genau $(\kappa + r - n)$-bzw. $(k-r-1)$-bzw. $(k-2)$-dimensional, so sind entsprechende Hauptunterräume und Hauptvarietät genau $(k-1)$-dimensional.

3. Die Inzidenz von S_{k-1} mit Q'_k ist offenbar.

Satz III, 10. *Die Varietät $\bar{Q}'_k$, die aus der Varietät Q'_k durch das Weglassen der Fundamentalunterräume S'_{r-1}, S'_{n-r-2}, $\bar{S}'_{n-3}$ der Hyperebene S'_{n-1} entsteht, ist eine rein k-dimensionale Varietät, die diese Eigenschaften besitzt:*

1. *Für $k = n-2, \ldots, n-r$ ist ihre Ordnung $g = n-k$ und der Unterraum $\bar{S}'_{n-3}$ schneidet sie in einer Varietät $\bar{Q}'_{k-1}$ von der Dimension $(k-1)$ und Ordnung $(n-k-1)$.*

2. *Für $k = n-r-1, \ldots, r$ ist ihre Ordnung $g = r+1$; der Unterraum $\bar{S}'_{n-3}$ schneidet sie in einer Varietät $\bar{Q}'_{k-1}$ von der Dimension $(k-1)$ und Ordnung r; der Unterraum S'_{n-r-2} schneidet sie im Unterraum S'_{k-1} von der Dimension $k-1$.*

3. *Für $k = r-1, \ldots, 1$ ist ihre Ordnung $g = k+1$; der Unterraum $\bar{S}'_{n-3}$ schneidet sie in einer Varietät Q'_{k-1} von der Dimension $(k-1)$ und Ordnung k; der Unterraum S'_{n-r-2} schneidet sie im Unterraum $S'^{S'_{n-r-2}}_{k-1}$, der Unterraum S'_{r-1} im Unterraum $S'^{S'_{r-1}}_{k-1}$.*

Der Satz folgt aus [6], Kap. I, Abs. 1, Satz a); Abs. 4, S.8, Satz b); Abs. 11, S.20, Satz c). Die Behauptung 3. über die Ordnung der Varietät $\bar{Q}'_k$ im Fall $k = r-1, \ldots, 1$ ist darauf begründet, daß die Transformation T symmetrisch ist.

Satz III, 11. *Die Gesamtheit aller auf jeder von Quadriken $Q'^{(h)}_{n-2}$ $(h = 1, \ldots, n-k-1)$ singulären Punkte – falls sie nichtleer ist – ist ein Unterraum von der Dimension mindestens $(2k-n-1)$.*

Beweis. Die Gesamtheit aller singulären Punkte der Varietät Q'_k – falls es überhaupt solche geben – enthält den durch die Gleichungen

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0\,,\\ \sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i = 0\,,\\ \sum_{i=0}^{r} c_i^{(h)} X_i = 0\,,\\ \sum_{i=r+1}^{r} c_i^{(h)} X_i = 0\,,\ h = 1, \ldots, n-k-1\,;\\ \sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0\end{gathered} \tag{54}$$

bestimmten Durchschnitt von den Doppelunterräumen der Quadriken $Q'^{(h)}_{n-2}$.

Sollen die Gleichungen (54) in maximaler Stufe linear unabhängig sein – wie es die Voraussetzungen über die Koeffizienten a_i, b_i, $c_i^{(h)}$ verlangen – so existiert eine Lösung nur dann, sobald

$$2(n-k)+1 \leqq n, \text{ d.h. } k \geqq \frac{n-1}{2} \text{ ist.}$$

Das System (54) besitzt dann $(2k-n)$ linear unabhängige Lösungen.

a) Ist $k < \left[\frac{n-1}{2}\right]$, so ist der Durchschnitt $\bigcap_{h=1}^{n-k-1} V'^{(h)}_{n-5}$ im allgemeinen leer. Damit er nichtleer sei, müßten die Koeffizienten $c_i^{(h}$ besondere Bedingungen erfüllen.

b) Ist $k \geqq \frac{n-1}{2}$ und sind die Gleichungen (54) linear unabhängig, so ist durch $(2k-n)$ linear unabhängige Lösungen des Systems (54) ein $(2k-n-1)$-dimensionaler Unterraum V'_{2k-n-1} bestimmt, der alle auf jeder Quadrik $Q'^{(h)}_{n-2}$ singulären Punkte enthält.

Damit die Dimension des Durchschnittes $\bigcap_{h=1}^{n-k-1} V'^{(h)}_{n-5}$ höher als $(2k-n-1)$ sei müssen die Koeffiziente $c_i^{(h)}$ weitere Bedingungen genügen.

Es sei die Bedingung b) des Satzes III, 11 erfüllt.

Satz III, 12. *Es sei* $\bigcap_{h=1}^{n-k-1} V'^{(h)}_{n-5} = V'_{2k-n-1}$.

Der Unterraum V'_{2k-n-1} *liegt*

a) *in den den Durchschnitten* $S_k \cap S_{r-1} \equiv S_{k+r-n}$, $S_k \cap S_{n-r-2} \equiv S_{k-r-1}$, $S_k \cap \bar{S}_{n-3} \equiv \bar{S}_{k-2}$ *entsprechenden Hauptunterräumen* $S'^{S_{k+r-n}}_{k-1}$, $S'^{S_{k-r-1}}_{k-1}$ *und Haupt-*

varietät $V'^{\bar{S}_{k-2}}_{k-1}$ *; diese Hauptunterräume und Hauptvarietät liegen offensichtlich auf* Q'_k;

b) *im Fundamentalunterraum* $\bar{S}'_{n-3}$;

c) *im Unterraum* S_{k-1}.

Beweis ist offenbar aus dem Vergleich der Gleichungen (54) mit den Gleichungen von den Unterräumen $S'^{S_{k+r-n}}_{k-1}$, $S'^{S_{k-r-1}}_{k-1}$, von der Varietät $V'^{\bar{S}_{k-2}}_{k-1}$, vom Unterraumes $\bar{S}'_{n-3}$ (Gleichungen (21)) und vom Unterraumes S_{k-1}.

$$S'^{S_{k+r-n}}_{k-1}: \quad \sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{r} c_i^{(h)} X_i = 0, \quad h = 1, \ldots, n-k-1; \tag{55}$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0;$$

$$S'^{S_{k-r-1}}_{k-1}: \quad \sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i = 0,$$

$$\sum_{i=r+1}^{n} c_i^{(h)} X_i = 0, \quad h = 1, \ldots, n-k-1; \tag{56}$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0;$$

$$V'^{\bar{S}_{k-2}}_{k-1}: \sum_{i=0}^{r} c_i^{(h)} X_i \sum_{j=r+1}^{n} a_j X_j - \sum_{i=r+1}^{n} c_i^{(h)} X_i \sum_{j=0}^{r} a_j X_j = 0, \quad h = 1, \ldots, n-k-1;$$

$$\sum_{i=0}^{r} b_i X_i = 0, \tag{57}$$

$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i = 0;$$

$$S_{k-1}: \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i^{(h)} X_i = 0, \quad h = 1, \ldots, n-k-1; \tag{58}$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0.$$

6. Ein in S'_{n-1} mit dem Unterraum V'_{2k-n-1} disjunkter Unterraum $S'_{2(n-k)-1}$ schneidet die Varietät Q'_k in einer Varietät Q'_{n-k}, deren alle Punkte mindestens auf

einer von Quadriken $Q'^{(h)}_{n-2}$ $(h = 1, \ldots, n - k - 1)$ regulär sind. Der Verbindungsraum eines Punktes der Varietät Q'_{n-k} mit dem Unterraum V'_{2k-n-1} ist ein $(2k - n)$-dimensionaler Unterraum. Dieser Unterraum kann z.B. als ein vollständiger Durchschnitt einiger $(n - k - 2)$ Unterräume $S'^{(i)}_{n-3}$ und eines Unterraumes S'_{n-4} gebildet werden; die genannten Unterräume liegen dabei der Reihe nach auf den Quadriken $Q'^{(h)}_{n-2}$ $(h = 1, \ldots, n - k - 1)$.

Bemerkung. $(n - k - 1)$ der Reihe nach auf den Quadriken $Q'^{(h)}_{n-2}$ $(h = 1, \ldots, \ldots, n - k - 1)$ liegende Unterräume $S'^{(h)}_{n-3}$ schneiden sich in einem linearen Unterraum S'_p $(p \geqq 2k - n + 1)$, der ein Verbindungsraum des Unterraumes V'_{2k-n-1} und eines auf der Varietät Q'_{n-k} liegenden Unterraumes S'_q $(q \geqq 1)$ ist.

Die Varietät Q'_k enthält $(k - 1)$-dimensionale Unterräume, wie es z.B. aus dem Satz III, 9 in der Verbindung mit dem Satz III, 12 folgt und wie man es aus der Existenz von zwei Systemen der $(n - 3)$-dimensionalen Unterräume auf den Quadriken $Q'^{(h)}_{n-2}$ allgemein beweisen kann. Diese $(k - 1)$-dimensionalen Unterräume enthalten den Unterraum V'_{2k-n-1} und sind Verbindungsräume des Unterraumes V'_{2k-n-1} und der auf der Varietät Q'_{n-k} liegenden $(n - k - 1)$-dimensionalen Unterräume.

Die Varietät Q'_k enthält keine Unterräume von der Dimension höher als $(k - 1)$, die Varietät Q'_{n-k} enthält keine Unterräume von der Dimension höher als $(n - k - 1)$.

Diese Eigenschaften werden auf den Sätzen über die Dimension des Durchschnittes von Varietäten und über die Dimension des Verbindungsraumes von Unterräumen begründet.

IV. Die Transformation einiger Linearsysteme von Unterräumen. Die Transformation einer Hyperfläche

1. Linearsystem von (n — 2)-dimensionalen Unterräumen mit der Basis im Fundamentalunterraum S_{r-1}

Es sei in S_{n-1} durch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0 \,,$$

$$\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i X_i = 0 \,, \; \lambda_i \in \Omega \,, \; (\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0), \tag{59}$$

ein $(n - r - 1)$-dimensionales Linearsystem von $(n - 2)$-dimensionalen Unterräumen $\{S^{(\lambda)}_{n-2}\}$ mit dem Fundamentalunterraum S_{r-1} als Basis gegeben.

Satz IV, 1. *Dem Linearsystem $\{S^{(\lambda)}_{n-2}\}$ von $(n - 2)$-dimensionalen Unterräumen mit dem Fundamentalunterraum S_{r-1} als Basis entspricht durch die Transformation T in S'_{n-1} nach dem Weglassen eines festen Bestandteiles ein Linearsystem $\{S'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ von $(n - 2)$-dimensionalen Unterräumen mit dem Fundamentalunterraum S'_{r-1} als Basis. Die Systeme $\{S^{(\lambda)}_{n-2}\}$* und *$\{S'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ sind durch eine Kollineation verknüpft.*

Beweis. Dem durch die Gleichungen (59) gegebenen Linearsystem $\{S^{(\lambda)}_{n-2}\}$ entspricht durch die Transformation T ein durch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0 \,, \tag{60}$$

$$\sum_{i=r+1}^{r} \lambda_i X_i \sum_{j=0}^{r} a_j X_j = 0 \tag{60}$$

bestimmtes Quadrikensystem $\{Q'^{(\lambda)}_{n-2}\}$. Die Gleichungen (60) stellen ein Linearsystem von reduziblen Quadriken vor, das aus einem durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r} a_i X_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^{n} b_i X_i &= 0 \end{aligned} \tag{61}$$

gegebenen Bestandteil S'_{n-2} und einem durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} b_i X_i &= 0, \\ \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i X_i &= 0 \end{aligned} \tag{62}$$

bestimmten Linearsystem $\{S'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ von $(n-2)$-dimensionalen Unterräumen besteht.
Das System $\{Q'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ besitzt diese Eigenschaften:

1. Jedes Glied des Systems enthält die Fundamentalunterräume S'_{r-1}, S'_{n-r-2}, $\bar{S}'_{n-3}$.
 a) S'_{r-1} ist in jedem Unterraum des Systems $\{S'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ enthalten;
 b) S'_{n-r-2} und $\bar{S}'_{n-3}$ sind Unterräume in S'_{n-2}.
2. Jedes Glied des Systems enthält den der Basis S_{r-1} des Systems $\{S^{(\lambda)}_{n-2}\}$ entsprechenden Hauptunterraum $S'^{S_{r-1}}_{n-2}$.
 Dieser Unterraum ist S'_{n-2}.
3. Nach dem Weglassen des festen Bestandteiles $S'^{S_{r-1}}_{n-2}$ aus jeder Quadrik des Systems $\{Q'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ bleibt aus dem System $\{Q'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ ein System $\{S'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ von $(n-2)$-dimensionalen Unterräumen (Gleichungen (62)) mit der Basis im Fundamentalunterraum S'_{r-1}. In der Korrespondenz zwischen dem System $\{S^{(\lambda)}_{n-2}\}$ (Gleichungen (59)) und dem System $\{S'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ (Gleichungen (62)) entspricht einem durch das Parametersystem $(\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ gegebenen Unterraum $S^{(\lambda)}_{n-2}$ ein durch dasselbe Parametersystem gegebener Unterraum $S'^{(\lambda)}_{n-2}$. Diese Beziehung ist eine Kollineation zwischen zwei $(n-r-1)$-dimensionalen Linearsystemen $\{S^{(\gamma)}_{n-2}\}$, $\{S'^{(\lambda)}_{n-2}\}$.
4. Die sich einander in der Kollineation nach 3. entsprechenden Unterräume $S^{(\lambda)}_{n-2}$, $S'^{(\lambda)}_{n-2}$ schneiden sich in einem Unterraum $S_{n-3} \subset S_{n-2}$.
 Dieser Unterraum ist durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} a_i X_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^{n} b_i X_i &= 0, \end{aligned} \tag{63}$$

$$\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i X_i = 0 \tag{63}$$

bestimmt.

Zu den analogischen Resultaten führte die Betrachtung eines r-dimensionalen Linearsystems $\{S_{n-2}^{(\lambda)}\}$ von $(n-2)$-dimensionalen Unterräumen mit der Basis im Fundamentalunterraum S_{n-r-2}.

2. Büschel von (n — 2)-dimensionalen Unterräumen mit der Basis im Fundamentalunterraum $\bar{S}_{n-3}$

Es sei in S_{n-1} durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0\,, \\ &\lambda_1 \sum_{i=0}^{r} b_i X_i + \lambda_2 \sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

$[\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega,\ (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)]$ ein Büschel $\{S_{n-2}^{(\lambda)}\}$ von $(n-2)$-dimensionalenUnterräumen mit der Basis im Fundamentalunterram $\bar{S}_{n-3}$ gegeben.

Satz IV, 2. *Dem Büschel $\{S_{n-2}^{(\lambda)}\}$ von $(n-2)$-dimensionalen Unterräumen mit der Basis im Fundamentalunterraum $\bar{S}_{n-3}$ entspricht in S'_{n-1} nach dem Weglassen eines festen Bestandteiles ein Büschel $\{S_{n-2}^{\prime(\lambda)}\}$ von $(n-2)$-dimensionalen Unterräumen mit der Basis im Fundamentalunterraum $\bar{S}'_{n-3}$. Die Büschel $\{S_{n-2}^{(\lambda)}\}$, $S_{n-2}^{\prime(\lambda)}\}$ sind projektiv.*

Beweis. Dem durch die Gleichungen (64) gegebenen Büschel $\{S_{n-2}^{(\lambda)}\}$ von $(n-2)$-dimensionalen Unterräumen entspricht durch die Transformation T (Gleichungen (14')) ein durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0\,, \\ &\lambda_1 \sum_{i=0}^{r} b_i X_i \sum_{j=r+1}^{n} a_j X_j - \lambda_2 \sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i \sum_{j=0}^{r} a_j X_j = 0 \end{aligned} \tag{65}$$

bestimmtes Büschel von Quadriken. Die Gleichungen (65) stellen ein Büschel $\{Q_{n-2}^{\prime(\lambda)}\}$ von reduziblen Quadriken vor, das aus einem festen Bestandteil

$$S'_{n-2}: \quad \begin{aligned} &\sum_{i=0}^{r} b_i X_i = 0\,, \\ &\sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i = 0 \end{aligned} \tag{66}$$

jeder Quadrik und aus einem durch die Gleichungen

$$\lambda_1 \sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i + \lambda_2 \sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0\,, \tag{67}$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0 \tag{67}$$

gegebenen Büschel $\{S'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ von $(n-2)$-dimensionalen Unterräumen besteht.

Das Büschel $\{Q'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ besitzt diese Eigenschaften:

1. Jedes Glied des Büschels enthält den dem Fundamentalunterraum $\bar{S}_{n-3}$ entsprechenden Hauptunterraum $\bar{S}'_{n-2}$.

Dieser Unterraum ist S'_{n-2} (Gleichungen (66)).

Folgerung. Jedes Glied des Büschels enthält die Fundamentalunterräume S'_{r-1}, S'_{n-r-2}.

2. Jedes Glied des Büschels enthält den Fundamentalunterraum $\bar{S}'_{n-3}$.

Es ist aus den Gleichungen (67) offenbar.

3. Nach dem Weglassen des festen Bestandteiles $\bar{S}'_{n-2}$ von jeder Quadrik des Büschels $\{Q'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ bleibt aus dem Büschel $\{Q'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ ein Büschel $\{S'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ (Gleichungen (67)) von $(n-2)$-dimensionalen Unterräumen mit der Basis im Fundamentalunterraum $\bar{S}'_{n-3}$. In der Korrespondenz zwischen dem Büschel $\{S^{(\lambda)}_{n-2}\}$ (Gleichungen (65)) und dem Büschel $\{S'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ (Gleichungen (67)) entspricht dem durch ein Parameterpaar $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ gegebenen Unterraum $S^{(\lambda)}_{n-2}$ ein Unterraum $S'^{(\lambda)}_{n-2}$, der durch dasselbe Parameterpaar bestimmt ist. Diese Beziehung ist eine Projektivität zwischen zwei Unterräumenbüscheln $S^{(\lambda)}_{n-2}$, $S'^{(\lambda)}_{n-2}$.

4. Der Unterraum S_{n-2} ist in dieser Projektivität invariant.

Es ist aus den Gleichungen (64), (67) offenbar.

5. Dem Hauptunterraum $S^{S'_{r-1}}_{n-2}$ entspricht der Hauptunterraum $S'^{S_{n-r-2}}_{n-2}$, dem Hauptunterraum $S^{S'_{n-r-2}}_{n-2}$ entspricht der Hauptunterraum $S'^{S_{r-1}}_{n-2}$.

3. Linearsystem von k-dimensionalen Unterräumen mit der Basis im Fundamentalunterraum S_{r-1}

Den Fall 1 kann man auf ein Linearsystem $\{S^{(\lambda)}_k\}$ $(r \leqq k \leqq n-2)$ mit der Basis im Fundamentalunterraum S_{r-1} ausdehnen.

Es sei in S_{n-1} durch die Gleichungen

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0, \\ \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i^{(h)} X_i = 0,\ h = 1, \ldots, n-k-1;\end{gathered} \tag{68}$$

ein Linearsystem von k-dimensionalen Unterräumen $(r \leqq k \leqq n-2)$ mit der Basis im Fundamentalunterraum S_{r-1} gegeben; $(\lambda^{(h)}_{r+1}, \ldots, \lambda^{(h)}_n) \neq (0, \ldots, 0)$ für alle h; $\lambda_i^{(h)} \in \Omega$ erfüllen zugehörige Bedingungen (II, 5).

Satz IV, 3. *Dem Linearsystem $\{S^{(\lambda)}_k\}$ von k-dimensionalen Unterräumen $(r \leqq k \leqq n-2)$ mit der Basis im Fundamentalunterraum S_{r-1} entspricht durch die Transformation T in S'_{n-1} nach dem Weglassen eines festen Bestandteiles ein Linearsystem $\{S'^{(\lambda)}_k\}$ von k-dimensionalen Unterräumen mit der Basis im Fundamentalunterraum S'_{r-1}. Die Systeme $\{S^{(\lambda)}_k\}$, $\{S'^{(\lambda)}_k\}$ sind durch eine Kollineation verknüpft.*

Beweis. Dem durch die Gleichungen (68) gegebenen Linearsystem $\{S_k^{(\lambda)}\}$ von k-dimensionalen Unterräumen entspricht durch die Transformation T (Gleichungen (14')) in S'_{n-1} ein durch die Gleichungen

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0\,, \\
\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i^{(h)} X_i \sum_{j=0}^{r} a_j X_j = 0, \; h = 1, \ldots, n-k-1;
\end{gathered}
\tag{69}
$$

bestimmtes Linearsystem $\{Q_k'^{(\lambda)}\}$ von Varietäten, was einen durch die Gleichungen

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0\,, \\
\sum_{i=0}^{r} a_i X_i = 0
\end{gathered}
\tag{70}
$$

gegebenen Bestandteil S'_{n-2} jeder Varietät Q'_k und ein durch die Gleichungen

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0\,, \\
\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i^{(h)} X_i = 0\,, \; h = 1, \ldots, n-k-1;
\end{gathered}
\tag{71}
$$

bestimmtes Linearsystem $\{S_k'^{(\lambda)}\}$ von k-dimensionalen Unterräumen ausdrückt.

Das System $\{Q_k'^{(\lambda)}\}$ besitzt diese Eigenschaften:

1. Jedes Glied des Systems enthält den Hauptunterraum $S'^{S}_{n-2}{}^{1}$.
Es ist der Unterraum S'_{n-2} (Gleichungen (70)).
2. Jedes Glied des Systems enthält den Fundamentalunterraum S_{-1}.
Es ist aus den Gleichungen (71) offenbar.

3. Nach dem Weglassen eines festen Bestandteiles $S'^{S_r-1}_{n-2}$ jeder Varietät des Systems $\{Q'^{(\lambda)}_k\}$ bleibt vom System $\{Q'^{(\lambda)}_k\}$ ein System $\{S'^{(\lambda)}_k\}$ von k-dimensionalen Unterräumen (Gleichungen (71)) mit der Basis im Fundamentalunterraum S'_{r-1}.

In der Korrespondenz zwischen dem System $\{S_k^{(\lambda)}\}$ (Gleichungen (68)) und dem System $\{S'^{(\lambda)}_k\}$ (Gleichungen (71)) entspricht dem durch ein Parametersystem $(\lambda_{r+1}^{(1)}, \ldots, \lambda_n^{(1)}; \;\ldots;\; \lambda_{r+1}^{(n-k-1)}, \ldots, \lambda_n^{(n-k-1)})$ $[(\lambda_{r+1}^{(h)}, \ldots, \lambda_n^{(h)}) \neq (0, \ldots, 0)$ für alle $h = 1, \ldots, n-k-1]$ bestimmten Unterraum $S_k^{(\lambda)}$ ein durch dasselbe Parametersystem bestimmter Unterraum $S'^{(\lambda)}_k$. Diese Beziehung ist eine Kollineation zwischen $(n-k-1)(n-r-1)$-dimensionalen Linearsystemen $\{S_k^{(\lambda)}\}$, $\{S'^{(\lambda)}_k\}$ von k-dimensionalen Unterräumen.

Analog kann man ein Linearsystem von k-dimensionalen Unterräumen mit der Basis im Fundamentalunterraum S_{n-r-2} $(n-r-1 \leqq k \leqq n-2)$ betrachten.

4. Linearsystem von (n — 2)-dimensionalen Unterräumen mit der Basis im Unterraum S_k

Es seien in der Hyperebene S_{n-1} durch die Gleichungspaare

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0\,, \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i^{(h)} X_i = 0 \tag{72}$$

$(h = 1, \ldots, n - k - 1)$
$(n - k - 1)$ linear unabhängige $(n - 2)$-dimensionale Unterräume gegeben; der Rang der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_i \\ c_i^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_i^{(n-k-1)} \end{Vmatrix}$$

$(i = 0, \ldots, n)$ ist $n - k$.

Der Durchschnitt aller $(n - 2)$-dimensionalen Unterräume ist ein durch gesamte Gleichungen (72) bestimmter k-dimensionaler Unterraum S_k; es sei S_k in keinem Fundamentalunterraum der Hyperebene S_{n-1} enthalten.

Das durch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0\,, \qquad \sum_{h=1}^{n-k-1} \lambda_h \sum_{i=0}^{n} c_i^{(h)} X_i = 0 \tag{73}$$

bestimmte $(n - k - 2)$-dimensionale Linearsystem $\{S_{n-2}^{(\lambda)}\}$ hat die Grundunterräume (72) und seine Basis ist der Unterraum S_k.

Satz IV, 4. *Dem Linearsystem $\{S_{n-2}^{(\lambda)}\}$ von $(n - 2)$-dimensionalen Unterräumen mit der Basis in S_k entspricht durch die Transformation T ein Linearsystem $\{Q'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ von $(n - 2)$-dimensionalen Quadriken mit der Basis in einer Varietät Q'_k.*

Beweis. Dem Linearsystem $\{S_{n-2}^{(\lambda)}\}$ (Gleichungen (73)) entspricht durch die Transformation T (Gleichungen (14')) ein durch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0\,, \qquad \sum_{h=1}^{n-k-1} \lambda_h \left(\sum_{i=0}^{r} c_i^{(h)} X_i \sum_{j=r+1}^{n} a_j X_j - \sum_{i=r+1}^{n} c_i^{(h)} X_j \sum_{j=0}^{r} a_j X_j \right) = 0 \tag{74}$$

bestimmtes Linearsystem $\{Q'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ von $(n - 2)$-dimensionalen Quadriken, das die linear unabhängigen Grundquadriken

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0, \\
\sum_{i=0}^{r} c_i^{(h)} X_i \sum_{j=r+1}^{n} a_j X_j - \sum_{i=r+1}^{n} c_i^{(h)} X_i \sum_{j=0}^{r} a_j X_j = 0
\end{gathered}
\tag{75}
$$

$(h = 1, \ldots, n - k - 1)$
hat.

Das System $\{Q'^{(\lambda)}_{n-2}\}$ besitzt diese Eigenschaften:

1. Jede Quadrik des Systems enthält die Fundamentalunterräume S'_{r-1}, S'_{n-r-2}, $\bar{S}'_{n-3}$.

2. Ist $k + r \geqq n$ $(k - r \geqq 1$ bzw. $k \geqq 2)$ und ist der Durchschnitt $S_k \cap S_{r-1}$ $(S_k \cap S_{n-r-2}$ bzw. $S_k \cap \bar{S}_{n-3})$ genau ein $(k + r - n)$- [$(k - r - 1)$- bzw. $(k - 2)$-] -dimensionaler Unterraum S_{k+r-n} $(S_{k-r-1}$ bzw. $\bar{S}_{k-2})$, so enthält jede Quadrik des Systems den dem Durchschnitt S_{k+r-n} $(S_{k-r-1}$ bzw. $\bar{S}_{k-2})$ entsprechenden Hauptunterraum $S'^{S_{k+r-n}}_{k-1}$ $(S'^{S_{k-r-1}}_{k-1}$ bzw. Hauptvarietät $V'^{\bar{S}_{k-2}}_{k-1})$.

3. Jede Quadrik des Systems enthält den Unterraum von Punkten, die auf jeder Grundquadrik des Systems singulär sind.

4. Jede Quadrik des Systems enthält eine k-dimensionale Varietät $\bar{Q}'_k$, die aus vollständigem Durchschnitt der Grundquadriken durch die Abspaltung der Fundamentalunterräume entsteht.

5. Das System (75) besitzt nach der Abspaltung von Fundamentalunterräumen die Basis $\bar{Q}'_k$. Zwischen den Systemen (73) und (75) gibt es dann eine Beziehung, in welcher dem durch das Parametersystem $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k-1}) \neq (0, \ldots, 0)$ gegebenen Unterraum $S^{(\lambda)}_{n-2}$ eine durch dasselbe Parametersystem bestimmte Quadrik entspricht, wobei die Systemenbasen der Unterraum S_k und ihm in Sinn des Satzes III,10 entsprechende Varietät $\bar{Q}'_k$ sind.

5. Die Transformation einer Hyperfläche

Das Grundproblem der Transformation einer Varietät $V \subset S_{n-1}$ in die Hyperebene S'_{n-1} ist die Abbildung einer Hyperfläche. Ist nähmlich die Varietät V durch ein homogenes Gleichungssystem

$$
\begin{gathered}
f_i(X_0, \ldots, X_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, s; \\
\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0
\end{gathered}
\tag{76}
$$

gegeben, so ist ihrentsprechende Varietät $V' \subset S'_{n-1}$ durch die den Hyperflächen P_i entsprechenden Hyperflächen P'_i bestimmt. (Die Hyperflächen P_i sind durch einzelne Gleichungen vom System (76) bestimmt.) Deshalb kann auch die Untersuchung der Transformation einer Varietät auf die Untersuchung der Transformation einer Hyperfläche beschränkt werden.

Es sei eine irreduzible Hyperfläche von der Ordnung m durch die Gleichungen

$$
F(X) = F(X_0, \ldots, X_n) = \sum_{i_0 + \ldots + i_n = m} u_{i_0 \ldots i_n} X_0^{i_0} \ldots X_n^{i_n} = 0, \tag{77}
$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0, \tag{77}$$

$u_{i_0 \ldots i_n} \in K$, gegeben. Kurz bezeichnet man die Hyperfläche durch F.

Satz IV, 5. *Der Hyperfläche $F \subset S_{n-1}$ von der Ordnung m entspricht durch die Transformation T in der Hyperebene S'_{n-1} eine Hyperfläche F', die*

1) *von der Ordnung $2m$ ist;*

2) *die Fundamentalunterräume mindestens m-fach enthält.*

Beweis. Durch die Transformation (14') entspricht der Hyperfläche F (Gleichungen (77)) eine durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} F'(X) = F'(X_0, \ldots, X_n) = \sum_{i_0+\ldots+i_n = m} u_{i_0 \ldots i_n} X_0^{i_0} \ldots X_n^{i_n} \cdot \\ \cdot \left(\sum_{j=0}^{r} a_j X_j\right)^{i_{r+1}+\ldots+i_n} \cdot \left(\sum_{j=r+1}^{n} a_j X_j\right)^{i_0+\ldots+i_r} = 0, \\ \sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0 \end{gathered} \tag{78}$$

bestimmte Hyperfläche $F' \subset S'_{n-1}$ (kurz „die Hyperfläche F'").

Die Eigenschaft 1) ist aus den Gleichungen (78) offenbar.

Für den Beweis der Eigenschaft 2) ist es zu zeigen, daß für jeden Punkt (x) der Fundamentalunterräume $S'_{r-1}, S'_{n-r-2}, \bar{S}'_{n-3}$ gilt:

$$\frac{\partial^h F'}{\partial X_0^{h_0} \ldots \partial X_n^{h_n}}(x) = 0 \text{ für } h \leq m - 1 .$$
$$h_0 + \ldots + h_n = h$$

Es wird z. B. für den Fundamentalunterraum S'_{n-r-2} gezeigt werden.

Nach der Ausführung der Multiplikation in $F'(X)$ durch die Faktoren

$$\left(\sum_{j=0}^{r} a_j X_j\right)^{i_{r+1}+\ldots+i_n}, \left(\sum_{j=r+1}^{n} a_j X_j\right)^{i_0+\ldots+i_r}$$

nimmt die erste von Gleichungen (78) die Form

$$F'(X) = \sum_{i'_0+\ldots+i'_n=2m} u'_{i'_0 \ldots i'_n} X_0^{i'_0} \ldots X_n^{i'_n} = 0, \tag{79}$$

wobei $i'_0 + \ldots + i'_r = m$, $i'_{r+1} + \ldots + i'_n = m$.

a) Ist es mindestens für eine Zahl j aus $j = 0,1, \ldots, n$ $h_j > i'_j$, so ist die Gleicheit

$$\frac{\partial^h \left(u'_{i'_0 \ldots i'_n} X_0^{i'_0} \ldots X_n^{i'_n}\right)}{\partial X_0^{h_0} \ldots \partial X_n^{h_n}}(0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_n) = 0 \tag{80}$$
$$h_0 + \ldots + h_n = h$$

identisch erfüllt.

b) Ist $i'_j \geq h_j$ für alle $j = 0, \ldots, n$, so ist

$$\frac{\partial^h \left(u'_{i'_0 \ldots i'_n} X_0^{i'_0} \ldots X_n^{i'_n}\right)}{\partial X_0^{h_0} \ldots \partial X_n^{h_n}} = p u'_{i'_0 \ldots i'_n} X_0^{i'_0 - h_0} \ldots X_r^{i' - h_r} .$$

$$\cdot X_{r+1}^{i'_{r+1}-h_{r+1}} \ldots X_n^{i'_n-h_n} \tag{81}$$
$$h_0 + \ldots + h_n = h$$

(die Bedeutung der Konstante p ist offenbar). Mindestens für eine Zahl j $(0 \leqq j \leqq r)$ ist die Differenz $i'_j - h_j \geqq 1$, weil $i'_0 + \ldots + i'_r = m$ ist, $h_0 + \ldots + h_n \leqq m - 1$, um so mehr $h_0 + \ldots + h_r \leqq m - 1$. Nach dem Einsetzen $x_j = 0$ verschwindet der Ausdruck (81).

Der Beweis für den Fundamentalunterraum S'_{r-1} wird durch dasselbe Verfahren ausgeführt.

Der Fall a) bleibt auch für den Unterraum $\bar{S}'_{n-3}$ gültig.

Im Fall b) ist es zweckmäßiger die Form (78) brauchen. Nach der Differentiation bleibt aus dem Produkt

$$\left(\sum_{j=0}^{r} a_j X_j\right)^{i_{r+1}+\ldots+i_n} \left(\sum_{j=r+1}^{n} a_j X_j\right)^{i_0+\ldots+i_r}$$

ein Faktor des Grades mindestens 1, der in jedem Punkt des Unterraumes $\bar{S}'_{n-3}$ verschwindet. Dadurch verschwindet auch jedes diesen Faktor enthaltende Glied.

Literatur

[1] E. Bertini : Geometria proiettiva degli iperspazi

Deutsche Übersetzu:ng

A. Duschek : Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume, Wien, 1924

[2] B. Bydžovský : Úvod do algebraické geometrie, Praha 1948

[3, I], [3, II], [3, III]

W. V. D. Hodge — D. Pedoe : Methods of algebraic geometry

Russische Übersetzung:

В. Ходж ф Д, Пидо; Методы алтебраической геометрии

1, Москва, 1954

11, Москва, 1954

111, Москва, 1955

[4] H. P. Hudson : Cremona transformations, Cambridge, 1927

[5] S. Lang : Introduction to algebraic geometry, New York, 1958

[6] J. Metelka : Tři kapitoly o monoidálních transformacích v S_r, Rozpravy II. třídy České akademie, roč. LVIII (1948), č. 10

[7] B. L. van der Waerden : Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin, 1939

Adresa autora: Katedra geometrie PFUK, Bratislava, Šmeralova 2/b

Do redakcie prišlo 15. decembra 1965.

O istej biracionálnej transformácii v S_n

J. ČIŽMÁR

Resumé

V práci sa skúma istá špeciálna korešpondencia medzi dvoma nadrovinami n-rozmerného projektívneho priestoru S_n. Ukazuje sa, že je to biracionálna korešpondencia T_{2-2}, ktorú pre $n = 3$ pod názvom „skew projection" uvádza práca [4] (§ 13, str. 141). Po nájdení fundamentálnych a hlavných variet pri skúmaní variet odpovedajúcich lineárnych podpriestorom jednej z daných nadrovín ukáže sa, že transformácia je monoidná. Okrem toho sa zisťujú transformácie určitých lineárnych sústav lineárnych podpriestorov a najzákladnejšie vlastnosti obrazu nadplochy.

ОБ ОДНОМ БИРАЦИОНАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ В S

Я. ЧИЖМАР

Резюме

В предлагаемой работе рассмотрено специальное соответствие между двумя гиперплоскостями n-мерного проективного пространства S_n. Это соответствие является бирациональным соответствием T_{2-2}, которое в случае $n = 3$ под названием »skew projection« отметено в [4] (§ 13, стр. 141). После получения фундаментальных и главных многообразий показано при рассматривании многообразий, отвечающих линейным подпространствам одной из данных гиперплоскостей, что соответствие моноидно. Кроме того находятся образы некоторых линейных систем линейных подпространств и самые основные свойства образа гиперповерхности.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
PUBL. XVI. MATHEMATICA 1967

Bemerkung zur Approximation der stetigen Funktionen durch Polynome

J, SMÍTAL und T, ŠALÁT

In der Arbeit [1] ist bewiesen, dass eine solche Reihe der Polynome mit rationalen Koeffizienten existiert, die auf dem Intervall $\langle 0,1\rangle$ die gleichmässige Summe 0 hat (0 bedeutet die Funktion, die in jedem Punkt den Wert 0 hat) und zu jeder Funktion f, die auf dem Intervall $\langle 0,1\rangle$ stetig ist, existiert eine solche Umordnung dieser Reihe, dass $f(x)$ die gleichmässige (auf $\langle 0,1\rangle$) Summe dieser Umordnung ist. Es ist eine natürliche Frage, ob es auch ein analogisches Ergebnis für die Teilreihen gibt, genau gesagt, ob eine Reihe der Polynome mit rationalen Koeffizienten existiert, die auf $\langle 0,1\rangle$ die gleichmässige Summe 0 hat und eine solche, dass jede auf $\langle 0,1\rangle$ stetige Funktion die gleichmässige Summe einer Teilreihe dieser Reihe ist. Der folgende Satz gibt eine positive Antwort auf die vorige Frage. Der Beweis des folgenden Satzes ruht auf dem Gedanken des Beweises des erwähnten Satzes von H. Hadwiger.

Satz. *Es existiert eine Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(x)$ *der Polynome mit rationalen Koeffizienten, die die folgenden Eigenschaften hat:*

(*i*) $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) = 0$ *gleichmässig auf* $\langle 0,1\rangle$;

(*ii*) *Zu jeder auf* $\langle 0,1\rangle$ *stetigen Funktion* f *existiert eine solche unabzählbare Menge (der Mächtigkeit des Kontinuums) der Teilreihen der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(x)$*), *dass jede dieser Teilreihen auf* $\langle 0,1\rangle$ *die gleichmässige Summe* $f(x)$ *hat.*

Beweis. Es sei $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ die Folge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten. Wählen wir zu jedem P_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ eine solche natürliche Zahl λ_n, dass für jede $x \in \langle 0,1\rangle$

---

*) Die Teilreihen $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n u_n$ (wo $\varepsilon_n, \varepsilon'_n = 0$ oder 1, $n = 1,2, \ldots$; für unendlich viele n $\varepsilon_n \neq 0$, $\varepsilon'_n \neq 0$ ist) der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sind verschieden, wenn eine solche Zahl k existiert dass $\varepsilon_k \neq \varepsilon'_k$ ist.

$$\left|\frac{P_n(x)}{\lambda_n}\right| < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Setzen wir

$$p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\lambda_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

p_n ist ersichtlich ein Polynom mit rationalen Koeffizienten und für jede $x \in \langle 0,1 \rangle$

$$|p_n(x)| < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

ist.

Konstruieren wir jetzt die folgenden (endlichen) Folgen

$$\begin{matrix} p_1(x), & -p_1(x), & \ldots p_1(x), & -p_1(x) \\ p_2(x), & -p_2(x), & \ldots p_2(x), & -p_2(x) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ p_n(x), & -p_n(x), & \ldots p_n(x), & -p_n(x) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{matrix} \tag{2}$$

In der n-ten Zeile gibt es $\lambda_n + 1$ Paare von $p_n(x)$, $-p_n(x)$. Formen wir mit Hilfe des Schema (2) eine Reihe der Polynome so, dass wir die Glieder in (2) nach einander schreiben (zuerst schreiben wir die Glieder der ersten Zeile, dann die Glieder der zweiten Zeile u.s.w. und dabei ändern wir nicht die Reihenfolge von Glieder innerhalb einzelner Folgen). So bekommen wir die Reihe

$$\begin{aligned} &p_1(x) - p_1(x) + \ldots + p_1(x) - p_1(x) + \\ &+ p_2(x) - p_2(x) + \ldots + p_2(x) - p_2(x) + \ldots + \\ &+ p_n(x) - p_n(x) + \ldots + p_n(x) - p_n(x) + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Beziechnen wir die Reihe (3) mit $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(x)$. Wir zeigen, dass diese Reihe die Behauptung des Satzes erfüllt.

Offensichtlich ist (3) eine Reihe der Polynome mit rationalen Koeffizienten. Die Folge ihrer Partialsummen ist

$$\begin{matrix} p_1(x), & 0, & p_1(x), & 0, & \ldots p_1(x), & 0, \\ p_2(x), & 0, & p_2(x), & 0, & \ldots p_2(x), & 0, \ldots \\ p_n(x), & 0, & p_n(x), & 0, & \ldots p_n(x), & 0, \ldots \end{matrix}$$

und so folgt aus (1) die Wirklichkeit der Behauptung (i) unmittelbar.

Teilen wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(x)$ in zwei Teilreihen und bezeichnen wir diese Teilreihen mit (R_1) und (R_2). (R_1) formen wir so, dass man aus jeder Folge des Schema (2) die zwei letzten Glieder nimmt, also

$$(R_1) = p_1(x) - p_1(x) + p_2(x) - p_2(x) + \ldots + p_n(x) - p_n(x) + \ldots$$

(R_2) ist durch die übrigen Glieder des Schema (2) geformt und dies auf ähnlichem Weg wie wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(x)$ geformt haben.

Es sei jetzt $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Zahlen 0, 1 mit einer unendlichen Anzahl der Glieder 1. Konstruieren wir die Reihe

$$\varepsilon_1 p_1(x) - \varepsilon_1 p_1(x) + \varepsilon_2 p_2(x) - \varepsilon_2 p_2(x) + \ldots + \varepsilon_n p_n(x) - \varepsilon_n p_n(x) + \ldots \tag{4}$$

Diese Reihe ist eine Teilreihe der beiden Reihen (R_1) und (3).

Die Partialsummen der Reihe (4) formen die Folge

$$\varepsilon_1 p_1(x), 0, \varepsilon_2 p_2(x), 0, \ldots \varepsilon_n p_n(x), 0, \ldots$$

und so hat die Reihe (4) infolge von (1) auf $\langle 0,1 \rangle$ die gleichmässige Summe 0.

Es sei f eine auf $\langle 0,1 \rangle$ stetige Funktion. Auf Grund des bekannten Satzes von Weierstrass (siehe [2] s.30) kann man leicht einsehen, dass eine solche wachsende Folge von natürlichen Zahlen

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

existiert, dass $\{P_{n_k}(x)\}_{k=n}^{\infty}$ gleichmässig zu $f(x)$ auf $\langle 0,1 \rangle$ konvergiert. Setzen wir $m_1 = n_1$ und es sei n_{i_1} der kleinste der Indexen $n_k > n_1$, für welche $P_{n_k}(x) - P_{n_1}(x)$ sich in der Folge $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ mit dem Index ($= m_2$), der grösser als n_1 ist, befindet. Also $P_{n_{i_1}}(x) - P_{n_1}(x) = P_{m_2}(x)$. Formen wir jetzt die Differenzen $P_{n_k}(x) - (P_{m_1}(x) + P_{m_2}(x))$ und n_{i_2} sei der kleinste aus den Indexen $n_k > n_{i_1}$, für die $P_{n_k}(x) - (P_{m_1}(x) + P_{m_2}(x))$ befindet sich in der Folge $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ mit dem Index ($= m_3$), der grösser als m_2 ist, also $P_{n_{i_2}}(x) - (P_{m_1}(x) + P_{m_2}(x)) = P_{m_3}(x)$, u. s. w.

So konstruieren wir eine solche Folge von Polynomen $\{P_{m_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{m_k}(x), \; m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots, \tag{5}$$

deren Partialsummen $P_n(x), P_{n_{i_1}}(x), P_{n_{i_2}}(x), \ldots$ sind, auf $\langle 0,1 \rangle$ die gleichmässige Summe $f(x)$ hat. Formen wir jetzt die folgende Teilreihe der Reihe (R_2):

$$\begin{aligned} & p_{m_1}(x) + p_{m_1}(x) + \ldots + p_{m_1}(x) + \\ & + p_{m_2}(x) + p_{m_2}(x) + \ldots + p_{m_2}(x) + \ldots + \\ & + p_{m_k}(x) + p_{m_k}(x) + \ldots + p_{m_k}(x) + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

(die Anzahl der Glieder $p_{m_k}(x)$ ist λ_{m_k}, $k = 1, 2, 3, \ldots$). Wir zeigen, dass diese Reihe auf $\langle 0,1 \rangle$ die gleichmässige Summe $f(x)$ hat. Wenn wir mit $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ die Folge ihrer Partialsummen bezeichnen, dann ist ersichtlich

$$s_{\lambda_{m_1}}(x) = \lambda_{m_1} p_{m_1}(x) = P_{m_1}(x),$$

$$s_{\lambda_{m_1}+\lambda_{m_2}}(x) = \lambda_{m_1} p_{m_1}(x) + \lambda_{m_2} p_{m_2}(x) = P_{m_1}(x) + P_{m_2}(x), \ldots$$

$$s_{\lambda_{m_1}+\ldots+\lambda_{m_k}}(x) = \lambda_{m_1} p_{m_1}(x) + \ldots + \lambda_{m_k} p_{m_k}(x) = P_{m_1}(x) + \ldots + P_{m_k}(x), \ldots$$

u.s.w., daraus kann man sehen, dass die Folge der Partialsummen der Reihe (5) eine Teilfolge der Folge $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ist und so, mit Rücksicht darauf, dass (5) auf $\langle 0,1 \rangle$ die gleichmässige Summe $f(x)$ hat, genügt es nur zu beweisen, dass (6) gleichmässig auf $\langle 0,1 \rangle$ konvergiert. Das kann man leicht mit Hilfe des Kriteriums von Cauchy und Bolzano verwirklichen.

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert mit Rücksicht auf die gleichmässige Konvergenz der Reihe (5) i_0 so, dass für $i > i_0$, jede $s \geqq 0$ und jede $x \in \langle 0,1 \rangle$

$$|P_{m_i}(x) + \ldots + P_{m_{i+s}}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7}$$

gilt. Es sei $i > i_0$. Dann hat der beliebige Abschnitt der Reihe (6), der nur die Polynome mit Indexen grössern als i_0 enthält, die Form

$$l_i p_{m_i}(x) + \lambda_{m_{i+1}} p_{m_{i+1}}(x) + \ldots + \lambda_{m_{i+s}} p_{m_{i+s}}(x) + l_{i+s+1} p_{m_{i+s+1}}(x), \tag{8}$$

wo l_i, l_{i+s+1} ganze nichtnegative Zahlen sind, $l_i \leqq \lambda_{m_i}$, $l_{i+s+1} \leqq \lambda_{m_{i+s+1}}$. Durch eine einfache Abschätzung erkennen wir, dass der absolute Betrag der Summe (8) nicht grösser ist als

$$\frac{l_i}{\lambda_{m_i}} |P_{m_i}(x)| + |P_{m_{i+1}}(x) + \ldots + P_{m_{i+s}}(x)| + \frac{l_{i+s+1}}{\lambda_{m_{i+s+1}}} |P_{m_{i+s+1}}(x)|$$

Aus den offensichtlichen Ungleichheiten

$$0 \leqq \frac{l_i}{\lambda_{m_i}} \leqq 1, \quad 0 \leqq \frac{l_{i+s+1}}{\lambda_{m_{i+s+1}}} \leqq 1$$

und aus (7) bekommen wir für jede $x \in \langle 0,1 \rangle$

$$|l_i p_{m_i}(x) + \lambda_{m_i+1} p_{m_i+1}(x) + \ldots + \lambda_{m_i+s} p_{m_i+s}(x) + l_{i+s+1} p_{m_i+s+1}(x)| < \varepsilon$$

Also konvergiert die Reihe (6) gleichmässig auf $\langle 0,1 \rangle$ und nach dem Vorhergehenden ist ihre Summe gleich $f(x)$.

Formen wir jetzt mit Hilfe der Reihen (4), (6) die Reihe

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 p_1(x) - \varepsilon_1 p_1(x) + \ldots + \varepsilon_{m_1-1} p_{m_1-1}(x) - \varepsilon_{m_1-1} p_{m_1-1}(x) + \\
&+ \underbrace{p_{m_1}(x) + p_{m_1}(x) + \ldots + p_{m_1}(x)}_{\lambda_{m_1} \text{ Glieder}} + \varepsilon_{m_1+1} p_{m_1+1}(x) - \varepsilon_{m_1+1} p_{m_1+1}(x) + \ldots + \\
&+ \varepsilon_{m_2-1} p_{m_2-1}(x) - \varepsilon_{m_2-1} p_{m_2-1}(x) + \underbrace{p_{m_2}(x) + p_{m_2}(x) + \ldots + p_{m_2}(x)}_{\lambda_{m_2} \text{ Glieder}} + \ldots + \\
&+ \varepsilon_{m_k-1} p_{m_k-1}(x) - \varepsilon_{m_k-1} p_{m_k-1}(x) + \underbrace{p_{m_k}(x) + p_{m_k}(x) + \ldots + p_{m_k}(x)}_{\lambda_{m_k} \text{ Glieder}} + \ldots
\end{aligned} \tag{9}$$

Das ist ersichtlich eine Teireihe der Reihe (3) und aus den bewiesenen Eigenschaften der Reihen (4), (6) folgt, dass diese Reihe auf $\langle 0,1 \rangle$ gleichmässig konvergiert und die Summe $f(x)$ hat.

Da unabzählbar viele (der Mächtigkeit des Kontinuums) Folgen $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ der Zahlen 0, 1 (mit unendlich vielen Gliedern = 1) existieren und da zu zwei verschiedenen solchen Folgen nach der vorigen Konstruktion zwei verschiedene Reihen (9) angehören, welche beide Teilreihen der Reihe (3) sind und jede von ihnen auf $\langle 0,1 \rangle$ die gleichmässige Summe $f(x)$ hat, daraus folgt leicht, dass unabzählbar viele (der Mächtigkeit des Kontinuums) Teilreihen der Reihe (3) existieren, jede von ihnen gleichmässig auf $\langle 0,1 \rangle$ konvergiert und die Summe $f(x)$ hat.

Literatur

[1] H. Hadwiger: Eine Bemerkung über Umordnung von Reihen reeller Funktionen, Tôhoku Math. J. 46 (1940), 22—25.

[2] N. I. Achieser: Vorlesungen über Approximationstheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1953.

Adresa autorov: Katedra algebry a teórie čísel PFUK, Bratislava, Šmeralova 2b.

Do redakcie došlo 15. januára 1966.

Poznámka k aproximácii spojitých funkcií polynómami

J. SMÍTAL A T. ŠALÁT

Resumé

V práci je dokázaný nasledujúci výsledok, analogický k výsledku H. Hadwigera z práce [1]: Existuje rad polynomov $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(x)$ s racionálnymi koeficientami, ktorý má tieto vlastnosti

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) = 0$ rovnomerne na $\langle 0,1 \rangle$;

(ii) Ku každej funkcii f spojitej na $\langle 0,1 \rangle$ existuje nespočetne mnoho mohutnosti kontinua čiastočných radov radu $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(x)$, z ktorých každý má na $\langle 0,1 \rangle$ rovnomerný súčet $f(x)$.

ЗАМЕТКА ОБ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

Я. СМИТАЛ И Т. ШАЛАТ

Резюме

В этой работе доказывается следующий результат аналогичный к результату Г. Гадвигера в работе [1]:

Существует ряд многочленов $\Sigma_{n=1}^{\infty} q_n(x)$, коэффициенты которых рациональные числа, обладающий следующими свойствами:

(*i*) $\Sigma_{n=1}^{\infty} q_n(x) = 0$ равномерно на $\langle 0,1 \rangle$;

(ii) Для всякой функции f непрерывной на $\langle 0,1 \rangle$ существует несчетное количество мощности континуума частей ряда $\Sigma_{n=1}^{\infty} q_n(x)$, равномерно сходящихся к $f(x)$ на отрезке $\langle 0,1 \rangle$.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
PUBL. XVI. MATHEMATICA 1967

Einige oszillatorische und asymptotische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0$$

L. MORAVSKÝ

Die Arbeit ist in zwei Teile geteilt.

Im ersten Teil sind hinreichende Bedingungen abgeleitet, bei welchen die Lösungen der Differentialgleichung

$$\text{(a)}\quad y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0$$

mit einer Nullstelle im Punkte $a \in (-\infty; \infty)$ für $x > a$ oszillieren.

Im zweiten Teil wird untersucht, unter welchen Bedingungen die einzige Lösung der Differentialgleichung (a) ohne Nullstellen für $x \in (-\infty; \infty)$ existiert.

Erwägen wir die Differentialgleichung (a), wo $A'(x)$, $b(x)$, $p(x)$, stetige Funktionen $x \in (-\infty; \infty)$ sind.

Gemäss [3] kann jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = 0$ in der Form $y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$ geschrieben werden und entspricht der Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$(\beta)\quad \omega(x)y''(x) - \omega'(x)y'(x) + [\omega''(x) + p(x)\omega'(x) + 2A(x)\omega(x)]\,y(x) = 0,$$

wo $\omega(x) = y_1(x)y_2'(x) - y'_1(x)y_2(x)$ gemäss dem Satz 2 aus der Arbeit [3] die Lösung der Differentialgleichung

$$\text{(b)}\quad \omega''' + [p(x)\omega']' + p(x)\omega'' + [2A(x) + p^2(x)]\,\omega' + \\ + [A'(x) - b(x) + 2A(x)p(x)]\,\omega = 0$$

ist, dabei sind $y_1(x)$, $y_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft

$$(1°)\quad y_1(a) = y_1'(a) = 0,\ y_1''(a) \neq 0,\ y_2(a) = y_2''(a) = 0,\ y_2'(a) \neq 0.$$

Laut [3] gilt für jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) die Identität

$$(1)\quad y(x)y''(x) - \frac{1}{2}y'^2(x) + A(x)y^2(x) + \int_a^x pyy''\,dt + \int_a^x by^2\,dt = k,$$

wo $a \in (-\infty; \infty)$ ein fester und $x \in (-\infty; \infty)$ ein beliebiger Punkt ist.

I.

Lemma 1. *$\omega(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung* (b) *und $z(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung*

$$\text{(c)}\quad z'''(x) - p(x)z''(x) = 0.$$

Dann gilt die Identität

$$(2)\quad \omega''(x)z''(x) + p(x)\omega'(x)z''(x) + 2A(x)\omega(x)z''(x) - \\ - \int_a^x (A' - b)\,\omega z''\mathrm{d}t = \omega''(a)z''(a) + p(a)\omega'(a)z''(a) + 2A(a)\omega(a)z''(a),$$

wo $a < x \in (-\infty; \infty)$.

Der Beweis wird einfach derart durchgeführt, dass wir die Differentialgleichung (b) mit der Funktion $z''(x)$ multiplizieren und von a bis x Glied nach Glied integrieren. Durch entsprechende Anordnung erhalten wir die Identität (2).

Lemma 2. *$p(x) \geqq 0$ sei eine stetige Funktion $x \in (-\infty; \infty)$. $z(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung (c) mit der Eigenschaft $z(a) = 0$, $z'(a) = 0$ $z''(a) > 0$. Dann hat die Lösung $z(x)$ und ihre erste und zweite Ableitung keine Nullstelle für $x > a$.*

Beweis. Es sei $z(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (c) mit einer doppelten Nullstelle. Wenn wir die Differentialgleichung (c) mit der Funktion $z''(x)$ multiplizieren und von a bis x Glied nach Glied integrieren erhalten wir die Identität

$$(3)\quad \frac{1}{2}z''^2(x) = \int_a^x pz''^2 dt + \frac{1}{2}z''^2(a).$$

Setzen wir das Gegenteil voraus, d.h. $z''(x)$ habe im Punkte $x_1 > a$ die erste Nullstelle rechts vom Punkt a. Die Integralidentität (3) hat für die Lösung $z(x)$ im Punkt x_1 die Form

$$0 = \int_a^{x_1} pz''^2 dt + \frac{1}{2}z''^2(a),$$

was nicht möglich ist. Also hat $z''(x)$ für $x > a$ keine Nullstelle. Es ist ersichtlich, dass dann weder $z(x)$ noch $z'(x)$ für $x > a$ keine Nullstelle hat.

Lemma 3. *$A(x) \leq 0$, $A'(x)$, $b(x)$, $p(x) \geqq 0$ seien solche stetige Funktionen $x \in (-\infty; \infty)$, dass $A'(x) + b(x) \geqq 0$ für $x \in (-\infty; \infty)$. Die Funktion $A'(x) + b(x)$ sei in keinem Intervall identisch gleich Null. $\omega(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung (b) mit der Eigenschaft $\omega(a) = 0, \omega'(a) \geqq 0$, $\omega''(a) > 0$. Dann haben die Lösung $\omega(x)$ und ihre erste Ableitung und die Funktion $\omega'' + p(x)\omega' + 2A(x)\omega$ keine Nullstelle für $x > a$.*

Beweisen wir dies durch einen Widerspruch. x_1 sei die erste Nullstelle $\omega'(x)$ für $x > a$. Auf den Intervall $\langle a; x_1\rangle$ aplizieren wir die Identität (2) aus dem Lemma 1. $z(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung (c) mit der Eigenschaft $z(a) = z'(a) = 0$, $z''(a) > 0$. Gemäss Lemma 2 ist $z''(x) > 0$ für $x > $ a. Es ist ersichtlich, dass $\omega''(x_1) \leq 0$. Die Voraussetzung $\omega'(x_1) = 0$ gemäss der Identität (2) führt zu einen Widerspruch. Also hat $\omega'(x)$ und $\omega(x)$ für $x > a$ keine Nullstelle.

Ähnlich führt die Voraussetzung, dass gemäss dem Lemma 2 und der Identität (2) x_2 die erste Nullstelle der Funktion $\omega'' + p(x)\omega' + 2A(x)\omega$ für $x > a$ ist, wo $\omega(x)$ die im Lemma 3 angeführten Eigenschaften hat, zu einem Widerspruch.

Lemma 4. *Es seien $A(x) \leq 0, A'(x), p(x) \geq 0, b(x)$ deratige stetige Funktionen von $x \in (-\infty; \infty)$ dass, $A'(x) + b(x) > 0$ für $x > a$.*

Dann ist die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = 0$, $y'(a) \geqq 0$, $y''(a) > 0$, entweder wachsend für $x > a$ oder sie hat für $x > a$ eine weitere Nullstelle.

Beweis. $y(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung (a) mit den vorgeschriebenen Eigenschaften. Es sei $y(x) > 0$ für $x > a$ und dabei nicht wachsend. Dann hat $y'(x)$ entweder für $x > a$ eine Nullstelle $\bar{x}$ und ist für $x > \bar{x}$ abnehmend, oder $y'(x)$ hat wenigstens ein Paar solcher Nullstellen x_1, x_2 dass $a < x_1 < x_2$, zwischen welchen $y(x)$ abnimmt.

Zeigen wir, dass im ersten Falle $y(x)$ wenigstens eine Nullstelle für $x > a$ hat. Setzen wir das Gegenteil voraus. Dann folgt aus der Differentialgleichung (a) für $x > \bar{x}$

(4) $y'''(x) + p(x)y''(x) = -2A(x)y'(x) - [A'(x) + b(x)]\,y(x) < 0.$

Es ist ersichtlich, dass $y''(\bar{x}) \leq 0$ ist und wenn also $\bar{x}_1 > x$ genügend nahe zum Punkt $\bar{x}$ ist, ist $y''(\bar{x}_1) < 0$. Multiplizieren wir die Ungleichheit (4) für $x \geqq \bar{x}_1$ mit der Funktion $z''(x)$, wobei $z(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (c) mit der Eigenschaft $z(\bar{x}_1) = 0$, $z'(\bar{x}_1) = 0$, $z''(\bar{x}_1) > 0$ ist und integrieren wir Glied um Glied von $\bar{x}_1$ bis x. Gemäss Lemma 2 ist $z''(x) > 0$ für $x > \bar{x}_1$. So erhalten wir die Ungleichheit

$$y''(x)z''(x) - y''(\bar{x}_1)z''(\bar{x}_1) < 0$$

aus welcher folgt, dass $y''(x) < 0$ für $x > \bar{x}_1$ ist. Durch Integration der Ungleichheit $y''(x) < 0$ von $\bar{x}_1$ bis x erhalten wir $y'(x) < y'(x_1)$. Durch abermalige Integration erhalten wir

$$y(x) < y(\bar{x}_1) + y'(\bar{x}_1)\,(x - \bar{x}_1),$$

woraus für $x \to \infty$ $y(x) \to -\infty$ ist. Also muss $y(x)$ für $x > a$ eine Nullstelle haben.

Im anderen Falle müssen wir bedenken, dass $y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (β) ist, wo nach dem Lemma 3 $\omega(x) = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x) \neq 0$ für $x > a$ ist, da $\omega(a) = \omega'(a) = 0$, $\omega''(a) \neq 0$. Deshalb können wir die Gleichung (β) in der Form

$$(\gamma) \qquad \left[\frac{y'}{\omega}\right]' + \frac{\omega''(x) + p(x)\,\omega'(x) + 2A(x)\omega(x)}{\omega^2(x)}\,y(x) = 0$$

schreiben. Es sei $\omega''(a) > 0$. Für $x > a$ ist nach dem Lemma 3 $\omega''(x) + p(x)\omega'(x) + 2A\omega(x) > 0$. Durch Integration der Differentialgleichung (γ) in $\langle x_1; x_2 \rangle$ erhalten wir

$$\int_{x^1}^{x_2} \frac{\omega''(x) + p(x)\omega'(x) + 2A(x)\omega(x)}{\omega^2(x)}\,y(x)\,dx = 0$$

was ein Widerspruch ist. Also muss $y(x)$ zwischen x_1, x_2 eine Nullstelle haben. Damit ist das Lemma 4 bewiesen.

Wir werden die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) als oszillatorisch betrachten, wenn sie rechts von irgendeinem Punkt der Zahlenachse unendlich viele Nullstellen hat.

Ähnlich wie in der Arbeit [2] können folgende zwei Sätze bewiesen werden.

Satz 1. Die Lösungen der Differentialgleichung (b) mit einer doppelten Nullstelle sollen rechts von dieser keine weitere Nullstelle haben. Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass jede Lösung der Differentialgleichung (a) mit einer Nullstelle für $x > a$, $-\infty < a < \infty$ oszillatorisch sei, ist dass wenigstens eine Lösung der Differentialgleichung (a) in $(a; \infty)$ oszillatorisch sei.

Satz 2. *Die Voraussetzungen des Satzes* 1 *seien erfüllt. Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass jede Lösung der Differentialgleichung* (*a*) *mit einer Nullstelle in* $(a; \infty)$ *oszillatorisch sei, ist dass jede Lösung der Differentialgleichung* (*a*) *mit einer doppelten Nullstelle rechts von dieser wenigstens noch eine Nullstelle habe.*

Satz 3. Es seien $A(x) \leq 0$, $A'(x)$, $b(x)$, $p(x) \geqq 0$ *stetige Funktionon* $x \in (-\infty; \infty)$ *und zwar derart, dass* $A'(x) + b(x) > 0$, $b(x) - A'(x) \geq k > 0$ *für* $x \in (-\infty; \infty)$ *sei, wo k eine Konstante ist. Es sei* $f(x) < 0$ *eine derartige stetige Funktion, dass die Gleichung* $v''(x) - f(x)v(x) = 0$ *eine oszillatorische Lösung für* $x \in (-\infty; \infty)$ *habe* *und die Entfernung jeder drei aufeinanderfolgenden Nullstellen jeder ihrer Lösungen sei kleiner als $d > 0$. Die Funktion*

$$F(x) = [f(x) + 2A(x)]\, e^{-\int_{x_1}^{x}[\int_{a}^{u} 2A\, dt]du} + e^{-\int_a^x p\, dt}\left[\int_{x_1}^{x}(b - A')e^{\int_a^t p\, dt}\, dt - \int_{x_1}^{x} 2Ape^{\int_a^t p\, dt}\, dt\right]$$

ist positiv bei jedem $a \in (-\infty; \infty)$ und bei jedem $x_1 > a$ in irgendeinem Intervall $J \subset (x_1; \infty)$, dessen Länge grösser ist als d.

Dann oszilliert jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = 0$ rechts vom Punkte a.

Beweis. Ähnlich wie in der Arbeit [2] genügt es zu beweisen, dass die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) > 0$ rechts vom Punkte a wenigstens eine Nullstelle für jedes $a \in (-\infty; \infty)$ hat. Setzen wir das Gegenteil voraus. Es habe $y(x)$ für $x > a$ keine Nullstelle. Gemäss Lemma 4 ist $y(x)$ eine wachsende Funktion für $x > a$.

Es sei $z(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (c) mit der Eigenschaft $z(a) = z'(a) = 0$, $z''(a) > 0$ und $y(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) > 0$, dann gilt gemäss dem Lemma 2 in der Arbeit [3] die Identität

$$(5)\quad y''(x)z''(x) + 2A(x)\, y(x)\, z''(x) = y''(a)\, z''(a) - \int_a^x (b - A')\, yz''dt + \int_a^x 2Apyz''dt.$$

Gemäss dem Lemma 2 folgt aus der Differentialgleichung (c)

$$(6)\qquad z''(x) = z''(a)\, e^{\int_a^x p\, dt}.$$

Durch Benützung von (6) können wir (5) in der Form

$$(7)\quad [y''(x) + 2A(x)y(x)]\, e^{\int_a^x p\, dt} = y''(a) - \int_a^x (b - A')\, ye^{\int_a^t p\, dt}\, dt + \int_a^x 2Apye^{\int_a^t p\, dt}\, dt.$$

schreiben. Aus der Identität (7) ist ersichtlich, dass die Funktion $y''(x) + 2A(x)\, y(x)$ von einem gewissen $x > a$ negativ ist. Wählen wir $x_1 > a$ derart, dass

$$(8)\qquad \int_a^{x_1}(y'' + 2Ay)\, dt \leq 0.$$

Nach der Integration von (8) erhalten wir

$$y'(x_1) \leq \int_a^{x_1} 2Ay dt \leq y(x_1) \int_a^{x_1} 2A dt$$

woraus

$$(9)\qquad \frac{y'(x_1)}{y(x_1)} \leq -\int_a^{x_1} 2A dt$$

folgt.

Es ist ersichtlich, dass für $x > x_1$, $y''(x) + 2A(x)y(x) < 0$ ist. Also auch $yy'' - y'^2 + 2A(x)y^2 < 0$ für $x > x_1$. Daraus folgt die Ungleichheit

$$\left[\frac{y'(x)}{y(x)}\right]' + 2A(x) < 0.$$

Durch Integration der letzten Ungleichheit von x_1 bis x erhalten wir

$$\frac{y'(x)}{y(x)} < \frac{y'(x_1)}{y(x_1)} - \int_{x_1}^{x} 2A\,dt$$

woraus folgt

$$(10) \qquad y(x) < y(x_1)\,e^{-\int_{x_1}^{x}\left[\frac{y'(x_1)}{y(x_1)} - \int_{x_1}^{x} 2A\,dt\right] du,}$$

Durch Einsetzen der Beziehung (9) in (10) erhalten wir für ein genügend grosses x_1 die Ungleichheit

$$(11) \qquad y(x) < y(x_1)\,e^{-\int_{x_1}^{x}[\int_{x_1}^{u} 2A\,dt]\,du}$$

und das unter der Voraussetzung, dass die Lösung $y(x)$ für $x > a$ keine weitere Nullstelle hat.

Es sei $v(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $v''(x) - f(x)\,v(x) = 0$ mit der Eigenschaft $v(a) = 0$. Für die Lösung $y(x) \neq 0$ der Differentialgleichung (a) gilt die Identität

$$\left[\frac{v}{y}(v'y - vy')\right]' = \left(v' - \frac{vy'}{y}\right)^2 + vv'' - \frac{v^2 y'}{y}.$$

Wenn wir in diese Identität $v''(x) = f(x)\,v(x)$ einsetzen, erhalten wir die Identität

$$(12) \qquad \left[\frac{v}{y}(v'y - vy')\right]' = \left(v' - \frac{vy'}{y}\right)^2 + v^2\,\frac{f(x)\,y - y''}{y}.$$

Zeigen wir, dass unter der Voraussetzung $y(x) > 0$ für $x > a$ auch $f(x)\,y - y'' > 0$ im Intervall J von grösserer Länge als d rechts von x_1 ist, wo x_1 genügend gross ist.

Aus der Integralidentität (7) und aus der Ungleichheit (11) erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(x)\,y - y'' &= f(x)\,y + 2A(x)y + e^{-\int_a^x p\,dt}\Big[\int_{x_1}^{x}(b - A')\,y\,e^{\int_a^t p\,dt}\,dt - \int_{x_1}^{x} 2Apy\,e^{\int_a^t p\,dt}\,dt\Big] + \\
&\quad + e^{-\int_a^x p\,dt}\Big[\int_a^{x_1}(b - A')y\,e^{\int_a^t p\,dt}\,dt - \int_a^{x_1} 2Apy\,e^{\int_a^t p\,dt}\,dt - y''(a)\Big] \geqq \\
&\geqq \Big\{(f(x) + 2A(x)\,e^{-\int_{x_1}^{x}[\int_a^{u} 2A\,dt]\,du} + e^{-\int_a^x p\,dt}\Big[\int_{x_1}^{x}(b - A')e^{\int_a^t p\,dt}\,dt - \int_{x_1}^{x} 2Ape^{\int_a^t p\,dt}\,dt\Big]\Big\}\,y(x)_1 + \\
&\quad + e^{-\int_a^x p\,dt}\Big[\int_a^{x_1}(b - A')ye^{\int_a^t p\,dt}\,dt - \int_a^{x_1} 2Apye^{\int_a^t p\,dt}\,dt - y''(a)\Big] > 0
\end{aligned}$$

und zwar in irgendeinem Intervall J von grösserer Länge als d rechts von x_1, wo x_1 derart gewählt wurde, dass (8) gelte. Dann ist gemäss der Identität (7)

$$\int_a^{x_1}(b - A')\,ye^{\int_a^t p\,dt}\,dt - \int_a^{x_1} 2Apy\,e^{\int_a^t p\,dt}\,dt - y''(a) > 0.$$

Wenn wir die Identität (12) von x_2 bis x_3 integrieren, welche die Nullstellen aus J der Lösung $v(x)$ der Differentialgleichung $v''(x) - f(x)\,v(x) = 0$ sind, erhalten wir einen Widerspruch. Das heist, dass $y(x)$ eine Nullstelle für $x > a$ hat.

II.

Satz 4. $A(x) \leq 0$, $A'(x)$, $b(x) \geq 0$, $p(x) \geq 0$ *seien stetige Funktionen* $x \in (-\infty; \infty)$, *wobei wenigstens eine der Funktionen* $p(x)$, $b(x)$ *in keinem Teilintervall nicht identisch gleich Null ist.*

Dann existiert wenigstens eine solche Lösung $y(x)$ *der Differentialgleichung* (a) *dass* $y(x) \neq 0$, $y'(x) \neq 0$, $y''(x) \neq 0$ *für* $x \in (-\infty; \infty)$, $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)$ *für* $x \in (-\infty; \infty)$ *und* $\lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} y''(x) = 0$ ist.

Der Beweis wird ähnlich wie in der Arbeit [1] durchgeführt.

Lemma 5. *Für jede Lösung* $y(x)$ *der Differentialgleichung* (a) *gilt die Integralidentität*

$$(15)\qquad [y(x)\,y''(x) - \frac{1}{2}y'^2(x) + A(x)\,y^2(x)]\,e^{\int_a^x p\,dt} + \frac{1}{2}\int_a^x p y'^2\, e^{\int_a^t p\,du}\, dt +$$

$$+ \int_a^x (b - Ap)\,y^2\, e^{\int_a^t p\,du}\, dt = y(a)\,y''(a) - \frac{1}{2}y'^2(a) + A(a)\,y^2(a)$$

$a \in (-\infty; \infty)$ *ist ein fester,* $x \in (-\infty; \infty)$ *ein beliebiger Punkt.*

Beweis. $y(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung (a) dann gilt

$$\left[e^{\int_a^x p\,dt}\, yy''\right]' = e^{\int_a^x p\,dt}\,[pyy'' + y'y'' + yy'''] = e^{\int_a^x p\,dt}\,[y'y'' - 2Ayy' - (A' + b)\,y^2].$$

Durch Integration der letzten Gleichung von a bis x erhalten wir

$$e^{\int_a^x p\,dt}\, y(x)\,y''(x) - y(a)\,y''(a) = \frac{1}{2}y'^2(x)\,e^{\int_a^x p\,dt} - \frac{1}{2}y'^2(a) - \frac{1}{2}\int_a^x p y'^2\, e^{\int_a^t p\,du}\, dt -$$

$$- A(x)\,y^2\, e^{\int_a^x p\,dt} + A(a)\,y^2(a) + \int_a^x A p y^2\, e^{\int_a^t p\,du}\, dt + \int_a^x A' y^2\, e^{\int_a^t p\,du}\, dt -$$

$$- \int_a^x (A' + b)\,y^2\, e^{\int_a^x p\,du}\, dt,$$

daraus folgt durch Umformung die Identität (15).

Satz 5. $A(x) \leq 0$, $A'(x)$, $b(x) \geq 0$, $p(x) \geq 0$ *seien stetige Funktionen* $x \in (-\infty; \infty)$ *und zwar solche, dass* $A'(x) + b(x) > 0$ *für* $x \in (-\infty; \infty)$, *wobei wenigstens eine der Funktionen* $p(x)$, $b(x)$ *in keinem Intervall identisch gleich Null ist und es sei*

$$\int_a^\infty p\,dx < \infty, \quad a \in (-\infty; \infty).$$

Wenn die Differentialgleichung (a) *eine oszillatorische Lösung hat, dann sind alle Lösungen der Differentialgleichung* (a) *oszillatorisch ausser einer Lösung* $y(x)$ *(bis auf die lineare Unabhängigkeit) welche keine Nullstelle und folgende Eigenschaften hat:* $y(x) \neq 0$, $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)$ *für* $x \in (-\infty; \infty)$ *und* $\lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} y''(x) = 0$.

Beweis: Aus dem Satz 4 folgt die Existens wenigstens einer Lösung $y(x) \neq 0$ in $(-\infty; \infty)$ mit den in Satz 5 angeführten Eigenschaften.

Wenn die Differentialgleichung (a) eine oszillatorische Lösung hat, dann ist gemäss Satz 1 jede ihrer Lösungen welche wenigstens eine Nullstelle hat, oszillatorisch.

Zeigen wir, dass die Differentialgleichung (a) keine Lösung ohne Nullstelle haben kann, welche wenigstens in einem Punkte $a \in (-\infty; \infty)$ die Eigenschaft $\operatorname{sgn} y(a) = \operatorname{sgn} y'(a)$ oder die Eigenschaft $y'(a) \geq 0$ hätte. Es sei $y(x) > 0$ für $x \in (-\infty; \infty)$ und im Punkte a sei $y'(a) \geq 0$. $y_1(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y_1(a) = y_1'(a) = 0$, $y_1''(a) > 0$.

Wir wissen, dass $\omega(x) = y(x)\, y_1'(x) - y'(x)\, y_1(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (b) ist. Es ist leicht festzustellen, dass $\omega(a) = 0$, $\omega'(a) > 0$, $\omega''(a) + p(a)\,\omega'(a) = y'(a)\, y''(a) \geq 0$.

Wir zeigen, dass $\omega(x)$ mit den oben angeführten Eigenschaften keine Nullstelle für $x > a$ hat. x_1 sei die erste Nullstelle $\omega'(x)$ für $x > a$. Es ist ersichtlich, dass $\omega''(x_1) \leq 0$. Gemäss der Integralidentität (2) und dem Lemma 2 wo $z(a) = 0$, $z'(a) = 0$, $z''(a) > 0$ erhalten wir einen Widerspruch. Also ist $\omega(x) \neq 0$ für $x > a$. Die Funktion $\omega(x)$ ist der Wronskian der Lösungen $y(x)$ und $y_1(x)$. Wenn $y_1(x)$ im Punkte a eine Nullstelle hat, ist es oszillatorisch. Deshalb muss auch $y(x)$ oszillieren. Dies ist jedoch im Widerspruch mit der Voraussetzung. Also gilt $\operatorname{sgn} y(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)$ für $x \in (-\infty; \infty)$. Für die Lösung $y(x) > 0$ in $(-\infty; \infty)$ aus per Differentialgleichung (a) folgt

$$y''' + p(x)\, y'' = -2A(x)\, y' - [A'(x) + b(x)]\, y \leq 0.$$

Durch multiplizieren der letzten Ungleichheit der Funktion $e^{\int_a^x p\,dt}$, $x > a \in (-\infty\ \infty)$ erhalten wir $[y''(x)\, e^{\int_a^x p\,dt}]' \leq 0$ und durch Integration von a bis x erhalten wir

$$e^{\int_a^x p\,dt}\, y''(x) \leq y''(a), \quad y''(x) \leq y''(a)$$

woraus folgt, dass $y''(x)$ eine monotone Funktion ist, da beliebig gewählt wurde. Zeigen wir, dass $y''(x) > 0$ für $x \in (a; \infty)$. Setzen wir voraus, dass $y''(a) < 0$, $a \in (-\infty; \infty)$. Dann ist $y''(x) < y''(a) < 0$ für $x > a$. Durch doppelte Integration erhalten wir

$$y(x) < y(a) + y'(a)(x - a) + \frac{y''(a)}{2}(x - a)^2.$$

Aus der letzten Ungleichheit folgt für ein genügend grosses x ein Widerspruch. Darum gilt $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)$ für $x \in (-\infty; \infty)$. Ähnlich wie im Satz 4 können wir beweisen, dass $y' \to 0$, $y'' \to 0$ für $x \to \infty$ ist.

Zeigen wir, dass nur eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) ohne Nullstellen in $(-\infty; \infty)$ existiert. Setzen wir das Gegenteil voraus: Es seien $y(x)$ und $\bar{y}(x)$ zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung (a) ohne Nullstellen für welche im Punkte $a \in (-\infty; \infty)$ der Bedignung

$$y_1(a) = y'_1(a) = 0,\ y''_1(a) \neq 0,\ y_2(a) = y''_2(a) = 0,\ y'_2(a) \neq 0.$$

entspricht. Die Lösungen $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y(x)$ bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (a) und deshalb existieren solche Konstanten c_1, c_2, c_3 dass $\bar{y}(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y$. Wenn $\bar{y}(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (a) ohne Nullstellen ist, muss gelten, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \bar{y}'(x) = 0$. Zeigen wir, dass diese Eigenschaft nicht erfüllt ist.

Die Lösung $Y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ oszilliert. $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$ seien deren Nullstellen für $x > a$.

Die Integralidentität (15) für die Lösung $Y(x)$ in den Punkten x_i hat die Form

$$(15') \quad \frac{1}{2} Y'^2(x_i)\, e^{\int_a^{x_i} p\,dt} = \frac{1}{2}\int_a^{x_i} p Y'^2 e^{\int_a^{t} p\,du}\, dt + \int_a^{x_i} (b - Ap)\, Y^2 e^{\int_a^{t} p\,du}\, dt.$$

Also auch $\omega(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Satz 6. $A(x) \leq 0$, $A'(x)$, $b(x) \geq 0$, $p(x) \geq 0$ *seien stetige Funktionen* $x \in (-\infty; \infty)$ *und zwar solche, dass* $A'(x) + b(x) > 0$ *für* $x \in (-\infty; \infty)$.

Es sei $\int_a^\infty p\,dx < \infty, a \in (-\infty;\infty) \cdot \int_a^\infty (A' + b)\, e^{\int_a^\infty p\,dx}\, dx$ *divergiere* $a \in (-\infty; \infty)$.

Dann existiert gerade eine Lösung $y(x)$ *der Differentialgleichung* (*a*), *welche zusammen mit ihrer ersten und zweiten Ableitung keine Nullstelle für* $x \in (-\infty; \infty)$ *und* $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)$ *für* $x \in (-\infty; \infty)$ *und*

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} y''(x) = 0.$$

Beweis. Gemäss Satz 4 existiert wenigstens eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) mit den in Satz 6 angeführten Eigenschaften ausser der Eigenschaft $y(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Zeigen wir, dass $y(x) \to 0$ für $x \to \infty$. Setzen wir voraus, dass $y(x) > 0$ für $x \in (-\infty; \infty)$ und $y_1(x)$, $y_2(x)$ sind Lösungen der Differentialgleichung mit der Eigenschaft

$$y_1(a) = y'_1(a) = 0,\ y''(a) > 0,\ y'_2(a) = y''_2(a) = 0,\ y_2(a) < 0.$$

Die Lösungen $y(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (a) und es gilt

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1, y_2, y \\ y_1, y_2, y' \\ y_1, y_2, y'' \end{vmatrix} = W(a)\, e^{-\int_a^x p\,dt}$$

Aus der letzten Beziehung erhalten wir die Gleichung

$$(16) \quad \omega(x)\, y''(x) - \omega'(x)\, y'(x) + [\omega''(x) + p(x)\, \omega'(x) + 2A(x)(\omega(x)]\, y(x) =$$

$$= W(a)\, e^{-\int_a^x p\,dt} > 0,$$

wo $\omega(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (b) mit der Eigenschaft $\omega(a) = \omega'(a) = 0$, $\omega''(a) > 0$ ist und für $x > a$ ist $\omega(x) > 0$.

Aus der Beziehung (16) und dem Lemma 6 folgt, dass $y(x) \to 0$ für $x \to \infty$. Weiter zeigen wir, dass nur eine Lösung $y(x) \neq 0$ für $x \in (-\infty; \infty)$ existiert, welche den Anforderungen des Satzes entspricht. Wenn Die Differentialgleichung (a) wenigstens eine oszillatorische Lösung hat, dann wird der Beweis ähnlich wie im Satz 5 durchgeführt.

Wenn die Differentialgleichung (a) keine oszillatorische Lösung hat, dann ist gemäss Lemma 4 eine jede Lösung $y(x)$ mit der Eigenschaft $y(x_1) = 0$, welche rechts von x_1 keine Nullstelle hat eine wachsende Funktion für $x > x_1$. Setzen wir voraus, dass $y(x)$, $\bar{y}(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (a) sind, welche für $x \in (-\infty; \infty)$ verschieden von Null sind und welche monoton zu Null konvergieren. Dann

$$\bar{y}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y(x)$$

wo $y_1(x)$, $y_2(x)$ die oben angeführten Eigenschaften haben. Es ist ersichtlich, dass

$$\bar{y}' - y' = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + (c_3 - 1) y'.$$

Aus der letzten Beziehung und aus der Beziehung (15') folgt, dass $\lim_{x \to \infty} (\bar{y}' - y'$ nicht zu Null konvergiert, dies ist dadurch ein Widerspruch, dass $y' \to 0$, $\bar{y}' \to 0$ für $x \to \infty$. Damit ist der Satz bewiesen.

Literatur

[1] M. Greguš: Über die asymptotischen Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. LXIII, pp. 1—10, 1963.

[2] M. Greguš: Über die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung. Wiss. Z. Univ. Halle Math.-Nat. XII/3, S. 265—286, März 1963.

[3] L. Moravský: O niektorých vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice tvaru $y'''(x) + p(x)y''(x) + 2A(x)\,y'(x) + [A'(x) + b(x)]\,y(x) = 0$.

Adresa autora: Katedra matematiky a dg BF VŠT, Švermova 3, Košice

Do redakcie prišlo 20. februára 1966.

Niektoré oscilatorické a asymptotické vlastnosti riešení diferenciálnej rovnice

L. MORAVSKÝ

Práca je rozdelená na dve časti.

V prvej časti sú odvodené postačujúce podmienky, pri ktorých riešenia diferenciálnej rovnice

$$(a)\; y''' + p(x)y'' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0$$

s nulovým bodom v bode $a \in (-\infty; \infty)$ oscilujú pre $x > a$.

V druhej časti sa vyšetruje za akých podmienok existuje jediné riešenie diferenciálnej rovnice (a) bez nulových bodov pre $x \in (-\infty; \infty)$.

НЕКОТОРЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ И АСИМПТОМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

$$y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + bcx]\,y = 0$$

Л. МОРАВСКИ

Резюме

Работа разделена на две части.

В первой части выведены достаточные условия, при которых решения дифференциального уравнения
с нулевой точкой в точке $a \varepsilon (-\omega;\omega)$ осцилирует для $x>a$.

Во второй части исследуется, при каких условиях существует единственное решение дифференциального уравнения (a) без нулевых точек для $x \varepsilon (-\omega;\omega)$.

ACTA FACULTATIS
RERUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XVI.

Vydalo Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave — Schválené SÚKK č. 1268/I-1965 — Náklad 1102 — Rukopis zadaný 24. X. 1966 — Vytlačené v septembri 1967 — Papier 5153-01, 70×100, 70 gr. — Tlačili Východoslovenské tlačiarne, n. p., Košice — 03/2 — AH 3,870 — VH 3,977 — 67-112-67 — M-12*71018

Technický redaktor Adam Hanák

Celý náklad prevzala Knižnica Prírodovedeckej fakulty UK, Bratislava, Moskovská 2.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

sú fakultný sborník určený na publikovanie vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých ašpirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracovávajú materiál získaný počas pobytu na našej fakulte. Redakčná rada si vyhradzuje právo z tohto pravidla urobiť výnimku.

Práce musí odporúčať katedra. Práce študentov musí odporúčať študentská vedecká spoločnosť a príslušná katedra.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom alebo anglickom, francúzskom alebo nemeckom. Práce dodané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, s riadkovou medzerou tak, aby v jednom riadku bolo 60 úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na autorov účet.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšte názov práce, pod ním meno autora. Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, sa uvádzajú všetky pracoviská. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba obidve uviesť.

Fotografie treba dať na čiernom lesklom papieri a uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba urobiť tušom na priehľadnom papieri (pauzák) alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať resumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam publikovaným v cudzom jazyku treba pripojiť resumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom v prípade publikácie v ruskom jazyku, alebo v ruskom jazyku v prípade publikácie v jazyku západnom. *Nezabudnite pri resumé uviesť vždy názov práce a meno autora v rovnakom poradí ako v základnom texte.* Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a stránkové korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny počas korektúry idú na ťarchu autorského honorára. Každý autor dostane popri príslušnom honorári aj 50 separátov.

Redakčná rada