IV

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XV, 1967)

15.16.

UNIVERSITAS COMENIANA

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

595

MATHEMATICA

PUBL. XV.

1967

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO
BRATISLAVA

Просим обмена публикаций
Austausch von Publikationen erbeten
Prière d'échanger des publications
We respectfully solicit the exchange of publications
Se suplica el sanje de publicaciónes

Sborník Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Vydáva Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasinkova 5, čísl. tel. 458—51. Povolilo Povereníctvo kultúry číslom 2265|56-IV|1. — Tlač. Východoslovenské tlačiarne, n. p., Prešov — Technický redaktor Adam Hanák
AH 3,772 — VH 3,877 03|2 67 — 352 — 66 K—07*71056

Celý náklad prevzala PFUK, Bratislava

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XV, 1967]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA XV — 1967

Основания аналлагматической номографии

И. А. ВИЛЬНЕР (МОСКВА), П. ГАЛАЙДА (КОШИЦЕ)

В настоящей статье, опираясь на работу [16] развивается основной аппарат аналлагматической номографии.

Мы предлагаем теоретико-групповую точку зрения на номографию как основу ее всевозможных интерпретаций.

Соответственно с этим номография изучает: 1. интерпретиции, которые осуществимы в конечном счете в трехмерном пространстве; 2. полные системы инвариантов групп движений пространств интерпретаций; 3. алгебраические и дифференциальные критерии и представления функциональных зависимостей соответствующих принятой интерпретации суперпозициями функций данного вида и числа аргументов.

Каждой группе преобразований соответствует определенная вещественная или комплексная геометрия и номография. Проективной группе соответствует метод выравненных точек Д'ОКАНЯ в проективной плоскости или пространстве Π_2, Π_3, ... (вещественные) и Π_2^*, Π_3^*, ... (комплексные) и сетчатые номонраммы и их комбинации. Аффинной группе соответствует геометрия A_2 или A_2^* (комплексная) и эти же номограммы и еще с параллельным индексом. Евклидовой группе и геометрии E_2 и E_2^* соответствуют эти же номограммы и еще циркульные номограммы ГЕРСЕВАНОВА и ГЕДСЕЛЯ и номограммы со всевозможными транспарантами. Все это, кроме того, имеет место в любых системах вещей, подчиняющихся плоским или пространственным аксиомам соответствующей вещественной или комплексной геометрии.

Отсюда возникает множество интерпртаций. Для неевклидовых геометрий и их групп остаются те же критерии и аналогичные возможности.

Конформная группа и геометрия может быть вещественной K_2[1], K_3, ... и тогда эти номограммы вещественны, а может быть и мнимой K_2^*, K_3^*, ..., и тогда получим мнимые номограммы в виде веществен-

[1]) Строго говоря при $n = 2$ конформной геометрии и группы при $n = 2$ нет. Только начинается с $n = 3$ в силу теоремы.

ного эквивалента в пространстве $E_{3\infty}$, в котором, однако, по другому выполнено идентифицирование. Вообще мы звездочкой сверху всегда означаем соответствующую комплексную геометрию. Топологическая теория вещественных эквивалентов мнимых геометрий приобретает поэтому особое значение.

Легко понять, что для аналлагматической группы и геометрии K_2[1]), (K_2, топологически эквиваленто $\Pi_1{}^*$) и $K_2{}^*$ справедливы те же самые критерии N и N_c (для зависимостей между тремя аргументами) что и для Π_2. Это следует из того, что, если в Π_2 или в $\Pi_2{}^*$ и анологично для проективных пространств высших измерений — заменить бесконечно — удаленные элементы проективного пространства точкой и ввести мебиусовскую группу движений для K_2 в виде группы дробнолинейных подстановок $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $w' = \dfrac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$,

$$z = x + yi, \quad \bar{z} = x - yi, \quad w = u + vi, \quad w' = u' + v'i \tag{1.1}$$

(где x, y старые а u, v и u', v' — новые координаты), и для $K_2{}^*$ — аналогичную группу

$$w_1 = \frac{a_1 z_1 + b_1 z_2 + c_1}{a_3 z_1 + b_3 z_2 + c_3}, \quad w_2 = \frac{a_2 z_1 + b_2 z_1 + c_2}{a_3 z_1 + b_3 z_2 + c_3} \tag{1.2}$$

где a, b, c, вообще говоря, комплексные числа, то номограмма из выравненных точек преобразуется в конформную с выравниванием по кругу с фиксированной точкой для K_2 (для K_3 — по шару с фиксированной точкой для зависимостей между четырьмя переменными по произвольному шару — для 5 переменных) и с выравниванием по „кругу" для $K_2{}^*$, осуществленному, например, в том же пространстве $E_{3\infty}$ (но при другом идентифицировании), в котором мы построили эквивалент для $\Pi_2{}^*$[2]).

Группе Мебиуса или группе обратных радиусов, аналогматической или мебиусовой конформной группе, в расширенной присоединением бесконечно-улаленной точки плоскости Евклид (значит и на сфере) K_2 или $K_2{}^*$ соответствуют номограммы с, вообще говоря, круговым, в частности прямолинейным индексом выравнивания. Для соотношений между четырьмя переменными.

$$f\ (z_1;\ z_2;\ z_3;\ z_4) = 0 \tag{1.3}$$

при каноноческой форме

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \varphi_1{}^2 + \psi_1{}^2 & 1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \varphi_2{}^2 + \psi_2{}^2 & 1 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \varphi_3{}^2 + \psi_3{}^2 & 1 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \varphi_4{}^2 + \psi_4{}^2 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

---

[2]) Лиувилля и ее обобщения на n — мерные пространства при $n > 3$ можно говорить о конформной геометрии и ее группе. Мы имеем в виду только группу круговых преобразований плоскости комплексного переменного и в качестве прямых — все окружности и прямые, проходящие через единственную несобственную точку плоскости K_2.

Во взятой конгруенции выравнимания, т. е. ,,линейке'', мы получим 3 (пары) закрепленных прямых и четвертый — переменный с тем же вещественным ангармоническим отношением λ, образуемом в пересечении четверки прямых A, B, C, D, с директрисами d и d' линейки. Получаем линейчатую поверхность 2 порядка, вообще говоря, поверхность однополостного гиперболоида и в пределе поверхность гиперболического параболоида. Это и есть линейчатая интерпретация окружности в K_2, которая синтезируется простым нанесением двух соответственных проективных шкал на директрисах d и d'.

Определив по трем (парам) прямых соответствующих значениям z_1, z_2, и z_4, (либо фиксированному значению z_4) линейчатую поверхность — вещественную ,,окружность'' в $E_{3\infty}$) а, значит, и в L_4^*, мы прочтем ответные значения тех прямых z_3, которые будут служить прямолинейными образующими линейчатой поверхности 2 порядка, т. е. ,,окружности''.

Мы лишь наметили распространение нашей интерпретации на K_2, оставляя детали читателю.

Мы здесь считали z_1, z_2, z_3, ... вещественными числами. Если же z_1, z_2, z_3 ... работы [16]-комплексные переменные, то номографирование с выравниванием по комплексному кругу, требует прежде всего построения пространства K_2^*.

Для этого достаточно идентифицировать не попарно, а все лучи какой нибудь конгруенции выравнивания в $E_{3\infty}$, т. е. идентифицировать все ,,точки'' какой нибудь ,,прямой'' пространства L_4^*, в частности все точки конгруенции выравнивания, соответствующей бесконечно-удаленной прямой Π_2^*, $e+fi = o$, т. е. все прямые конгруенции-щетки с директрисой осью OZ пространства $E_{3\infty}$, которую мы построили в § 2, работы [16]. Мы получили вещественный топологический эквивалент комплексного сферического пространства. Конгруенцией выравнивания будет четвертого порядка

$$\begin{aligned}&(X + Li)^2 + (Y + Mi)^2 + (Z + Ni)^2 + \\ &+ 2(A + Bi)(X + Li) - 2(C + Di)(Y + Mi) - \\ &- 2(E + Fi)(Z + Ni) + (S + Ti) = 0\end{aligned} \tag{1.9}$$

как пара комплексов второго порядка.

Опять идентифицируя попарно взаимнополярные относительно лучи (2.14) работы [16], мы получим уже комплексную ,,окружность'' пересекающуюся с ,прямой'' в одной ,,точке'' (пара взаимнополярных прямых) Такова линейчатая интерпретация комплексной окружности.

В этом пространстве (мы обозначим его через K_4^*) — номографируемо в K_2^*, если возможно представление (1.4), (уравнение (1.3) и (1.35) работы [16], если удовлетворены N — условия), где переменные — комплексные. Надо только синтезировать в виде прибора (,,циркуля'') ,,круг'' пространства K_4^* согласно (1.9), аналогично тому, как мы это сделали для ,,прямой'' в виде ,,линейки'' в L_4^*.

Соотношение (1.3) связывает 8 вещественных переменных и вообще требовало интерпретации в семимерном пространстве. В отдельных случаях оно, очевидно, допускает представление в $П_3^*$ на мнимой номограмме из выравненных точек мнимыми шкалами: z_1, z_2, z_3, z_4. Мы наметим и эти возможности.

Вещественное пространство L_4^* позволяет дать аксиоматическое построение всех плоских (четырехмерных) комплексных геометрий, начиная от проективной и кончая метрическими. При этом становится ясным то, что мнимые пространства не отделены от вещественных какой-либо несопоставимой природой элементов, играющих роль точек, прямых плоскостей и т. д. Становится ясным, что мнимые и вещественные элементы можно связать вещественным образом.

С точки зрения номографии является актуальной любая абстрактная интерпретация, которая может быть немографически эффективно осуществлена в конечном счете в трехмерном пространстве, в котором мы живем. Уже построенное пространство L_4^* многое дает. Разработанная первым соавтором алгебраическая пространственная бесквадратурная анаморфоза функций абстрактных аргументов и нетрудное обобщение N и N_c теорем первого соавтора и критериев других авторов на пространство 3-х измерений приводит к реализации (интерпретации) комплексных номограмм в пространстве, а также к вещественной интерпретации номограмм трехмерного комплексного проективного пространства и к изучению топологии и геометрии комплексного пространства $П_3^*$ и пространств A_3^*, E_3^* и неевклидовых, аналогично тому, как это намечено выше для $П_2^*$.

В направлении поиска интерпретаций номограмм многомерных пространств следует применить принцип счета числа параметров, позволяющий строить вещественные номографически целесообразные топологические эквиваленты комплексных пространств высших измерений, причем то или иное разложение на множители не определяет, однозначно, те объекты трехмерного пространства, которое мы принимаем за ,,точки'', ,,прямые'' и ,,плоскости'' и т. д.

Мнимые номограммы в трехмерном пространстве требуют построения вещественного топологического эквивалента трехмерного комплексного проективного пространства $П_3^*$.

Здесь мы имеем многообразие $3 \times 2 = 6$ измерений.

Его вещественный топологический эквивалент, как шестимерное пространство, не отвечает требованию, указанному в конце § 5 работы [16]. Но, если рассмотреть в трехмерном проективном пространстве пространство пар: плоскость — точка (нуль-пара) как ''точку'' тем удобный агрегат, что он сам себе коррелятивен, то такая пара зависит от 6 параметров и, следовательно, в шестимерном пространстве этих пар трехмерного проективного пространства можно уже практически строить топологический вещественный эквивалент комплексного проективного пространства $П_3^*$.

Номограммы в четырехмерном комплексном працтивном пространстве на перый взгляд преставляются пустой фразеологией, т. к. это пространство восьми измерений. Однако, приняв за ,,точку'' пару прямых $П_3$, зависящую от 8 переменных, мы в пространстве этих пар, можем построить топологический эквивалент комплексного проективного пространства $П_4^*$ восьми измерений и реализовать в нем, между прочим и номограммы. Можно принять за „точку" и пару плоскостей Π_3. Получим другую интерпретацию.

Важными элементами для построения интерпретаций многомерных номограмм являются конгруенции и комплексы прямых первого порядка пространства Π_3, как „точек" пространства интерпретаций. Поэтому очень важным является учение о сопоставлении тех или иных интерпретаций между собой, которое для линейчатых пространств обычных и расширенных (точка-комплекс) и высшей и элементарной геометрией сфер евклидова пространства E_3 выполнили Клейн и Ли [9].

Получим также соответствующие интерпретациям принципы перенесения известных фактов геометрии комплексного пространства на свойства пространства реальных и практически осязаемых „точек", „прямых", „плоскостей" и других образов, пространства интерпретации, построенного на базе вещественного простанства.

Напрмер, для Π_3^* точка определяется 6 вещественными параметрами. Но $6 = 3.2$. Отсюда следует, что повидимому, образом точки в Π_3^* может служить надлежаще определенная пара точек вещественного проектного пространства трех измерений. Остается лишь изучить это отображение и надлежащими дополнительными условиями обеспечить топологическое соответствие и изучить геометрию.

Пусть $M^*(z_1; z_2; z_3; z_4)$ — точка Π_3^*, причем

$$z_1 = a + bi; \quad z_3 = c + di; \quad z_3 = e + fi; \quad z_4 = g + hi \qquad (1.10)$$

Тогда точке M^* можно сопоставить взаимно однозначно и непрерывно пару точек $M_1(a; c; e; g)$ и $M_2(b; d; f; h)$ вещественного пространства Π_3 и эллиптическую инволюцию прямолинейного ряда

$$\begin{aligned} &M_1[\rho(\lambda a - \mu b); \rho(\lambda c - \mu b); \rho(\lambda e - \mu f); \rho(\lambda g - \mu h)] \\ &M_2[\sigma(\lambda b + \mu a); \sigma(\lambda d + \mu c); \sigma(\lambda f + \mu e); \sigma(\lambda h + \mu g)] \end{aligned} \qquad (1.11)$$

где M_1 и M_2 сопряженные точки. В самом деле, легко подсчитать, что $(A_1 A_2 M_1) = -\frac{M}{\lambda}$, $(A_1 A_2 M_2) = \frac{\lambda}{M}$ и, следовательно, $(A_1 A_2 M_1 M_2)$

$$= -\frac{M_2}{\lambda^2}; \ (A_1 A_2 M_1)(A_1 A_2 M_2) = -1; \ (A_2 A_1 M_2 M_1) = -\frac{M^2}{\lambda^2} \qquad (1.12)$$ [3]

Первое и третье из последних трех соотношений показывает проективность рядов $A_1, M_1, M_1', \ldots, A_2, M_2, M_2', \ldots$ и, следовательно, попарную сопряженность точек A_1 и A_2, M_1 и M_2, M_1' и M_2' и т. д. Предпоследнее соотношение показывает, что ряды $A_1, M_1, M_1' \ldots$ и $A_2, M_2, M_2', \ldots$ образуют эллиптическую инволюцию, откуда следует, что эти ряды определяют одинаковое напрвление. Двойными точками инволюции будут те, при которых $(A_1 A_2 M_1) = (A_1 A_2 M_2)$ т. е. $\frac{\lambda}{M} = \pm i$. Необходимо отметить, что различные точки Π_3^* могут изображаться одним и тем же прямолинейным рядом, но с различными

[3]) $(A_1 A_2 M)$ и $(A_1 A_2 M_1 M_2)$ — обозначения простого и ангрмонического отношения указанных точек одной прямой.

инволюциями в нем заданными; например, если в z_1, z_2, z_3, z_4, все действительные части умножить на любое число и все мнимые части на любое число — это будет иметь место: получим одну и ту же пару точек A_1 $(a;\ c;\ e;\ g)$ и A_2 $(b;\ d;\ f;\ h)$, но инволюция будет уже другой. Но если умножить b, d, f, h только на (—1) то $(A_1 A_2 M_1) = \frac{M}{\lambda}$

$$(A_1 A_2 M_2) = -\frac{\lambda}{M},\ (A_1 A_2 M_1 M_2) = \frac{M^2}{\lambda^2},$$

$$(A_1 A_2 M_1)\,(A_1 A_2 M_2) = -1 \tag{1.13}$$

Мы видим, что получилась таже самая инволюция, что означает нарушение взаимной однозначности. Те же топологические соображения, которые при построении вещественного эквивалента Π_2* заставили сделать идентифицирование, теперь заставляют сделать дизъюнкцию напрвлений прохождения рядов A_1, M_1, M_1' ..., A_2, M_2, M'_2, ... Мы приписываем точке M^* (z_1, z_2, z_3, z_4) направление $A_1 M_1 A_2 M_2$, а комплексно-сорпяженной точке $\overline{M}^*$ $(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}_4)$ — $A_2 M_1 A_1 M_2$, снабжая инволюционные ряды стрелками. При этом бесконечно-удаленным точкам Π_3* будут отвечать всевозможные инволюции на бесконечно- удаленной плоскости Π_3.

Мнимая плоскость определиться как направленная эллиптическая инволюция в пучке плоскостей с действительной осью. Сопряженной плоскости будет отвечать та же, но противоположно направленная инволюция. Остается представить мнимую прямую в пространстве. Если мнимая прямая принадлежит действительной плоскости, то и сопряженная ей принадлежит. Тогда мнимая прямая определится как направленная эллиптическая инволюция в пучке прямых с центром в вещественной точке пересечения сопряженных прямых.

Если же прямая не принадлежит вещественной плоскости, то имеются две комплексно сопряженные плоскости, содержащие по одной две сопряженные прямые. Эти плоскости пересекаются по вещественной прямой.

Если бы построили две другие мнимые сопряженные плоскости, содержащие эти же две сопряженные прямые, то определится новый пучек плоскостей. Два построенных пучка с заданными в них направлениями и определят мнимую прямую.

Установив существование, точек прямых, плоскостей и неявно определив инцидентность и непрерывность, необходимо доказать теперь аксиомы соединения и непрерывности, но мы не будем этого делать.

Разумеется, аксиомы порядка отпадают, т. е. мнимые прямые суть двумерные, а мнимые плоскости — четырехмерные континуумы.

Таким образом, Π_3* топологически эквивалентно пространству направленных эллиптических инволюций на вещественных прямых пространства Π_3. Необходимо углубиться в геометрию этого пространства, но мы этого делать не будем.

При построении вещественного эквивалента для Π_4* 8 измерений можно это делать по-разному, но наиболеее интересный для нас путь основан на том, что $8 = 4.2$. Мы можем каждой точке Π_4^* отнести пару прямых L_4^*.

Здесь мы наметили применение идей Штаудта-Лагера-Мари к вещественной интерпретации Π_3^*.

Анаморфоза функций многих переменных в Π_2^*, или, что то же в L_4^* (аналогично в Π_3^*) производится так.

С помощью введения вспомогательных комплексных переменных и соответствующих им немых шкал, если возможно рассматривать данную функцию или функции как суперпозицию функций меньшего числа аргументов, строим в данной интерпретации с соответствующей ей группой преобразований многозвенную номограмму с одноименными немыми и градуированными (в случае системы уравнений) шкалами и полями с разрывами, вообще говоря, ходом пользования, и возможно с повторением аргументов. Это можно сделать всевозможным числом испытаний, применяя N теоремы автора конечное число раз.

Исключение немых шкал и полей и отсутствие повторения градуированных шкал и полей будет иметь место, если тождественно равны полный системы инвариантов соответствующей группы преобразований (движений) рассматриваемой интерпретации.

В случае проективной или аффинной интерпретации для шкал необходимы и достаточны ревенства проективных или соответственно аффинных кривизн соответствующих шкал и натуральных параметров (условие проективной или аффинной конгруентности одноименных шкал).

В случае прямолинейных одноименных шкал необходимо и достаточно равенство шварцианов. В случае плоских одноименных бинарных полей необходимо и достаточно равенство проективно-дифференциальных инвариантов Гурса-Пэнлеве, допускающих обобщение также на пространство любого числа измерений[4]).

В виде важного примера расмотрим вещественные номограммы из выравненных точек пространства Π_3 (стериоскопическая номография).

Возмем сферу данного радиуса r с центром в начале и отобразим ∞^3 вещественных точек пространства Π_3 на множество окружностей пересечения сферы S с плоскостями, полярными точкам M пространства Π_3. Это соответствие взаимнооднозначное. Тогда каждая шкала заменится параметризованным однопараметрическим семейством кругов сферы. Прямая заменяется либо гиперболическим, либо эллиптическим, либо параболическим пучком кругов сферы, в зависимости от того пересекает ли она сферу в двух мнимых, двух различных вещественных или двух вещественных совпадающих (касается) точках. При этом полярная, относительно, сферы, прямая отобразится соответственно либо эллиптическим, либо гиперболическим либо параболическим пучком кругов на сфере, причем, что существенно, ортогональным к первому. Плоскость либо не пересекается, либо касающаяся сферы отобразится уже соответственно эллиптической, гиперболической, параболической связкой ∞^2 кругов сферы, пересекающих ортогонально

[4]) Вещественные номограммы в пространствах высшего числа измерений можно также интерпретировать в пространстве более низкого числа измерений.

соответственно мнимый, действительный, нулевой (радиуса нуль — значит проходит через точку) круг. Мнимый круг на сфере — это точка внутри сферы и полярная ей плоскость вне сферы, пересекающая сферу по мнимому кругу с действитеклным центром в основании перпендикуляра, опущенного из точки на полярную ей плоскость и имеющего чисто мнимый радиус, равный корню квадратному из взятой с отрицательным знаком степени основания перпендикуляра относительно сферы. Таким образом, внутренние точки сферы можно считать образами ее мнимых, а внешние — действительных окружностей.

Этот мнимый или действительный, возможно нулевого радиуса круг, мы назовем базисом связки окружностей.

Легко понять, что в первом случае круги эллиптической связки кругов на сфере диаметрально паресекают тот вещественный круг этой же связки, по которому сфера пересекается плоскостью, полярной основанию перпедикуляра опущенному из одного из полюсов.

Выполним теперь стереогрефическую проекцию из одного из полюсов сферы на соответствуюшую экваториальную плоскость E_2 сферы, которую мы, однако, расширим одной бесконечно-удаленной точкой, создав этим плоскость K_2, которую мы уже ввели. Но сейчас мы покажем в K_2 номографические соотношений, требующих пространственной интерпретации в Π_3.

При этом мы получим вместо пространственной плоскую номограмму, в простейшем случае из четырех ,,шкал'' — однопараметрических градуированных семейств кругов, в частности — в случае пространственных прямолинейных шкал — параметризованных, плоских пучков кругов с сохранением типа пучка. При стереографической проекции сохраняется и тип связки.

Пользование номограммой сведется к построению окружности шкалы, z_4, принадлежащей к плоской связке окружностей, определяемых тремя данными окружностями z_1, z_2, и z_3. Три окружности определяют связку одного и только одного из трех типов связок. В случае эллиптическом надо построить окружность z_4, ортогонально пересекающую мнимый круг, ортогональный к трем данным. Мы не будем здесь задерживаться на этом построении. В случае гиперболической связки построение просто надо из центра сферы на данную плоскость, что позволяет ее построить по трем окружностям совершенно подобно тому, как все большие круги сферы образуют на сфере частного вида эллиптическую связку по отношению к любому из этих равных между собой кругов, в частности — по отношению к экваториальному большому кругу. Эта связка (фактически одна-эллиптическая связка больших кругов сферы) дает образ бесконечно-удаленной плоскости нашего пространства Π_3, конкретную модель которого мы опять-таки взяли в виде $E_{3\infty}$.

Дополним это замечание об интерпретации точек внутренних к шару. Их полярные плоскости пересекают шар по мнимой окружности. Эти точки можно рассматривать как вещественные интерпретации мнимых окружностей сферы, по которым описанный около сферы конус с вершиной во внутренной точке P сферы касается этой сферы. Проектируя из центра стереграфической проекции, мнимую окружность на плоскокость, мы в плоскости получили мнимую окружность, но центр ее будет действительный — это проекция точки P на плоскости, как это следует из свойств стереографической проекции.

Т. к. поляры точек плоскости π относительной сферы проходят через полюс данной плоскости, пересекая сферу по действительным или мнимым окружностям (полярные плоскости точек плоскости π, попадающих внутрь сферы, если такие имеются), то, если π лежит вне сферы, то все полярные плоскости точек π, проходят через внутренний к сфере полюс π, а следовательно вещественные окружности пересечения этих плоскостей со сферой диаметрально пересекают окружность, по которой пересекает сферу полярная плоскость основания перпендикуляра опущенного из центра сферы на плоскость. Вся же связка окружностей, отвечающих точкам плоскости, непересекающей сферу, будет ортогонально пересекать мнимую окружность пересечения плоскости π со сферой. Можно рассматривать всю эту связку или определяющие ее три какие нибудь окружности связки не принадлежащие одному пучку, как на мнимую окружность, к которой они, все окружности связки перпендикулярны. Таким образом мы определяем мнимую окружность с вещественным центром тремя мнимыми непринадлежащими одному пучку окружностями эллиптической связки, перпендикулярной к мнимой окружности. Можно смотреть на диаметрально пересекаемую всеми окружностями связки так называемую экваториальную окружность эллиптической связки, как вещественную интерпретацию мнимой окружности.

При стереографическом проектировании наша эллиптическая связка перейдет в эллиптическую же на плоскости, а проекция мнимой окружности будет ортогональна к проекциям окружностей эллиптической связки на сфере, которая перейдет в эллиптическую же связку на плоскости. Но экваториальный круг связки на сфере спроектируется уже, вообще говоря, ординарным кругом эллиптической связки: в плоскости роль экваториального круга связки будет уже играть какой то круг связки, не являющейся проекцией экваториального круга связки.

Если же плоскость π пересекает сферу, мы на сфере получили бы гиперболическую связку, а при касании — параболическую.

Каков же радиус круга сферы ортогонального к окружностям данной пораболической, гиперболической и эллиптической связки кругов?

Квадрат длины касательной к сфере из точки с точностью до положительного коэффициента подобия равен степени точки P относительно сферы, т. е. равен нулю для параболической связки, равен положительному произведению секущей на ее внешнюю часть, когда точка P вне сферы, т. е. для гиперболической связки, и, наконец, равен отрицательной величине, и значит — радиус мнимый (см. ниже §1) когда точка находится внутри.

Доказательство вытекает из того: длина касательной к сфере из точки P и есть с точностю до положительного коэффициента подобия, длина радиуса проекции сферы на плоскость, что нетрудно проверить с помощью чертежа.

За различными подробностями относительно свойства связок кругов мы отсылаем к работам [9], [10], [11], [12].

Если отвлечься от тривиального случая параболической связки, когда три данные окружности z_1, z_2, z_3, проходят через одну точку, то выполняется в принципе одно и тоже построение с помощью циркуля и линейки, которое мы сейчас укажем.

Заметим прежде всего следующее.

Радикальной окружностью любого пучка окружностей на сфере называется окружность большого круга, принадлежащего данному пучку. Она является геометрическим местом полюсов ортогонального пучка. Радикальный круг проходит через мнимые или действительные или совпадающие центры пучка. При стереографическом проектировании на плоскость радикальная окружность становиться, однако, вообще ординарной окружностью спроектированного плоского пучка. Радикальной же осью плоского пучка служит стереографическая проекция, проходящей через центр стереографической проекции ординарной, вообще говоря, окружности пучка на сфере.

Если мы имеем три произвольные окружности на сфере, то они либо принадлежат одному пучку (их плоскости проходят через одну прямую пространства) — либо нет. В первом случае соответствуют три точки в пространстве случайно лежат на одной прямой и определяют пучок плоскостей.

Базис связки на сфере в этом случае неопределен. Любая окружность ортогонального пучка плоскости окружностей этого пучка пересекаются по прямой полярной прямой пересечения плоскостей изоокружностей данного пучка, может быть взята за базис связки, изображающей одну из плоскостей пучка. Пучку плоскостей будет отвечать пучок связок.

Таким образом, из рассмотрения этого исключительного случая неопределенности вытекает, что два ортогональных пучка на сфере (ортогональная круговая сеть на сфере) производятся двумя пучками плоскостей с взаимнополярными осями (оси пучков). Крайние касательные плоскости одного пучка определяют точки встречи со сферой оси ортогонального пучка.

Касательный к сфере конус с вершиной на одной из двух взаимнополярных прямых определяет на сфере окружность второго пучка, пересекающую ортогонально все окружности первого пучка.

Во втором общем случае три окружности на сфере определяют три пучка и соответственно три радиальных круга.

Три прямые пересечения пар плоскостей трех данных окружностей z_1, z_2, z_3 определяют оси трех этих пучков, которые пройдут через одну точку — точку встречи плоскостей трех данных кругов сферы, которая, очевидно, есть точка встречи трех осей пучков. Эту точку мы назвали стереографическим радикальным центром трех окружностей. Ясно, между прочим, что плоскости радикальных кругов определяемых тремя данными окружностями сферы, проходя через оси пучков, должны проходить и через стереографический радикальный центр, а значит имеют общую секущую, проходящую через центр сферы.

Точки пересечения этой секущей со сферой определяет общий диаметр трех радикальных кругов пучка и, будучи точками пересечения трех радикальных кругов, могут называться сферическими радикальными центрами трех данных окружностей.

Построим теперь плоскость, полярную стереографическому радикальному центру.

В пересечении с шаром (действительном круге или точке или мнимом круге) эта плоскость определит окружность прикосновения описаного около шара конуса с вершиной в стереографическом центре. Сферические радикальные центры суть полюсы этой окружности. Т. к. этот центр находится в точке пересечения трех осей трех пар кругов (z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_1), то этот круг сферы ортогонально пересекает три данные окружности z_1, z_2, z_3 и является, следовательно, базисом одного из трех типов определяемой этими кругами связки.

В силу свойств цикличности и конформности стереографической проекции, — в проекции три круга z_1, z_2, z_3 отобразятся тремя кругами, а ортогонально пересекающий их круг — басис связки, сейчас построенный нами, перейдет в аналогичный базис плоской связки, центром которого (базиса) будет служить проекция стереографического радикального центра трех данных окружностей (сферический же радикальный центр станет ординарной точкой пересечения трех окружностей, ортогональных к базису и являющихся, очевидно, образами трех радикальных кругов). Какое же положение занимает центр базиса плоской связки, в который проектируется стереографический радикальный центр трех данных кругов, относительно проекции трех данных окружностей?

Чтобы это выяснить, проведем через каждую из трех осей пучков (z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_1) и через центр стереографической проекции плоскости. Эти три плоскости на сфере определят три вспомагательные окружности наших пучков, проектировавшиеся вместе с их осями на прямые плоскости проекции. Плоскости этих вспомогательных окружностей, проходя через оси указанных трех пучков, должны пройти и через точку их пересечения, т. е. через стереографический радикальный центр трех пучков. Но на осях пучков лежат центры соответственных пучков, т. е. пары мнимых, действительных (различных или совпавших) точек пересечения кругов z_1 и z_2, z_2 и z_3, z_3 и z_1. Следовательно, оси пучков на сфере спроектируются радикальными осями проекций кругов z_1, z_2, z_3, а стереографический центр трех кругов на сфере, лежа в точке пересечения прямолинейных осей трех пучков (z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_1), спроектируется точкой пересечения трех радикальных осей кругов z_1, и z_2, z_2 и z_3, z_3 и z_1, т. е. их радикальным центром. Базис связки на сфере спроектируется, таким образом базисным кругом, всегда вещественный центр которого лежит в радикальном центре проекций трех данных кругов z_1, z_2, z_3, причем этот базисный круг пересекает ортогонально проекции трех данных кругов z_1, z_2, z_3.

После этого построение центра базиса в плоскости проекции не представляет никакого труда, как и самого базиса, если он действителен.

Центр круга — базиса связки на сфере, очевидно, гармонически сопряжен со стереографическим центром связки относительно двух полюсов базиса, т. е. относительно концов диаметра сферы, проходящего через стереографический (и 2 радикальные) центр трех данных окружностей на сфере. Следовательно, центр базиса есть основание перпендикуляра, опущенного и стереографического радиального центра на полярную ему плоскость. (При отображении проекция центра базиса на сфере, таким образом не переходит в центр проекции базиса, а переходит в ординарную точку).

Если мы примем центр базиса на сфере (этот центр в непараболическом случае не лежит на сфере, а внутри ее — в случае гиперболической и вне ее — случае эллиптической связки) за центр инверсии, степень которой равна степени центра базиса относительно сферы, (значит эта степень отрицательна в случае гиперболической связки, когда центр внутри шара и положительна в случае эллиптической связки, когда центр базиса вне шара, и равна нулю в случае параболической связки), то при выполнении инверсии ничто не изменится и пользы от этой инверсии мало, т. к. ее центр проектируется в ординарную точку плоскости. Но, если рассмотреть инверсию с центром в стереографическом радикальном центре трех окружностей со степенью равной степени этой точки относительно сферы эта степень положительна, когда стереографический радикальный центр находится вне шара, равна нулю, когда он на шаре, и меньше нуля, когда он внутри шара, т. е. соответственно когда базис на сфере невыраждающийся и действительный (связка гиперболическая), когда базис, есть вещественная точка сферы (связка параболическая), наконец, когда базис мнимый (связка эллиптическая).

Мы утверждаем, что стереографический радикальный центр будет в то же время инвертировать в самих себя и с той же степенью инверсии и сферу и окружности z_1, z_2, z_3 на сфере и базис связки и целиком все пучки окружности, принадлежащих трем пучкам (z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_1) и все окружности любого пучка окружностей, определяемого любыми двумя окружностями связки на сфере, которые как нетрудно выяснить, также обязательно принадлежат этой же связке. Это прямо следует из отмечанного выше элементарного факта, что стереографический радикальнный центр базиса и центр базиса, т. е. основание перпендикуляра опущенного из центра сферы на плоскость полярную стереографическому радикальному центру, гармонически сопряжены относительно концов проходящего через эти точки диаметра и, следовательно, взаимно обратных друг другу в инверсии относительно шара, и из того, что при стереографической проекции ангармоническое отношение четырех точек прямой или окружности не нарушается.

Значит радикальный центр трех проекций кругов z_1, z_2, z_3 имеет относительно всех этих кругов, а значит и относительно всех проекций кругов связки на сфере, одну и ту же степень инверсии.

Пользование номограммой сводится к определению пометок z_4 тех кругов „шкалы" z_4, для которых радикальный центр проекции трех кругов z_1, z_2, z_3, служит центром инверсии с той же самой степенью как и для проекции кругов z_1, z_2, z_3. Или иначе: 1. надо построить в плоскости проекции окружность — базис с центром в радикальном центре проекций трех данных кругов z_1, z_2, z_3; 2. найти пометки тех „точек"

— кругов ,,шкалы'' z_4, которые ортогональны к построенному кругу. Это второе построение, более практическое в случае гиперболической (и параболической конечно) связки, непригодно в случае эллиптической связки.

Нетрудно синтезировать простой прибор — ,,линейку'' выравнивания в аналогическом пространстве K_2, если не желают каждый раз делать простые построения циркулем и линейкой.

Простроения упрощаются если дать в плоскости проекции стереографическую проекцию большого круга сферы — экватора, который просто проектируется сам в себя с центром в начале. Этот круг вместе с проекцией всех других больших кругов образует эллиптическую связку и делится ими диаметрально.

Пользуясь теоремой Штейнера о геометрических построениях второй степени при наличии в плоскости постоянной окружности с указанным центром, значительно сильно упростит эти и без того несложные построения, пользуясь только линейкой или, на основании теоремы Маскерони пользуясь только циркулем.

Легко теперь оформить все синтетическое рассмотрение аналитически, т. е. исходя из определителя Массо для Π_3 написать уравнения всех ,,шкал'' отображенной анологматической номограмы в K_2.

Аксиомы[5]: ,,прямая определяется двумя ,,точками''; ,,плоскость'' определяется тремя ,,точками''; ,,точка'' определяется тремя ,,плоскостями'' доказываются без особого труда, в общем случае, ибо пучек (либо гиперболический, либо эллиптический, либо параболический) определяется двумя окружностями и соответственно связка (либо эллиптическая, либо гиперболическая, либо параболическая) определяется тремя кругами на сфере и соответственно три связки общего положения на сфере определяют единственную окружность им всем принадлежащую.

Построить сначала вещественный круг, пересекающий ортогонально три данных и найти те из кругов z_4, которые ортогональны к построенному — построение не требует пояснений. В случае параболическом три данные круга проходят через одну точку и ответными кругами ,,шкалы'' z_4, будут те, которые также через нее проходят. Таким образом на базе пространства K_2 мы построили другое с ,,точками'' — кругами прямыми пучками кругов и ,,плоскостями'' — связками кругов.

Полученные номограммы весьма интересны т. к. дают плоский эквивалент любой пространственной номограммы, а само отображение дает нам плоский образ Π_3 в пространстве K_2 (при этом бесконечно — удаленная точка является образом полюса проекции сферы).

Внутренние точки сферы имеют мнимые образы. Мы бы могли за образ плоскости принять окружность ее пересечения со сферой. Мы предоставим это читателю. В нашем образе проективной геометрии, конечно, справедлив принцип двойственности.

Наше изложение аналлагматической номографии в пространстве настолько продвинуто для практического применения, что возникает

---

[5]) Здесь имеются в виду точки, прямые, плоскости общего положения.

необходимость хотя бы вкратце рассмотреть вопрос преобразования построенного трехмерного пространства интерпретации на базе K_2, вещественных номограмм в Π_3 и всей геометрии Π_3. Этой интерпретацией выявлена известная глубокая связь проективной и конформной мебиусовской геометрии.

Ворос преобразования пространственных номограмм в связи с аналлагматической номографией в K_2 может быть исследован лишь после краткого аналитического очерка, к которому мы сейчас перейдем.

Будем для простоты считать, что Π_3 взято в виде $E_{3\infty}$. Возьмем уравнение сферы в неоднородных или однородных координатах

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \; x^2 + y^2 + z^2 - r^2 t^2 = 0 \qquad (1.14)$$

Примем ее точку P $(o;\ o;\ r)$ за центр стереографической проекции и координаты проекции m $(X;\ Y)$ точки сферы M $(x;\ y;\ z)$ на плоскость XOY найдутся из уравнения (1.14) и

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{r}{r - z} \qquad (1.15)$$

Отсюда находим общие формулы стереоскопической проекции пространства на плоскость XOY, которую мы будем рассматривать как плоскость комплексного переменного $X + Yi = Z$

$$X = \frac{rx}{r - z}, \quad Y = \frac{ry}{r - z}, \quad X + Yi = \frac{r}{r - z}\,(x + yi)$$

$$x = \frac{r - z}{r}\,X, \quad y = \frac{r - z}{r}\,Y, \quad x + yi = \frac{r - z}{r}\,(X + Yi) \qquad (1.16)$$

Подставив в (1.14) выражения для x и y из (1.16) получим в частности формулы стереографической проекции

$$x = \frac{2r^2 X}{X^2 + Y^2 + r^2}, \quad y = \frac{2r^2 Y}{X^2 + Y^2 + r^2}, \quad z = r\,\frac{X^2 + Y^2 - r^2}{X^2 + Y^2 + r^2}$$

$$\frac{r - z}{r} = \frac{2r^2}{X^2 + Y^2 + r^2}, \quad x + yi = \frac{2r^2 Z}{X^2 + Y^2 + r^2} \qquad (1.17)$$

Выведем теперь формулы построения аналлагматических номограмм в плоскости комплексного переменного Z.

Уравнение полярной плоскости точки P $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ пространственной номограммы в $E_{3\infty}$ есть

$$x_1 x + y_1 y + z_1 z - r^2 = 0 \qquad (1.18)$$

Подставляя в левую часть (1.18) выражения (1.16) для $x, y, z = z$ и разрешая относительно z, получим выражение для z и $\dfrac{r - z}{r}$

$$z = r\,\frac{x_1 X + y_1 Y - r^2}{x_1 X + y_1 Y - z_1 r}, \quad \frac{r - z_1}{r} = \frac{r^2 - z_1 r}{x_1 X + y_1 Y - z_1 r} \qquad (1.19)$$

Подставив теперь выражения для x, y и z из (1.16) и (1.19) в левую часть (1.14) после простых преобразований получим уравнение

$$\left(X - \frac{rx_1}{r - z_1}\right)^2 + \left(Y - \frac{rY_1}{r - z_1}\right)^2 = \frac{r^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2)}{(r - z_1)^2} \tag{1.20}$$

Тем самым получены формулы для координат центра и радиуса окружности, соответствующей точке P $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ пространства

$$\xi = \frac{rx_1}{r - z_1}, \quad h = \frac{ry_1}{r - z_1}, \quad \rho = \frac{r}{|r - z_1|}\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2},$$

$$\sigma = \xi + ih \tag{1.21}$$

Для реальности интерпретации необходимо и достаточно, чтобы

$$z_1 \neq r, x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 \geq 0 \tag{1.22}$$

При $z_1 = r$ образом будем считать бесконечно удаленную точку конформной плоскости Z.

Из (1.21) видно, что внутренним точкам сферы отвечают мнимые окружности, имеющие однако вещественные центры и отрицательные квадраты радиусов, т. е. чисто-мнимые радиусы. Мы будем допускать и эти мнимые окружности, хотя практически их всегда, очедно, можно избежать.

Формулы (1.21) позволяют строить номограммы аналлагматического пространства, геометрию пользования которыми мы уже вскрыли раньше: прямой выравнивания будет отвечать эллиптический, гиперболический или параболический пучок окружностей, быть может, частью мнимого радиуса, а плоскости — эллиптическая, гиперболическая или параболическая связки кругов на плоскости (см. выше § 1).

Построенную, таким образом, номограмму в K_2 можно подвергнуть круговому преобразованию с помощью (1.1_1) или $(1.\ 1_2)$ с полюсом $z = -\dfrac{d}{c}$ $\left(\text{относительно } w \text{ полюсом будет } w = \dfrac{a}{c}\right)$. Получим окружность с центром σ и радиусом r_1, связанных с (1. 21) формулами

$$\sigma_1 = \frac{a}{c} + \frac{\dfrac{bc - ad}{c^2}\left(\bar{\sigma} + \dfrac{\bar{d}}{\bar{c}}\right)}{\left(\sigma + \dfrac{d}{c}\right)\left(\bar{\sigma} + \dfrac{\bar{d}}{\bar{c}}\right) - r^2}, \quad r_1 = \frac{\left|\dfrac{bc - ad}{c^2}\right| r}{\left(\sigma + \dfrac{d}{c}\right)\left(\bar{\sigma} + \dfrac{\bar{d}}{\bar{c}}\right) - r^2} \tag{1.23}$$

Если данная окружность не проходила через полюс $z = -\dfrac{d}{c}$ то и преобразованная не пройдет через полюс $w = \dfrac{a}{c}$. Если же данная окружность проходила через полюс, то получим прямую, нанесенную к оси под углом

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + arg\,\frac{bc - ad}{c^2} + arg\left(\bar{\sigma} + \frac{\bar{d}}{\bar{c}}\right) \tag{1. 24}$$

и проходит через точку

$$\sigma_1 = 2\sigma + \frac{d}{c} \tag{1. 25}$$

Если же имели не окружность, а прямую не проходящую через точку $z = -\frac{d}{c}$, то получим окружность проходящую через точку $w = \frac{a}{c}$. Пусть на данной прямой взяты две точки z_0 и z_1, то центр σ_1 и радиус r_1 окружности, соответствующей этой прямой будет

$$\sigma_1 = \frac{a}{c} + \frac{\dfrac{bc - ad}{c^2}}{\left(\dfrac{z_0 + \dfrac{d}{c}}{z_1 - z_0} - \dfrac{\bar{z}_0 + \dfrac{\bar{d}}{\bar{c}}}{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}\right)}$$

$$r_1 = \left|\sigma_1 - \frac{a}{c}\right| = \frac{\dfrac{bc - ad}{c^2}}{\left|\dfrac{z_0 + \dfrac{d}{c}}{z_1 - z_0} - \dfrac{\bar{z}_0 + \dfrac{\bar{d}}{\bar{c}}}{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}\right|} \tag{1 .26}$$

Наконец, если прямая проходит через полюс $z = -\frac{d}{c}$, то она преобразуется в прямую, проходящую через полюс $w = \frac{a}{c}$. Угол φ_1 наклона образа и угол φ — наклона оригинала к оси $O\,X$ связаны уравнением

$$\varphi_1 = arg\,\frac{bc - ad}{c^2} - \varphi \tag{1. 28}$$

Эти формулы получаются либо с помощью того факта, что точка $P\,(x_1;\,y_1;\,z_1)$ имеет своей стереографической проекцией как раз центр окружности изображающей точку $P(x_1;\,y_1;\,z_1)$, либо с помощью непосредственных выполнений в плоскости Z. Анологичные формулы для преобразования (1. 1_2) мы получим, если всюду выше заменим a, b, c, d через $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ а σ_1 через $\bar{\sigma}$.

В аналлагматической номографии полезна теорема, легко получаемая из равенства (1. 23), после перенесения в первом $\frac{a}{c}$ влево и почленного

деления второго на первое. $$\frac{\left|\sigma_1 - \frac{a}{c}\right|}{\left|\bar{\sigma} + \frac{\bar{d}}{\bar{c}}\right|} = \frac{|r_1|}{|r|}.$$

Но $\left|\bar{\sigma} + \frac{\bar{d}}{\bar{c}}\right| = \left|\sigma + \frac{d}{c}\right|$. Отсюда видно, что радиусы относятся как расстояния соответствующих центров от соответствующих полюсов.

Легко видеть, что изложенная интерпретация пространственных номограмм позволяет возвращаться от аналлагматических номограмм к пространственным номограммам из выравненных точек, т. к. формулы (1. 21) при заданном r допускают однозначное обращение:

$$z_1 = r\,\frac{|\sigma|^2 - r^2\rho^2 - r^2}{|\sigma|^2 - r^2\rho^2 + r^2}, \quad x_1 = \frac{2r^2\xi}{|\sigma|^2 - r^2\rho^2 + r^2},$$

$$y_1 = \frac{2r^2h}{|\sigma|^2 - r^2\rho^2 + r^2} \tag{1.29}$$

Формулы преобразования (1.1) и (1.1_2) выделяют шестичленную подгруппу 15-членной группы пространственных автоморфных колинеаций, сохраняющих сферу (1.14).

Т. к. при автоморфных коллинеация сферы ее прямолинейные образующие u_1 и u_2 должны переходить в такие же, а с другой стороны для измерения углов на сфере между любыми двумя направлениями d_1 и d_2, исходящими из одной точки сферы можно с помощью изотропных прямых u_1 и u_2 написать проективную формулу Лагера

$$\varphi = \frac{1}{2i}\ln\,(d_1\,.\,d_2;\ \ u_1\,.\,u_2) \tag{1.30}$$

то отсюда вытекает замечательный факт, что автоморфные коллинеации сферы являются вместе с тем ее конформными преобразованиями. Поскольку стереографическая проекция сохраняет конформность, то между шестичленными преобразованиями (1. 1) и (1. 1_2) и автомор — фными коллинеациями сферы (1. 14) устанавливается изоморфизм, которым мы воспользуемя для представления пространственной группы автоморфных коллинеаций сферы (1. 14), которую мы для удобства возьмем в однородных координатах.

Это будет, если толковать t как время, а радиус r сферы как скорость света c, общая группа Лоренца специальной теории относительности.

Это будет вместе с тем подгруппа коллинеаций пространственной номограммы.

Этому соответствует в пространстве существование автоморфной коллинееации, преобразующей пару внешних (внутренних) точек в пару таких же, что следует из того, что эта группа шестичленная.

Однако, вопрос менее прост, чем кажется. Пара окружностей в K_2 определяет пучок и ортогональную к пучку окружность, причем на последней получается группа 4 точек с определенным ангармоническим отношением — инвариантом пары окружностей относительно группы (1.1). Таким образом, две пары окружностей определят преобразование или преобразования (1.1) (нас не интересует возможность преобразовать затем окружности в себя, ибо у нас в K_2 точкой является окружность) при условии равенства их инвариантов (и три пары окружностей могут быть заданы, если попарно равны их эти инварианты). Это указывает и на соответствующие ограничения в пространстве, связанное с тем, что шестичленная группа *Ли*, переводящая сферу (1.14) в себя, является интранзитивной.

Для того, чтобы 2 точки можно было автоморфной коллинеацией прбразовать в две другие необходимо и достаточно, чтобы 4 точки попарно принадлежали одной и той же системе интранзитивности. Сама данная сфера образует одну из семейства поверхностей второго порядка, образующих системы точек интранзитивности относительно шестичленной группы[6]) преобразований сферы в себя, т. е. относительно общей группы Лоренца, геометрию которой за недостатком места мы изучили в номографическом направлении в особой статье, посвященной преобразованиям аналогматической номографии.

Сделаем дальнейшие аналитические замачания относительно преобразований в K_2.

Уравнение

$$A z\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0 \tag{1.31}$$

или

$$\bar{z} = -\frac{Bz + D}{Az + C} \tag{1.32}$$

где $A = A_1 + A_2 i$, $B = B_1 + B_2 i$, $C = C_1 + C_2 i$, $D = D_1 + D_2 i$

определяет, очевидно, двойные элементы линейного конформного преобразования второго рода (1.2).

Получаем

$$\begin{aligned} A_1 (x^2+y^2) + B_1 x - B_2 y + C_1 x + C_2 y + D_1 = 0 \\ A_2 (x^2+y^2) + B_1 y + B_2 x - C_1 y + C_2 x + D_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Если $A = 0$, но $B_1^2 + B_2^2 - C_1^2 - C_2^2 = 0$ имеем двойную точку. Если $A \neq 0$, то имеем две разичные или две основные двойные точки или совсем нет двойных точек преобразования (две окружности (1.33) не имеют общих точек и, значит, x, y мнимые).

---

[6]) Надо иметь в виду, что речь идет о действительных преобразованиях. С точки зрения комплексной проективной геометрии такая группа будет 12-членной группой преобразований первого рода (компонента единицы, по терминалогии теории групп Ли) и 12-членного множества преобразований второго рода.

Если обе окружности (1.33) совпадают, имеем окружность двойных точек. Это будет если,

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2+C_2}{B_1+C_1}=\frac{B_1-C_1}{C_2-B_2}=\frac{D_2}{D_1}=\lambda\,, \tag{1.34}$$

где λ значение этих равных отношений.

Эти условия могут быть переписаны в форме

$$\frac{C}{A}=\overline{\left(\frac{B}{A}\right)},\quad \frac{D}{A}=\overline{\left(\frac{D}{A}\right)} \tag{1.35}$$

Необходимость их доказана. Покажем достаточность. Находим, предполагая $A_1 \neq 0$

$$A=A_1(1+\lambda i),\ D=D_1(1+\lambda i),\ C=\frac{\overline{B}(1+\lambda i)}{1-\lambda i}$$

Уравнение (1. 31) примет вид, после простых преобразований

$$A_1 z\overline{z}+\frac{B}{1+\lambda i}z+\overline{\left(\frac{B}{1+\lambda i}\right)}\overline{z}+D_1=0 \tag{1.36}$$

т. е.

$$mz\overline{z}+nz+\overline{n}\overline{z}+e=0 \tag{1.37}$$

где m и e — действительны и $m \neq 0$, т. е. определяет окружность, зависящую от трех параметров. Это — уравнение действительной или мнимой окружности с центром в $\left(-\frac{\overline{n}}{m}\right)$ и радиусом $\sqrt{\frac{n.\overline{n}-me}{m^2}}$.

Таким образом, преобразование (1.1_2)

$$w=-\frac{B\overline{z}+D}{A\overline{z}+C}. \tag{1.38}$$

При условиях (1.35) имеет окружность двойных точек с центром в точке $\frac{B}{A}$ и с радиусом $\sqrt{\frac{BC-AD}{A^2}}$. Это окружность с действительным или чисто мнимым в условиях (1.35) радиусом (при $BC-AD=0$ получаем точку, но этот случай исключается). Мы чисто формально распространим понятие подстановки эллиптической, гиперболической, параболичиской и локсодромической на преобразования 2 рода.

Поскольку группа подстановок (1.1) есть шестичленная, можно пару окружностей отобразить на пару других.

Мы получаем 6 уравнений — две тройки уравнений (1.23) с 6 неизвестными $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{c}$.

Особую роль для аналлагматической номографии по глубокой связи с пространственными номограммами из выравненных точек играет r — унитарное преобразование.

r — Унитарным ($r > 0$) преобразованием первого или второго рода называется линейное преобразование, приводимое к форме

$$z = \frac{raw - \bar{b}r^2}{bw + \bar{a}r}, \quad \bar{z} = \frac{raw - \bar{b}r^2}{bw + \bar{a}r}, \quad a = a_1 + a_2 i, \quad b = b_1 + b_2 i \quad (1.39)$$

Если

$$a\bar{a} + b\bar{b} = r^2 \quad (1.40)$$

то r — унитарное преобразование называется нормированным.

Легко проверить, что преобразование сопряженное r-унитарному есть r-унитарное и что r -унитарные преобразования первого рода образуют группу, а второго — нет.

Совокупность всех r -унитарных преобразований образует общую r -унитарную группу.

Легко проверить также, что нетождественное r -унитарное преобразование первого рода есть эллиптическое (для доказательства достаточно вычислить так называемый коэффициент K)

Двойные точки r -унитарного преобразования первого рода суть

$$z_{A,B} = r\, i\, \frac{a_2 \pm \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + a_2^2}}{b}, \quad (1.41)$$

откуда

$$z_A \cdot \bar{z}_B = -r^2, \quad \bar{z}_A \cdot z_B = -r^2. \quad (1.42)$$

Если $b = 0$, то

$$z_A = \infty, \quad z_B = 0. \quad (1.43)$$

Назовем r -унитарной инверсией, инверсию относительно мнимого круга (r — унитарный круг)

$$z\bar{z} = -r^2 \quad (1.44)$$

Очевидно, любая окружность, проходящая через любую пару взаимно инверсных относительно r-унитарного круга точек ортогональна к r -унитарному кругу.

Назовем ассоциированным кругом инверсии вещественный круг (ассоциированный r — круг).

$$z\bar{z} = r^2 \quad (1.45)$$

Теорема. *Любая окружность, проходящая через любую пару взаимноинверсных точек r-унитарной инверсии, пересекает диаметрально ассоциированный круг.*

Действительно, степень начала координат относительно такого круга, очевидно отрицательна и равна $-r^2$. Но, очевидно, такова же степень начала относительно ассоциированного круга. Значит они имеют общую хорду, проходящую через начало, т. е. диаметр ассоциированного круга.

Пусть z_1 и z_2-две точки плоскости Z инверсные относительно r-унитарного круга. Тогда

$$z_1 \bar{z}_2 = -r^2, \quad \bar{z}_1 z_2 = -r^2 \quad (1.46)$$

Следовательно, совокупность всех окружностей плоскости, пересекающих диаметрально ассоциированный круг образует эллиптическую связку, для которой ассоциированный круг служит экваториальным кругом.

Основое значение для нас имеет следующая теорема.

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы общее линейное преобразование плоскости было r-унитарным, является то, чтобы оно переводило r-унитарную инверсию в r-унитарную инверсию. Докажем это

Прежде всего заметим, что всегда можно общее преобразование

$$z = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \quad \alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq O \tag{1.47}$$

записать в форме

$$z = \frac{arw + br^2}{cw + dr}, \quad w = \frac{-drz + br^2}{cz - ar} \tag{1.48}$$

Всегда можно теперь нормировать это преобразование двумя способами так, чтобы

$$ad - bc = r^2 \tag{1.49}$$

что мы и будем предполагать.

Подвергнем теперь две взаимнообразные точки z_1 и z_2 преобразованию (1.48_2). Они перейдут в следующие точки w_1 и w_2:

$$w_1 = \frac{-drz_1 + br^2}{cz_1 - ar}, \quad w_2 = \frac{-drz_2 + br^2}{cz_2 - ar} \tag{1.50}$$

причем должны иметь

$$w_1\overline{w}_2 = -r^2, \tag{1.51}$$

т. е.

$$\frac{-drz_1 + br^2}{cz_1 - ar} \cdot \frac{-\overline{d}r\overline{z}_2 + \overline{b}r}{\overline{c}\,\overline{z}_2 - \overline{a}r} = -r^2. \tag{1.52}$$

Принимая во внимание (1.46) отсюда получим

$$\frac{-dz_1 + br}{cz_1 - ar} = \frac{-\overline{c}\,\overline{z}_2 + \overline{a}r}{-\overline{d}\,\overline{z}_2 + \overline{b}r} = \frac{\overline{c}r^2 + \overline{a}z_1r}{\overline{d}r_2 + \overline{b}z_1r}. \tag{1.53}$$

Из этого тождества относительно z_1 находим

$$-\frac{d}{\overline{a}r} = \frac{br}{\overline{c}r^2} = \frac{c}{\overline{b}r} = -\frac{ar}{\overline{d}r^2} \tag{1.54}$$

или

$$\frac{d}{\overline{c}} = -\frac{b}{\overline{c}} = -\frac{c}{\overline{b}} = \frac{a}{\overline{d}} = \mu. \tag{1.55}$$

Это — необходимое и достаточные условия r-унитарности нормированной подстановки (1.48).

Отсюда

$$a = \mu \bar{d}, \quad b = -\mu \bar{c}, \quad c = -\mu \bar{b}, \quad d = \mu \bar{a} \tag{1.56}$$

Следовательно,

$$ad - bc = \mu^2 (\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}) \tag{1.57}$$

т. е.

$$\mu^2 = 1, \ \mu = \varepsilon = \pm 1 \tag{1.58}$$

Значит

$$a = \varepsilon \bar{d}, \quad b = -\varepsilon \bar{c}, \quad c = -\varepsilon \bar{b}, \quad d = \varepsilon \bar{a} \tag{1.59}$$

Тогда (1.48) примет вид

$$z = \frac{raw - \varepsilon \bar{c} r^2}{cw + \varepsilon \bar{a} r}, \quad \nabla = \varepsilon (a\bar{a} + c\bar{c}) = \varepsilon r^2 \tag{1.60}$$

Отсюда видно, что $\varepsilon = -1$ невозможно, т. к. противоречит условию (1.49) и имеем

$$z = \frac{raw - \bar{c} r^2}{cw + \bar{a} r} \tag{1.61}$$

т. е. получим нормированную r - унитарную подстановку (1.39), если вместо c написать b.

Простые и важные примеры r-унитарных подстановок это

$$z = w, \quad z = -\frac{r^2}{w} \tag{1.62}$$

Теорема. *Линейное преобразование, переводящее r-унитарную окружность в себя есть r-унитарное преобразование.*

Доказательство. Т. к. линейное преобразование переводит точки, взаимнообратные относительно круга, в такие же, а преобразование, обладающее этим свойством есть r -унитарное, то как мы уже доказали, теорема доказана.

Как и предыдущая теорема, эта теорема дает внутреннюю характеристику r - унитарного преобразования.

Можно этой теореме дать и непосредственное аналитическое доказательство.

Пусть окружность имеет центр в точке z_0 и радиус ее равен r_0, где $r > o$.

Если сделать замену $z = z_0 + G$, то получим формулу преобразования в себя этого круга, содержащую параметр z_0, которую мы назовем обобщенным r - унитарным преобразованием, соответствующим r - унитарному кругу с центром в z_0. Для этого круга также имеется ассоциированный вещественный круг.

Из изложенного вытекает простой способ построения окружности, ортогональной к мнимой. Для этого достаточно построить окружность, пересекающую диаметрально действительную окружность с тем же центром, ассоциированную с данной.

Отсюда вытекает решение задачи построения окружности пересекающей ортогонально две данные (действительные, мнимые, одна — действительная и одна мнимая)окружности.

Отсюда следует, что, например, для построения окружности (всегда вещественной) ортогональной к двум мнимым окружностям достаточно описать окружность вокруг равнобочной трапеции, вершинами которой служат концы диаметров их ассоциированных окружностей, перпендикулярных к линии центров. Построенная окружность пересекает вещественную линию центров двух данных мнимых кругов в двух вещественных точках, гармонически делящих две пары комплексно сопряженных точек пересечения данных мнимых окружностей с их линией центров. Любая окружность пучка окружностей, определяемого этими двумя точками будет ортогональна к двум данным мнимым окружностям, линия центров которых служит их радикальной осью для построения гиперболического пучка. Круг, описанный из любой точки радикальной оси радиусом, равным длине касательной, проведенной из взятой точки радикальной оси к одному из кругов гиперболического пучка, будет ортогонален ко всем окружностям этого пучка. Но для точек радикальной оси, лежащих между двумя центрами двух мнимых кругов, эти окружности становятся мнимыми и потому строятся их ассоциированные окружности, которые должны, в силу изложенного выше, пересекаться диаметрально всеми окружностями гиперболического пучка. Достаточно построить окружность (с центром — между указанными двумя точками) так, чтобы она диаметрально пересекалась одной какойнибудь из окружностей гиперболичесского пучка (прежде всего той, которой центр тоже лежит на радикальной оси в середине линии центров двух данных мнимых окружностей), чтобы она диаметрально же пересекалась и любой другой окружностью пучка. Доказательство вытекает из следующего. Если A и B — центры двух данных мнимых окружностей, M — любая точка между ними, являющаяся центром некоторого мнимого круга, ортогонального к гиперболическому пучку, или что то же — центром ассоциированного с ним вещественного круга, следовательно пересекаемого диаметрально окружностями гиперболического пучка, и O — центр какого нибудь круга гиперболического пучка (круг O). Соединим отрезком прямой OCM и через M перпендикулярно к OM проведем хорду в окружности O, которая встречает эту окружность в точках P и Q так что $PO = OQ = \lambda$. Тогда λ не зависит от вида круга O, т. к. в круге O имеем соотношение $\lambda^2 = AM . MB$ и $\lambda = \sqrt{AM . MB}$. Окружность с центром в M и радиуса λ будет поэтому диаметрально пересекаться любой окружностью гиперболического пучка,т. к. по причине постоянства λ все равноудаленные от M точки P и Q, построенные для каждого круга O из гиперболического пучка будут лежать на одной и той же окружности радиуса λ с центром в M, причем $PM = MQ$.

Множество других построений с мнимыми и вещественными кругами, нужных для аналлагматической номографии, мы не рассматривали здесь.

Сделаем унитарное преобразование (1.39) над r -унитарным и r-ассоциированными кругами (1.44) и (1.45) и посмотриим как они преобразуются. Объединяя (1.45) и (1.46) общей формулой

$$z\bar{z} = \varepsilon\, r^2 \qquad (1.63)$$

получим

$$\frac{raw - \bar{b}r^2}{bw + \bar{a}r} \cdot \frac{r\bar{a}\bar{w} - br^2}{\bar{b}\bar{w} + ar} = \varepsilon\, r^2 \tag{1.64}$$

или после упрощений

$$r^2\,(a\bar{a} - \varepsilon\, b\bar{b})\; w\bar{w} - (1+\varepsilon)\, abr^3 w - (1+\varepsilon)\,\bar{a}\bar{b}r^3\, w + \\ + (b\bar{b} - \varepsilon\, a\bar{a})r^4 = 0. \tag{1.65}$$

При $\varepsilon = -1$ получим

$$w\bar{w} = -\, r^2 \tag{1.65}$$

т. е. r -унитарный круг инверсии, как и следовало ожидать, переходит в себя при r - унитарной инверсии. Это, если угодно, круг неподвижных точек r - унитарного преобразования второго рода

$$z = -\frac{r^2}{\bar{w}} \tag{1.66}$$

что указывает на резкое отличие преобразований второго рода от первого, где было лишь две двойные точки.

Вернемся к уравнению (1.65) при $\varepsilon = +\,1$.

$$r^2\,(a\bar{a} - b\bar{b})\; w\bar{w} - 2\, abr^3 w - 2\,\bar{a}\bar{b}r^3\bar{w} + (b\bar{b} - a\bar{a})\, r^4 = 0. \tag{1.67}$$

Получили окружность, в которую преобразуется ассоциированный круг (1.45), который, следовательно, не сохраняется при r - униратном преобразовании.

Однако, найдем точки пересечения этого круга (1.67) с новым кругом ассоциированным по отношению к кругу (1.65), т. е: по отношению к неинвариантному кругу.

$$w\bar{w} = r^2 \tag{1.68}$$

Решая совместно уравнения (1.67) и (1.68) легко найти

$$w = \pm\, i\,\frac{ab}{\bar{a}\,\bar{b}}\; r\,, \tag{1.69}$$

т. е. получаем две диаметрально противоположные точки круга (1.68), который теперь играет роль экваториального круга, соответствующей эллиптической связки кругов.

Возьмем теперь r -унитарное преобразование второго рода (1.39)

Его двойные элементы суть решения уравнения

$$\bar{z} = \frac{raz - \bar{b}r^2}{bz + \bar{a}r} \tag{1.70}$$

или

$$bz\bar{z} + \bar{a}r\bar{z} - arz + \bar{b}z^2 = o \tag{1.71}$$

Чтобы сделать коэффициенты при $\bar{z}$ и z сопряженными согласно (1. 37), пришлось бы еще умножить на нормирующий множитель

Получим уравнение вида (1.31). Здесь

$$A = b,\ B = \bar{a}r,\ C = -ar,\ D = \bar{b}r^2 \qquad (1.72)$$

Вычисляем, предпологая, что $b \neq 0$

$$\frac{C}{A} = -\frac{ar}{b},\ \frac{B}{A} = \frac{\bar{a}}{b}r,\ \overline{\left(\frac{B}{A}\right)} = \frac{ar}{\bar{b}},\ \frac{D}{A} = \frac{\bar{b}}{b}r^2,\ \overline{\left(\frac{D}{A}\right)} = \frac{b}{\bar{b}}r^2 \qquad (1.73)$$

Приведем условия (1.35). Имеем

$$-\frac{ar}{b} = \frac{ar}{\bar{b}} \quad (1.74), \qquad \frac{\bar{b}}{b}r^2 = \frac{b}{\bar{b}}r^2 \quad (1.75)$$

или

$$-\frac{a}{b} = \frac{a}{\bar{b}} \quad (1.74'), \qquad \frac{\bar{b}}{b} = \frac{b}{\bar{b}} \quad (1.75')$$

Если $b = 0$, то (1.71) немедленно дает прямую двойных точек (круг бесконечного радиуса)

$$\bar{a}\bar{z} - az = 0. \qquad (1.76)$$

Пусть теперь $b \neq 0$. При исследовании (1.74′) и (1.75′) различаем два случая:

1. $a = 0$. Тогда $b \pm \bar{b} = -\varepsilon\bar{b}$ (в действительное или чистомнимое), где $\varepsilon = \pm 1$

Уравнение (1.71) принимает вид

$$-\varepsilon\bar{b}z\bar{z} + \bar{b}r^2 = o$$

или

$$z\bar{z} = \varepsilon r^2 \qquad (1.77)$$

т. е. при $\varepsilon = +1$ имеем вещественный круг двойных точек (не просто двойной круг), а при $\varepsilon = -1$ имеем мнимый двойной круг, причем первый ассоциирован последнему.

Легко непосредственно убедиться, что при преобразовании (1.70) в рассматриваемом случае 1. круг (1.77) переходит сам в себя. 2. $a \neq 0$. Тогда из (1.74) имеем $b = -\bar{b}$ (b -чистомнимое) и автоматически удовлетворяется второе уранение (1.75′). И тогда уравнение (1.71) примет вид

$$z\bar{z} + \frac{\bar{a}}{b}r\bar{z} - \frac{a}{b}rz - r^2 = 0 \qquad (1.78)$$

и определяет окружность двойных точек с центром в точке $\frac{a}{b}r$ и радиуса

$$-\frac{\bar{a}}{b} = -\frac{a_1 - a_2 i}{b_2 i} = \frac{a_2 + ia_1}{b_2},\quad r\sqrt{\frac{b^2 - a\bar{a}}{b^2}} = r\sqrt{\frac{b_2^2 + a_1^2 + a_2^2}{b_2^2}}. \qquad (1.79)$$

Во всех остальных случаях имеем две действительные или две мнимые точки.

Нетрудно это подтвердить прямой выкладкой.

Уравнение (1.71) распадается на два

$$b_1 (x^2+y^2) + b_1 r^2 = 0$$

$$b_2 (x^2+y^2) - 2 a_2 xr - 2a_1 yr - b_2 r^2 = 0 \tag{1.80}$$

Если $a = 0$, то получаем круг лишь $b_1 = 0$, т. е. когда $b = -\bar{b}$, либо при $b_2 = 0$, т. е. при $b = \bar{b}$. Это наш случай 1.

Если $a \neq 0$, то обязательно $b_1 = 0$, т. е. опять $b = -\bar{b}$ случай чисто мнимого b (и круг дается одним вторым уравнением (1.80), которое можно переписать так, если $b_2 \neq 0$) если при $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$ но $a \neq 0$, то имеем прямую двойных точек, которую мы уже указали равенством (1.76).

$$\left(x - \frac{a_2}{b_2} r\right)^2 + \left(y - \frac{a_1}{b_2} r\right)^2 = r^2 \frac{b_2^2 + a_1^2 + a_2^2}{b_2^2} \tag{1.81}$$

Отсюда координаты центра и радиус R будут в согласии с (1.79)

$$\xi = \frac{a_2}{b_2} r, \quad h = \frac{a_1}{b_2} r, \quad R = r\sqrt{\frac{b_2^2 + a_1^2 + a_2^2}{b_2^2}} \tag{1.82}$$

Пусть теперь $b_1 \neq 0$. Тогда (1.80) примет вид

$$x^2 + y^2 = -r^2$$

$$b_2 (x^2 + y^2) - 2 a_2 xr - 2 a_1 yr - b_2 r^2 = 0. \tag{1.83}$$

В таком случае не имеем окружности и нет действительных двойных точек.

Мнимые же двойные точки принадлежат все тому же r - унитарному кругу (1.83) или (1.44) и вещественной прямой

$$a_2 x + a_1 y + b_2 r = 0 \tag{1.84}$$

или

$$az - \bar{a}\bar{z} + (b - \bar{b})\, r = 0 \tag{1.85}$$

$$az + br = \bar{a}\bar{z} + \bar{b}r. \tag{1.85'}$$

Итак, имеется две комплексно сопряженные точки пересечения прямой (1. 84) и окружности (1.83) или, что тоже самое, прямой (1.85) и окружности (1.44).

Получаем

$$z^{(A),\,(B)} = \frac{-b_2 \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_2^2}}{a}\, ri \tag{1.86}$$

Оисюда получаем

$$y^{A,B} = \frac{-a_1 b_2 \pm a_2 i \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_2^2}}{a\bar{a}}\, r$$

$$x^{A,B} = \frac{-a_2 b_2 \pm i a_1 \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_2^2}}{a\bar{a}}\, r, \tag{1.87}$$

Само собой разумеется, что практическая реализация многомерных номограмм, с одной стороны, потребует разработки тех иных построений в плоскости с использованием теории элементарных геометрических построений и начертательной геометрии, в широком смысле, с использованием идей из циклографии Фидлера и Федорова.

Но еще в большой степени эффективность многомерной номографии связана с осуществлением ссответствующих многомерным номограммам — номограмм-приборов, как номографически синтезируемых вычислительных устройств, которые, хотя и имеют в своей отдаленной основе старые плоские номограммы из выравненных точек д'Оканя, но практически отличаются от них значительной сложностью пространственного механизма, при построени и которого, как мы видели, используются весьма абстрактные свойства многомерных геометрий, которые ранее казались совершенно удаленными от всякой непосредственной практики.

Таким образом, многомерная номография — и даже в мнимом пространстве (мнимая номография) в буквальном, но не в переносном смысле слова, (как это видно из предыдущего), построенная в конечном счете на базе вещественного пространства Π_3 или его конкретной модели $E_{3\infty}$ -не просто геометрический язык, а область многообещающих теоретических и практических исследований имеющей множество более или менее глубоких связей с различными отделами математики, в том числе со специальной теорией относительности и неевклидовыми геометриями.

Литература

[1] И. А. Вильнер: Проблема анаморфозы. ДАНСССР, т. 77, № 2 (1951)

[2] И. А. Вильнер: Номографирование систем уравнений и аналитических функций: Номовграфический Сборник МГУ (1951).

[3] И. А. Вильнер: Стереоскопическая номография. Успехи Математических наук. т. XI, вып. 4 (70), (1956).

[4] И. А. Вильнер: Стереоскопическая номография и пространственная анаморфоза с наперед заданной шкалой. Украинский Математический журнал. т. X, № 2, (1957).

[5] И. А. Вильнер: Номограммы для вычисления эллиптических функций и интегралов. УМН, т. IX, в 2(60), (1954), стр. 124.

[6] И. А. Вильнер: Бесквадратурное представление в виде определителя Массо в много мерном пространстве недиференцируемых и диференцируемых многих переменных в инвариантной форме. Сборник статей ВЗПИ № 9, (1955), §10, стр. 115.

[7] Н. А. Глаголев: Применение проективного исчисления к построению номограмм. Номографический сборник изд. ОНТИ 1935 г. Москва — Ленинград.

[8] H. Whitney: Ann. of Math. том 45, № 2, (1944).

[9] Ф. Клейн: Высшая геометрия ОНТИ (1939).

[10] К. Каратеодори: Конформное отбражение изд. ОНТИ ПТТИ (1934).

[11] Адамар: Элементарная геометрия т. II, изд. Учпедгиз (1938).

[12] I. L. Ceolidge: A treatis of the Circle, and the sphere Оксфорд, (1915).

[13] I. L. Ceolidge: The Geometry of the complex domain Оксфорд, (1924).

[14] E. Cartan: Lecons zur la géometrie projektike complex Париж. (1931).

[15] М. А. Лаврентьев: Конформные отображения с приложением к некоторым вопросам механики. ОГИЗ ГИТТЛ. Москва-Ленинград (1946).

[16] И. А. Вильнер: Мнимые номограммы и основные принципы многомерной номографии (работа находится в печати).

Adresa autorov:

И. А. Вильнер, Москва А — 167, Авиационный пер. 10 б — кв. 27, СССР.
P. Galajda, CSc., Katedra matematiky Strojníckej fakulty VŠT v Košiciach, Nám. Febr. víťazstva 9.

Do redakcie došlo 15. 7. 1965.

Základy analagmatickej nomografie

I. A. VILNER, P. GALAJDA

Resumé

V práci sa autori zaoberajú obecnými geometrickými základmi analagmatickej nomografie. Vyšetrujú nomogramy vo viacrozmernom priestore a k tomuto rozboru používajú teóriu grúp a topológie. Pomocou tejto teórie dávajú nomografii základ pre všetky možné interptetácie.

Určujú vzájomnú súvislosť analagmatickej nomografie s nomografiou v trojrozmernom projektívnom priestore a dostávajú rovinné obrazy príslušných priestorových nomogramov. Sledujú obecnú ideu zovšeobecnej nomografie I. A. Viľnera a tesne ju spájajú s jej zodpovedajúcou geometriou a grupou transformácií. Takýto spôsob zblíženia nomografie s geometriou, ako je ukázaný v práci, doteraz v nomografii nebol.

Grundlagen der analagmatischen Nomographie

I. A. VILNER, P. GALAJDA

Zusammenfassung

In dieser Arbeit behandeln die Autoren die allgemeinen geometrischen Grundlagen analagmatischer Nomographie. Sie untersuchen Nomogramme im mahrdimensionalen Raum und zu dieser Analyse benutzen sie die Gruppentheorie und Topologie. Mit Hilfe dieser Theorie geben sie der Nomographie den Grund für alle möglichen Interpretationen.

Sie zeigen den gegenseitigen Zusammenhang analagmatischer Nomographie zu der Nomographie im dreidimensionalen Raum und erhalten Abbildungen der entsprechenden Raumnomogramme in der Ebene. Sie folgen dem allgemeinen Grundgedanken der verallgemeinerten Nomographie von I. A. Vilner und sie verbinden eng mit ihrer entsprechenden Geometrie und Transformationsgruppe. Eine solche Annäherung der Nomographie mit der Geometrie, wie in der Arbeit gezeigt wurde, war bisher in der Nomographie noch nicht erschienen.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XV, 1967]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA XV — 1967

O riešení integrálnych rovníc ortogonálnymi radmi

J. ŠAJDA

1.

Budeme sa zaoberať problematikou riešenia homogénnej Fredholmovej integrálnej rovnice

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t) \mathrm{d}t, \tag{1.1}$$

pričom budeme predpokladať, že jadro $K(x,t)$ je reálna funkcia definovaná a kvadraticky integrovateľná v oblasti $D = (a, b) \times (a, b)$ a λ je jeho vlastná hodnota. Ďalej budeme prepokladať, že riešenia φ rovnice (1.1) sú funkciami z priestoru $L_2(a, b) = L_2$, pričom pojem integrálu budeme používať v Lebesgueovom zmysle. Pritom poznamenávame, že pod funkciou $f \in L_2$ budeme rozumieť ľubovoľný prvok z triedy funkcií ekvivalentných s funkciou f. Preto pri dvoch funkciách $f \in L_2$, $g \in L_2$ budeme písať $f = g$ vtedy a len vtedy, keď f sa líši od g nanajvýš na množine nulovej miery.

Ďalej poznamenajme, že z Fubiniho vety ([2], str. 379) o rovnosti dvojného a dvojnásobného integrálu po použití Schwarz-Buňakovského nerovnosti dostaneme, že pre každú $f \in L_2$ tak

$$\int_a^b K(x, t) f(t) \mathrm{d}t \in L_2 \quad \text{ako aj} \quad \int_a^b K(x,t) f(x) \mathrm{d}x \in L_2.$$

Nech λ je daná vlastná hodnota jadra $K(x,t)$ rangu m. Nech integrálna rovnica

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)\, \psi(t) \mathrm{d}t, \tag{1.2}$$

adjungovaná k rovnici (1.1), má pri vlastnej hodnote λ bázu riešení

$$\psi_{-m+1}(x), \quad \psi_{-m+2}(x), \ \ldots, \ \psi_0(x). \tag{1.3}$$

Označme symbolom S systém reálnych funkcií

$$f_1(x), \ f_2(x), \ \ldots, f_n(x), \ldots \tag{1.4}$$

s týmito vlastnosťami:

1. $f_n(x) \in L_2$, $n = 1, 2, \ldots$

2. f_n tvoria lineárne nezávislý systém,

3. neexistuje lineárna kombinácia

$$\sum_{n=1}^{N} C_n f_n(x), \quad N < \infty$$

ktorá by bola riešením rovnice (1.1),

4. systém (1.4) je úplný v priestore L_2([1], str. 58).

Definujme zobrazenie g systému $S \subset L_2$ do L_2 vzorcom

$$g(f_n) \equiv g_n(x) = f_n(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) f_n(t) \mathrm{d}t, \; n = 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

Systém funkcií

$$g_1(x), \; g_2(x), \; \ldots, \; g_n(x), \; \ldots \tag{1.6}$$

ktorý označíme symbolom T, má tieto zrejmé vlastnosti:

1. $g_n(x) \in L_2$, $n = 1, 2, \ldots$

2. $g_n(x)$ sú lineárne nezávislé, čo vyplýva z tretej vlastnosti systému (1.4).

Lema 1.1. *Nech $g_n(x) \in T$ a $F(x) \in L_2$. Pre skalárny súčin*

$$\int_a^b g_n(x) F(x) \mathrm{d}x = (g_n, F)$$

platí

$$(g_n, F) = 0, \; n = 1, 2, \ldots$$

vtedy a len vtedy, keď $F(x)$ je riešenim adjungovanej rovnice (1.2).

Dôkaz. Ak na definíciu (1.5) použijeme Fubiniho vetu na zámenu poradia integrácie, dostaneme rovnosť

$$(g_n, F) = \int_a^b f_n(t) \left[F(t) - \lambda \int_a^b K(x, t) F(x) \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}t, \; n = 1, 2, \ldots$$

z ktorej je správnosť tvrdenia s ohľadom na úplnosť systému (1.4) v L_2 zrejmá.

Lemma 1. 2. *Systém T doplnený funkciami* (1.3), *t. j. systém*

$$\psi_{-m+1}(x), \; \psi_{-m+2}(x), \; \ldots, \; \psi_0(x), \; g_1(x), \; g_2(x), \ldots, g_n(x), \; \ldots \tag{1.7}$$

ktorý označíme symbolom R, je v priestore L_2 úplný.

Dôkaz. Nech $g \in L_2$. Označme ľubovoľný prvok systému R symbolom $r(x)$. Máme dokázať, že zo vzťahu $(r, g) = 0$ vyplýva $g = 0$. Podľa lemmy 1.1 pre $r = g_n$, $n = 1, 2, \ldots$ vzťah $g = 0$ sa splní len vtedy, keď

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i \psi_{-m+i}(x), \tag{1.8}$$

kde C_i sú ľubovoľné konštatnty a $\psi_{-m+i}(x)$ sú prvky bázy (1.3). Stačí preto vyšetriť hodnotu skalárneho súčinu (r, g) pre $r = \psi_{-m+k}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ a g dané vzorcom (1.8).

Nech platí

$$(r, g) = (\psi_{-m+k}, \sum_{i=1}^{m} C_i \psi_{-m+i}(x)) = 0, 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Potom z tejto podmienky dostaneme pre C_i homogénny lineárny algebraický systém

$$\sum_{i=1}^{m} C_i (\psi_{-m+k}, \psi_{-m+i})) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m \tag{1.9}$$

pre determinant ktorého musí platiť vzťah

$$\begin{vmatrix} (\psi_{-m+1}, \psi_{-m+1}), & (\psi_{-m+1}, \psi_{-m+2}), & \ldots, & (\psi_{-m+1}, \psi_0) \\ (\psi_{-m+2}, \psi_{-m+1}), & (\psi_{-m+2}, \psi_{-m+2}), & \ldots, & (\psi_{-m+2}, \psi_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\psi_0, \psi_{-m+1}), & (\psi_0, \psi_{-m+2}), & \ldots, & (\psi_0, \psi_0) \end{vmatrix} = 0$$

Avšak to je Gramov determinant od funkcií bázy (1.3), ktoré sú lineárne nezávislé, a preto sa ich Gramov determinant nemôže rovnať nule. Má preto algebraický systém (1.9) len nulové riešenie $C_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, z čoho vzhľadom na (1.8) vyplýva, že $g = 0$, a teda systém R je v priestore L_2 úplný, čím je lemma dokázaná.

Lemma 1. 3. *Systém R je lineárne nezávislý.*

Dôkaz. Nech platí opak, t. j. nech existujú konštanty P_i, Q_j, nie všetky rovné nule, také, že pre vhodné n platí

$$\sum_{i=-m+1}^{0} P_i\psi_i(x) - \sum_{j=1}^{n} Q_j g_j(x) = 0. \tag{1.10}$$

Potom platí aj rovnosť

$$\sum_{i=-m+1}^{0} P_i (g_s, \psi_i) = \sum_{j=1}^{n} Q_j(g_s, g_j), \quad g_s \varepsilon T. \tag{1.11}$$

Avšak podľa lemmy 1.1 je

$$(g_s, \psi_i) = 0, s = 1, 2, \ldots$$

takže rovnosť (1.11) sa redukuje na

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j (g_s, g_j) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots \tag{1.12}$$

Tento vzťah predstavuje pre Q_j homogénny algebraický systém lineárny, ktorého determinant je Gramov determinat od prvých n funkcií systému T. Systém T je však lineárne nezávislý a preto algebraický systém (1.12) má len nulové riešenie $Q_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. V dôsledku toho podmienka (1.10) sa redukuje na vzťah

$$\sum_{i=-m+1}^{0} P_i\psi_i(x) = 0,$$

čo vzhľadom na lineárnu nezávislosť funkcií (1.3) znamená, že tiež $P_i = 0$,

$-m+1 \leqslant i \leqslant 0$. To je však v rozpore s predpokladom, že nie všetky P_i, Q_j sú rovné nule, čím je lemma dokázaná.

Systém R má teda tieto vlastnosti:

1. pre každé $r \varepsilon R$ platí: $r \varepsilon L_2$,
2. je úplný v priestore L_2,
3. je lineárne nezávislý.

Prvá a tretia vlastnosť systému R umožňujú zobraziť tento systém na ortonormálny systém

$$F_{-m+1}(x),\ F_{-m+2}(x), \ldots,\ F_0(x),\ F_1(x),\ F_2(x), \ldots,\ F_n(x), \ldots \tag{1.13}$$

pomocou Schmidtovej ortogonalizačnej metódy ([1], str. 77) podľa vzorca

$$F_n(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=-m+1}^{n} a_{ni}\psi_i(x), & -m+1 \leqslant n \leqslant 0 \\ \sum\limits_{i=-m+1}^{0} a_{ni}\psi_i(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}g_i(x), & n \geqslant 1 \end{cases} \tag{1.14}$$

kde koeficienty a_{ni} sú vybrané tak, aby

$$(F_n, F_p) = \begin{cases} 0, & n \neq p \\ 1, & n = p. \end{cases}$$

Poznamenajme, že F_n (x), $n \leqslant 0$, ako lineárne kombinácie prvkov bázy (1.3) sú riešeniami adjungovanej rovnice (1.2).

Lemma 1.4. *Pre ortonormalizačné koeficienty a_{ni} vo vzorci* (1.14) *platí*

$$a_{ni} = 0,\ n = 1, 2, \ldots;\ i = -m+1, -m+2, \ldots, 0.$$

Dôkaz: Z podmienok ortogonality

$$(F_n, F_{-m+1}) = (F_n, F_{-m+2}) = \ldots = (F_n, F_0) = 0.$$

funkcie $F_n(x)$ s indexom $n \geqslant 1$ a funkcií F_p s indexom $p \leqslant 0$ definovaných vzorcom (1.14) dostávame

$$0 = (F_n, F_p) = \left(\sum_{i=-m+1}^{0} a_{ni}\psi_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ni}g_i,\ F_p\right) = \left(\sum_{i=-m+1}^{0} a_{ni}\psi_i,\ F_p\right)$$

alebo

$$\sum_{i=-m+1}^{0} (a_{ni}\psi_i, F_p) = 0,\quad n \geqslant 1;\ -m+1 \leqq p \leqslant 0 \tag{1.15}$$

pričom sme využili lemmu 1.1. Vzťah (1.15) predstavuje homogénny lineárny algebraický systém, ktorého determinant D_0 je

$$D_0 = \begin{vmatrix} (\psi_{-m+1}, F_{-m+1}), & (\psi_{-m+2}, F_{-m+1}), & \ldots, & (\psi_0, F_{-m+1}) \\ (\psi_{-m+1}, F_{-m+2}), & (\psi_{-m+2}, F_{-m+2}), & \ldots, & (\psi_0, F_{-m+2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\psi_{-m+1}, F_0), & (\psi_{-m+2}, F_0), & \ldots, & (\psi_0, F_0) \end{vmatrix}$$

Dokážeme, že $D_0 \neq 0$. Naozaj, ak vynásobíme r-tý stlpec tohoto determinantu koeficientom $a_{0,-m+r}$, $r = 1, 2, \ldots, m$ a potom pričítame prvých $m-1$ stĺpcov ku poslednému, dostaneme po rozvedení takto získaného determinantu podľa prvkov posledného stĺpca

$$D_0 = \frac{(F_0, F_0)}{a_{00}} \begin{vmatrix} (\psi_{-m+1}, F_{-m+1}), & (\psi_{-m+2}, F_{-m+1}), & \ldots, & (\psi_{-1}, F_{-m+1}) \\ (\psi_{-m+1}, F_{-m+2}), & (\psi_{-m+2}, F_{-m+2}), & \ldots, & (\psi_{-1}, F_{-m+2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\psi_{-m+1}, F_{-1}), & (\psi_{-m+2}, F_{-1}), & \ldots, & (\psi_{-1}, F_{-1}) \end{vmatrix}.$$

alebo

$$D_0 = \frac{(F_0, F_0)}{a_{00}} D_{-1},$$

kde D_{-1} je označenie determinantu na pravej strane. Je jasné, že podobne bude ďalej

$$D_{-1} = \frac{(F_{-1}, F_{-1})}{a_{-1,-1}} D_{-2}$$

kde označenie D_{-2} má podobný význam ako vyššie D_{-1}.

Vo všeobecnosti bude platiť

$$D_s = \frac{(F_s, F_s)}{a_{ss}} D_{s-1}, \quad s = 0, -1, \ldots, -m+2$$

pričom $D_{-m+1} = (\psi_{-m+1}, F_1)$. Je preto

$$D_0 = \frac{(F_0, F_0)(F_{-1}, F_{-1}) \ldots (F_{-m+1}, F_{-m+1})}{a_{00}\, a_{-1,-1} \ldots a_{-m+1,-m+1}} \tag{1.16}$$

V tejto súvislosti poznamenajme, že podmienka vytvorenia funkcie $F_n(x)$ v postupnosti (1.13) je ([1], str. 79), aby koeficient a_{nn} vo vzorci (1.14) bol rôzny od nuly, pretože v opačnom prípade by funkcie $F_n(x)$ a $F_{n-1}(x)$ boli lineárne závislé a teda neortogonalizovateľné. Je preto špeciálne

$$a_{ss} \neq 0, \; s = -m+1, -m+2, \ldots, 0.$$

Taktiež je zrejmé, že

$$(F_s, F_s) \neq 0, \; s = -m+1, -m+2, \ldots, 0$$

čo vyplýva z lineárnej nezávislosti systému R. Preto z rovnosti (1.16) vyplýva, že $D_0 \neq 0$. Dostávame teda, že systém (1.15) má len nulové riešenie $a_{ns} = 0$, $-m+1 \leqslant s \leqslant 0$, a to pri každom $n \geqslant 1$, čím je lemma 1.4 dokázaná.

Na základe lemmy 1.4 môžeme vzorec (1.14) napísať v zjednodušenom tvare

$$F_n(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=-m+1}^{n} a_{ni}\psi_i(x), & -m+1 \leqslant n \leqslant 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni} g_i(x), & n \geqslant 1 \end{cases}$$

Z vlastností systému R vyplývajú na základe definície (1.14) pre ortonormálny systém (1.13) tieto vlastnosti:

1. $F_n(x) \varepsilon L_2$, $n \geqq -m+1$

2. systém (1.13) je úplný v priestore L_2, ([1], str. 79).

2.

Nech $f \varepsilon L_2$. Nech

$$A_n = (f, F_n),\ n \geqslant -m+1 \tag{2.1}$$

sú jej Fourierove koeficienty a

$$\sum_{n=-m+1}^{\infty} A_n F_n(x) \tag{2.2}$$

jej Fourierov rad vzhľadom na ortonormálny systém (1.13). Pretože ortonormálny systém (1.13) je v L_2 úplný, podľa známej vety ([1], str. 73) Fourierov rad (2.2) ľubovoľnej funkcie $f \varepsilon L_2$ konverguje podľa stredu k tejto funkcii, t. j. platí

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - f, S_n - f) = 0, \tag{2.3}$$

kde

$$S_n = S_n(f) = \sum_{i=-m+1}^{n} A_i F_i(x). \tag{2.3}$$

Lemma 2.1. *Nech $f \varepsilon L_2$ a $p \varepsilon L_2$ sú také funkcie, pre ktoré platí*

$$f(x) = p(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, p(t)\, dt, \tag{2.5}$$

kde λ je daná vlastná hodnota jadra $K(x, t)$. Potom Fourierove koeficienty $A_n = (f, F_n)$ funkcie f definovanej vzorcom (2.5) vzhľadom na ortonormálny systém (1.13) majú vlastnosť

$$A_n = 0, -m+1 \leqslant n \leqslant 0.$$

Dôkaz. Zrejme platí

$$A_n = (f, F_n) = \int_a^b [p(x) - \lambda \int_a^b K(x), t)p(t)dt]F_n(x)dx =$$

$$= \int_a^b p(t)\, [Fn(t) - \lambda \int_a^b K(x, t)F_n(x)dx]dt.$$

Avšak pre $n = -m+1, -m+2, \ldots, 0$ sú $F_n(x)$ riešeniami adjungovanej rovnice (1.2) pri vlastnej hodnote λ. Z toho dôvodu

$$A_n = 0, -m+1 \leqslant n \leqslant 0,$$

čím je lemma dokázaná.

Nech $f \varepsilon L_2$ má vlastnosť (2.5), t. j. existuje k nej taká $p \varepsilon L_2$, že platí vzťah (2.5). Nech (2.2) je Fourierov rad funkcie f vzhľadom na ortonormálny systém (1.13). V dôsledku lemmy 2.1 nadobudne tento rad tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n(x)$$

s čiastočnými súčtami

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} A_i F_i(x).$$

Pre túto funkciu f vzorec (2.3) bude

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x) - \sum_{i=1}^{n} A_i F_i(x)]^2 dx = 0. \tag{2.6}$$

Veta 1. *Nech $f \varepsilon L_2$ má vlastnosť (2.5) pri funkcii $p \varepsilon L_2$. Potom postupnosť funkcií $\varphi_n(x)$ definovaných vzorcom*

$$\varphi_n(x) = p(x) - \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{k=1}^{i} a_{ik} f_k(x),\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

konverguje podľa stredu ku riešeniu integrálnej rovnice (1.1) patriacemu ku danej vlastnej hodnote λ.

Dôkaz. Vzhľadom na doterajšie definície platí

$$f(x) - \sum_{i=1}^{n} A_i F_i(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{k=1}^{i} a_{ik} g_k(x) =$$

$$= p(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) p(t) dt - \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{k=1}^{i} a_{ik} [f_k(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) f_k(t) dt] =$$

$$= [p(x) - \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{k=1}^{i} a_{ik} f_k(x)] - \lambda \int_a^b K(x, t) [p(t) - \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{k=1}^{i} a_{ik} f_k(t)] dt$$

alebo po zavedení označenia (2.7)

$$f(x) - \sum_{i=1}^{n} A_i F_i(x) = \varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi_n(t) dt.$$

Preto vzťah (2.6) možno písať v tvare

$$\lim_{a\to\infty} \int_a^b [\varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi_n(t) dt]^2 dx = 0. \tag{2.8}$$

To znamená, že postupnosť funkcií

$$\Phi_n(x) = \varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi_n(t dt,\ n = 1, 2, \ldots$$

konverguje k nule v zmysle konvergencie podľa stredu, alebo že postupnosť funkcií

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{2.9}$$

konverguje podľa stredu ku riešeniu $\varphi(x)$ rovnice (1.1) patriacemu ku vlastnej hodnote λ. Tým je veta dokázaná.

Veta 2. *Riešenie $\varphi(x)$, ku ktorému postupnosť (2.9) konverguje podľa stredu, nie je vo všeobecnosti nulové.*

Dôkaz. Pretože A_i sú Fourierove koeficienty funkcie $f(x)$ danej vzťahom (2.5), platí

$$A_i = (f, F_i) = \int_a^b [p(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, p(t) \mathrm{d}t] F_i(x)\, \mathrm{d}x.$$

Nech $p(x)$ je nenulovým riešením rovnice (1.1) patriacim ku vlastnej hodnote λ. Potom je zrejme $A_i = 0$ pre všetky i a teda aj

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{k=1}^{i} a_{ik} f_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sum_{k=1}^{i} a_{ik} f_k(x) = 0,$$

takže zo vzorca (2.7) zostáva

$$\varphi_n(x) = \varphi(x) = p(x),\ n = 1, 2, \ldots$$

čo znamená, že postupnosť (2.8) nekonverguje vo všeobecnosti k nulovému riešeniu.

3.

Príklad 1. Nech $f(x)$ definovaná vzťahom (2.5) je

$$f(x) = F_r(x), \quad r \geqslant 1 \tag{3.1}$$

kde $F_r(x)$ je ľubovoľný prvok zo systému (1.13). Potom $p(x)$ príslušná ku $f(x)$ podľa vzorca (2.5) je riešením nehomogénnej integrálnej rovnice

$$p(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) p(t) \mathrm{d}t = F_r(x) \tag{3.2}$$

kde λ je vlastná hodnota jadra $K(x, t)$. Pretože $F_r(x)$ je členom ortonormálnej postupnosti (1.13), spĺňa podmienku riešiteľnosti tejto rovnice; jej pravá strana má totiž byť ortogonálna ku všetkým riešeniam adjungovanej rovnice homogénnej patriacim ku vlastnej hodnote λ. Avšak pre Fourierove koeficienty funkcie (3.1) platí

$$A_n = (F_r, F_n) = \begin{cases} 1 \text{ pre } n = r \\ 0 \text{ pre } n \neq r \end{cases}$$

a preto vzorec (2.7) dá približné riešenie

$$\varphi_n(x) = p(x) - \sum_{k=1}^{r} a_{rk} f_k(x)$$

v tvare rozdielu ľubovoľného z riešení rovnice (3.2) a istej lineárnej kombinácie prvých r funkcií systému S.

Príklad 2. Nájsť nenulové riešenie integrálnej rovnice

$$\varphi(x) = 4\pi^{-4} \int_0^{\pi} x t^2\, \varphi(t) \mathrm{d}t$$

s nesymetrickým jadrom $K(x, t) = xt^2$, patriace ku vlastnej hodnote $\lambda = 4\pi^{-4}$ v intervale $(a, b) = (0, \pi)$.

Ako je zrejmé, riešenie má tvar

$$\varphi(x) = cx \tag{3.3}$$

kde c je ľubovoľná konštanta. Za systém (1.4) vezmeme postupnosť

$$sin\ x,\ sin\ 2x,\ \ldots,\ sin\ nx,\ \ldots$$

ktorý má požadované vlastnosti v intervale $(0, \pi)$. K nemu patriaci systém (1.6) bude

$$g_1(x) = sin\ x - 4\ \pi^{-4}\ (\pi^2 - 4)x$$

.... atď ....

z ktorého po ortonormalizovaní dostaneme systém (1.13) v tvare

$$F_1(x) = \|\ g_1\ \|^{-1}\ g_1(x)$$

.... atď ....

Ak položíme

$$p(x) = F_1(x)$$

potom podľa príkladu 1 bude

$$A_n = \begin{cases} 1 \text{ pre } n = 1 \\ 0 \text{ pre } n > 1 \end{cases}$$

Preto riešením danej rovnice bude

$$\varphi(x) = -\ \|\ g_1\ \|^{-1}\ (\pi^2 - 4)x$$

čo súhlasí so vzťahom (3.3).

Literatúra

[1] Kaczmarz — Steinhaus: Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa — Lwow 1935.

2] Natanson: Teorija funkcij veščestvennoj peremennoj, Moskva 1957.

Do redakcie došlo 3. 10. 1965

Adresa autora: Katedra numerickej matematiky PFUK, Bratislava, Šmeralova 2.

О решении интегральных уравнений ортогональными рядами

Й. ШАЙДА

Выводы

Главным результатом этой работы является метод приближенного решения интегрального уравнения типа Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

с ядром $K \varepsilon L_2$ при заданном собственном значении λ и доказывается, что последовательность апроксимирующих функций φ_n сходится в среднем к решению φ. На конструкцию функций φ_n используется некоторая линейно независимая система функций $f_n \varepsilon L_2$ полная в L_2, к ней определяется некоторая ортонормированная система функций F_n и из равенства Парсевала некоторой функции $f \varepsilon L_2$ относительно этой системы получается для функций φ_n свойство сходимости в среднем к решению φ.

Über die Lösung der Integralgleichungen mit Orthogonalreihen

J. ŠAJDA

Zusammenfassung

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist ein Näherungsverfahren der Lösung einer Integralgleichung des Fredholmschen Typus

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

mit einem quadratisch integrablem Kern $K(x, t)$ bei gegebenem Eigenwert λ und bewiesen ist, dass die Folge der Näherungsfunktionen $\varphi_n(x)$ zur Lösung $\varphi(x)$ in der Mitte konvergiert. Zur Konstruktion der Funktionen $\varphi_n(x)$ benutzt man ein linear unabhängiges Funktionensystem $f_n(x) \varepsilon L_2$, das vollständig in L_2 ist, zu diesem Funktionensystem ist ein Orthogonalsystem der Funktionen $F_n(x) \varepsilon L_2$ definiert und mit Benutzung der Parcevalsche Gleichung für eine Funktion $f \varepsilon L_2$ gewint man die Eigenschaft der Konvergenz in der Mitte für Funktionen $\varphi_n(x)$ zur Lösung $\varphi(x)$.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XV, 1967)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA XV — 1967

Заметка о кривой в P_2

М. ГЕЙНЫ

Проективную нормаль и кривизну проективной плоской кривой строят обыкновенно при помощи пучка соприкасающихся кривых третьего порядка. В заметке показано, как можно ввести эти понятия пользуясь одной квадратической корреспонденцией плоскости P_2.

Пусть $C \equiv M_0(t)$, $t \in T$ плоская проективная кривая (не содержащая ни точек перегиба ни секстатических точек) дифференцируемая вплоть до седьмого порядка. Пусть M_0, M_1, M_2 сопровождающий треуголник кривой C для которого:

$$\begin{aligned} \dot{M}_0 &= \phantom{\kappa M_0 + {}} M_1 \\ \dot{M}_1 &= \kappa M_0 \phantom{{}+ M_1} + M_2 \\ \dot{M}_2 &= M_0 + \kappa M_1 \end{aligned} \tag{1}$$

(см. например [1]). Точкой здесь обозначают производную по параметру t являющегося проективной дугой, буквой κ обозначают проективную кривизну. Вместе с уравнением соприкасающегося конического сочения

$$O \equiv (X, X) = x_1^2 - 2x_0x_2 = 0 \tag{2}$$

будем пользоваться еще соответствующей полярной билинейной формой

$$(X, Y) = -x_0y_2 + x_1y_1 - x_2y_0.$$

Пусть теперь Q любая неподвижная точка плоскости и $q(t)$ ее поляра относительно соприкасающегося конического сечения $O(t)$ точки $M_0(t)$. Через $P(t_0)$ обозначим точку касания прямой $q(t_0)$ и огибающей P семейства прямых $q(t)$, $t \in T$. Тем самым построена точечная корреспонденция

$$\mathbf{K}: Q \to P$$

для каждого $t_0 \in T$. Чтобы написать аналитическое выражение описанной корреспонденции $\mathbf{K}$, обозначим

$$P = p_0M_0 + p_1M_1 + p_2M_2$$

и

$$Q = q_0M_0 + q_1M_1 + q_2M_2.$$

Из неподвижности точек Q следует $Q = \lambda \dot{Q}$ т. е.

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= \lambda q_0 - \kappa q_1 - q_2 \\ \dot{q}_1 &= -q_0 + \lambda q_1 - \kappa q_2 \\ \dot{q}_2 &= \qquad -q_1 + \lambda q_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение $(Q, X) = O$ является уравнением поляры точки Q относительно конического сечения O. Точку касания P огибающей P семейства $q(t)$ и прямой $q(t_0)$ получим решением уравнении $(Q, X) = O$ и $(\dot{Q}, X) = O$. Простое вычисление даст

$$\begin{aligned} p_0 &= \kappa q_1^2 - q_0^2 + q_1 q_2 - \kappa q_0 q_2 \\ p_1 &= q_2^2 + \kappa q_1 q_2 - q_0 q_1 \\ p_2 &= \kappa q_2^2 - q_1^2 + q_0 q_2 \end{aligned} \tag{4}$$

для каждого $t_0 \varepsilon T$

Эти уравнения определяют корреспонденцию **K** и будем их сжато писать

$$P = \mathbf{K}(Q). \tag{4'}$$

Дальнейшее рассуждения предполагают параметр t_0 фиксированным.

Теорема 1. *Если точка Q пробегает прямую M_0M_1, то*

1) *точка* **K** (Q) *пробегает все точки конического сечения*

$$\mathrm{H} \equiv x_1^2 - \kappa x_2^2 - x_0 x_2 = O,$$

2) *точки* Q, **K** (Q) *и точка* V $(\kappa;\, 0;\, -1)$ *лежат на одной прямой,*

3) *точка* V *является точкой пересечения прямой* M_0M_2 *и кривой* H

4) *прямая* M_1V *является касательной конического сечения* H.

Доказательство. Пользуяась уравнениями (4) получим параметрическое уравнение кривой H:

$$\mathrm{H} \equiv \mathbf{K}(Q) = P\,(\kappa q_1^2 - q_0^2;\, -q_0 q_1;\, -q_1^2) \tag{5}$$

отвечающей касательной $Q = q_0 M_0 + q_1 M_1$ в корреспонденции **K**. Исключая параметр $q_0 : q_1$ можно кривую H выразить следующим образом:

$$\mathrm{H} \equiv x_1^2 - \kappa x_2^2 - x_0 x_2 = O. \tag{6}$$

Если наоборот взять любую точку конического сечения (6), то можно найти числа q_0 и q_1 так, чтобы ее запись совпадала с записью (5). Тем мы доказали пункт 1). Прямое вычисление определителя $[V, \mathbf{K}(Q), Q]$, величина которого ровна нулю, доказывает пункт 2). Заметим что точки Q и **K** (Q) совпадают лишь в одном случае: $Q \equiv M_0$. Далее очевидно что **K** $(M_1) = V$ и остаток доказательства наглядeн.

Теорема 2. *Если проективная кривизна кривой* C *равна нулю, то конические сечения* O *и* H *касаются кроме точки* M_0 *еще в точке* M_2. *Если проективная кривизна кривой* C *различна от нуля, то конические сечения* O *и* H *кроме точки* M_0 *пересекаются в двух различных точках* U *и* W *лежащих с точкой* M_1 *на одной прямой.*

Доказательство. Подставляя (5) в уравнение (2) получим кроме точки M_0 далнейшее две точки пересечения кривых О и Н а именно U (κ; $\sqrt{2\kappa}$; 1) и W (κ;— $\sqrt{2\kappa}$; 1). Ясно, что для совпадения точек U и W необходимо и достаточно чтобы $\kappa = 0$. Если $\kappa \neq 0$, то точки U и W различны и уравнение $\det |M_1, U, W| = 0$ влечет следующее утверджение теоремы.

Теорема 3. *Если проективная кривизна к кривой С в точке M_0 не ровна нулю, то для точек L и N в которых прямые $V\mathbf{K}(M_2)$ и VU пересекают касательную M_0M_1 выполнено:*

$$\sqrt[3]{2(M_0, M_1, N, L)^2} = \kappa \tag{7}$$

Доказательство. Нетрудно вычислить что L (κ^2; 1;0) и N ($\sqrt{2\kappa}$; 1; 0). Подставив эти координатные выражения, проверим мгновенно (7). Полученные результаты можно использовать для построения канонического репера кривой.

Литература:

[1] Фиников: Проективно-диференциальная геометрия
[2] Bol: Projektieve Differentialgeometrie I.

Adresa autora: M. Hejný, Katedra geometrie PFUK, Bratislava, Šmeralova 2.

Do redakcie došlo 15. 10. 1965.

Poznámka ku krivke v P_2.

M. HEJNÝ

Súhrn

Nech je daná projektívna rovinná krivka C $\equiv M_0(t)$, $t \in T$ bez inflexných a sextatických bodov; $k(t)$ projektívna krivosť; $O(t)$ oskulačná kužeľosečka a $M_0M_1M_2$ sprievodný trojuholník s pohybovými rovnicami (1). Nech Q je pevný bod a $q(t)$ jeho polára voči O (t). Bod, v ktorom sa obálka systému $q(t)$ dotýka pevnej priamky $q(t_0)$, označme P (t_0). Takým spôsobom je ku každému pevnému $t_0 \in T$ priradená jednaznačná korešpondencia

$$\mathbf{K}: Q \to P,$$

ktorá je popísaná rovnicami (4). Pre uvedenú korešpondenciu platí

Veta 1. Nech bod Q prebieha priamku M_0M_1. Potom
1. bod $\mathbf{K}(Q)$ prebieha kužeľosečku H danú rovnicou (6),
2. body Q, $\mathbf{K}(Q)$ ležia s bodom $V(k;0;-1)$ na priamke,
3. bod V je priesečník kužeľosečky H a priamky M_0M_2 a
4. priamka M_1V sa kužeľosečky H dotýka v bode V.

Veta 2. Okrem bodu M_0 majú kužeľosečky 0 a H buď dva rôzne spoločné body a $k \neq 0$, alebo jeden ďalší dotykový bod (a to bod M_2) a $k = 0$.

Veta 3. Ak je $k \neq 0$, potom platí (7), pričom L a N sú priesečníky dotyčnice M_0M_1 s priamkami $V\mathbf{K}(M_2)$ a VU po rade.

Bemerkung zur Kurve in P_2.

M. HEJNÝ

Zusammenfassung

Sei C $\equiv M_0(t)$, $t \varepsilon T$ eine projektieve ebene Kurve ohne Wendepunkte und sextatische Punkte; $k(t)$ die projektieve Krümmung; O (t) die Schmiegkegelschnitt und $M_0M_1M_2$ begleitende Dreieck mit Bewebungsgleichungen (1). Der Punkt, in dem die Hüllkurve einen Polarestreifen $q(t)$ von festen Q bezüglich O (t) von der geraden Linie $q(t_0)$ berührt wird, bezeichen wir $P(t_0)$. So, jedem festen Parameter $t_0 \varepsilon T$ ist die durch Gleichungen (4) beschreibene eindeutige Korrespondenz

$$\mathbf{K}: Q \neq P$$

zogeordnet..Nun gelten folgende Sätze:

Satz 1. Wenn Q sich auf der Gerade M_0M_1 verschiebt, so

1. bewegt sich der zugehörige Punkt $\mathbf{K}(Q)$ auf der, durch die Gleichung (6) gegebene Kurve zweiter Ordunng H,
2. die Punkte Q, $\mathbf{K}(Q)$ mit $V(k;0;-1)$ in einer Gerade liegen,
3. der Punkt V ein Schnittpunkt der H und M_0M_2 ist, und
4. die Gerade M_1V der Kegelschnitt H in V berührt.

Satz 2. Auserden M_0 haben die Kegelschnitten O und H entweder zwei anderen, von M_0 verschiedenen Punkten $U \neq V$ und $k \neq 0$, oder einziger, von M_0 verschiedener Berührungspunkt (und also M_2), und $k = 0$.

Satz 3. Ist $k \neq 0$, so gilt (7), womit L und N die Schnittpunkte der Tangente M_0M_1 mit $V\mathbf{K}(M_2)$ und VU bezeichnen sind.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XV, 1967)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA XV — 1967

Poznámka k hyperbolickému páru komplexov priamok v P_3.

A. DEKRÉT

Úvod

Článok úzko súvisí s článkom [2]. Hyperbolický a parabolický pár komplexov sa chápe vo zmysle definície 2 článku [2]. Miesto označenia K-fleknodálne body používam označenie T-body ako Kovancov v [1]. Z úvah o hyperbolických, parabolických a T-pároch komplexov sú vylúčené špeciálne komplexy. Symbolom (M, M') označujem odpovedajúce si T-body lúčov l, l' (rovina odpovedajúca v hlavnej korelácii pozdlž lúča l bodu M pretína lúč l' v bode M' a obrátene).

Nech K, K' sú komplexy priamok v P_3, medzi lúčmi l, l' ktorých je vzájomne jednoznačné zobrazenie, pri ktorom odpovedajúce si lúče sú mimobežné. Nech A_1, A_2, A_3, A_4 sú vrcholy repéra, ktorého infinitizimálne zobrazenia sú dané vzťahmi

$$dA_i = \omega_i^k A_k \quad (i, k = 1,2,3,4,) \tag{1}$$

pričom diferenciálne formy ω_i^k vyhovujú rovniciam štruktúry projektívneho priestoru

$$d\omega_i^k = [\omega_i^s \omega_s^k] \; (i,k,s = 1,2,3,4) \tag{2}$$

Pre Kleinove obrazy priamok repéru voľne označenie:

$$H_1 = A_1A_4,\ H_2 = A_2A_4,\ H_3 = A_3A_4,\ H_4 = A_2A_3,\ H_5 = A_1A_3,\ H_6 = A_1A_2$$

Potom

$$\begin{aligned}
dH_1 &= \omega^2{}_4 H_6 + \omega^3{}_4 H_5 + (\omega^1{}_1 + \omega^4{}_4) H_1 + \omega^2{}_1 H_2 + \omega^3{}_1 H_3 \\
dH_2 &= \omega^1{}_2 H_1 + (\omega^2{}_2 + \omega^4{}_4) H_2 + \omega^3{}_2 H_3 + \omega^3{}_4 H_4 - \omega^1{}_4 H_6 \\
dH_3 &= -\omega^1{}_4 H_5 + \omega^1{}_3 H_1 + \omega^2{}_3 H_2 + (\omega^3{}_3 + \omega^4{}_4) H_3 - \omega^2{}_4 H_4 \\
dH_4 &= -\omega^1{}_3 H_6 + \omega^1{}_2 H_5 + (\omega^2{}_2 + \omega^3{}_3) H_4 + \omega^4{}_3 H_2 - \omega^4{}_2 H_3 \\
dH_5 &= (\omega^1{}_1 + \omega^3{}_3) H_5 + \omega^2{}_1 H_4 - \omega^4{}_1 H_3 + \omega^2{}_3 H_6 + \omega^4{}_3 H_1 \\
dH_6 &= (\omega^1{}_1 + \omega^2{}_2) H_6 + \omega^3{}_2 H_5 + \omega^4{}_2 H_1 - \omega^3{}_1 H_4 - \omega^4{}_1 H_2
\end{aligned} \tag{3}$$

Kleinova nadkvadrika v repére $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$ v projektívnom priestore P_5 má rovnicu:

$$h_1 h_4 - h_2 h_5 + h_6 h_3 = 0 \tag{4}$$

Kanonizujme repér tak, že umiestnime A_1, A_2 na lúč l a A_3, A_4 na lúč l'. Vtedy ω^3_1, ω^4_1, ω^3_2, ω^4_2, ω^1_3, ω^2_3, ω^1_4, ω^2_4, sú hlavné formy, medzi ktorými existuje 5 lineárnych závislostí. Nech

$$\begin{aligned} \omega^3_1 &= a\omega^3_2 + b\omega^4_1 + c\omega^4_2 \\ \omega^1_3 &= a'\omega^1_4 + b'\omega^2_3 + c'\omega^2_4 \end{aligned} \tag{5}$$

Označme K, K' Kleinove obrazy komplexov K, K'. Je zrejmá veta

Veta 1. *K, K' tvoria a) T-pár*; b) hyperbolický pár; *c) parabolický pár vtedy a len vtedy, keď trojdimenzné dotykové lineárne priestory variet K, K', v odpovedajúcich si bodoch sa pretínajú a) v rovine; b) v priamke d, ktorá pretína Kleinovu nadkvadriku (4) v bodoch, ktoré sú Kleinovymi obrazmi priamok prechádzajúcimi odpovedajúcimi si T-bodmi lúčov l, l'; c) v priamke d, ktorá sa dotýka Kleinovej nadkvadriky v bode, ktorý je Kleinovym obrazom priamky prechádzajúcej odpovedajúcimi si T-bodmi lúčov l, l'.*

Dôkaz: Z (3), (5) vyplýva, že dotykové lineárne priestory variet K, K' sú určené bodmi $(H_6, H_5 - aH_4, H_2 + bH_4, H_1 - cH_4)$, $(H_3, H_5 - a'H_1, H_2 + b'H_1, H_4 - c'H_1)$. Tvrdenie a) plynie z (6), z [1], strana 139 vzťah (4.9) a z poznámky o vylúčení špeciálnych komplexov. Tvrdenia b), c) plynú z (6) a z [1], strana 138, vzťahy (4.6), (4.7), keď vylúčime špeciálne komplexy.

V ďalšom sa budeme zaoberať hyperbolickým párom komplexov. Vtedy rovnice (4.6), (4.7), strana 138 [1]

$$\begin{aligned} (b'-bc')t^2 + (ab'-a'b+cc'-1)\,t + a'c - a &= 0 \\ (b-b'c)t'^2 + (a'b-ab' + cc'-1)t' + ac' - a' &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

majú po dvoch rôznych koreňoch, určujúcich T-body $M = A_1 + tA_2$, $M' = A_3 + t'A_4$ lúčov l, l'.

Kanonizujme repér tak, aby (A_1, A_3), (A_2, A_4) boli odpovedajúce si T-body lúčov l, l'. Vtedy zo (6) plynie

$$\begin{aligned} b'-bc' &= 0 \qquad & a'c-a &= 0 \\ b-b'c &= 0 \qquad & ac'-a' &= 0 \end{aligned}$$

Keďže K, K' netvoria T-pár, t. j. $cc'-1 \neq 0$, preto zo (7) plynie

$$a = b = a' = b' = 0 \tag{7}$$

Tým z (5) dostávame: $\omega^3_1 = c\omega_2^4$, $\omega^1_3 = c'\omega^2_4$.

Voľme ω^4_1, ω^3_2, ω^2_3 za bázové formy. Vtedy

$$\omega_i^k = a_i^k\,\omega_1^4 + b_i^k\omega + c_i^k\omega_2^3 \text{ pre } i \neq k \tag{8}$$

Vonkajším diferencovaním z (8) dostávame

$$d\omega_i^k = [da_i^k\omega^4_1] + a_i^k d\omega^4_1 + [db_i^k\omega^3_2] + b_i^k d\omega^3_2 + [dc_i^k\omega^2_3] + c_i^k d\omega^2_3$$

Z toho použitím (2) a Cartanovej lemmy dostávame pre sekundárne parametre:

$$b^4_2 (\varepsilon^3_3 - \varepsilon^4_4) - \delta b^4_2 = b^2_4 (\varepsilon^4_4 - 2\varepsilon^2_2 + \varepsilon^3_3) - \delta b^2_4 =$$
$$= b^2_1 (\varepsilon^1_1 - 2\varepsilon^2_2 + \varepsilon^3_3) - \delta b^2_1 = 0 .$$

Normujme vrcholy repéra voľbou $b^4_2 = b^2_4 = b^2_1 = 1, |A_1 A_2 A_3 A_4| = 1$

Z toho $\varepsilon^3_3 - \varepsilon^4_4 = 0,\ \varepsilon^4_4 - 2\varepsilon^2_2 + \varepsilon^3_3 = 0,\ \varepsilon^1_1 - 2\varepsilon^2_2 + \varepsilon^3_3 = 0$
$\omega^1_1 + \omega^2_2 + \omega^3_3 + \omega^4_4 = 0$

Tým pre infinitizimálne zobrazenie dostávame:

$$dA_i = (a_i^k \omega^4_1 + b_i^k \omega^3_2 + c_i^k \omega^2_3) A_k, \text{ kde } k, i = 1,2,3,4 \qquad (9)$$

pričom $a^3_1 = b^3_1 a^4_2,\ c^3_1 = b^3_1 c^4_2,\ a^1_3 = b^1_3 a^2_4,\ c^1_3 = b^1_3 c^2_4$
$b^4_2 = b^2_4 = b^2_1 = a^4_1 = b^3_1 = c^2_3 = 1,\ b^4_1 = c^4_1 = a^3_2 = c^3_2 = a^2_3 =$
$= b^2_3 = 0,\ a^1_1 + a^2_2 + a^3_3 + a^4_4 = b^1_1 + b^2_2 + b^3_3 + b^4_4 = c^1_1 +$
$c^2_2 + c^3_3 + c^4_4 = 0,\ b^3_1 b^1_3 (b^3_1 b^1_3 - 1) \neq 0$

Kongruencie (H_6,d), (H_3,d) v P_5.

K lúčom l, l' je v P_5 jednoznačne priradená dvojica rovín (H_6, d), (H_3, d). Tým je v P_5 daný pár kongruencií rovín závislý na troch parametroch. Hľadajme v rovine (H_6, d) body X-ohniská kongruencie, ku ktorým existujú tzv. fokálne smery t. j. smery, pre ktoré dX leží tiež v rovine (H_6, d).

Zo vsťahov (6), (7) dostávame $d = H_2 H_5$. Nech $X = h_6 H_6 + h_2 H_2 + h_5 H_5$

Potom $dX = H_6 [dh_6 + h_6 (\omega^1_1 + \omega^2_2) - h_2 \omega^1_4 + h_5 \omega^2_3] + H_2 [dh_2 - h_6 \omega^4_1 + h_2(\omega^2_2 + \omega^4_4)] + H_5 [dh_5 + h_6 \omega^3_2 + h_5 (\omega^1_1 + \omega^3_3)] + H_1 [h_6 \omega^4_2 + h_2 \omega^1_2 + h_5 \omega^4_3] + H_3 [h_2 \omega^3_2 - h_5 \omega^4_1] + H_4 [-h_6 \omega^3_1 + h_2 \omega^3_4 + h_5 \omega^2_1]$.

Teda X je ohniskom vtedy a len vtedy, keď

$$h_6\omega^4_2 + h_2\omega^1_2 + h_5\omega^4_3 = 0$$
$$h_2\omega^3_2 - h_5\omega^4_1 = 0$$
$$-h_6\omega^3_1 + h_2\omega^3_4 + h_5\omega^2_1 = 0.$$ Z toho dostávame:

$$\omega^4_1 (h_6 a^4_2 + h_2 a^1_2 + h_5 a^4_3) + \omega^3_2 (h_6 b^4_2 + h_2 b^1_2 + h_5 b^4_3) + \omega^2_3 (h_6 c^4_2 + h_2 c^1_2 + h_5 c^4_3) = 0$$
$$\omega^4_1 (-h_5) \qquad + \omega^3_2 (h_2) \qquad = 0 \qquad (10)$$
$$\omega^4_1 (-h_6 a^3_1 + h_2 a^3_4 + h_5 a^2_1) + \omega^3_2 (-h_6 b^3_1 + h_2 b^3_4 + h_5 b^2_1) + \omega^2_3 (-h_6 c^3_1 + h_2 c^3_4 + h_5 c^2_1) = 0$$

Systémom (10) sú určené fokálne smery vtedy a len vtedy, keď

$$\begin{vmatrix} -h_5 & h_2 & 0 \\ h_6 a^4_2 + h_2 a^1_2 + h_5 a^4_3 & h_6 b^4_2 + h_2 b^1_2 + h_5 b^4_3 & h_6 c^4_2 + h_2 c^1_2 + h_5 c^4_3 \\ -h_6 a^3_1 + h_2 a^3_4 + h_5 a^2_1 & -h_6 b^3_1 + h_2 b^3_4 + h_5 b^2_1 & -h_6 c^3_1 + h_2 c^3_4 + h_5 c^2_1 \end{vmatrix} = 0$$

Z toho použitím (9) dostávame

$$h_6h^2_2\,(a^3_4c^4_2 - a^4_2c^3_4 + a^1_2c^3_1 - c^1_2a^3_1) + h_6h^2_5(b^4_3c^3_1 - c^4_3b^3_1 + b^2_1c^4_2 - c^2_1b^4_2) + h_2h_5h_6\,(b^1_2c^3_1 - c^1_2b^3_1 + c^4_2a^2_1 - a^4_2c^2_1 + b^3_4c^4_2 - c^3_4b^4_2 + a^4_3c^3_1 - c^4_3a^3_1) + h^3_2\,(a^1_2c^3_4 - c^1_2a^3_4) + h^3_5\,(b^4_3c^2_1 - c^4_3b^2_1) + h^2_2h_5\,(b^1_2c^3_4 - c^1_2b^3_4 + a^1_2c^2_1 - c^1_2a^2_1 + a^4_3c^3_4 - c^4_3a^3_4) + h_2h^2_5\,(b^4_3c^3_4 - c^4_3b^3_4 + b^1_2c^2_1 - c^1_2b^2_1 + c^2_1a^4_3 - a^2_1c^4_3) = 0$$

(11) budeme stručne písať:

$$F = D_{622}H_6h^2_2 + D_{655}h_6h^2_5 + D_{625}h_6h_2h_5 + D_{222}h^3_2 + D_{555}h^3_5 + D_{225}h^2_2h_5 + D_{255}h_2h^2_5 = 0$$

Označme $\dfrac{\vartheta F}{\vartheta h_k} = F_k$. Potom

$$F_6 = D_{622}h^2_2 + D_{655}h^2_5 + Df_{25}h_2h_5$$
$$F_2 = 2D_{622}h_6h_2 + D_{625}h_6h_5 + 3D_{222}h^2_2 + 2D_{225}h_2h_5 + D_{255}h^2_5$$
$$F_5 = 2D_{655}h_6h_5 + D_{625}h_6h_2 + 3D_{555}h^2_5 + D_{225}h^2_2 + 2D_{255}h_2h_5$$

Z toho plynie: H_6 je dvojnásobným bodom kubiky (11). Tým dostávame

Veta 2. *Ohniská kongruencie rovín (H_6, d), ležiace v rovine (H_6, d) ležia na kubike rodu 0.*

Podobným postupom dostaneme vetu

Veta 3. *Ohniská kongruencie rovín (H_3, d), ležiace v rovine (H_6, d) ležia na kubike rodu 0, ktorá v našom repéri má rovnicu*

$$h_3h^2_2\,[a^1_4\,(b^1_3c^3_4 - c^1_3b^3_4 + b^2_4c^1_2 - c^2_4b^1_2) + b^1_4\,(a^3_4c^1_3 - c^3_4a^1_3 + a^1_2c^2_4 - c^1_2a^2_4(+ c^1_4)\,a^1_3b^3_4 - b^1_3a^3_4 + b^1_2a^2_4 - a^1_2b^2_4)] + h_3h^2_5(a^4_3b^2_4 - b^4_3a^2_4 + b^1_3\,a^2_1 - a^1_3b^2_1) + h_3h_2h_5\,[a^1_4(b^1_3c^2_1 - c^1_3\,b^2_1 + b^2_4c^4_3 - c^2_4\,b^4_3) + b^1_4\,(a^2_1c^1_3 - c^2_1\,a^1_3 + a^4_3c^2_4 - c^3_4a^2_4) + c^1_4\,(a^1_3b^2_1 - b^1_3a^2_1 + b^4_3a^2_4 - a^4_3b^2_4) + a^1_2b^2_4 - b^1_2a^2_4 + b^1_3a^3_4 - a^1_3b^3_4] + h^3_2\,[a^1_4\,(b^1_2c^3_4 - c^1_2b^3_4) + b^1_4\,(a^3_4c^1_2 - c^3_4a^1_2) + c^1_4\,(a^1_2b^3_4 - b^1_2a^3_4)] + h^3_5\,(a^2_1b^4_3 - b^2_1a^4_3) + h^2_2h_5\,[a^1_4\,(b^1_2c^2_1 - c^1_2b^2_1 + b^4_3c^3_4 - c^4_3b^3_4) + b^1_4\,(a^3_4c^4_3 - c^3_4a^4_3 + a^2_1c^1_2 - c^2_1a^1_2) + c^1_4\,(b^3_4a^4_3 - b^4_3a^3_4 + a^1_2b^2_1 - b^1_2a^2_1) + a^3_4b^1_2 - b^3_4a^1_2] + h_2h^2_5\,[a^1_4\,(b^4_3c^2_1 - c^4_3b^2_1) + b^1_4\,(a^2_1c^4_3 - c^2_1a^4_3) + c^1_4\,(a^4_3b^2_1 - b^4_3a^2_1) + b^1_2a^2_1 - a^1_2b^2_1 + b^4_3a^3_4 - a^4_3b^3_4] = 0 \qquad (12)$$

Poznámka: Bolo by vhodné previesť triedenie hyperbolických párov komplexov v závislosti od klasifikácie kubík (11) a (12). V ďalšom sa budeme zaoberať len dvoma geometricky význačnými prípadmi.

HH a HT páry komplexov

Priamky A_1A_3, A_2A_4 určené odpovedajúcimi si T-bodmi lúčov l, l' tvoria vo všeobecnosti pár komplexov

Definícia: *Symbolom HH označme hyperbolický pár komplexov, v ktorom priamky A_1A_3, A_2A_4 tvoria hyperbolický pár s odpovedajúcimi si T-bodmi (A_1, A_2), (A_3, A_4).*

Symbolom HT označme hyperbolický pár komplexov, v ktorom priamky A_1A_3, A_2A_4 tvoria T-pár komplexov, pričom (A_1, A_2), (A_3, A_4) sú odpovedajúce si T-body.

Veta 4. *HH pár komplexov je vo všeobecnosti určený prirodzenými rovnicami:*

$$a^4{}_3b^2{}_1 = a^2{}_1b^4{}_3,\ c^4{}_3b^2{}_1 = b^4{}_3c^2{}_1,\ a^1{}_2b^3{}_4 = b^1{}_2a^3{}_4,\ c^1{}_2b^3{}_4 = c^3{}_4b^1{}_2 \tag{13}$$

pričom $b^2{}_1b^4{}_3b^1{}_2b^3{}_4\,(b^2{}_1b^1{}_2 - b^4{}_3b^3{}_4) \neq 0$

Dôkaz: Z definície HH páru komplexov, vylúčiac $\omega^2{}_1\omega^3{}_4\omega^4{}_3\omega^1{}_2 = 0$ a použijúc vetu 1, plynie $\omega^2{}_1 = s\,\omega^4{}_2$, $\omega^1{}_2 = p\omega^3{}_4$, kde $sp(sp-1) \neq 0$. Z toho už plynú rovnosti (13). Obrátene, ak platia rovnosti (13), tak na základe $b^2{}_1b^4{}_3b^1{}_2b^3{}_4\,(b^2{}_1b^3{}_2 - b^4{}_3b^3{}_4) \neq 0$ možno písať $\omega^2{}_1 = s\omega^4{}_3$, $\omega^4{}_2 = p\omega^3{}_4$ pričom $sp\,(sp-1) \neq 0$. Z toho je zrejmé, že uvažovaný hyperb. pár je HH pár.

Veta 5. *HT pár komplexov je vo všeobecnosti určený prirodzenými rovnicami:*

$$a^4{}_3b^2{}_1 = a^2{}_1b^4{}_3,\ b^2{}_1c^4{}_3 = c^2{}_1b^4{}_3,\ a^1{}_2b^3{}_4 = b^1{}_2a^3{}_4,\ c^1{}_2b^3{}_4 = c^3{}_4b^1{}_2,\ b^1{}_2b^2{}_1 = b^4{}_3b^3{}_4, \tag{14}$$

pričom $b^2{}_1b^4{}_3b^1{}_2b^3{}_4 \neq 0.$

Dôkaz: Z definície HT páru komplexov, vylúčiac prípad $\omega^2{}_1\omega^3{}_4\omega^4{}_3\omega^1{}_2 = 0$ a použijúc vetu 1, plynie $\omega^2{}_1 = s\omega^4{}_3$, $\omega^1{}_2 = p\,\omega^3{}_4$, kde $sp \neq 0$, $sp-1 = 0$. Z toho už plynie tvrdenie.

Vety o existencii HH, HT párov

Obdobným postupom ako v [2] dostaneme vzťahy podobné vzťahom (36), (37) (38), (39), (44), (45), (46), (47), 48 v [2]. Diferencovaním (13) dostaneme

$$\alpha_3^{4h} = b_3^4\,\alpha_1^{2h} + a_1^2\,\beta_3^{4h},\quad \gamma_3^4 = b_3^4\,\gamma_1^{2h} + c_1^2\,\beta_3^{4h}$$

$$\alpha_2^{1h}\,b_4^3 + a_2^1\,\beta_4^{3h} = \beta_2^{1h}\,a_4^3 + b_2^1\,\alpha_4^{3h},\quad \gamma_2^{1h}\,b_4^3 + c_2^1\,\beta_4^{3h} = \gamma_4^{3h}\,b_2^1 + c_4^3\,\beta_2^{1h} \tag{15}$$

Z toho obdobným postupom ako pri vyvodení (44) dostaneme

$$c^1{}_3 + a^4{}_2 + b^4{}_3a^3{}_1 + b^4{}_3c^2{}_4 - (c^2{}_1b^1{}_3 + c^2{}_1b^4{}_3 + a^2{}_1b^4{}_2 + a^2{}_1b^4{}_3b^3{}_1) = 0$$

$$a^1{}_4\,(b^3{}_4c^4{}_2 + b^1{}_2c^3{}_1 - c^3{}_4b^4{}_2 - c^1{}_2b^3{}_1) + b^1{}_4\,(c^3{}_4a^4{}_2 + c^1{}_2a^3{}_1 - a^3{}_4c^4{}_2 - a^1{}_2c^3{}_1) +$$
$$+ c^1{}_4\,(a^3{}_4b^4{}_2 + a^1{}_2b^3{}_1 - b^3{}_4\,a^4{}_2 - b^1{}_2a^3{}_1) - c^3{}_4a^1{}_3 - c^1{}_2a^2{}_4 + a^3{}_4c^1{}_3 + a^1{}_2c^2{}_4 = 0$$

Z toho diferencovaním dostaneme nezávislé vzťahy medzi α_k^{ih}, β_k^{ih}, γ_k^{ih} tvaru: $f_{1h}\,(\alpha_k^{ih}, \beta_k^{ih}, \gamma_k^{ih}) = 0$

$$f_{2h}\,(\alpha_k^{ih}, \beta_k^{ih}, \gamma_k^{ih}) = 0 \tag{17}$$

Poznámka. V (15), (17) a v ďalších vzťahoch použili sme (použijeme) označenie: $da_k^i = \alpha_k^{i1}\omega_1^4 + \alpha_k^{i2}\omega_2^3 + \alpha_k^{i3}\omega_3^2$

$$db_k^i = \beta_k^{i1}\omega_1^4 + \beta_k^{i2}\omega_2^3 + \beta_k^{i3}\omega_3^2$$

$$dc_k^i = \gamma_k^{i1}\omega_1^4 + \gamma_k^{i2}\omega_2^3 + \gamma_k^{i3}\omega_3^2 \text{ a } h = 1,2,3.$$

Rovnice (15), (17) určujú pre α_k^{ih}, β_k^{ih}, γ_k^{ih} 18 nezávislých vzťahov. Z (16) plynie, že počet nezávislých vzťahov určených (47) je o 2 menší ako pri všeobecnom hyperbolickom páre. Preto počet nezávislých parametrov, na ktorých závisí všeobecný trojrozmerný integrálny element je $N = 47 - (18-2) = 31$. Podobnými úvahami zistíme: $r_1 = 27-6 = 21$, $r_2 = 15-6 = 9$ $r_3 = 5-4 = 1$. Tým dostávame: $s_1 = r_1 - r_2 = 12$, $s_2 = r_2 - r_3 = 8$, $r_3 = s_3 = 1$. $Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 31$. Teda $Q = N$. Tým sme dokázali vetu

Veta 6. *HH pár komplexov určený rovnicami (13) existuje s ľubovoľnosťou jednej funkcie troch premenných.*

Nech teraz je HT pár určený rovnicami (14). Preto platia vzťahy (15), (16), (17). Diferencovaním $b^2{}_1 b^1{}_2 = b^4{}_3 b^3{}_4$ dostaneme

$$\beta_2^{1h} = \beta_3^{4h} b_4^3 + b_3^4 \beta_4^{3h} \tag{18}$$

Tým dostávame: $N = 31-3 = 28$, $r_1 = 21-1 = 20$, $r_2 = 9-1 = 8$, $r_3 = 1-1 = 0$ a teda $s_1 = r_1 - r_2 = 12$ $s_2 = r_2 - r_3 = 8$, $s_3 = r_3 = 0$. Tým $Q = s_1 + 2s_1 + 3s_3 = 28$. Teda $Q = N$. Tým sme dokázali

Veta 7. *HT pár určený rovnicami (14) existuje s ľubovoľou 8 funkcií dvoch premenných.*

Kubiky (11), (12) v prípade HH, HT párov.

Z(13) plynie: $a^2{}_1 c^4{}_3 = a^4{}_3 c^2{}_1$, $a^1{}_2 c^3{}_4 = c^1{}_2 a^3{}_4$ (19)

Vzťahy (44) v [2] v našom repéri majú tvar

$$b^3{}_4 c^4{}_2 - c^3{}_4 + b^1{}_2 c^3{}_1 - c^1{}_2 b^3{}_1 + c^4{}_2 a^2{}_1 - a^4{}_2 c^2{}_1 + a^4{}_3 c^3{}_1 - c^4{}_3 a^3{}_1 = 0$$

$$a^1{}_2 - b^1{}_2 a^2{}_4 + b^1{}_3 a^3{}_4 - a^1{}_3 b^3{}_4 + a^1{}_4 (c^4{}_3 - b^4{}_3 c^2{}_4 + b^1{}_3 c^2{}_1 - c^1{}_3 b^2{}_1) + b^1{}_4 (c^2{}_4 a^4{}_3 - a^2{}_4 c^4{}_3 + c^1{}_3 a^2{}_1 - a^1{}_3 c^2{}_1) + c^1{}_4 (a^2{}_4 b^4{}_3 - a^4{}_3 + a^1{}_3 b^2{}_1 - b^1{}_3 a^2{}_1) = 0 \quad (20$$

Z (13), (19), (20) plynie: Kubiky (11), (12) v prípade *HH* páru majú v našom repéri tvar

$$D_{622} h_6 h^2{}_2 + D_{655} h_6 h^2{}_5 + D_{225} h^2{}_2 h_5 + D_{255} h_2 h^2{}_5 = 0 \tag{21}$$

$$D'_{322} h_3 h^2{}_2 + D'_{355} h_3 h^2{}_5 + D'_{225} h^2{}_2 h_5 + D'_{255} h_2 h^2{}_5 = 0 \tag{22}$$

Kubiky (21), (22) prechádzajú bodmi H_2, H_5. Pre dotyčnice v dvojnásobnom bode kubiky (21) dostávame vzťah $D_{622} h^2{}_2 + D_{655} h^2{}_5 = 0$, ktorým sú vo všeobecnosti určené dve dotyčnice, ktoré pretínajú priamku $H_2 H_5$ v bodoch, ktoré sú bodmi H_2, H_5 harmonicky oddeľované. Ak kubika degeneruje, tak $D^2{}_{622} D_{655} + D^2{}_{255} D_{622} = 0$, čo vo všeobecnosti neplatí. Podobné úvahy platia aj pre kubiku (22). Z toho dostávame vetu.

Veta 8. *V prípade HH párov komplexov kubiky (11), (12) sú kubikami s uzlovými bodmi a majú dva spoločné body, ktoré ležia na priamke d.*

Poznámka. Keď P_3 je projektívny priestor, tak v prípade $D_{622} D_{655} > 0$ je bod H_6 izolovaným bodom kubiky (21).

V prípade *HT* páru zo (14) plynú ďalšie vzťahy

$$a^2{}_1 b^1{}_2 = a^4{}_3 b^3{}_4,\ c^2{}_1 b^1{}_2 = c^4{}_3 b^3{}_4,\ a^1{}_2 b^2{}_1 = a^3{}_4 b^4{}_3,\ c^1{}_2 b^2{}_1 = c^3{}_4 b^4{}_3$$

$a^2{}_1a^1{}_2 = a^4{}_3a^3{}_4$, $c^2{}_1c^1{}_2 = c^4{}_3c^3{}_4$, $a^2{}_1c^1{}_2 = a^4{}_3c^3{}_4$, $c^2{}_1a^1{}_2 = c^4{}_3a^3{}_4$, na základe ktorých kubiky (11), (12) získavajú tvar

$$D_{622}h_6h^2{}_2 + D_{655}h_6h^2{}_5 = 0,\ D'_{322}h_3h^2{}_2 + D'_{355}h_3h^2{}_5 = 0$$

Keďže $D_{622}D_{655}D'_{322}D'_{355} \neq 0$, preto platí veta.

Veta 9. *V prípade HT páru komplexov kubiky (11), (12) sa rozpadajú na tri rôzne priamky. Obe kubiky majú spoločnú priamku d.*

Poznámka. Každým bodom priamky d v prípade HT páru komplexov prechádzajú dve fokákne krivky c_1, c_2 dvoch kongruencií rovín (H_6, d), (H_3, d). Krivky c_1, c_2 splývajú najviac v troch bodoch priamky d (viď [1] strana 148).

Literatúra

[1] N. I. Kovancov: Teorija kompleksov, IKU, 1963.

[2] E. T. Ivlev: Kanoničeskij reper proizvoľnoj pary kompleksov, Sibirskij matematičeskij žurnal, t. IV, n. 3, 1963.

Adresa autora: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie VŠD v Žiline, ul. Marxa-Engelsa.

Do redakcie došlo 15. 10. 1965.

Заметка к гиперболической паре комплексов.

А. ДЕКРЕТ

Выводы

Пустъ K, K' гиперболическая пара комплексов. Образом Клеина комплексов являются трехмерные многообразия в P_5, которых линейные трехмерные касательные пространства в точках H_6, H_3 (которые себе отвечают в данном соответсвии $K \to K'$), пересекаются в прямой d. Потом фокусы, находящиеся в плоскости (H_6, d), конгруенции плоскостей (H_6, d), находятся на кривой 3 порядка с двойной точкой. Тоже самое можно сказать о конгруенции плоскостей (H_3, d). Пусть луч $1'$ отвечает лучу 1 в соответствии $K \to K'$. Пусть $1 = A_1A_2$, $1' = A_3A_4$, где (A_1, A_3), (A_2, A_4) Т-точки лучей 1, $1'$. В случае гиперболической пары, для которой прямые A_1A_3, A_2A_4 описывамт гиперболическую пару для которой (A_1, A_2) (A_3, A_4) -Т-точки, крывые фокусов являются кривыми 3 порядка с узловыми точками. В случае гиперболической пары, для которой прямые A_1A_3, A_2A_4 описывают T-пару с T-точками (A_1, A_2), (A_3, A_4), кривые фокусов дегенерируют в 3 разные прямые непереходящие одной точкой.

Bemerkung zum hyperbolischen Paar der Komplexe

A. DEKRÉT

Zusammenfassung

Es sei K, K' ein hyperbolisches Paar der Komplexe. Die Klein-Bilder der Komplexe K, K' im projektiven Raum P_5 haben in entsprechendem Punkte H_6, H_3 dreidimensionale lineare Tangentialräume, die in Gerade d sich scheiden. Denn die in Ebene (H_6, d) liegenden Fokale der Kongruenz der Ebenen (H_6, d) liegen auf einer kubischen Kurve mit einer Singularitätsstelle. Ähnlich gilt über Kongruenz der Ebenen (H_3, d). Es seien l, l' entsprechenden Strahlen der Komplexe K, K'. Es sei $l = A_1A_2$, $l' = A_3A_4$, wo (A_1, A_3), (A_2, A_4) T-Punkte der Strahlen l, l' sind. Im Fall des hyperbolischen Paars, bei welchem auch die Geraden A_1A_3, A_2A_4 hyperbolisches Paar mit T-Punkten (A_1, A_2), (A_3, A_4) bilden, hat die kubische Fokalkurve weinen Knoten. Im Fall des hyperbolischen Paars, bei welchem die Geraden A_1A_3, A_2A_4 T-Paar bilden, wobei (A_1, A_2), (A_3, A_4) T-Punkte sind, degenerieren die kubischen Fokalkurve in drei verschiedene Geraden, welche keinen gemeinsamen Punkt haben.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XV, 1967]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA XV — 1967

O usměrněnosti množiny kvazimetrik

A. SETTARI

1. Základní pojmy a definice

Nechť P je topologický metrisovatelný prostor. Označme $D(P)$ množinu všech těch metrik na P, které indukují v P danou topologii. Mezi prvky množiny $D(P)$ definujme tyto vztahy (stejně jako v [1] definice 1.4):

Definice 1: *Nechť* $\rho \varepsilon D(P)$, $\sigma \varepsilon D(P)$. *Je-li pro každé dva body* $x \varepsilon P$, $y \varepsilon P$ $\rho(x,y) \leqslant \alpha . \sigma(x,y)$ $(\sigma(x,y) \leqslant \beta \rho(x,y))$ *při vhodném pevném* $\alpha > 0$ $(\beta > 0)$, *píšeme* $\rho \leqslant \sigma$ $(\sigma \leqslant \rho)$.

Definice 2: *Metriky* $\rho \varepsilon D(P)$, $\sigma \varepsilon D(P)$ *nazveme ekvivalentní a označíme* $\rho = \sigma$ *právě tehdy, platí-li současně* $\rho \leqslant \sigma$, $\sigma \leqslant \rho$.

Na základě definice 2 lze provést rozklad na $D(P)$. Označme nyní jako $D_0(P)$ množinu všech tříd ekvivalentních metrik na P. Pro tyto třídy byl zaveden v práci [1] pojem „kvazimetriky" a vlastnosti prostoru, které se nemění při přechodu k metrikám, patřícím do téže třídy, byly nazvány kvazimetrickými. Definicí 1 je v $D_0(P)$ dáno částečné uspořádání, neboť platí:

I. $\rho \leqslant \rho$

II. $\rho \leqslant \sigma$, $\sigma \leqslant \rho \Rightarrow \rho = \sigma$

III. $\rho \leqslant \sigma$, $\sigma \leqslant \tau \Rightarrow \rho \leqslant \tau$, kde ρ, σ, τ značí representanty jednotlivých tříd (kvazimetrik).

Poznámka: Je jasné, že při takto definovaném uspořádání nezáleží na volbě výběrového pravidla v $D(P)$.

V práci [1] jest položena otázka, zda je $D_0(P)$ usměrněná vpravo, resp. vlevo (článek 2. 8). Pro úplnost uveďme definici usměrněnosti vpravo, resp. vlevo:

Definice 3: *Částečně uspořádaná množina M je usměrněná vpravo (vlevo), když pro libovolná* $x \varepsilon M$, $y \varepsilon M$ *existuje* $z \varepsilon M$ *tak, že platí* $z \geqslant x$, $z \geqslant y$ $(z \leqslant x, z \leqslant y)$.

Poněvadž maximum ze dvou metrik je opět metrika, plyne odtud bezprostředně, že $D_0(P)$ je vždy usměrněná vpravo. V citované práci je dále uveden příklad prostoru, pro který je D_0 (P) usměrněná vlevo. Jedná se o spočetný kompaktní prostor s jediným hromadným bodem. Ukazuje se však, že obecně tento výsledek neplatí, jak bude dále ukázáno.

2. Prostory s konečným počtem hromadných bodů.

Při vyšetřování tohoto typu prostorů nám bude východiskem již zmíněný příklad z práce [1]; zde jej podrobněji rozvedeme v 2.1.

2.1. **Věta 1:** *Nechť P je metrisovatelný prostor, který má právě jeden hromadný bod. Pak $D_0(P)$ je usměrněná vlevo.*

Důkaz: Označme a hromadný bod prostoru P. Nechť $\rho \varepsilon D_0(P)$, $\sigma \varepsilon D_0(P)$.

Položme $\alpha_x = \inf \min [\rho(x,y), \sigma(x,y)]$ $[y \varepsilon P,\ y \neq x,\ y \neq a]$

a definujme: $\tau(x,y) = \frac{1}{2}(\alpha_x + \alpha_y)$ pro $x \neq y$

$\tau(x,x) = 0$

a) τ je metrika na P, neboť platí axiomy

$(I\rho)$ $\tau(x, x) = 0$

$(II\rho)$ $\tau(x, y) > 0$ pro $x \neq y$

$(III\rho)$ $\tau(x,y) = \tau(y,x)$, $(IV\rho)$ $\tau(x,y) + \tau(y,z) \geqslant \tau(x, z)$.

$(I\rho)$ — $(III\rho)$ je zřejmé, neboť $\alpha_x > 0$ pro každé $x \neq a$ a dále

$\alpha_a = 0$, takže $\tau(x,a) = \frac{1}{2}\alpha_x > 0$

$(IV)\rho)$ pak plyne z nerovností

$$\frac{1}{2}\alpha_x + \alpha_y \geqslant \frac{1}{2}\alpha_x, \quad \alpha_x + 2\alpha_y + \alpha_z \geqslant \alpha_x + \alpha_z$$

b) $\tau \leqslant \rho$, $\tau \leqslant \sigma$. Zřejmě je $\tau(x,a) \leqslant \rho(x,a)$, neboť jinak by z $\alpha_x > 2\rho(x,a)$ plynulo, že pro všechny ostatní body $y \varepsilon P$ je $\rho(x,y) > 2\rho(x,a)$. Podle trojúhelníkové nerovnosti by muselo platit $\rho(x,a) + \rho(a,y) \geqslant \rho(x,y) > 2\rho(x,a)$, $\rho(a,y) \geqslant \rho(x,y) - \rho(x,a) > \rho(x,a)$, takže a by byl isolovaný bod. $\tau(x,y) \leqslant \leqslant \rho(x,y)$. Platí $\alpha_x \leqslant \rho(x,y)$, $\alpha_y \leqslant \rho(x,y)$, sečtením dostaneme $2\tau(x,y) = = \alpha_x + \alpha_y \leqslant 2\rho(x,y)$. Totéž platí pro metriku σ.

c) τ indukuje v P tutéž topologii. Snadno se vidí, že všechny body kromě a jsou isolované.

Věta 2: *Nechť P je diskretní prostor.*

Pak D_0 (P) je usměrněná vlevo.

Důkaz věty je zcela stejný jako u věty 1, vynecháme-li v konstrukci hromadný bod.

2.2 Nejdříve uvedeme tato tvrzení:

(1) *Nechť (P_1, ρ_1), (P_2, ρ_2) jsou metrické prostory, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, ρ_1, ρ_2 ohraničené metriky. Nechť $\tau(x,y) = \rho_1(x,y)$ pro $(x,y) \varepsilon P_1 \times P_1$, $\tau(x,y) =$*

$= \rho_2$ *(x,y) pro (x,y)* $\varepsilon P_2 \times P_2$, $\tau(x,y) = \gamma = \frac{1}{2}$ *max (A, B) pro* $x \varepsilon P_1$, $y \varepsilon P_2$ *nebo* $x \varepsilon P_2$, $y \varepsilon P_1$, *kde* $A = \sup \rho_1 (x,y)$ $[(x,y) \varepsilon P_1 \times P_1]$, $B = \sup \rho_2 (x,y)$ $[(x,y) \varepsilon P_2 \times P_2]$. *Pak* τ *je metrika na* $P = P_1 \cup P_2$.

($I\rho$) — ($III\rho$) zřejmé, neboť z ohraničenosti metrik plyne $A, B < + \infty$. Ověříme ($IV\rho$). Pro x,y εP_1, z εP_2 je $\rho_1 (x,y) + \gamma \geqslant \gamma$, $2\gamma \geqslant \rho_1 (x,y)$, neboť $0 < \rho_1 (x,y) \leqslant 2\gamma$. Podobně pro x, y εP_2, z εP_1.

(2) *Nechť P je kompaktní metrisovatelný prostor, který má právě dva hromadné body a, b. Nechť X, Y jsou libovolné (uzavřené) množiny takové, že X je okolím a, Y okolím b,* $X \cap Y = \emptyset$, $Y \cup X = P$. *Pak platí pro libovolnou vytvářející metriku* $\rho : \rho (X, Y) > 0$.

Množiny X, Y existují, neboť body a, b jsou H- oddělené podle [2]. Existuje $\varepsilon > 0$ tak ,že jsou-li U, V ε-okolí bodů a, b, je $U \subset X$, $V \subset Y$. Předpokládejme nyní, že existují posloupnosti $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ takové, že $x_i \varepsilon X$, $y_i \varepsilon Y$, $\inf \rho (x_i, y_i) = 0$, takže $\rho (X,Y) = 0$. Lehce se vidí, že může být jen konečně mnoho $x_i \neq U$ a $y_i \neq V$. (Vytvoříme pokrytí, které tvoří U, V a všechny ostatní body, načež užijeme Borelovy věty.)

Tedy existuje i_0 tak, že pro $i > i_0$ je $\rho (x_i, y_i) < \varepsilon$, $x_i \varepsilon U$, $y_i \varepsilon V$. Postupným použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme $\rho (a, x_i) + \rho (x_i, y_i) + \rho(y_i, b) \geqslant \rho (a, b)$, tedy $3 \varepsilon \geqslant \rho (a, b)$, což je spor proti ($II\rho$).

Věta 3: *Nechť P je kompaktní metrisovatelný prostor, který má právě K hromadných bodů (K přirozené číslo). Množina* $D_0 (P)$ *je usměrněná vlevo.*

Důkaz: Označme hromadné body prostoru P jako a^i, $i = 1,2\ldots, K$. Existují okolí U^i bodů a^i taková, že $U^i \cap U^{i'} = \emptyset$ pro $i \neq i'$ a tedy též takové uzavřené množiny X^i, že $\bigcup_1^K X^i = P$, $X^i \cap X^{i'} = \emptyset$ pro $i \neq i'$ a $U^i \subset X^i$. Podle (2) platí nyní $\rho (X^i, X^{i'}) > 0$ pro $i \neq i'$ a libovolnou vytvářející metriku ρ, neboť podle [2] je $X^{i'} \cup X^i$ kompaktní prostor. Nechť nyní $\rho \varepsilon D_0 (P)$, $\sigma \varepsilon D_0 (P)$. V dalším bude vždy index i pro bod x^i značit, že $x^i \varepsilon X^i$. Označme nyní pro $i = 1,2, \ldots, K$ $\alpha^i_x = \operatorname{infmin} [\rho (x^i, y^i), \sigma (x^i, y^i)]$ $[y^i \neq x^i, y^i \neq a^i]$ a položme:

$$\tau^i (x^i, y^i) = \frac{1}{2} (\alpha^i_x + \alpha^i_y) \text{ pro } x^i \neq y^i, \quad \tau^i (x^i, x^i) = 0$$

Z 2.1. plyne, že τ^i je metrika na X^i, $\tau^i \leqslant \rho | X^i \times X^i$, $\tau^i \leqslant \sigma | X^i \times X^i$. Protože P je kompaktní, je τ^i ohraničená a existuje číslo $\gamma^i = \sup \tau^i (x^i, y^i)$ $[x^i, y^i \varepsilon X^i]$.

Označme $\gamma = \max \{\gamma^i\}$ $i = 1,2,\ldots, K$ a definujme τ takto:

$$\tau (x^i, y^i) = \tau^i (x^i, y^i)$$

$$\tau (x^i, x^{i'}) = \frac{1}{2} \gamma \text{ pro } i \neq i'$$

$$\tau (x^i, x^i) = 0$$

τ je metrika na P, jak plyne snadno z (1). Označme pro $i \neq i'$ $c^{i,i'} = \min [\rho (X^i, X^{i'}), \sigma (X^i, X^{i'})]$. Podle (2) je $c^{i,i'} > 0$ a také $c = \min \{ c^{i,i'} \} > 0$. Je-li nyní $c \geqslant \frac{\gamma}{2}$, je $\tau \leqslant \rho$, $\tau \leqslant \sigma$. Ve vnořených prostorech je to jasné a $\tau (x^i, x^{i'}) \leqslant c$. Je-li $c < \frac{\gamma}{2}$, položíme $\alpha = \frac{\gamma}{2c} > 1$, pak je opět $\tau (x^i, x^{i'}) = \frac{1}{2} \gamma \leqslant \alpha \rho(x^i, x^{i'})$, $\tau (x^i, x^{i'}) \leqslant \alpha . \sigma (x^i, x^{i'})$ a tedy $\tau \leqslant \rho$, $\tau \leqslant \sigma$. Konečně se snadno vidí, že τ indukuje v P danou topologii, takže $\tau \in D_0 (P)$.

3. Prostor $\langle 0,1 \rangle$ s přirozenou topologií

Tento prostor je příkladem kompaktního prostoru, jehož množina hromadných bodů není konečná. Dokážeme nyní, že příslušná množina D_0 ($< 0,1 >$) není usměrněná vlevo.

3.1. Nejprve zkonstruujeme množiny A, B, které budeme dále potřebovat. Nechť $J = < a, b >$ je libovolný interval. Vytvoříme na J diskontinuum takto: Rozdělíme J body $a + \frac{3}{8}$ mJ, $a + \frac{5}{8}$ m J na 3 části a vynecháme interval $\left(a + \frac{3}{8} \text{ mJ}, a + \frac{5}{8} \text{ mJ}\right)$. Zbylé intervaly rozdělíme na 3 části a vynecháme intervaly $\left(a + \frac{5}{32} \text{ mJ}, a + \frac{7}{32} \text{ mJ}\right)$, $\left(a + \frac{15}{32} \text{ mJ}, a + \frac{17}{32} \text{ mJ}\right)$ o délce $\frac{1}{4^2}$ mJ. V dalším kroku každý ze zbývajících intervalů rozdělíme opět na 3 části a odstraníme z něj střední interval délky $\frac{1}{4^3}$ mJ atd. Po odstranění spočetně mnoha intervalů obdržíme podle [3] diskontinuum, které označíme D(J). Položme $D_1 = D$ ($<0,1>$) v právě vyloženém smyslu. Označme S_1 množinu všech doplňkových intervalů J_1 k D_1. (Zřejmě jsou to všechny intervaly, vynechávané při konstrukci D_1). Položme $D_2 = \bigcup D (J_1)$ $[J_1 \in S_1]$. Přitom je-li $J_1 = (a,b)$, vytvářím diskontinuum na $<a,b>$, ale a non $\in D (J_1)$, b non $\in D (J_1)$. Označme S_2 množinu všech doplňkových intervalů ke všem diskontinuím z D_2. Konečně je-li už dána množina S_n, položme $D_{n+1} = \bigcup D (J_n)$ $[J_n \in S_n]$ a označme S_{n+1} množinu všech doplňkových intervalů ke všem diskontinuím z D_{n+1}. Tím je definována množina D_i pro libovolné i. Snadno se vidí platnost následujících tvrzení:

(1) Pro libovolný interval J je m D (J) = $\frac{1}{2}$ mJ.

Nechť $G_J = J - D (J)$. Pak je $m\, G_J = m\, J \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \ldots\right) = \frac{1}{2}$ mJ takže $m\, D (J) = \frac{1}{2}$ mJ.

(2) Nechť $E = < 0,1 > - \bigcup D_k$. Jest $m E = 0$.

Podle (1) je $m D_1 = \frac{1}{2}$, pro každé $J_1 \in \boxed{S_1}$ je $m D (J_1) = \frac{1}{2} m J_1$. Poněvadž $\bigcup J_1 = G_1$ a všechny množiny $D (J_1)$ jsou navzájem disjunktní, je podle [3] $m D_2 = \sum_{J_1} m D (J_1) = \frac{1}{2} m G_1 = \frac{1}{4}$.

Zcela analogicky se zjistí, že $m D_k = \frac{1}{2^k}$ pro libovolné k. Poněvadž jsou všechny množiny D_k, $D_{k'}$, diskjuntní pro $k \neq k'$, je $m \bigcup_1^\infty D_k = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} = 1$ a tedy $m E = 0$.

(3) Nechť I je otevřený interval takový, že existuje $J_k \in S_k$, $I \subset J_k$. Pak existuje bod $x \in I$, x non $\in D_i$, $i = 1,2,\ldots, k + 1$, x non $\in E$.
Pro $i \leqslant k$ zřejmé. Je-li $J_k = (a,b)$, existuje prosté zobrazení J_k na $(0,1)$, takže stačí ukázat: Je-li $I \subset <0,1>$, je $I \cap G_1 \neq \emptyset$. Označme F_n množinu, kterou obdržíme při vytváření diskontinua po n -tém kroku. Je $F_n = \bigcup F_n^i$, kde F_n^i jsou diskjuntní uzavřené intervaly a $m F_n^i \to 0$. Pak existuje n_0 tak, že $m (I - F^i_{n_0}) > 0$ a tedy i $m (I - D_1) > 0$. Podle (2) pak platí také $m (I - D_1 - E) > 0$. Každý bod této množiny již má požadovanou vlastnost.

Položme nyní $A = \bigcup_{k=0}^\infty D_{2k+1}$, $B = < 0,1 > - A$

Lemma 1: *Nechť $I \subset < 0,1 >$ je libovolný uzavřený interval.*
Pak platí: $m (A \cap I) > 0$, $m (B \cap I) > 0$.

Důkaz: Obě množiny jsou měřitelné, takže nerovnosti mají smysl. Označme $C = \bigcup_1^\infty D_{2k}$. Je $C \subset B$. Místo $m (B \cap I) > 0$ stačí ukázat $m (C \cap I) > 0$. Nechť $x \in I - E$ je vnitřním bodem intervalu I. Pak existuje právě jedno k tak, že je $x \in D_k$ a právě jeden interval $J_{k-1} \in S_{k-1}$, že $x \in D (J_{k-1})$. Je-li nyní $J_{k-1} \subset I$, pak je $D (J_{k-1}) \subset I$ a $m D (J_{k-1}) = \frac{1}{2} m J_{k-1} > 0$.

Dále z (1) plyne, že $m (D_{k+1} \cap J_{k-1}) = m R = \frac{1}{4} m J_{k-1} > 0$.

Nyní je buď $D (J_{k-1}) \subset A$, $R \subset B$ nebo naopak, z čehož již plyne tvrzení.

Není-li $J_{k-1} \subset I$, pak existuje podle (3) vnitřní bod x_1 intervalu I, pro který $x_1 \in D (J_{k_1-1})$, kde $k_1 > k$. Poněvadž $\lim_{i \to \infty} m J_i = 0$, dostaneme po konečném počtu kroků bod $x_n \in D (J_{k_n-1})$, kde $J_{k_n-1} \subset I$.

Lemma 2: *Nechť A' (resp. B') je množina bodů hustoty množiny A (B) ve smyslu [3]. Platí:*

a) $m [< 0,1 > - A' \cup B'] = m Q = 0$.

b) Je-li $x \varepsilon A'$ (B'), je bodem nulové hustoty B (A), t. j.

$$\lim_{h \to 0} \frac{m[(x-h, x+h) \cap A]}{2h} = 1 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{m[(x-h, x+h) \cap B]}{2h} = 0$$

$$\left(\lim_{h \to 0} \frac{m[(x-h, x+h) \cap B]}{2h} = 1 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{m[(x-h, x+h) \cap A]}{2h} = 0 \right).$$

Důkaz: b) K $\varepsilon > 0$ existuje h tak, že $1 \geqslant \frac{m[(x-h, x+h) \cap A]}{2h} > 1 - \varepsilon$, $2h \geqslant m[(x-h, x+h) \cap A] > 1 - \varepsilon$. Lehce se vidí, že $m(x-h, x+h) = m\{[(x-h, x+h) \cap A] \cup [(x-h, x+h) \cap B]\}$ kde obě množiny vpravo jsou disjunktní, takže lze psát $2h = m[(x-h, x+h) \cap A] + m[(x-h, x+h) \cap B]$. Srovnáním s hořejší nerovností plyne $0 \leqslant m[(x-h, x+h) \cap B] < \varepsilon . 2h$, tedy $\frac{m[(x-h, x+h) \cap B]}{2h} < \varepsilon$. Pro $x \varepsilon B'$ je důkaz obdobný.

a) Plyne z měřitelnosti množin A, B, neboť pak podle [3] je $m A' = mA$, $m B' = m B$.

2.2 **Věta 1:** *Nechť $P = < 0,1 >$ je topologický prostor s přirozenou topologií. Množina D_0 (P) není usměrněná vlevo.*

Důkaz: Nechť A,B jsou množiny daných vlastností (2.1).

Položme: $\rho(x, y) = m[< x,y > \cap A]$, $\sigma(x,y) = m[< x,y > \cap B]$

pro $x < y$, $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$.

ρ a σ jsou metriky na $< 0,1 >$. (IIρ) plyne z lemmatu 1. (IVρ) plyne z $m[< x,z > \cap A] = m[<x,y > \cap A] + m[<y,z > \cap A]$ pro $x < y < z$. Ostatní je zřejmé. ρ a σ indukují v $< 0,1 >$ přirozenou topologii. Snadno se vidí, že okolí každého bodu je otevřený interval. Zbývá ukázat, že ρ a σ nejsou ekvivalentní. To plyne lehce z lemmatu 2. Nechť $a \varepsilon A'$, existuje okolí (x,y) bodu a tak, že pro libovolné $\varepsilon < 1$ je $\rho(x,y) > (1 - \varepsilon)|x-y|$, $\sigma(x,y) < \varepsilon|x - y|$. Má-li být nyní při pevném α $\rho(x,y) \leqslant \alpha . \sigma(x,y)$, dostáváme $1 - \varepsilon \leqslant \alpha . \varepsilon$, tedy $\alpha \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ což není možné.

Předpokládejme nyní, že existuje metrika τ, která indukuje v $<0,1>$ přirozenou topologii, $\tau \leqslant \rho$, $\tau \leqslant \sigma$. Pak existují čísla α, β tak, že $\tau(x,y) \leqslant \alpha . \rho(x,y)$, $\tau(x,y) \leqslant \beta . \sigma(x,y)$. Nechť $I = < x_0,y_0 >$ je libovolný interval, $I \subset <0,1>$. Ukážeme, že musí být $\tau(x_0,y_0) < \varepsilon$ pro libovolné ε a tím dojdeme ke sporu. Podle lemmatu 2 je $m\, Q = 0$ a existuje G otevřená tak, že je $G \supset Q$ a $m\, G < \frac{\varepsilon}{2 \min [\alpha, \beta]}$. Kolem každého bodu $x \varepsilon A'$ zvolme okolí $U = (a,b)$ takové, že je $\frac{m[U \cap B]}{mU} = \frac{\sigma(a,b)}{|a-b|} < \frac{\varepsilon}{4\beta}$. Podobně kolem každého $x \varepsilon B'$ zvolme okolí $V = (c, d)$ tak, že $\frac{m[V \cap A]}{mV} = \frac{\rho(c,d)}{|c-d|} < \frac{\varepsilon}{4\alpha}$. Že tato okolí existují při dostatečně malém ε, plyne z lemmatu 2. Protože G je otevřená, je $G = \bigcup G_i$. Označme nyní $U = \{U_i\} \cup \{V_i\} \cup \{G_i\}$ systém, který tvoří okolí U, V a G_i. U pokrývá $< 0,1 >$ a podle Borelovy věty z něj lze vybrat konečné pokrytí U_0 intervalu $<x_0, y_0>$. Toto pokrytí lze vybrat tak, že označíme-li $U_0 = \bigcup_1^n A_i = \bigcup (x_i, y_i)$, platí $x_1 < x_0 < x_2$, $y_{n-1} < y_0 < y_n$, $x_{i+1} < y_i < x_{i+2} < y_{i+1}$. Má-li být nyní $\tau \leqslant \rho$ $\tau \leqslant \sigma$, musí být pro $A_j \varepsilon \{U_i\}$ $\tau(x_j, y_j) \leqslant \beta\sigma(x_j, y_j) < \frac{\beta.\varepsilon.m A_j}{4\beta} = \frac{\varepsilon\, m\, A_j}{4}$ a pro $A_k \varepsilon\{V_i\}$ $\tau(x_k, y_k) \leqslant \alpha\, \rho(x_k, y_k) < \frac{\alpha.\varepsilon.m A_k}{4\alpha} = \frac{\varepsilon.m A_k}{4}$. Dále je vždy $\tau(x, y) < \gamma m < x, y >$, kde $\gamma = \min[\beta, \alpha]$, takže pro $A_m \varepsilon G_i$ je $\tau(x_m, y_m) < \gamma m A_m$. Nechť nyní na příklad $A_1 \varepsilon \{U_i\}$, $A_2 \varepsilon \{V_i\}$. Máme $\tau(x_0, x_2) \leqslant \alpha.\rho(x_0, x_2) \leqslant \alpha.\rho(x_1, y_1)$ a dále $\tau(x_0, x_3) \leqslant \tau(x_0, x_2) + \tau(x_2, x_3) \leqslant \alpha.\rho(x_1, y_1) + \beta.\sigma(x_2, x_3) \leqslant \alpha.\rho(x_1, y_1) + \beta.\sigma(x_2, y_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}[mA_1 + mA_2]$.

Pokračujeme-li takto dále, postupným použitím trojúhelníkové nerovnosti nakonec dostaneme $\tau(x_0, y_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}[\Sigma mA_j + \Sigma mA_k] + \gamma\Sigma mA_m$. Je zřejmé, že $\Sigma mA_j + \Sigma mA_k < 2$ pro libovolné ε, $\Sigma mA_m \leqslant mG < \frac{\varepsilon}{2\gamma}$. Pak dostáváme $\tau(x_0, y_0) \leqslant \varepsilon$, což je spor proti (II$\rho$).

Literatura

[1] Katětov M.: O квазиметрических свойствах, Studia mathematica, tom 21 — 1963, seria specjalna, zeszyt 1 — konferencija analizu funkcij.
[2] Čech E.: Topologické prostory, NČAV 1959.
[3] Natanson I. P.: Theorie der Funktionen einer reelen Veränderlichen, AV Berlin 1961.

Adresa autora: Bojkovice 73, okr. Uherské Hradiště

Do redakcie došlo 15. 6. 1965

О направленности множества квазиметрик

А. СЕТТАРИ

Содержание

Следующая работа занимается вопросом, при каких условиях множество квазиметрик $D_0(P)$ топологического метризуемого пространства P фильтрируется влево. Квазиметриками подразумеваем классы метрик, определённым способом єквивалентных.

Основные результаты работы:

1. *В пространстве с конечным числом неизолированных точек фильтрируется $D_0(P)$ влево.*
К любым двумя метрикам ρ, σ конструируется метрика τ, $\tau \leqslant \rho$, $\tau \leqslant \sigma$.

2. *В пространстве $< 0, 1 >$ с естественной топологией $D_0(P)$ не фильтрируется влево.* Конструируются определённые метрики ρ, σ и показывается, что не ествует метрика τ, $\tau \leqslant \rho$ $\tau \leqslant \sigma$.

Über die gerichtete Menge der Quasimetriken

A. SETTARI

Zusammenfassung

Diese Arbeit befaßt sich mit der Frage, ob die Menge der Quasimetriken $D_0(P)$ eines topologischen metrisierten Raumes P nach unten gerichtet ist. Unter dem Begriff der Quasimetriken meint man die Klassen auf bestimmte Art äquivalenter Metriken.

Die Hauptresultate sind:

1. *Für den Raum mit endlich vielen Häufungspunkten ist $D_0(P)$ nach unten gerichtet.* Zu den beliebig erwählten Metriken ρ, σ konstruiert man die Metrik τ, $\tau \leqslant \rho$, $\tau \leqslant \sigma$.

2. *In dem Raum $< 0,1 >$ mit natürlichen Topologie ist $D_0(P)$ nicht nach unten gerichtet.* Die bestimmten Metriken ρ und σ werden konstruiert und wird bewiesen, daß keine Metrik τ existiert, für welche $\tau \leqslant \rho$, $\tau \leqslant \sigma$ gilt.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

sú fakultný sborník určený na publikovanie vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých aspirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracúvajú materiál získaný za pobytu na našej fakulte. Redakčná rada si vyhradzuje právo z tohto pravidla urobiť výnimku.

Práce musí odporúčať katedra. Práce študentov musí odporúčať Študentská vedecká sploločnosť a príslušná katedra.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom alebo anglickom, francúzskom alebo nemeckom. Práce podané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, s jednoriadkovou medzerou, tak aby jeden riadok tvorilo 60 úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na autorov účet.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšete názov práce, pod to meno autora. Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, uvádzajú sa všetky pracoviská. Aj tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba obidve uviesť.

Fotografie treba dodať na čiernom lesklom papieri a uviesť autorovo meno, zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba urobiť tušom na priehľadnom papieri (pauzák) alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať resumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam, publikovaným v cudzom jazyku treba pripojiť resumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom (ak ide o článok v ruskom jazyku), alebo v ruskom jazyku, (ak je článok v západnom jazyku). Nezabudnite pri resumé uviesť vždy názov práce a meno autora v rovnakom poradí ako v základnom texte. Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a stránkové korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny počas korektúry idú na ťarchu autorského honorára. Každý autor dostane popri príslušnom honorári aj 50 separátov.

Redakčná rada