(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. ~~IX.~~ — ~~2.~~ — MATHEMATICA XIII, 1966)
X 5

ACTA

FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X. FASC. V.

MATHEMATICA

PUBL. XIII.

1966

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

Просим обмена публикаций
Austausch von Publikationen erbeten
Prière d'échanger des publications
We respectfully solicit the exchange of publications
Se suplica el canje de publicaciónes

Sborník Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Vydáva Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasínkova 5, čís. tel. 458-51. Povolilo Povereníctvo kultúry číslom 2265/56-IV/1. Tlač: Polygrafické závody 02, Bratislava.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X,5 — MATHEMATICA, XIII, 1966)
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. X., FASC. V. MATHEMATICA XIII 1966

Generalisation of the correspondence of relative normal of the surface into space with the projective connection

M. HEJNÝ

1. Let π be a surface in the three-dimensional (straight) projective space $\mathbf{P}_3$ and let $R \in \pi$ be the regular point in which there are two different asymptotics. By $\tau(R)$ we denote the tangent plane to the π at the point R. By first relative normal of π we call an arbitrary line $\mathfrak{a}$, if only $R \in \mathfrak{a} \not\subset \tau(R)$; the straight line b for which is $R \notin b \subset \tau(R)$ we call the second relative normal of π at a point R. We say, that the first and the second relative normals are in normal correspondence if they are polar to the Lie's quadric of the surface π at a point R. In this paper we shall get one generalisation of the above normal correspondence for a space with projective connection. We shall use the metod introduced by A. Švec in [1].

2. Let $\mathscr{P}_3$ be a three-dimensional space with projective connection. In this space we consider a surface π with the asympcotic net u, v on it. Then it is possible to take a moving frame A_0, A_1, A_2, A_3 so, that (see for instance [2])

$$\begin{aligned}
dA_0 &= \omega_0^0 A_0 + duA_1 + dvA_2 \\
dA_1 &= \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \beta du A_2 + (1-h) dv A_3 \\
dA_2 &= \omega_2^0 A_0 + \gamma dv A_1 + \omega_2^2 A_2 + (1+h) du A_3 \\
dA_3 &= \omega_3^0 A_0 + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 \\
\omega_i^i &= \omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0; \quad \omega_i^j = a_i^j du + b_i^j dv \\
du \wedge dv &\neq 0; \quad \omega_0^1 = du, \ \omega_0^2 = dv, \ \omega_0^3 = 0; \quad (u, v) \in \Omega
\end{aligned} \tag{1}$$

The functions $\beta = \beta(u, v)$ and $\gamma = \gamma(u, v)$ are the relative invariants of the weights $(2; -1)$ and $(-1; 2)$ respectively. The function $h = h(u, v)$ is the invariant called torsion of the π. It is known, that equation $\beta = 0$ (resp. $\gamma = 0$) holds if and only if an asymptolic $dv = 0$ (resp. $du = 0$) be the geodetic. In the case $\beta \gamma \neq 0$ the equation $h = 1$ (resp. $h = -1$) holds if and only if an asymptotic $dv = 0$ (resp. $du = 0$) is developed in local space as a plane curve. We omit these singular cases and we shall consider

$$\beta\gamma(h^2 - 1) \neq 0. \tag{2}$$

Let us denote yet

$$a = a_0^0 - a_1^1 - a_2^2 + a_3^3\,; \quad b = b_0^0 - b_1^1 - b_2^2 + b_3^3 \tag{3}$$

3. By dualisation of the surface π we understand the following König's manifold (see [3]). Let $R \in \pi$ and let $\mathbf{P}_3(R)$ be the local space assigned to the point R. The space of all planes in $\mathbf{P}_3(R)$ we denote by $\mathbf{P}_3{}^*(R)$. We put still $\tau(R) = R^*$. Then it is $R^* \in \mathbf{P}_3(R)$. Now the dualisation π^* of π is a manifold $R^*(u, v) \equiv \pi^*$, $(u, v) \in \Omega$ and a local space assigned to the R^* is $\mathbf{P}_3{}^*(R) = \mathbf{P}_3(R^*)$. On the π^* a following frame will be taken:

$$\begin{aligned} E^0 &= [A_1, A_2, A_3] \qquad & E^1 &= -[A_0, A_2, A_3] \\ E^2 &= [A_0, A_1, A_3] \qquad & E^3 &= -[A_0, A_1, A_2]\,. \end{aligned} \tag{4}$$

From the equations (1) and (2) we obtain

$$dE^{\mathrm{i}} = -\omega_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}} E^{\mathrm{j}}\,, \qquad \mathrm{i}, \mathrm{j} = 0, 1, 2, 3$$

and in particular for $\mathrm{i} = 3$

$$dE = -\omega_3^3 E^3 - (1 - h)dvE^1 - (1 + h)duE^2. \tag{5}$$

Let $\mathfrak{p} \in \pi$ be a curve passing through the point A_0 and having the line $\mathbf{t} = [A_0, dA_0]$ as its tangent at this point. The dual curve $\mathfrak{p}^*$ assigned to the $\mathfrak{p}$ has in the E^3 the tangent $\mathbf{t}^* = [E^3, dE^3]$. This line can be considered as an element of the local space $\mathbf{P}_3(A_0)$. Using (5) it is easy to show that $\mathbf{t}^* = [A_0, (1 + h)duA_1 - (1 - h)dvA_2]$. The lines $\mathbf{t}$ and $\mathbf{t}^*$ are said to be conjugated. The asymptotics are self-conjugated. The curves of the surface, whose tangents at R are conjugated are called conjugated at the point R.

4. Let $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ be the curves upon a π. Their developments into the local space $\mathbf{P}_3(A_0)$ we shall denote by $\bar{\mathfrak{p}}$ and $\bar{\mathfrak{q}}$ respectively. About the curves $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ we shall consider that

(a) both pass through the point A_0,

(b) none of them tangent the asymptotic at A_0 and

(c) they are at the point A_0 conjugated.

The quadratic conic μ, whose order of contact with both curves $\bar{\mathfrak{p}}$ and $\bar{\mathfrak{q}}$ is three we shall call the main conic and its vertex the main point of the couple $\bar{\mathfrak{p}}$, $\bar{\mathfrak{q}}$ (or also $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$). It is known (see [4]) that to each fitted couple $\bar{\mathfrak{p}}$, $\bar{\mathfrak{q}}$ there exist exactly two main points M_1 and M_2. It is not necessery to discus the word „fitted“ because we are not concerned about non-fitted couples

Let $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ be described by the equations

$$\mathfrak{p}: \; du = p^1 dr; \quad dv = p^2 dr; \quad \omega^i_j = p^i_j dr$$
$$\mathfrak{q}: \; du = q^1 ds; \quad dv = q^2 ds; \quad \omega^i_j = q^i_j ds \tag{6}$$

and initial conditions (a). For the situation at the point A_0 from the (b) and (c) it follows

$$p^1 p^2 q^1 q^2 \neq 0; \quad q^1 = (h+1)p^1; \quad q^2 = (h-1)p^2. \tag{7}$$

Taylor's expansion of the $\mathfrak{p} \equiv P(r)$ is

$$P(r) = A_0 + r(A_0)_r + \frac{1}{2} r^2 (A_0)_{rr} + \frac{1}{6} r^3 (A_0)_{rrr} + \boxed{4}$$

where by $(A_0)_r$ or $(A_0)_{rr}$ is denoted the first or second derivative of variable point A_0 with respect to r at the fixed point A_0. There is some discrepancy in our symbolic; the point A_0 is on one hand taken as a moving and on the other as a fixed point of π. But we suppose that this shall not contribute to a misunderstanding. The symbol $\boxed{4}$ stands for the rest of the expansion starting from the term r^4. The same symbolic will be used too for the variable s. From (1) and (6) we obtain

$$(A_0)_r = p^0_0 A_0 + p^1 A_1 + p^2 A_2$$

$$\begin{aligned}(A_0)_{rr} = {} & (\cdot)A_0 + [p^1(p^0_0 + p^1_1) + p^1_r + (p^2)^2]A_1 + \\ & + [p^2(p^0_0 + p^2_2) + p^2_r + (p^1)^2]A_2 + 2p^1p^2A_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A_0)_{rrr} = {} & (\cdot)A_0 + (\cdot)A_1 + (\cdot)A_2 + \{p^1p^2(p^0_0 + p^3_3) + 3(p^1p^2)_r + \\ & + (p^1)^3\beta + (p^2)^3\gamma + h[p^1p^2(p^2_2 - p^1_1) + p^2_r p^1 - \\ & - p^1_r p^2 + (p^1)^3\beta - (p^2)^3\gamma]\}A_3.\end{aligned}$$

Substituting these expressions to the above expansion we obtain

$$\begin{aligned}P(r) = {} & (1 + rp^0_0 + \boxed{2})A_0 + \\ & + \left\{rp^1 + \frac{1}{2}r^2[p^1(p^0_0 + p^1_1) + p^1_r + (p^2)^2\gamma] + \boxed{3}\right\}A_1 + \\ & + \left\{rp^2 + \frac{1}{2}r^2[p^2(p^0_0 + p^2_2) + p^2_r + (p^1)^2\beta] + \boxed{3}\right\}A_2 + \\ & + \Big(r^2p^1p^2 + \frac{1}{6}r^3\{p^1p^2(p^0_0 + p^3_3) + 3(p^1p^2)_r + (p^1)^3\beta + (p^2)^3\gamma + \\ & + h[p^1p^2(p^2_2 - p^1_1) + p^2_r p^1 - p^1_r p^2 + (p^1)^3\beta - (p^2)^3\gamma]\} + \boxed{4}\Big)A_3.\end{aligned} \tag{8}$$

Similarly as in $(A_0)_r$, the symbol p^1_r denotes the derivative of p^1 taken at the point A_0.

It is unnecessary to write the similar extension for the curve $\mathfrak{q}$. This may be obtained by application of the scheme

$$\begin{array}{c} \updownarrow \end{array}\begin{array}{ccccccccccc} \mathfrak{p} & r & P(r) & p^i_j & p^i & \beta & \gamma & h & a & b & \boxed{n} \\ \mathfrak{q} & s & Q(s) & q^i_j & q^i & \beta & \gamma & h & a & b & \boxed{n} \end{array}\begin{array}{c} \updownarrow \end{array} \tag{9}$$

on the (8).

5. In the following we shall find the conic μ. We work in the local space $\mathbf{P}_3(A_0)$. As we had supposed the order of the analytic contact of $P(r)$ and $Q(s)$ with

$$\mu \equiv (X, X) = c_{ij}x^i x^j = 0; \quad c_{ij} = c_{ji}; \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \tag{10}$$

is equal to 3. This implicates the equations

$$(P(r), P(r)) = 0 + \boxed{4}, \quad (Q(s), Q(s)) = 0 + \boxed{4}.$$

Hence, after the substitution from (8) to (10) the coefficients of the expansion by r^0, r^1, r^2 and r^3 must vanish. The similar situation holds for the coefficients by s^0, s^1, s^2 and s^3.

There are the same coefficients c_{00} by r^0 and s^0. Hence

$$c_{00} = 0. \tag{11}$$

Since the coefficients by r and s must be zero, it is

$$\begin{aligned} c_{01}p^1 + c_{02}p^2 &= 0 \\ c_{01}q^1 + c_{02}q^2 &= 0 \end{aligned}$$

and in consequence of (7) and (2)

$$c_{01} = c_{02} = 0. \tag{12}$$

If we continue in this way with the coefficients by r^2 and s^2 we obtain

$$\begin{aligned} c_{11}(p^1)^2 + c_{22}(p^2)^2 + 2(c_{03} + c_{12})p^1p^2 &= 0 \\ c_{11}(q^1)^2 + c_{22}(q^2)^2 + 2(c_{03} + c_{12})q^1q^2 &= 0 \end{aligned}$$

For a suitable choice of homogeneous factor we are able to put

$$\begin{aligned} c_{11} &= (p^2)^2(h - 1) = (q^2)^2(h - 1)^{-1} \\ c_{22} &= (p^1)^2(h + 1) = (q^1)^2(h + 1)^{-1} \end{aligned} \tag{13}$$

and

$$c_{03} + c_{12} = -hp^1p^2 = -hq^1q^2(h^2 - 1)^{-1}. \tag{14}$$

In consequence of singularity of a conic μ we have

$$\det |c_{ij}| = 0.$$

Using (11), (12) and (13) we obtain

$$c_{12}^2 = c_{11}c_{22}$$

and

$$(c_{12})_{1,2} = \pm\, p^1p^2(h^2-1)^{\frac{1}{2}} = \pm\, q^1q^2(h^2-1)^{-\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Now we need to give two remarks. Firstly we shall make an agreement that the index by c_{12} will be 1 or 2 according to the use of the upper or lower sign. Secondly, we shall not consider the expression

$$(h^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

as two-valued; we take an arbitrary, but from now on fixed branch.

From (14) it follows

$$(c_{03})_{1,2} = -Hp^1p^2 = -Hq^1q^2(h^2-1)^{-1}$$

where

$$H = h \pm (h^2-1)^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Remark. We should correctly write $H_{1,2}$, but this inaccuracy will not contribute to a misunderstanding.

Let us go on with the coefficients by r^3 and s^3. There are too complicated and their adjustment needs som patience and time. In order to simplify we shall designate

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{p}) &= \beta(p^1)^3 + \gamma(p^2)^3; \quad S(\mathfrak{p}) = \beta(p^1)^3 - \gamma(p^2)^3 \\ G(\mathfrak{p}) &= p^1p^2p - D(\mathfrak{p}); \quad p = ap^1 + bp^2 \\ F(\mathfrak{p}) &= p^1p^2(p_2^2 - p_1^1) + p^1p_r^2 - p^2p_r^1 + S(\mathfrak{p}) \end{aligned} \tag{17}$$

and similar

$$D(\mathfrak{q}),\ S(\mathfrak{q}),\ G(\mathfrak{q}),\ F(\mathfrak{q}) \text{ and } q$$

using the scheme (9). Now we can more simply write the conditions of the vanishing of the coefficients by r^3:

$$\begin{aligned} &c_{11}p^1[p^1(p_0^0 + p_1^1) + \gamma(p^2)^2 + p_r^1] + c_{22}p^2[p^2(p_0^0 + p_2^2) + \\ &+ \beta(p^1)^2 + p_r^2] + c_{12}[p^1p^2(p_0^0 - p_3^3) + (p^1p^2)_r + D(\mathfrak{p})] + \\ &+ c_{03}\left[2p_0^0p^1p^2 + (p^1p^2)_r + \frac{1}{3}p^1p^2(p_0^0 + p_3^3) + \frac{1}{3}D(\mathfrak{p}) + \frac{1}{3}hF(\mathfrak{p})\right] + \\ &+ 2c_{13}(p^1)^2p^2 + 2c_{23}p^1(p^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

An analogical equation holds for $\mathfrak{q}$ too; this one we obtain using the scheme (9). These two equations may be in accordance to (13), (15), (16) and (17) reduced to

$$c_{13}p^1 + c_{23}p^2 = -\frac{1}{2}F(\mathfrak{p})\left(1 - \frac{1}{3}hH\right) + \frac{1}{3}G(\mathfrak{p})H$$

$$(h^2 - 1)(c_{13}q^1 + c_{23}q^2) = \frac{1}{2}F(\mathfrak{q})\left(1 + \frac{1}{3}hH\right) + \frac{1}{3}G(\mathfrak{q})H. \tag{18}$$

A computation of the c_{13} and c_{23} is not necessary.

6. In this section we shall find the coordinates m^i (i $=$ 0,1,2,3) of the main point $M = m^i A_i$. From the two-valued of some coefficients (c_{03}, c_{12}, c_{13}, c_{23}) it follows, that there are two main points M_1 and M_2. According to our symbolic we shall write simply M instead of $M_{1,2}$. To compute the coordinates m^i we see, in consequence of (2), (7) and inequalities $H \neq 0$, that the first, third and the fourth rows of the matrix

$$\|c_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -p^1p^2H \\ 0 & (p^2)^2(h-1) & \pm p^1p^2(h^2-1)^{\frac{1}{2}} & c_{13} \\ 0 & \pm p^1p^2(h^2-1)^{\frac{1}{2}} & (p^1)^2(h+1) & c_{23} \\ -p^1p^2H & c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{matrix} \right\|$$

are linearly independent. Also, we are able to put

$$m^i = C_{2i}\lambda, \quad i = 0,1,2,3,$$

where C_{2i} denotes the cofactor of the element c_{2i} in the matrix $\|c_{ij}\|$. Taking

$$\lambda = [(p^1)^2p^2H(h+1)^{\frac{1}{2}}]^{-1}$$

we have

$$\begin{aligned} m_0 &= c_{13}p^1(h+1)^{\frac{1}{2}} \mp c_{23}p^2(h-1)^{\frac{1}{2}} \\ m^1 &= (p^1)^2H(h+1)^{\frac{1}{2}} = (q^1)^2q^2H(h^2-1)^{-1}(h+1)^{-\frac{1}{2}} \\ m^2 &= \mp p^1(p^2)^2H(h-1)^{\frac{1}{2}} = \mp q^1(q^2)^2H(h^2-1)^{-1}(h-1)^{-\frac{1}{2}} \\ m^3 &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

The roots of $(h-1)^{\frac{1}{2}}$ and $(h+1)^{\frac{1}{2}}$ are fixed in such a way, that their product must be equal to the value $(h^2-1)^{\frac{1}{2}}$ which was in the 5. section fixed. The coefficients c_{13} and c_{23} may be eliminated from m^0. It is possible to replace the right-hand member in the first of the equations (19) by the linear combination of the left-hand members of the equations (18). In fact, denoting

$$\varphi = \mp \frac{1}{2}(h^2-1)^{\frac{1}{2}}[(h+1)^{\frac{1}{2}} \pm (h-1)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\psi = \frac{1}{2}(h^2 - 1)^{-1}[(h+1)^{\frac{1}{2}} \pm (h-1)^{\frac{1}{2}}]$$

we obtain

$$c_{13}p^1(h+1)^{\frac{1}{2}} \mp c_{23}p^2(h-1)^{\frac{1}{2}} = \varphi(c_{13}p^1 + c_{23}p^2) + \\ + \psi(c_{13}q^1 + c_{23}q^2)(h^2 - 1).$$

Therefore the coordinate m^0 is the same combination of the right-hand members of the equations (18). Seeing that we obtain

$$m^0 = \varphi\left[-\frac{1}{2}F(\mathfrak{p})(1 - \frac{1}{3}Hh) + \frac{1}{3}HG(\mathfrak{p})\right] + \\ + \psi\left[\frac{1}{2}F(\mathfrak{q})\left(1 + \frac{1}{3}Hh\right) + \frac{1}{3}HG(\mathfrak{q})\right]. \tag{20}$$

The only geometrical consequence of the equations (19) is $M \in \tau(A_0)$. But this result is well-known; see [4]. In order to establish a new geometrical result, we shall specialised curves $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$.

7. About the curves $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ we considered the conditions (a), (b) and (c) from section 4. Now, in addition, we shall consider

(d) the osculating planes of the curves $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ have a common fixed straight line $\mathfrak{a} = [A_0, W]$, where

$$W = fA_1 + gA_2 + A_3.$$

This condition may be written in the form

$$[A_0, dP, d^2P, W] = 0$$
$$[A_0, dQ, d^2Q, W] = 0.$$

Applying (8) and (8) with (9) to this we obtain

$$F(\mathfrak{p}) = 2(p^1g - p^2f)p^1p^2$$
$$F(\mathfrak{q}) = 2(q^1g - q^2f)q^1q^2. \tag{21}$$

Let us consider the set of all couples $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ which satisfy the conditions (a) — (d). Let us denote the set of all main points M_i by $\mathfrak{m}_i$ (i = 1,2). We shall see, that $\mathfrak{m}_1$ and $\mathfrak{m}_2$ are cubical curves lying upon the tangent plane $\tau(A_0)$. In order to prove this result, we eliminate the quantities p^1, p^2, q^1, q^2, p and q from the equations (19). From the second and the third of equations (19) we have

$$(p^1)^2p^2 = m^1H^{-1}(h+1)^{-\frac{1}{2}}; \quad (q^1)^2q^2 = m^1H^{-1}(h^2-1)(h+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$p^1(p^2)^2 = \mp m^2H^{-1}(h-1)^{-\frac{1}{2}}; \quad q^1(q^2)^2 = \mp m^2H^{-1}(h^2-1)(h-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}(p^1)^3 &= \mp (m^1)^2(m^2)H^{-1}(h+1)^{-1}(h-1)^{\frac{1}{2}} \\ (q^1)^3 &= \mp (m^1)^2(m^2)H^{-1}(h+1)^{-1}(h-1)^{-\frac{1}{2}} \\ (p^2)^3 &= \quad (m^2)^2(m^1)H^{-1}(h+1)^{\frac{1}{2}}(h-1)^{-1} \\ (q^2)^3 &= \quad (m^2)^2(m^1)H^{-1}(h+1)^{-\frac{1}{2}}(h-1).\end{aligned} \tag{22}$$

Substituting (17), (21) and then (22) to the equation (20) we obtain the equations of m_1 and m_2:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_{1,2} &\equiv [\beta(x^1)^3 + \gamma(x^2)^3]\,[1 \pm 2h(h^2-1)^{-\frac{1}{2}}] + \\ &+ x^1x^2[x^1(3g+hg+a) + x^2(3f-hf+b) - 3x^0] = 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Therefore both curves $\mathfrak{m}_i$ are cubics. A necessary and sufficient condition that $\mathfrak{m}_1 \equiv \mathfrak{m}_2$ be a torsion h of surface π at the point A_0 will be equal to zero.

We shall discuss the character of these cubics. It is known, that the cubic with the equation (23) has one knot-point and three inflex points on one straight line. A knot-point is common for $\mathfrak{m}_1$ and $\mathfrak{m}_2$; it is A_0. At this point $\mathfrak{m}_1$ and $\mathfrak{m}_2$ have moreover common tangents; they are asymptotic-tangents of the surface π at the point A_0. We shall find three inflex points as intersections of $\mathfrak{m}_i$ and its Hesian

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_i &\equiv 3[\beta(x^1)^3 + \gamma(x^2)^3]\,[1 \pm 2h(h^2-1)^{-1}] - \\ &- x^1x^2[x^1(3g+hg+a) + x^2(3f-hf+b) - 3x^0] = 0.\end{aligned} \tag{24}$$

Disregarding the point A_0 as a solution of the equations (23), (24), this system of equations may be reduced to

$$\begin{aligned}x^1(3g+hg+a) + x^2(3f-hf+b) - 3x^0 &= 0 \\ \beta(x^1)^3 + \gamma(x^2)^3 &= 0.\end{aligned} \tag{25}$$

The first of the equations (25) is evidently an equation of the straight line with three inflex points on it. This one will be denoted by **b** — it is the same line for $\mathfrak{m}_1$ as for $\mathfrak{m}_2$. From the second of equations (25) it follows, that the inflex points J_1, J_2 and J_3 are the same for $\mathfrak{m}_1$ and $\mathfrak{m}_2$ and moreover that the straight lines $[A_0, J_i]$ (i = 1,2,3) don't depend on the choice of point W. Therefore, these straight lines have an invariant character — they are Darboux-tangents of π at A_0.

8. In section 7. we defined two straight lines **a** and **b** and we described a construction of **b** (considering **a**). From the algebraical expression of **a** and **b** follows, that there is a one-to-one correspondence between **a** and **b**. Lines **a** and **b** are called the first and the second relative normal of π at A_0 respectively. This correspondence we shall call a normal correspondence of π at A_0.

It is a question now, whether in a local space $\mathbf{P}_3(A_0)$ there exists a quadratic surface, with respect to which, the normal correspondence will be a polarity. To work out this question let

$$\sigma \equiv w_{ij}x^i x^j = 0; \quad i,j = 0,1,2,3; \quad w_{ij} = w_{ji}$$

be a possible searched for quadratic surface. A polar plane of A_0 with respect to σ pass throught the straight line **b** (for arbitrary f, g). Hence

$$w_{00} = w_{01} = w_{02} = 0.$$

Similarly a polar plan of the point W

$$w_{i1}x^i f + w_{i2}x^i g + w_{i3}x^i = 0$$

must be incident with the line **b** too. Therefore

$$\begin{aligned} w_{03} &= -3\lambda \\ w_{11}f + w_{12}g + w_{13} &= (3g + hg + a)\lambda \\ w_{12}f + w_{22}g + w_{23} &= (3f - hf + b)\lambda, \end{aligned}$$

for an arbitrary f and g. From this, it follows immediately

$$w_{11} = w_{22} = 0$$

and the above system has a non-trivial solution if and only if

$$h = 0. \tag{26}$$

In such a case, each surface of a one-parametric set of quadratic surfaces

$$\Sigma \equiv 3x^1x^2 - 3x^0x^3 + ax^1x^3 + bx^2x^3 + C(x^3)^2 = 0 \tag{27}$$

has the looked for property.

Theorema. The normal correspondence of π at a point A_0 seems a polarity with respect to a quadratic surface if and only if the torsion h in this point vanishes. In this case there is a bundle (27) of quadratic surfaces each of which has the above property.

9. In the end we shall apply our results upon a straight space. It follows, that the integrability conditions

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i$$

will be in force and equation (26) holds identicaly. Using this we have

$$\begin{aligned} 0 &= d[du] = d\omega_0^1 = (\omega_0^0 - \omega_1^1) \wedge \omega_0^1 \\ 0 &= d[dv] = d\omega_0^2 = (\omega_0^0 - \omega_2^2) \wedge \omega_0^2 \\ 0 &= d[du] = d\omega_2^3 = (\omega_2^2 - \omega_3^3) \wedge \omega_0^1 \\ 0 &= d[dv] = d\omega_1^3 = (\omega_1^1 - \omega_3^3) \wedge \omega_0^2. \end{aligned}$$

In consequence of this and Cartan's lemma we obtain

$$\omega_0^0 - \omega_1^1 = A\omega_0^1\,; \quad \omega_2^2 - \omega_3^3 = C\omega_0^1$$
$$\omega_0^0 - \omega_2^2 = B\omega_0^2\,; \quad \omega_1^1 - \omega_3^3 = D\omega_0^2\,.$$

Substracting two and two underlying equations we obtain

$$A\omega_0^1 - B\omega_0^2 = \omega_2^2 - \omega_1^1 = C\omega_0^1 - D\omega_0^2\,.$$

But in consequence of the independence of the forms ω_0^1, ω_0^2 it is

$$A = C; \quad B = D$$

and hence

$$\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0.$$

Seeing (1) and (3) the last equations imply

$$a = b = 0. \tag{28}$$

Hence, in straight space there is $\mathfrak{m}_1 \equiv \mathfrak{m}_2$ and bundle (27) will (according to (28)) be Darboux-bundle

$$\mathbf{\Sigma} \equiv x^1x^2 - x^0x^3 + C(x^3)^2 = 0.$$

The normal correspondence will be identical with the polarity with respect to each of the Darboux quadratic surfaces. Therefore our construction of the normal correspondence can be looked at as a generalisation (one of various possible) of a polarity with respect to a Darboux quadrics.

References

[1] A. Švec: K výkladu teorie prostorů s konexí. (Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86, 1961, str. 425—432)

[2] Sur la geométrie différentielle d'une surface plongée dans un espace a trois dimensions a connexion projective. (Чехословацкий математический журнал т. 11, (83), 1961, str. 386—397)

[3] L'élément linéaire projectif d'une surface plongée dans l'espace a connexion projective. (Чехословацкий математический журнал т. 8, (83), 1958, str. 285—291)

[4] A. Urban: Zvýšení styku křivek promítáním. (Matematicko-fyzikálny časopis SAV, VII 4 — 1957, str. 204—234)
Adresa autora: Žilina, Hliny, blok 30.
Do redakcie došlo: 30. 9. 1964.

Zovšeobecnenie korešpondencie relatívnych normál plochy do priestoru s projektívnou konexiou

M. HEJNÝ

Súhrn

Nech π je plocha v trojdimenznom (rovnom) projektívnom priestore, $R \in \pi$ bod, v ktorom existujú 2 asymptotiky a $\tau(R)$ dotyková rovina plochy π v bode R. Priamky $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, pre ktoré $R \in \mathfrak{a} \not\subset \tau(R)$ a $R \notin \mathfrak{b} \subset \tau(R)$ nazveme prvá a druhá relatívna normála plochy π v bode R po rade. O priamkach $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ hovoríme, že sú v normálovej korešpondencii, ak sú polárne združené voči Lieovej kvadrike. Danú korešpondenciu zovšeobecňujeme na priestor $\mathscr{P}_3$ s projektívnou konexiou. Pracujeme metódou A. Šveca — pozri [1].

Buď $A_0 \in \pi \subset \mathscr{P}_3$. Nech $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sú dve krivky plochy π a $\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}$ ich rozvinutia do lokálneho priestoru $\mathbf{P}_3(A_0)$ týchto vlastností

(a) krivky $\bar{\mathfrak{p}}$, $\bar{\mathfrak{q}}$ sa pretínajú v bode A_0,

(b) žiadna z nich sa v bode A_0 nedotýka asymptotiky,

(c) ich dotyčnice v bode A_0 sú konjugované.

V lokálnom priestore $\mathbf{P}_3(A_0)$ hľadáme kvadratickú kužeľovú plochu μ, ktorá má s oboma krivkami styk tretieho rádu. Takú plochu budeme nazývať hlavnou (kužeľovou plochou) a jej vrchol hlavným bodom dvojice $\bar{\mathfrak{p}}$, $\bar{\mathfrak{q}}$ (resp. $\bar{\mathfrak{p}}$, $\bar{\mathfrak{q}}$). Je známe — pozri [4] — že ku každej dvojici kriviek uvedených vlastností existujú práve dva hlavné body M_1 a M_2 ležiace v rovine $\tau(A_0)$.

Fixujme prvú relatívnu normálu $\mathfrak{a}$ plochy π v bode A_0 a na dvojicu $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ položme doplňujúcu podmienku

(d) oskulačné roviny kriviek $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ v bode A_0 sa pretínajú v priamke $\mathfrak{a}$. Ak uvažujeme všetky dvojice kriviek $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ vlastností (a) — (d), potom odpovedajúce hlavné body M_1 a M_2 prebehnú v dotykovej rovine $\tau(A_0)$ isté množiny $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$. V práci je dokázané, že uvedené množiny sú (až snáď na výnimočné body) kubické krivky popísané rovnicami (23). Každá z kubík $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ má jediný uzlový bod a tri inflexné body ležiace na priamke. Všetky tieto body sú pre obe krivky spoločné. Uzlovým bodom je bod A_0 a dotyčnice v ňom ku $\mathfrak{m}_1$ aj $\mathfrak{m}_2$ sú asymptotiky plochy. Inflexné body J_i i $= 1,2,3$ sú dané ako spoločné riešenie rovníc (25). Smery A_0J_i sú nezávislé od voľby priamky $\mathfrak{a}$ — sú to Darbouxove smery plochy π v bode A_0. Označme priamku, na ktorej ležia body J_i symbolom $\mathfrak{b}$. Korešpondencia

$$\mathfrak{a} \leftrightarrow \mathfrak{b}$$

je vzájomne jednoznačná a v prípade rovného priestoru je totožná s polaritou voči ktorejkoľvek regulárnej Darbouxovej kvadrike plochy π v bode A_0. Môžeme teda uvedenú korešpondenciu považovať za zovšeobecnenie korešpondencie relatívnych normál.

Konečne je ukázané, že nami konštruovaná korešpondencia je polaritou voči akejsi kvadratickej ploche σ práve v tom prípade, ak torzia h v bode A_0 je nulová. Potom existuje celý zväzok (27) plôch požadovanej vlastnosti.

Обобщение корреспонденции относительных нормалей поверхности в пространство с проективной сбязностю

М. ГЕЙНЫ

Выводы

Пусть $\boldsymbol{\pi}$ поверхность трехмерного (прямого) проективного пространства, $R \in \boldsymbol{\pi}$ точка с двумя асимптотическими линиями и $\boldsymbol{\tau}(R)$ касательная плоскость поверхности $\boldsymbol{\pi}$ в точке R. Прямые $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ выполняющие условия $R \in \mathfrak{a} \not\subset \boldsymbol{\tau}(R)$ и $R \notin \mathfrak{b} \subset \boldsymbol{\tau}(R)$ будем называть первой и второй относительной нормалей поверхности $\boldsymbol{\pi}$ в точке R. Говорим, что прямые $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ находятся в нормаловой корреспонденции если они полярно сопряжены относительно квадрики Ли. Эту корреспонденцию обобщим на случай пространства $\mathscr{P}_3$ с проективной связностью. Воспользуемся методом А. Швеца — [1].

Пусть $A_0 \in \boldsymbol{\pi} \subset \mathscr{P}_3$. Пусть $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ пара кривых поверхности $\boldsymbol{\pi}$ и $\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}$ их развитие в локальное пространство $\mathbf{P}_3(A_0)$ следующих свойств

(*а*) кривые $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ пересекаются в точке A_0,

(*б*) ни одна из кривых не касается асимптотической линии,

(с) их касательные сопряжены в точке A_0.

В локальном пространстве $\mathbf{P}_3(A_0)$ ищем квадратический конус $\boldsymbol{\mu}$, соприкосновение которого к $\bar{\mathfrak{p}}$ и $\bar{\mathfrak{q}}$ является третьей степени. Поверхность $\boldsymbol{\mu}$ называем главной и ее вершину главной точкой пары $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ (или $\bar{\mathfrak{p}}$, $\bar{\mathfrak{q}}$). Известно (см. [4]), что для любой упомянутой пары существуют точно две главные точки M_1 и M_2, находящиеся в плоскости $\boldsymbol{\tau}(A_0)$.

Фиксируем первую относительную нормаль $\mathfrak{a}$ поверхности $\boldsymbol{\pi}$ в точке A_0 и на пару $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ наложим следующее дополнительное требование,

d) соприкасающиеся плоскости кривых $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ в точке A_0 пересекаются в прямой $\mathfrak{a}$. Если рассмотреть множество всех пар кривых $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ имеющих свойства (a) — (d) то отвечающие им главные точки M_1, M_2 пробегнут какие-то множества $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ касательной плоскости $\boldsymbol{\tau}(A_0)$.

В статье показано что эти множества (за исключением может быть каких-то сингулярных точек) являются кубическими кривыми (23). У любой из этих кривых одна узловая точка и три точек перегиба лежащих на одной прямой. Все эти точки являются общими для $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$. Узловой является точка A_0 и касательные кривых $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ в этой точке являются асимптотиками поверхности. Точки перегиба J_i i $= 1,2,3$ находим как общее решение уравнений (25). Прямые A_0J_i оказываются независимы от выбора прямой $\mathfrak{a}$ — это прямые Дарбу поверхности $\boldsymbol{\pi}$ в точке A_0. Прямую содержащую точки перегиба J_i обозначим $\mathfrak{b}$. Корреспонденция

$$\mathfrak{a} \leftrightarrow \mathfrak{b}$$

взаимно однозначна и в случае прямого пространства она станет полярностью относительно любой регулярной поверхности Дарбу присоединенной поверхности $\boldsymbol{\pi}$ в точке A_0. Из этого следует, что построенную корреспонденцию можно разсматривать как обобщение корреспонденции относительных нормалей.

Конечно показано, что постоенная корреспонденция является полярностью относительно какой-то квадратической поверхности в том и только в том случае, когда кривизна h в точке A_0 окажется нулевой. В том случае существует пучок поверхностей (27) упомянутых свойств.

ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X,5 — MATHEMATICA, XIII, 1966)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X., FASC. V. MATHEMATICA XIII 1966

Bemerkung zur Konstruktion des Masses aus dem Inhalt

B. RIEČAN

In seiner Arbeit [2] verallgemeinerte T. Neubrunn die bekante Metode der Konstruktion des Masses aus dem Inhalt, welcher auf allen kompakten Teilmengen des lokal kompakten Hausdorffschen topologischen Raumes gegeben ist. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit gebrauchte in der Arbeit [3] eine ähnliche Metode zur Konstruktion des Masses aus der auf Kugeln definierten Funktion. Das Ziel der vorliegender „Bemerkung" ist zu zeigen, dass die Metode von Tibor Neubrunn derart modifitziert werden kann, dass sie auch zur Lösung des erwähnten Problems aus der Arbeit [3] verwendet werden kann. Diese Modifikation ist im § 1 angeführt. Im § 2 leiten wir kurz einige Ergebnisse der Arbeit [2]ab. Im § 3 verwenden wir unsere Ergebnisse auf die Systeme der Kugeln, wodurch auch in dieser Richtung einige neue Ergebnisse erzielt werden.

1.

A,B seien Systeme der Teilmengen des abstrakten Raumes X. Im weiteren werden wir nach und nach die folgenden Eigenschaften von (A,B) voraussetzen:

1.1.1. $\emptyset \in \mathbf{A}$, $\emptyset \in \mathbf{B}$.

.2. $E_1 \in \mathbf{A}$, $E_2 \in \mathbf{A}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathbf{A}$

.3. $F_i \in \mathbf{B}$ $(i = 1,2,\ldots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathbf{B}$.

.4. $E \in \mathbf{A}$, $F \in \mathbf{B} \Rightarrow F \cap E' \in \mathbf{B}$

Weiter sei λ eine endliche reale auf A definierte Funktion mit diesen Eigenschaften:

1.1.5. Für $E \in \mathbf{A}$ ist $\lambda(E) \geqq 0$.

.6. $E_1 \in \mathbf{A}$, $E_2 \in \mathbf{A}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow \lambda(E_1 \cup E_2) \geqq \lambda(E_1) + \lambda(E_2)$.

.7. $E_1 \in \mathbf{A}$, $E_2 \in \mathbf{A}$, $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \lambda(E_1) \leqq \lambda(E_2)$.

.8. $E \in \mathbf{A}$, $F_i \in \mathbf{B}$ $(i = 1,2,\ldots)$, $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists E_i \in \mathbf{A}$:

$E_i \subset F_i$, $\lambda(E) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$.

1.2. **Lemma,** $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ *und die Funktion* λ *sollen die Bedingungen* 1.1.1. 1.1.5. 1.1.6. *und die folgenden Bedingungen erfüllen:*

1.1.9. $F_1, F_2 \in \mathbf{B} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathbf{B}$

.10. $\forall E \in A$, $\forall F_i \in B$ $(i = 1,2,\ldots.)$, $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\ \exists N: E \subset \bigcup_{i=1}^{N} F_i$

.11. $E \in \mathbf{A}$, $F_1, F_2 \in \mathbf{B}$, $E \subset F_1 \cup F_2 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall E_1, E_2 \in \mathbf{A}$:
$E_1 \subset F_1$, $E_2 \subset F_2$, $\lambda(E) - \varepsilon < \lambda(E_1) + \lambda(E_2)$.

Dann erfüllt λ *die Bedingung* 1.1.8.

Beweis. Aus den Bedingungen 1.1.9. und 1.1.11. kann durch Induktion diese Behauptung leicht bewiesen werden: Wen $E \in \mathbf{A}$, $F_i \in \mathbf{B}$ $(i = 1,2,\ldots N)$ $E \subset \bigcup_{i=1}^{N} F_i$, dann existieren zu einen beliebigen $\varepsilon > 0$ die Mengen $G_i \subset F_i$, $G_i \in \mathbf{A}$ $(i = 1,2,\ldots. N)$ derart, dass

$$\lambda(E) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{N} \lambda(G_i) . \tag{1}$$

Aus 1.1.5. und 1.1.6. folgt, dass $\lambda(0) = O$.

Die Voraussetzungen der Bedingung 1.1.8. seien erfüllt, $\varepsilon > O$ sei eine beliebige Zahl. Wählen wir N nach 1.1.10. Setzen wir $E_i = G_i$, für $i = 1,2,\ldots., N$, $E_i = \emptyset$ für $i > N$. Ersichtlich ist $E_i \in \mathbf{A}$, $E_i \subset F_i$ $(i = 1,2,\ldots.)$. Nach (1) ist

$$\lambda(E) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{N} \lambda(G_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) .$$

1.3. Die Konstruktion des Masses μ. Für $F \in \mathbf{B}$ setzen wir

$$\bar{\lambda}(F) = \sup \{ \lambda(E) : F \supset E \in \mathbf{A} \} .$$

Für ein beliebiges $G \subset X$ setzen wir

$$\mu^*(G) = \inf \{ \bar{\lambda}(F) : G \subset F \in \mathbf{B} \} .$$

1.4. **Lemma.** (**A**, **B**) *und* λ *sollen die Bedingung* 1.1.11. *erfüllen. Dann ist* $\bar{\lambda}$ *eine subaditive Funktion auf* **B**. *Wenn darüber hinaus auch die Bedingung* 1.1.9. *erfüllt ist, dann ist* $\bar{\lambda}$ *endlich subaditiv. Wenn auch* 1.1.2. *und* 1.1.6. (1.1.2., 1.1.6. *und* 1.1.9.) *gilt dann ist* $\bar{\lambda}$ *aditiv (resp. endlich aditiv).*

Beweis. Es sei $F_1, F_2 \in \mathbf{B}$. Nach der Definition existiert zu dem beliebigen $\varepsilon > 0$ die Menge $E \in \mathbf{A}$, $E \subset F_1 \cup F_2$ derart, dass

$$\lambda(F_1 \cup F_2) - \varepsilon < \lambda(E). \tag{2}$$

Aus 1.1.11. folgt die Existenz solcher Mengen E_1, $E_2 \in \mathbf{A}$, dass $E_i \subset F_i$ (i = 1,2) und

$$\begin{aligned} \lambda(E) - \varepsilon < \lambda(E_1) + \lambda(E_2) \leqq \\ \leqq \bar{\lambda}(F_1) + \bar{\lambda}(F_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\bar{\lambda}(F_1 \cup F_2) < \bar{\lambda}(F_1) + \bar{\lambda}(F_2) + 2\varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und daraus die Subadivität $\bar{\lambda}$.

Jetzt sei F_1, $F_2 \in \mathbf{B}$ $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ $F_1 \cup F_2 \in \mathbf{B}$. Aus der Definition folgt die Existenz solcher Mengen $E_1, E_2 \in \mathbf{A}$, $E_1 \subset F_1$, $E_2 \subset F_2$, dass $\bar{\lambda}(F_i) - \varepsilon < \lambda(E_i)$ $(i = 1{,}2)$ wo $\varepsilon > 0$ eine beliebige Zahl ist. Daraus und aus 1.1.2 resp. 1.1.6. folgt

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(F_1) + \bar{\lambda}(F_2) - 2\varepsilon < \lambda(E_1) + \lambda(E_2) \leqq \\ \leqq \lambda(E_1 \cup E_2) \leqq \bar{\lambda}(F_1 \cup F_2). \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichkeit für jedes $\varepsilon > 0$, gilt, gilt auch die Ungleichkeit $\bar{\lambda}(F_1) + \bar{\lambda}(F_2) \leqq \bar{\lambda}(F_1 \cup F_2)$. Daraus und aus der Subaddivität folgt die Addivität $\bar{\lambda}$. Aus der Addivität (Subaddivität) und aus 1.1.9. folgt die endlich Addivität (endliche Subaddivität) $\bar{\lambda}$.

1.5. **Lemma.** (**A**,**B**) *und* λ *sollen die Bedingungen* 1.1.1.—1.1.2., 1.1.5.—1.1.8. *erfüllen. Dann ist* $\bar{\lambda}$ *nicht negativ, monoton, in einer leeren Menge gleich* 0 *und eine* σ — *subadditive Mengenfunktion. Wenn darüber hinaus* 1.1.9. *gilt (speziel wenn* 1.1.3. *gilt) dann ist* $\bar{\lambda}$ σ*-additiv.*

Beweis. Die ersten drei Behauptungen sind selbstverständlich. Es sei $F_i \in \mathbf{B}$ $((i = 1, 2, \ldots.), \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathbf{B}$ Zu einen beliebigen $\varepsilon > 0$ existiert die Menge $E \in \mathbf{A}$, $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ derart, dass

$$\lambda(E) + \varepsilon > \bar{\lambda}(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i). \tag{4}$$

Nach 1.1.8 existiert die Menge $E_i \in \mathbf{A}$ $E_i \subset F_i$ derart, so dass

$$\lambda(E) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i). \tag{5}$$

Weil $E_i \subset F_i$ ($i = 1,2,\ldots.$), aus (4) und (5) der Definition $\bar{\lambda}$ folgt

$$\bar{\lambda}(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) - 2\,\varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(F_i)\,,$$

und daraus folgt unmittelbar die Subaddivität.

Es gelte endlich 1.1.9. und es sei $F_i \in \mathbf{B}$ (i = 1,2,....), $F_i \cap F_j = \emptyset (i \neq j)$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathbf{B}$. Aus dem Lemma 1.4 und aus der Monotonie von $\bar{\lambda}$ folgt die Ungleichheit

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}(F_i) = \bar{\lambda}(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) \leqq \bar{\lambda}(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$$

und daraus

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(F_i) \leqq \bar{\lambda}(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i).$$

Die entgegengesetzte Ungleichheit folgt aus der σ-Subaddivität von $\bar{\lambda}$.

1.6. **Satz.** $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *und* λ *erfüllen die Voraussetzungen* 1.1.1 — 1.1.3, 1.1.5 — 1.1.8. *Dann ist* μ^* *ein äusseres Mass und für* $F \in \mathbf{B}$ *gilt* $\mu^*(F) = \bar{\lambda}(F)$.

Beweis. Es genügt den Beweis des Satzes 4 aus der Arbeit [2] (Seite 307) zu wiederholen, in welcher nur die im Lemma 1.5 bewiesenen Eigenschaften von $\bar{\lambda}$ vorausgesetzt werden und die Eigenschaft 1.1.3 des Systems $\mathbf{B}$.

1.7. **Satz.** $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *und* λ *sollen die Voraussetzungen* 1.1.1 — 1.1.8, *erfüllen. Dann sind alle Mengen* $E \in \mathbf{A}$ μ^**-messbar.*

Beweis. Es genügt den Beweis des Satzes 5 aus der Arbeit [2] (Seite 308) unbedeutend zu modifizieren. Es sei $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$ beliebige Mengen. Es sei D_1, $D_2 \in \mathbf{A}$ $D_1 \subset B \cap A'$ $D_2 \subset B \cap D_1'$. Ersichtlich ist $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Nach 1.1.6 ist

$$\mu^*(B) = \bar{\lambda}(B) = \lambda(D_1 \cup D_2) \geqq \lambda(D_1) + \lambda(D_2)\,.$$

Weiter kann man den Beweis des Satzes 5 ([2], Seite 308,12. Reihe von unten) wiederholen.

1.8. **Satz.** λ *habe die Eigenschaften* 1.1.7 *und diese Eigenschaft*:

$$\lambda(E) = \inf\,\{\lambda(G) : G \in \mathbf{A},\ \exists\, F \in \mathbf{B},\ E \subset F \subset G\}\,.$$

Dann $\mu^*(E) = \lambda(E)$ *für* $E \in \mathbf{A}$.

Beweis. Es sei $E \in \mathbf{A}$, $E \subset F \in \mathbf{B}$. Ersichtlich $\lambda(E) \leqq \bar{\lambda}(F)$. Also ist auch

$\lambda(E) \leqq \inf \{\bar{\lambda}(F) : E \subset F \in \mathbf{B}\} = \mu^*(E)$. Beweisen wir die entgegengesetzte Ungleichheit, $\varepsilon > 0$ sei eine beliebige Zahl. Ersichtlich existieren $G \in \mathbf{A}$, $F \in \mathbf{B}$ derart, dass $E \subset F \subset G$ und

$$\lambda(E) + \varepsilon > \lambda(G). \tag{6}$$

Es sei $H \in \mathbf{A}$, $H \subset F$. Weil $F \subset G$ und also $H \subset G$, gilt nach 1.1.7 $\lambda(H) \leqq \lambda(G)$ und also auch $\bar{\lambda}(F) \leqq \lambda(G)$. Durch Verbindung der letzten Ungleichheit mit (6) erhalten wir

$$\lambda(E) + \varepsilon > \lambda(G) \geqq \bar{\lambda}(F) = \mu^*(F) \geqq \mu^*(E).^*$$

Da die letzte Ungleichkeit für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, gilt auch $\lambda(E) \geqq \mu^*(E)$.

2.

Die Konstruktion des Masses aus dem Inhalt, welche in der Arbeit [2] studiert wurde, ist übereinstimmend mit der in 1.3 angeführten Konstruktion. Nur die Voraussetzungen über das Paar (A,B) sind etwas anders.

2.1.1. $\emptyset \in \mathbf{A}$, $\emptyset \in \mathbf{B}$.
.2. $A_1 \in \mathbf{A}$, $A_2 \in \mathbf{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathbf{A}$; $B_1 \in \mathbf{B}$, $B_2 \in \mathbf{B} \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \mathbf{B}$.
.3. $A \in \mathbf{A}, B_1, B_2 \in \mathbf{B}, A \subset B_1 \cup B_2 \Rightarrow \exists\, A_1, A_2 \in \mathbf{A}, A_1 \subset B_1, A_2 \subset B_2$, $A = A_1 \cup A_2$.
.4. Wenn $A \in \mathbf{A}$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, $B_i \in \mathbf{B}$ $(i = 1,2,\ldots) \Rightarrow \exists\, n, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.
.5. $B_i \in \mathbf{B}$ $(i = 1,2,\ldots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathbf{B}$.
.6. $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B} \Rightarrow B \cap A' \in \mathbf{B}$.**

Die auf **A** definierte Mengenfunktion λ wird Inhalt genannt wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

2.2.1. $A \subset B \Rightarrow \lambda(A) \leqq \lambda(B)$.
.2. $\lambda(A \cup B) \leqq \lambda(A) + \lambda(B)$.
.3. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cup B)$.
.4. $\lambda(A) \geqq \emptyset$

2.3. **Satz.** *Das den Bedingungen* 2.1.1 — 2.1.6 *entsprechende Paar* **(A,B)** *resp. der den Bedingungen* 2.2.1 — 2.2.4 *entsprechende Inhalt, entsprechen auch den Bedingungen* 1.1.1 — 1.1.8.

---

*) Zum Beweis der Gleichkeit $\bar{\lambda}$ (F) $= \mu^*$(F) für $F \in \mathbf{B}$ genügt es die monotonie von $\bar{\lambda}$ zu verwenden und diese aus der monotonie von λ auf **A** folgt.

** Diese Voraussetzung kann abgeschwächt werden. Siehe [2] Satz 5, Seite 308 und die Bemerkung vor den Satz 9 auf Seite 310.

Beweis. Die Bedingungen 1.1.1 — 1.1.7 sind in 2.1.1 — 2.2.4 enthalten. (1.1.2 und 1.1.6 sind um etwas schwächer). Es genügt also wenn wir 1.1.8 beweisen und dazu verwenden wir abermals das Lemma 1.2. Die Voraussetzungen 1.1.9 und 1.1.10 des Lemma 1.2 sind in den Voraussetzungen 2.1.2 resp. 2.1.4 enthalten. Um auch 1.1.11 zu beweisen wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$, $E \in \mathbf{A}$, $F_1, F_2 \in \mathbf{B}$, $E \subset F_1 \cup F_2$. Nach 2.1.3 existieren E_1, $E_2 \in \mathbf{A}$ so, dass $E_1 \subset F_1$, $E_2 \subset F_2$, $E = E_1 \cup E_2$. Nach 2.2.2 gilt $\lambda(E) - \varepsilon \leqq \lambda(E_1) + \lambda(E_2 - \varepsilon < \lambda(E_1) + \lambda(E_2)$.

Bemerkung. Aus dem Lemma 1.5 den Sätzen 1.6, 1.7 und 2.3 folgen unmittelbar die Sätze 3.4 und die schwächere Fassung des Satzes 5 aus der Arbeit [2].

3.

X sei ein n-dimensionaler euklidischer Raum, $\mathbf{K}$ sei ein System aller geschlossener Kugeln in X. Wir vollen die hinreichenden Bedingungen dazu suchen, dass irgendeine auf $\mathbf{K}$ definierte Funktion λ_0 das Mass auf die Borelschen Mengen induziert.

3.1. λ_0 sei eine auf $\mathbf{K}$ definierte Funktion. Bezeichnen wir mit $\mathbf{A}$ das System der endlichen Summen der gegenseitig disjunkten Mengen aus $\mathbf{K}$, mit $\mathbf{B}$ das System aller offenen Mengen. Für $E \in \mathbf{A}$, $E = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$,* — K_i ist gegenseitig disjunkt, setzen wir

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_0(K_i).$$

Weiter definieren wir $\bar{\lambda}$, μ^* nach 1.3.

3.2. Für $E \in \mathbf{K}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{K}(E)$ die Menge aller Systeme $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$ mit diesen Eigenschaften:

3.2.1. $F \in \mathbf{L} \Rightarrow F \subset E$.

.2. $\forall\, x \in E\ \forall\, F \in \mathbf{K},\ F \subset E,\ x \in F\ \exists\, G \in \mathbf{L}: x \in G \subset E \cap F$.

3.3. **Satz.** *λ_0 sei eine auf dem System $\mathbf{K}$ aller geschlosenen Kugeln des euklidischen Raumes X definierte Mengenfunktion. λ_0 erfülte die Bedingungen:*

3.3.1 $\lambda_0(E) \geqq 0\ \forall\, E \in \mathbf{K}$; $\lambda_0(\emptyset) = 0$.

3.3.2. $E \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E, E_i \in \mathbf{K}$ $(i = 1,2,\ldots)$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ $\Rightarrow$

$$\lambda_0(E) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_0(E_i).$$

* Ein solcher Ausdruck ist ersichtlich eindeutig.

3.3.3 $E \in \mathbf{K}$, $\mathbf{L} \in \mathbf{K}(E) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists L_1, \ldots, L_n \in \mathbf{L}, L_i \cap L_j = \emptyset$ ($i \neq j$)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_0(L_i) > \lambda_0(E) - \varepsilon$$

Dann ist μ^* ein auswendiges Mass, alle borelsche Mengen sind μ^*-messbar

Beweis. Die Voraussetzungen 1.1.1 — 1.1.7 sind sichtlich erfüllt. Ähnlich gelten 1.1.9 und 1.1.10. Es bleibt uns 1.1.11 zu beweisen. $\varepsilon > 0$ sei eine beliebige Zahl. Es sei $E \in \mathbf{A}$, $F_1, F_2 \in \mathbf{B}$, $E \subset F_1, F_2$, $E = \bigcup_{j=1}^{k} G_j$, $G_j \in \mathbf{K}$ ($j = 1,2,\ldots,k$), $G_j \cap G_i = \emptyset$ ($i \neq j$). Zu einen beliebigen $x \in G_j \cap F_i$ existiert die Menge $G \in \mathbf{K}$ derart, dass $x \in G \subset G_j \cap F_i$.* Bezeichnen wir für $i = 1,2$ und $x \in G_j$ mit dem Zeichen $F_i^j(x)$ die Menge aller solcher $K \in \mathbf{K}$ dass $x \in K \subset G_j \cap F_i$. Setzen wir $F_i^j = \bigcup \{F_i^j(x) : x \in G_j\}$, $F^j = F_1^j \cup F_2^j$. Es ist leicht ersichtlich, dass $F^j \in \mathrm{K}(G_j)$ ($j = 1,2,\ldots,k$). Deshalb existieren nach **3.3.3** gegenseitig disjunkte Mengen $L_1^j, L_2^j, \ldots, L_{n_j}^j \in F^j$ *so*, dass $\sum_{i=1}^{n_j} \lambda_0(L_i^j) > \lambda_0(G_j) - \varepsilon/k$. α_i^j sei eine Menge dieser Indexe m, für welche $L_m^j \subset F_i$. Setzen wir $E_1 = \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{m \in \alpha_1^j} L_m^j$ $E_2 = \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{m \in \alpha_2^j} L_m$. Dann ist $E_i \subset F_i$, $E_i \in \mathbf{A}$ ($i = 1,2$) und es gilt $\lambda(E_1) + \lambda(E_2) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_0(L_i^j) >$

$$> \sum_{j=1}^{k} \lambda_0(G_j) - \varepsilon = \lambda(E) - \varepsilon.$$

3.5. **Satz.** **K** *sei ein System von geschlossenen Kugeln, λ_0 eine auf* **K** *definierte Funktion welche den Bedingungen* 3.3.1 — 3.3.3 *und der Bedingung*: $\lambda_0(E) = \inf \{\lambda_0(F) : E \subset F^0, F \in \mathbf{K}\}$ *entspricht. Dann ist μ^* ein Mass auf borelschen Mengen, welches eine Erweiterung der Funktion λ_0 ist.*

Der Beweis ergibt sich aus dem Satz 3.3 und dem Lemma 1.8.

3.6. Im Satz 3.3 ersetzten wir die gewöhnlich geforderte σ-Addivität (welche in diesen Falle nicht verwendet werden kann) mit der Bedingung welche von allen Massen erfüllt wird, für welche der Satz von Vitali gilt. Im Satz 3.7 zeigen wir hingegen, dass alle solche Masse in der angeführter Weise konstruiert werden können. Zum Zweck einer kurzen Ausdrucksform führen wir einige Bereichungen und Definitionen ein.

K sei ein System allen geschlossenen Kugeln in E_n. Wir werden sagen, dass das System $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$ die Menge $A \subset E_n$ auf Vitalische Art bedeckt, wen zu

---

* An dieser Stelle und nur hier benützen wir die Eigenschaften des Euklidischen Raumes.

dem beliebigen $x \in A$ und zu beliebigen offenen x enthaltenden Menge U ein solches $F \in \mathbf{L}$ existiert, dass $x \in F \subset U$ ist. Beobachten wir, dass das beliebige System $\mathbf{L} \in \mathbf{K}(\mathrm{E})$ die Menge E auf Vitalische Art bedeckt.

Mit dem Zeichen D werden wir alle äusseren Masse in E_n mit der folgenden Eigenschaft bezeichnen: Aus dem $A \subset E_n$ auf Vitalische Art bedeckenden beliebigen System $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$ kann man ein abzählbares Teilsystem gegenseitig disjungierter Mengen $\{L_i\}$ derart auswählen, dass $\mu(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) \subset \varepsilon$, wo ε eine vorhergegebene positive Zahl ist. Das äussere Mass μ nennen wir regulär, wenn zu der beliebigen borelschen Menge E und zum beliebigen $\varepsilon > 0$ eine solche offene Menge U existiert, dass $E \subset U$ und $\mu(U - E) < \varepsilon$.

Schliesslich wird das äussere Mass μ als Caratheodorisches äusseres Mass bezeichnet, wenn aus der Bedingung $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ die Gleichheit $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, folgt.

3.7. **Satz.** *μ sei ein Caratheodorisches äusseres Mass, $\mu \in D$. Für $E \in \mathbf{K}$ setzen wir $\lambda_0(E) = \mu(E)$. μ^* sei ein durch die Funktion λ_0 induziertes äusseres Mass. Dan ist $\mu^*(B) = \mu(B)$ für eine beliebige borelsche Menge B.*

Beweis. Die Funktion λ_0 erfüllt die Voraussetzungen 3.3.1 — 3.3.3 des Satzes 3.1, also ist μ^* ein äusseres Mass und alle borelschen Mengen sin μ^* — messbar. Aus der Regularität des Masses μ folgt die durch den Satz 3.5 geforderte Eigenschaft λ_0.

Deshalb $\lambda_0(E) = \mu^*(E)$ und also ist für $E \in \mathbf{K}$ $\mu^*(E) = \mu(E)$. U sei eine beliebige offene Menge. Weil $\mu \in D$ existiert die Folge $\{E_i\}$ der gegenseitig disjunkten Mengen aus $\mathbf{K}$ derart, dass $E_i \subset U$ (i = 1,2, ...) und es gilt $\mu(U - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0$. Ersichtlich ist

$$\mu(U) \leqq \mu(U - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) + \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i). \tag{7}$$

Weil $\bigcup_{i=1}^{k} E_i \subset U$ für jedes k ist, gilt auch $\sum_{i=1}^{k} \mu(E_i) \leqq \mu(U)$ für jedes k, daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leqq \bar{\lambda}(U). \tag{8}$$

Aus der Ungleichheit (7), (8) und aus dem Satz 1.6 folgt $\mu(U) \leqq \mu^*(U)$. Anderseits für $E \in \mathbf{A}$, $E \subset U$ gilt $\lambda(E) = \mu(E) \leqq \mu(U)$. Also $\mu^*(U) = \bar{\lambda}(U) = \sup\{\lambda(E) : E \subset U,\ E \in \mathbf{A}\} \leqq \mu(U)$. Aus beiden bewiesenen Ungleichheiten folgt $\mu^*(U) = \mu(U)$, wobei U eine beliebige offene Menge ist.

Schliesslich sei B eine beliebige borelsche Menge. Erinnern wir uns, dass die Masse μ^* und μ regulär sind. Also zu einen beliebigen $\varepsilon > 0$ existiert die offene Menge $U \subset B$ derart, dass $\mu^*(U) - \mu^*(B) < \varepsilon$. Daraus folgt die Ungleichheit $\mu^*(B) > \mu^*(U) - \varepsilon = \mu(U) - \varepsilon \geqq \mu(B) - \varepsilon$. Da die letzte Ungleichheit für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, gilt auch $\mu^*(B) \geqq \mu(B)$. Es ist gut bekannt, dass das Caratheodorische äussere Mass in E_n regulär ist.

Die umgekehrte Ungleichheit wird analogisch bewiesen.

3.8. Bemerkungen. Die Arbeit [3] enthält die Sätze, mit deren Hilfe man das borelsche Mass konstruieren kann, mit Hilfe der auf offenen Kugeln definierten Funktion. Im Satz 3.3 resp. 3.5 zeigten wir die Konstruktion des Masses mit Hilfe der auf geschlossenen Kugeln definierten Funktion.

Bemerken wir noch, dass wir im Satz 3.5 anstatt des Systems geschlossener Kugeln, ein System von offenen Kugeln erwägen könnten. In diesem Falle gelte nicht 1.1.10 aber ähnlich wie im Lemma 3.4. würden wir 1.1.8 beweisen. Darüber hinaus würde die Behauptung des Satzes 3.5 bei den Voraussetzungen des Satzes 3.3 gelten. Trotzdem werden wir einen Satz, welcher zum Satz 3.5 analogisch ist nicht beweisen, da sein Beweis keinere weiteren Methoden erfordert und das gehörige Ergebniss in viel stärkerer Form in [3] bewiesen ist.

LITERATUR

[1] Halmos P. R., Measure Theory, New York 1950 (po rusky: Теория меры, Москва, 1953).

[2] Neubrunn T., O konštrukcii miery z objemu, Acta fac. rer. nat. Univ. Comen., Mathem., VI (1961), 301—317.

[3] Riečan B., Poznámka ku konštrukcii miery, Mat.-fyz. čas. SAV, 12 (1962), 47—59.

Adresa autora: Katedra matematiky SVŠT, Bratislava, Gottwaldovo nám. 2.

Do redakcie došlo: 15. 10. 1964.

Poznámka ku konštrukcii miery z objemu

B. RIEČAN

Súhrn

V práci [2] zovšeobecnil T. Neubrunn známu metódu konštrukcie miery z objemu. V tejto práci je daná istá modifikácia Neubrunnovho zovšeobecnenia.

Nech **A**, **B** sú dva systémy podmnožín abstraktného priestoru X a λ množinová funkcia splňujúca podmienky 1.1.1 — 1.1.8.

Pre $F \in \mathbf{B}$ položme

$$\bar{\lambda}(F) = \sup \{\lambda(E) : F \supset E \in \mathbf{A}\}$$

a pre ľubovoľné $G \subset X$ položme

$$\mu^*(G) = \inf \{\bar{\lambda}(F) : G \subset F \in \mathbf{B}\}$$

Platia nasledujúce výsledky: μ^* je vonkajšia miera (veta 1.6) a každá množina $E \in \mathbf{A}$ je μ^* merateľná (veta 1.7).

Pri splnení nejakých ďalších podmienok je μ^* predĺžením λ (veta 1.8).

Z uvedených výsledkov vyplýva okrem výsledkov ktoré im zodpovedajú práce [2] tiež veta o predĺžení miery z funkcie definovanej na systéme všetkých uzavretých gúľ v euklidovskom priestore.

Заметка к конструкции меры из объема

Б. РИЕЧАН

Выводы

В статье изучается модификация данного Нойбрунном обобщения известного метода конструкции меры из объема (см. [2]).

Пусть A, B — классы подмножеств абстрактного пространства X, λ — функция множества, определенная на A. Пусть A, B и λ удовлетворяют условиям 1.1.1 — 1.1.8. Для любого $F \in B$ определим

$$\bar{\lambda}(F) = \sup \{\lambda(E) : F \subset E \in A\}$$

и для любого подмножества $\Gamma \subset X$ положим

$$\mu^*(\Gamma) = \inf \{\bar{\lambda}(F) : \Gamma \subset F \in B\} .$$

Тогда μ^* является внешней мерой (теорема 1.6) и все множества $E \in A$ μ^*-измеримы (теорема 1.7). Если, кроме того, для всякого $E \in A$

$$\lambda(E) = \inf \{\lambda(\Gamma) : \Gamma \in A, \quad \text{существует} \quad F \in B,\ E \subset F \subset \Gamma\})$$

то μ^* является продолжением λ (теорема 1.8).

Из приведенных результатов вытекает, кроме соответствующих теорем работы [2], также теорема о продолжении меры из функции определенной на классе всех замкнутых шаров в эвклидовом пространстве.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X,5 — MATHEMATICA, XIII, 1966)
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. X., FASC. V. MATHEMATICA XIII 1966

Построение всех частично упорядоченных множеств, гомоморфно отображаемых на данное частично упорядоченное множество

И. КОРЕЦ,

В. В. Пашенков в статье [1] решает задачу: Пусть дана Булева алгебра K, пусть всякому $x \in K$ сопоставлена структура L_x, причем наименьшему и наибольшему элементу из K сопоставлены одноэлементовые структуры. Найти все (с точностью до изоморфизма) структуры L, гомоморфно отображаемые на K так, чтобы для всякого $x \in K$ множество всех аргументов элемента x (с частичным упорядочением как в L) было изоморфно L_r. В статье В. В. Пашенкова некоторые неясности (1). В этой статье мы разрешим аналогичную задачу для частично упорядоченных множеств, структур и полных структур.

1. Обозначение и некоторые понятия

Мы будем пользоваться этими логическими обозначениями: $\Rightarrow$ влечет, $\Leftrightarrow$ эквивалентно, . и, $+$ или, $(\forall x)$ для всех x, $(\exists x)$ существует x. Кванторы общности в начале формулы мы будем опускать.

$x \in X$ обозначает x является элементом множества X, $x \vee y$, соответственно $x \wedge y$ обозначает множественную сумму, соотв. множественное пересечение множеств x, y; $\{x : \varphi(x)\}$ значит множество всех x обладающих свойством $\varphi(x)$, $\{x \in A : \varphi(x)\} = \{x : x \in A \,.\, \varphi(x)\}$, $\{A_x, B_x : \varphi(x) = \{A_x : \varphi(x)\} \vee \{B_x : \varphi(x)\}$, $\{a, b\} = \{x : x = a + x = b\}$.

$\vee M$, соотв. $\wedge M$ обозначает множественную сумму, соотв. множественное пересечение семьи множеств M, $\bigvee\limits_{x \in X} A_x = \vee \{A_x : x \in X\}$, $\bigwedge\limits_{x \in X} A_x = \wedge \{A_x : x \in X\}$; $\emptyset$ значит пустое множество. $X \subseteq Y$ значит X есть подмножество множества Y.

Образ элемента x в отображении f мы будем обозначать xf; $xf^{-1} =$

(1) Смотри Math. Rewiews 25 (1963), № 3872.

$= \{y : yf = x\}$. Если f — отображение множества X в Y, $A \subseteq X$, то $Af = \{x \in Y : (\exists z)(z \in A \,.\, zf = x)\}$.

$a \leqq b(R)$, соотв. $a < b(R)$ значит, что a меньше или равно b в частичном упорядочении R, соотв. $a \leqq b(R) \,.\, a \neq b$. (N, R) значит частично упорядоченное множество с множеством элементов N и частичным упорядочением R. Если R, S — частичные упорядочения, $R \subset S$ значит $x \leqq y(R) \Rightarrow \Rightarrow x \leqq y(S)$, $R = S$ значит $R \subset S \,.\, S \subset R$.

$\bigcap_R X$, соотв. $\bigcup_R X$ мы будем обозначать найбольшую нижнюю грань, соотв. найменьшую верхнюю грань множества X в частичном упорядочении R, $a \cap_R b = \bigcap_R \{a, b\}$, $a \cup_R b = \bigcup_R \{a, b\}$. Для частичного упорядочения M_r мы будем вместо $\bigcap_{M_r}$ писать только $\bigcap_M$, аналогично и для $\bigcup$, $\cap$, $\cup$ и частичные упорядочения $\bar{x}_r$, $\bar{y}_r$ и т. д.

Структуру и полную структуру мы понимаем как частично упорядоченные множества, обладающие некоторыми свойствами (смотри, например, [2]). Отображение f частично упорядоченного множества (N, N_r) на частично упорядоченное множество (M, M_r) мы называем гомоморфизмом, если (для всех $x, y \in N$) $x \leqq y(N_r) \Rightarrow xf \leqq yf(M_r)$. Отображение f структуры (N, N_r) на структуру (M, M_r) мы называем структурным гомоморфизмом, если

$$(x \cap_N y)f = xf \cap_M yf, \; (x \cup_N y)f = xf \cup_M yf.$$

Отображение f полной структуры (N, N_r) на полную структуру (M, M_r) мы называем полным гомоморфизмом, если для всякого $A \subseteq N$

$$\left(\bigcap_N A\right)f = \bigcap_M (Af), \; \left(\bigcup_N A\right)f = \bigcup_M (Af).$$

Мы говорим, что частично упорядоченные множества (N, N_r), (M, M_r) изоморфны, если найдется взаимно однозначное отображение f множества N на M, для которого $x \leqq y(N_r) \Leftrightarrow xf \leqq yf(M_r)$.

Мы далее условимся, что с времени поставления задачи 1 мы будем элементы множества M обозначать $\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{a}, \bar{b}, \ldots$, элементы множества N будем обозначать $x, y, \ldots, a, b, \ldots$.

2. Формулировка задач

Задача 1'. *Пусть (M, M_r) — частично упорядоченное множество, пусть всякому $x \in M$ сопоставлено частично упорядоченное множество $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ найти все (с точностью до изоморфизма) частично упорядоченные множества (K, K_r) такие, что существует гомоморфизм h (K, K_r) на (M, M_r) такой, что для всякого $x \in M$ (xh^{-1}, K_r) изоморфно $(\bar{x}, \bar{x}_r)$.*

Очевидно, можно достичь (путем замены $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ изоморфными частично упорядоченными множествами), что для всех $x, y \in M$, $x \neq y$ будет

$\bar{x} \wedge \bar{y} = \emptyset$. Теперь мы создадим множество $\bar{M} = \{\bar{x} : x \in M\}$ и определим частичное упорядочение $\bar{M}_r$ множества $\bar{M}$:

$$\bar{x} \leqq \bar{y}(\bar{M}_r) \quad \Leftrightarrow \quad x \leqq y(M_r).$$

Частично упорядоченное множество (M, M_r) изоморфно частично упорядоченному множеству $(\bar{M}, \bar{M}_r)$.

Нетрудно показать, что достаточно ограничиться решением задачи:

Задача 1. *Пусть (M, M_r) — частично упорядоченное множество, пусть элементы множества M — попарно непересекающиеся непустые множества. Пусть всякому $\bar{x} \in M$ сопоставлено частичное упорядочение $\bar{x}_r$ множества $\bar{x}$, пусть $N = \bigvee M$, пусть f — отображение множества N на множество M, определенное соотношением*

$$(a) \qquad xf = \bar{y} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bar{y}.$$

Найти все частично упорядоченные множества (N, N_r) такие, что f является гомоморфизмом (N, N_r) на (M, M_r) и что на всяком $\bar{x} \in M$ частичные упорядочения $\bar{x}_r$ и N_r совпадают, то есть:

$$u, v \in \bar{x} \quad \Rightarrow \quad (u \leqq v(\bar{x}_r) \quad \Leftrightarrow \quad u \leqq v(N_r)).$$

Остальные задачи мы сформулируем сразу этим образом.

Задача 2. *Пусть (M, M_r) — структура, пусть все элементы M порарно непересекающиеся множества. Пусть всякому $\bar{x} \in M$ сопоставлено частичное упорядочение $\bar{x}_r$ такое, что $(\bar{x}, \bar{x}_r$ —) структура. Пусть $N = \bigvee$ пусть f — отображение определенное соотношением (a). Найти все частично упорядоченные множества (N, N_r) такие, что (N, N_r) — структура, f — структурный гомоморфизм (N, N_r) на (M, M_r) и что на всяком $\bar{x} \in M$ частичные упорядочения $\bar{x}_r$ и N_r совпадают.*

Задача 3. *Пусть (M, M_r) — полная структура, пусть элементы M — непустые попарно непересекающиеся множества. Пусть всякому $\bar{x} \in M$ сопоставлено частичное упорядочение $\bar{x}_r$ множества $\bar{x}$ такое, что $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ — полная структура. Пусть $N = \bigvee M$, пусть f — отображение определенное соотношением (a).*

Найти все частично упорядоченные множества (N, N_r) такие, что (N, N_r) — полная структура, что f — полный гомоморфизм (N, N_r) на (M, M_r) и что на всяком $\bar{x} \in M$ частичные упорядочения $\bar{x}_r$ и N_r совпадают.

Мы условимся: Отображение f во всей статье есть отображение, определенное соотношением (a). Вместо xf мы будем писать и $\bar{x}$. Потому всегда будет иметь место $x \in \bar{x}$, $y \in \bar{y}$ и так далее.

3. Решение задачи 1.

3.1. Пусть R — произвольное частичное упорядочение множества N. Потом (N, R) удовлетворяет задаче 1 в том и только в том случае, когда

$$(1) \qquad x \leqq y(R) \Rightarrow \bar{x} \leqq \bar{y}(M_r)$$

$$(2) \qquad \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow [x \leqq y(R) \Leftrightarrow x \leqq y(\bar{x}_r)].$$

Доказательство. а) Пусть (N, R) удовлетворяет задаче 1.

(1) следует из того, что f — гомоморфное отображение (N, R) на (M, M_r) (и из того, что для $x \in N$ $xf = \bar{x}$).

(2) следует из того, что на всяком $\bar{x} \in M\bar{x}_r$ совпадает с R.

б) Пусть исполнены (1) и (2).

Из (1) следует, что f — гомоморфное отображение (N, R) на (M, M_r). Пусть $\bar{x} \in M$, $u,v \in \bar{x}$. Тогда $\bar{u} = \bar{v}(= \bar{x})$, и потому, следуя (2), $u \leqq v(R) \Leftrightarrow$ $\bar{u} \leqq v(\bar{x}_r)$. Следовательно, на всем $\bar{x}$ частичные упорядочения R, $\bar{x}_r$ совпадают. Потому (N, R) удовлетворяет задаче 1.

Определение 1.

$$(\mathrm{I}) \qquad x \leqq y(R_0) \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y} \,.\, x \leqq y(\bar{x}_r)$$

$$(\mathrm{II}) \qquad x \leqq y(R_2) \Leftrightarrow \bar{x} < \bar{y} + x \leqq y(R_0)$$

3.2. R_0 и R_2 — частичные упорядочения множества N.

Доказательство. а) Для отношения R_0.

1. R_0 реффлексивно. Это очевидно.
2. R_0 антисимметрично: $x \leqq y(R_0) \,.\, y \leqq z(R_0) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \,.\, x \leqq y(\bar{x}_r) \,.\, y \leqq$ $\leqq x(\bar{y}_r) \Rightarrow x = y$.
3. R_0 транзитивно: $x \leqq y(R_0) \,.\, y \leqq z(R_0) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} = \bar{z} \,.\, x \leqq y(\bar{x}_r) \,.\, y \leqq$ $\leqq z(\bar{y}_r) \Rightarrow x \leqq z(\bar{x}_r) \Rightarrow x \leqq z(R_0)$.

   б) Для отношения R_2.

1. R_2 реффлексивно. Это очевидно.
2. R_2 антисимметрично: $x \leqq y(R_2) \,.\, y \leqq x(R_2) \Rightarrow x \leqq y(R_2) \,.\, y \leqq$ $\leqq x(R_2) \,.\, \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow x \leqq y(R_0) \,.\, y \leqq x(R_0) \Rightarrow x = y$.
3. транзитивно: а) $x \leqq y(R_2) \,.\, y \leqq z(R_2) \,.\, \bar{x} = \bar{y} = \bar{z} \Rightarrow x \leqq y(R_0) \,.\, y \leqq$ $\leqq z(R_0) \Rightarrow x \leqq z(R_0) \Rightarrow x \leqq z(R_2)$.

   б) $x \leqq y(R_2) \,.\, y \leqq z(R_2) \,.\, (\bar{x} \neq \bar{y} + \bar{y} \neq \bar{z}) \Rightarrow \bar{x} \leqq \bar{y}(M_r) \,.\, \bar{y} \leqq$ $\leqq \bar{z}(M_r) \,.\, (\bar{x} \neq \bar{y} + \bar{y} \neq \bar{z}) \Rightarrow \bar{x} < \bar{y}(M_r) \,.\, \bar{y} \leqq \bar{z}(M_r) + \bar{x} \leqq \bar{y}(M_r) \,.\, \bar{y} <$ $< \bar{z}(M_r) \Rightarrow \bar{x} < \bar{z}(M_r) \Rightarrow x < z(R_2)$.

3.3. Пусть R — частичное упорядочение множества N. Потом (N, R) удовлетворяет задаче 1 тогда и только тогда, когда $R_0 \subset R \subset R_2$.

Доказательство. Следуя 3.1. достаточно показать, что $R_0 \subset R \subset R_2$ влечет (1) и (2) и обратно.

а) Пусть $R_0 \subset R \subset R_2$.

1. $x \leqq y(R) \Rightarrow x \leqq y(R_2) \Rightarrow \bar{x} \leqq \bar{y}(M_r)$.

2. а. $\bar{x} = \bar{y} \,.\, x \leqq y(\bar{x}_r) \Rightarrow x \leqq y(R_0) \Rightarrow x \leqq y(R)$.

   б. $\bar{x} = \bar{y} \,.\, x \leqq y(R) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \,.\, x \leqq y(R_2) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \,.\, x \leqq y(R_0) \Rightarrow$
   $\Rightarrow x \leqq y(x_r)$.

б) Пусть имеет место (1) и (2).

1. $x \leqq y(R_0) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \,.\, x \leqq y(\bar{x}_r) \Rightarrow x \leqq y(R)$.

2. $x \leqq y(R) \Rightarrow \bar{x} \leqq \bar{y}(M_r) \,.\, x \leqq y(R) \Rightarrow (\bar{x} < \bar{y}(M_r) + \bar{x} = \bar{y}) \,.\, x \leqq$
   $\leqq y(R) \Rightarrow \bar{x} < \bar{y}(M_r) + \bar{x} = \bar{y} \,.\, x \leqq y(\bar{x}_r) \Rightarrow x \leqq y(R_2)$.

Следовательно, имеет место:

Теорема 1. *Пусть (M, M_r) — частично упорядоченное множество, пусть элементы M — непустые попарно непересекающиеся множества. Пусть всякому $\bar{x} \in M$ сопоставлено частичное упорядочение $\bar{x}_r$ множества $\bar{x}$. Потом все (с точностью до изоморфизма) частично упорядоченные множества (K, K_r), для которых существует гомоморфизм $g($К$, K_r)$ на (N, N_r) такой, что для всякого $\bar{x} \in M(\bar{x}g^{-1}, K_r)$ изоморфно с $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ — это частично упорядоченные множества (N, R), где $R_0 \subset R \subset R_2$. Притом R_0, соотв. R_2 — наименьшее соотв. наибольшее (относительно $\subset$) отношения такие, что (N, R) удовлетворяет задаче 1. Обратно, все (N, R), где $R_0 \subset R \subset R_2$ исполняют задачу 1.*

Замечание: Задача 1 имеет всегда решение, например (N, R_0).

4. Решение задачи 2.

4.1. Пусть (M, M_r) исполняет все предпосылки задачи 2. Пусть (N, R) удовлетворяет задаче 2. Потом $R_0 \subset R \subset R_2$ и

(3) $\qquad \bar{x} \leqq \bar{y}(M_r) \Rightarrow (\exists u)(u \in \bar{x} \,.\, u \leqq y(R)) \,.\, (\exists v)(v \in \bar{y} \,.\, x \leqq v(R))$.

Доказательство. Структурный гомоморфизм всегда является гомоморфизмом относительно частичного упорядочения. Потому, следуя 3.3., $R_0 \subset R \subset R_2$.

Пусть $x, y \in N, \bar{x} \leqq \bar{y}(M_r)$. Потом $x \cap_N y \in (x \cap {}_N y)f = xf \cap_M yf = \bar{x}$. Следовательно, достаточно взять $u = x \cap_N y$. Существование v вытекает из принципа дуальности.

4.2. Пусть (M, M_r) исполняет все предпосылки задачи 2. Пусть R — частичное упорядочение множества N такое, что (N, R) — структура, $R_0 \subset R \subset R_2$, и исполнено (3). Потом (N, R) удовлетворяет задаче 2.

Доказательство. Достаточно показать, что f — структурный гомоморфизм. В силу принципа дуальности достаточно показать, что f — гомоморфизм относительно структурного пересечениа. Из теоремы 1 следует, что f — гомоморфизм относительно частичного упорядочения.

Пусть $x, y \in N$. Потому что $x \cap_R y \leqq x(R)$, мы имеем $(x \cap_R y)f \leqq \bar{x}(M_r)$, аналогично $(x \cap_R y) \leqq \bar{y}(M_r)$. Пусть $\bar{w} \leqq \bar{x}(M_r)$, $\bar{w} \leqq \bar{y}(M_r)$. В силу (3) существуют $u, v \in \bar{w}$, $u \leqq x(R)$, $v \leqq y(R)$. Потом $u \cap_R v \leqq x \cap_R y(R)$, и $(u \cap_R v)f \leqq (x \cap_R y)f(M_r)$. А $u \cap_R v = u \cap_{\bar{w}} v \in \bar{w}$, и потому $\bar{w} \leqq$ $\leqq (x \cap_R y)f(M_r)$. Следовательно $(x \cap_R y)f$ является наибольшей нижней гранью множества $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ в частичном упорядочении M_r, т.е. f является гомоморфизмом относительно структурного пересечения.

4.3. Пусть (M, M_r) исполняет все предпосылки задачи 2. Потом (N, R_2) удовлетворяет задаче 2.

Доказательство. По лемме 4.2. достаточно показать, что $\bar{x} \leqq \bar{y}(M_r) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\exists u)(u \in \bar{x} \,.\, u \leqq y(R_2)) \,.\, (\exists v)(v \in \bar{y} \,.\, x \leqq v(R_2))$.
Если $\bar{x} = \bar{y}$, достаточно взять $u = x \cap_{\bar{x}} y$, $v = x \cup_{\bar{x}} y$.
Если $\bar{x} < \bar{y}(M_r)$, достаточно взять $u = x$, $v = y$.

Теорема 2. *Пусть (M, M_r) структура. Пусть элементы M — непустые попарно непересекающиеся множества, пусть всякому $\bar{x} \in M$ сопоставлено частичное упорядочение $\bar{x}_r$ множества $\bar{x}$ такое, что $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ — структура. Потом все (с точностью до изоморфизма) структуры (K, K_r), для которых существует структурный гомоморфизм g структуры (K, K_r) на (M, M_r) такой, что для всякого $\bar{x} \in M$ $(\bar{x}_{rg}^{-1}, K_r)$ изоморфна с $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ — это частично упорядоченные множества (N, R), где $R_0 \subset R \subset R_2$, (N, R)— структура и исполнено* (3). *Обратно, если (N, R) — структура, $R_0 \subset$ $\subset R \subset R_2$ и исполнено* (3), *то (N, R) удовлетворяет задаче 2.*

Замечание. Задача 2 имеет всегда решение, например (N, R_2).

4.4. Условие (3) в теореме 2 невозможно заменить условием

$$(3') \qquad \bar{x} \leqq \bar{y}(M_r) \Rightarrow (\exists u)(u \in \bar{x} \,.\, u \leqq y(R))$$

(и тем более его невозможно выпустить).

Доказательство. Пусть $M = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$, $\bar{a} < \bar{b} < \bar{c}(M_r)$, $\bar{a} = \{a_1, a_2\}$, $a_1 < a_2(\bar{a}_r)$, $\bar{b} = \{b_1\}$, $\bar{c} = \{c_1\}$; потом $N = \{a_1, a_2, b_1, c_1\}$. Пусть $a_1 <$ $< b_1 < c_1(R)$, $a_1 < a_2 < c_1(R)$, b_1 и a_2 несравнимы в R. Потом (N, R) является структурой, $R_0 \subset R \subset R_2$ и исполнено (3′), а (N, R) невозможно структурно гомоморфно отобразить на (M, M_r).

5. Решение задачи 3.

5.1. Пусть (M, M_r) исполняет все предпосылки задачи 3. Пусть (N, R) удовлетворяет задаче 3. Потом $R_0 \subset R \subset R_2$ и исполнено (3).

Доказательство. Следует из 4.1. и из того, что предпосылки задачи 2. являются следствием предпосылок задачи 2.

5.2. Пусть (M, M_r), N исполняют предпосылки задачи 3. Пусть R — частичное упорядочение множества N такое, что (N, R) — полная структура, $R_0 \subset R \subset R_2$ и (3). Потом (N, R) удовлетворяет задаче 3.

Доказательство. (N, R) удовлетворяет задаче 2, и потому достаточно показать, что f является полным гомоморфизмом. По принципу дуальности достаточно доказывать для инфимума.

Пусть $\emptyset \neq A \subseteq N$. Для всякого $x \in A$ $\bigcap_R A \leqq x(R)$, и потому $(\bigcap_R A)f \leqq \leqq xf(M_r)$. Потому имеет место $(\bigcap_R A)f \leqq \bigcap_M (Af)(M_r)$. Надо показать, что $(\bigcap_R A)f$ — наибольшая нижняя грань множества Af (относительно частичного упорядочения M_r).

Пусть $\bar{u}$ является нижней гранью множества Af относительно частичного упорядочения M_r. Для всякого $x \in A$ $u \leqq x(M_r)$, и потому, в силу (3), существует $x_1 \in \bar{u}$, $x_1 \leqq x(R)$. Мы возмем для всякого $x \in A$ этим образом элемент x_1 и обозначим $A_1 = \{x_1 : x \in A\}$. Очевидно, что $\bigcap_R A_1 \leqq \leqq \bigcap_R A(R)$, следовательно, $(\bigcap_R A_1)f \leqq (\bigcap_R A)f(M_r)$. А $\bigcap_R A_1 = \bigcap_{\bar{u}} A_1 \in \in \bar{u}$, т.е. $(\bigcap_R A_1)f = \bar{u}$, и потому $\bar{u} \leqq (\bigcap_R A)f(M_r)$.

5.3. Пусть (M, M_r) исполняет все предпосылки задачи 3. Потом (N, R_2) удовлетворяет задаче 3.

Доказательство то самое как 4.3.

Теорема 3. *Пусть (M, M_r) полная структура. Пусть элементы множества M — непустые попарно непересекающиеся множества. Пусть всякому $\bar{x} \in M$ сопоставлено частичное упорядочение $\bar{x}_r$ такое, что $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ — полная структура. Потом все (с точностью до изоморфизма) полные структуры (K, K_r) для которых существует полный гомоморфизм g (K, K_r) на (M, M_r) такой, что для всякого $\bar{x} \in M$ $(\bar{x}g^{-1}, K_r)$ изоморфна $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ — это (N, R), где (N, R) — полная структура, $R_0 \subset R \subset R_2$ и исполнено (3). Обратно, если (N, R) — полная структура, $R_0 \subset R \subset R_2$ и исполнено* (3), *удовлетворяет (N, R) задаче 3.*

Замечание. Задача 3 имеет, следовательно, тоже всегда решение, например (N, R_2).

5.4. Условие (3) в теореме 3 невозможно заменить условием (3') (и тем более его невозможно выпустить).

Доказательство. Достаточно рассмотреть пример, приведенный в 4.4.

6. Другое решение задачи 2.

6.1. Пусть (M, M_r) исполняет все предпосылки задачи 2, пусть (N, R) удовлетворяет задаче 2. Пусть

(4) $$[\bar{x}, y] = \{z \in \bar{x} : z \leqq y(R)\}, \; [x, \bar{y}] = \{z \in \bar{y} : x \leqq z(R)\} .$$

Потом

A1 $$[\bar{x}, y] \subseteq \bar{x}$$

A'1 $$[x, \bar{y}] \subseteq \bar{y}$$

A2 $$y_1, y_2 \in [\bar{y}, x] \Rightarrow y_1 \cup_{\bar{y}} y_2 \in [\bar{y}, x]$$

A′2 $$y_1, y_2 \in [x, \bar{y}] \Rightarrow y_1 \cap_{\bar{y}} y_2 \in [x, \bar{y}]$$

A3 *Множество* $[\bar{x} \cap_M \bar{y}, x] \wedge [\bar{x} \cap_M \bar{y}, y]$ *имеет наибольший относительно* R_0 *элемент.*

A′3 *Множество* $[x, \bar{x} \cup_M \bar{y}] \wedge [y, \bar{x} \cup_M \bar{y}]$ *имеет наименьший онтосительно* R_0 *элемент.*

A4 $$x \in [\bar{x}, y] \Leftrightarrow y \in [x, \bar{y}]$$

A5 $$[\bar{x}, x] = \{y : y \leqq x(R_0)\}$$

A6 $$x \in [\bar{x}, y] \,.\, y \in [\bar{y}, z] \Rightarrow x \in [\bar{x}, z]$$

A7 $$\bar{z} \leqq \bar{y} \leqq \bar{x}(M_r) \Rightarrow [\bar{z}, x] \subseteq \bigvee \{[\bar{z}, t] : t \in [\bar{y}, z]\}$$

A′7 $$\bar{z} \geqq \bar{y} \geqq \bar{x}(M_r) \Rightarrow [x, \bar{z}] \subseteq \bigvee \{[t, \bar{z}] : t \in [z, \bar{y}]\}$$

A8 $$\bar{x} \leqq \bar{y}(M_r) \Leftrightarrow [\bar{x}, y] \neq \emptyset$$

A′8 $$\bar{x} \geqq \bar{y}(M_r) \Leftrightarrow [x, \bar{y}] \neq \emptyset$$

Для соотношений A1, A′1, A2, A′2, A3, A′3, A4, A5, A6, A7, A′7, A8, A′8 мы будем пользоваться общим обозначением A.

Доказательство([2]). A1. Следует непосредственно из (4).

A2. $y_1, y_2 \in [\bar{y}, x] \Rightarrow y_1, y_2 \in \bar{y}, y_1 \leqq x(R) \,.\, y_2 \leqq x(R) \Rightarrow y_1 \cup_R y_2 = y_1 \cup_{\bar{y}} y_2 \in \bar{y} \,.\, y_1 \cup_R y_2 \leqq x(R) \Rightarrow y_1 \cup_{\bar{y}} y_2 \in [\bar{y}, x]$.

A3. Этим наибольшим элементом является $x \cap_R y$: Потому что $(x \cap_R y)f = \bar{x} \cap_M \bar{y}$, $x \cap_R y \leqq x(R)$, $x \cap_R y \leqq y(R)$, мы имеем $x \cap_R y \in [\bar{x} \cap_M \bar{y}, x] \wedge [\bar{x} \cap_M \bar{y}, y]$. Пусть $z \in [\bar{x} \cap_M \bar{y}, x] \wedge [\bar{x} \cap_M \bar{y}, y]$. Потом $z \leqq x(R)$, $z \leqq y(R)$, следовательно $z \leqq x \cap_R y(R)$, а $z \in \bar{x} \cap_M \bar{y}$ и потому $z \leqq x \cap_R y(R_0)$.

A4. $x \in [\bar{x}, y] \Rightarrow x \leqq y(R) \Rightarrow y \in [x, \bar{y}]$. Обратная импликация дуальна.

A5. Следует непосредственно из (4).

A6. $x \in [\bar{x}, y] \,.\, y \in [\bar{y}, z] \Rightarrow x \leqq y(R) \,.\, y \leqq z(R) \Rightarrow x \leqq z(R) \Rightarrow x \in [\bar{x}, z]$.

A7. Пусть $\bar{z} \leqq \bar{y} \leqq \bar{x}(M_r)$, $a \in [\bar{z}, x]$. Нужно показать, что существует элемент $b \in [\bar{y}, x]$ так, что $a \in [\bar{z}, b]$. Пусть $u \in [\bar{y}, x]$, $b = a \cup_R u$. Потом $\bar{b} = (a \cup_R u)f = af \cup_M uf = \bar{z} \cup_M \bar{y} = \bar{y}$. Потому что $a \leqq x(R)$, $u \leqq x(R)$, и, следовательно $b = a \cup_R u \leqq x(R)$, мы имеем $b \in [\bar{b}, x] = [\bar{y}, x]$. Далее мы имеем $a \leqq b(R)$, $a \in \bar{z}$, то есть $a \in [\bar{z}, b]$.

A8. Если $\bar{x} \leqq \bar{y}(M_r)$, то $\bar{x} \cap_M \bar{y} = \bar{x}$. Потом, в силу A3, имеет множество

([2]) Достаточно показать A1, A2, ..., A8. Соотношения A′1, A′2, A′3, A′7, A′8 следуют из дуальности. Остальные дуальные соотношения A′5, A′6 мы непишем потому, что они следуют из A. Соотношение A4 самодуально.

([3]) По принципу дуальности достаточно показать (в этом порядке!) A′5, A′6, A9.

$[\bar{x} \cap_M \bar{y}, x] \wedge [\bar{x} \cap_M \bar{y}, y]$ наименьший элемент относительно R_0, т.е. оно непусто. Потому и $[\bar{x} \cap_M \bar{y}, x] = [\bar{x}, y] \neq \emptyset$.

Наоборот, если $u \in [\bar{x}, y]$, то $u \leqq y(R)$, т.е. $\bar{u} \leqq \bar{y}(M_r)$, а $\bar{u} = \bar{x}$, и потому $\bar{x} \leqq \bar{y}(M_r)$.

6.2. Пусть исполнены все предпосылки задачи 2. Пусть для $W = \{[\bar{x}, y], [y, \bar{x}] : x, y \in N\}$ исполнены соотношения A. Потом для W исполнены и соотношения

A′5 $$[x, \bar{x}] = \{y : x \leqq y(R_0)\}$$

A′6 $$x \in [y, \bar{x}] \,.\, y \in [z, \bar{y}] \Rightarrow x \in [x, \bar{x}]$$

A9 $$u \leqq v(R_0) \,.\, v \in [\bar{x}, y] \Rightarrow u \in [\bar{x}, y]$$

A′9 $$u \geqq v(R_0) \,.\, v \in [x, \bar{y}] \Rightarrow u \in [x, \bar{y}].$$

Доказательство[3]. A′5. 1. Пусть $z \in [x, \bar{x}]$. Потом в силу A′1 $z \in \bar{x}$, т. е. $\bar{z} = \bar{x}$. Потом $z \in [x, \bar{z}]$ и в силу A4 $x \in [\bar{x}, z]$, то есть $x \in [\bar{z}, z]$ и, в силу A5, $x \leqq z(R_0)$.

2. Пусть $x \leqq z(R_0)$. Потом $\bar{z} = \bar{x}$ и, в силу A5, $x \in [\bar{z}, z]$, т. е. $x \in [\bar{x}, z]$ и в силу A4 $z \in [x, \bar{z}]$, т. е. $z \in [x, \bar{x}]$.

A′6. Пусть $x \in [y, \bar{x}]$, $y \in [z, \bar{y}]$. Следуя A4 мы имеем $y \in [\bar{y}, x]$, $z \in [\bar{z}, y]$ и в силу A6 $z \in [\bar{z}, x]$. В силу A4 $x \in [z, \bar{x}]$.

A9. Если $u \leqq v(R_0)$, то $\bar{u} = \bar{v}$ и в силу A5 $\bar{u} \in [\bar{u}, v]$. Если $v \in [\bar{x}, y]$, то $v \in \bar{x}$, т. е. $\bar{v} = \bar{x}$. А потом $\bar{v} \in [v, y]$ и, в силу A6 и $u \in [\bar{u}, v]$, мы имеем $u \in [\bar{x}, y]$.

Определение 2. а) *Систему множеств* $W = \{[\bar{x}, y], [y, \bar{x}] : x, y \in N\}$ *мы будем называть создающей системой, если она исполняет соотношения* A.
б) *Пусть* W *является создающей системой*; *об отношении* S *мы будем говорить, что оно создано системой* W, *если*

(5) $$x \leqq y(S) \Leftrightarrow x \in [\bar{x}, y].$$

6.3. Пусть исполнены все предпосылки задачи 2. Пусть W — создающая система, S — отношение, созданное системой W. Потом S является частичным упорядочением множества N.

Доказательство. 1. S рефлексивно: Пусть $x \in N$; A5 влечет, что $x \in [\bar{x}, x]$, т. е. в силу (5) $x \leqq x(S)$.

2. транзитивно: Пусть $x \leqq y(S)$, $y \leqq z(S)$. В силу (5) $x \in [\bar{x}, y]$, $y \in [\bar{y}, z]$. В силу A6 $x \in [\bar{x}, z]$, т. е., следуя (5), $x \leqq z(S)$.

3. S антисимметрично: Пусть $x \leqq y(S)$, $y \leqq x(S)$. Потом в силу (5) $x \in [\bar{x}, y]$, т е. $[\bar{x}, y] \neq \emptyset$ и в силу A8 $\bar{x} \leqq \bar{y}(M_r)$. Аналогично $\bar{y} \leqq \bar{x}(M_r)$. Следовательно, $\bar{x} = \bar{y}$. Потом $x \in [\bar{y}, y]$ и, в силу A5, $x \leqq y(R_0)$. Аналогично $y \leqq x(R_0)$. Следовательно, $x = y$.

6.4. Пусть исполнены все предпосылки 6.3. Потом $R_0 \subset S \subset R_2$.

Доказательство. 1. Пусть $x \leqq y(R_0)$. В силу A5 $x \in [\bar{y}, y]$, а $\bar{x} = \bar{y}$ (смотри, например, A1), т. е. $x \in [\bar{x}, y]$ и в силу (5) $x \leqq y(S)$.
2. Пусть $x \leqq y(S)$. Потом $x \in [\bar{x}, y]$ и, следуя A8, $\bar{x} \leqq \bar{y}(M_r)$. Если $\bar{x} < \bar{y}$, то $x \leqq y(R_2)$. Если $\bar{x} = \bar{y}$, то $x \in [\bar{y}, y]$ и в силу A5 $x \leqq y(R_0)$, и тем более $x \leqq y(R_2)$.

6.5. Пусть исполнены все предпосылки 6.3. Потом (N, S) является структурой.

Доказательство[4]. Пусть $x, y \in N$. В силу A3 множество $[\bar{x} \cap_M \bar{y}, x] \wedge \wedge [\bar{x} \cap_M \bar{y}, y]$ имеет наибольший элемент относительно R_0. Мы обозначим его через z. В силу A1 и A5 $\bar{z} = \bar{x} \cap_M \bar{y}$. Мы имеем $z \in [\bar{z}, x]$, т. е. в силу (5) $z \leqq x(S)$. Аналогично $z \leqq y(S)$.
Пусть теперь $u \leqq x(S)$, $u \leqq y(S)$. В силу (5) $u \in [\bar{u}, x]$, $u \in [\bar{u}, y]$. В силу A8 $\bar{u} \leqq \bar{x}(M_r)$, $\bar{u} \leqq \bar{y}(M_r)$, т. е. $\bar{u} \leqq \bar{x} \cap_M \bar{y}(M_r)$, т. е. $\bar{u} \leqq \bar{z}(M_r)$. Мы имеем $\bar{u} \leqq \bar{z} \leqq \bar{x}(M_r)$, $u \in [\bar{u}, x]$. В силу A7 существует $x_1 \in [\bar{z}, x]$, так что $u \in [\bar{u}, x_1]$. В силу A1 $\bar{z} = \bar{x}_1$, т. е. $x_1 \in [\bar{x}_1, x]$, т. е., в силу (5), $x_1 \leqq \leqq x(S)$. Далее, следуя (5), имеет место $u \leqq x_1(S)$. Мы имеем $u \leqq x_1 \leqq x(S)$. Аналогично найдется y_1, $u \leqq y_1 \leqq y(S)$, $\bar{y}_1 = \bar{z}$. Мы имеем $u \in [\bar{u}, x_1]$, $u \in [\bar{u}, y_1]$. В силу A4 $x_1 \in [u, \bar{x}_1]$, $y_1 \in [y, \bar{y}_1]$. Следуя A$'$2, $x_1 \cap_{R_0} y_1 \in \in [u, \bar{z}]$. Мы обозначим $x_1 \cap_{R_0} y_1 = u_1$. Имеет место $u_1 \in [u, \bar{z}]$, что влечет $\bar{u}_1 = \bar{z}$, т. е. $u_1 \in [u, \bar{u}_1]$. В силу A4 $u \in [\bar{u}, u_1]$, т е., следуя (5), $u \leqq u_1(S)$. Имеет место $u_1 \leqq x_1(R_0)$, и тем более $u_1 \leqq x_1(S)$. Далее $x_1 \leqq x(S)$, т. е. $u_1 \leqq x(S)$, т. е., в силу (5), $u_1 \in [\bar{u}_1, x]$, т е. $u_1 \in [\bar{z}, x]$. Аналогично $u_1 \in \in [\bar{z}, y]$, т е. $u_1 \in [\bar{z}, x] \wedge [\bar{z}, y]$. Потом, следуя определению z, $u_1 \leqq z(R_0)$, и тем более $u_1 \leqq z(S)$. А $u \leqq u_1(S)$, т. е. $u \leqq z(S)$, что требовалось до казать.

6.6. Пусть исполнены все предпосылки 6.3. Потом

$$\bar{x} \leqq \bar{y}(M_r) \Rightarrow (\exists u)(u \in \bar{x} \,.\, u \leqq y(S))\,.\,(\exists v)(v \in \bar{y} \,.\, x \leqq v(S))\,.$$

Доказательство[5]. Пусть $x, y \in N$, $\bar{x} \leqq \bar{y}(M_r)$. Потом в силу A8 $[\bar{x}, \bar{y}] \neq \emptyset$. Пусть $u \in [\bar{x}, y]$. Потом в силу A1 $\bar{u} = \bar{x}$, т. е. $u \in \bar{x}$. Мы имеем $u \in [u, y]$, т. е. $\bar{u} \leqq y(S)$.

Леммы 6.1. — 6.6. влекут:

$$(\exists u)(u \in x \,.\, u \leqq y(S)).$$

6.7. Пусть исполнены все предпосылки задачи 2. Пусть W — создающая система, пусть отношение S создано системой W. Потом (N, S) удовлетворяет задаче 2.

---

(4) По принципу дуальности достаточно показать существование $x \cap_S y$.

(5) По принципу дуальности достаточно показать

6.8. Пусть исполнены все предпосылки задачи 2. Пусть (N, R) удовлетворяет задаче 2, пусть $W(R)$ — создающая система, определенная соотношениями (4). Пусть S создана системой W. Потом $S = R$.

Доказательство. 1. $x \leqq y(R) \Rightarrow x \in [\bar{x}, y] \Rightarrow x \leqq y(S)$.
2. $x \leqq y(S) \Rightarrow x \in [\bar{x}, y] \Rightarrow x \in \{z : z \in \bar{x} \,.\, z \leqq y(R)\} \Rightarrow x \leqq y(R)$.

В силу 6.7., если S — отношение, созданное (какой-нибудь) создающей системой W, удовлетворяет (N, S) задаче 2. В силу 6.8. мы получим этим путем все решения задачи 2. Потому имеет место:

Теорема 4. *Пусть (M, M_r) — структура, пусть элементы множества M — попарно непересекающиеся непустые множества. Пусть всякому $\bar{x} \in M$ сопоставлено частичное упорядочение $\bar{x}_r$ множества $\bar{x}$ такое, что $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ — структура. Потом все (с точностью до изоморфизма) структуры (K, K_r), для которых существует структурный гомоморфизм g (K, K_r) на (M, M_r) такой, что для всякого $\bar{x} \in M$ структура $(\bar{x}_g{}^{-1}, K_r)$ изоморфна структуре $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ — это структуры (N, R), где $N = \bigvee M$ и R пробегает все частичные упорядочения, для которых существует создающая система W так, что R создано системой W. Обратно, если R создана (какой-нибудь) создающей системой, то (N, R) удовлетворяет задаче 2.*

7. Другое решение задачи 3.

7.1. Пусть (N, R) удовлетворяет задаче 3, пусть для $W(R) = \{[\bar{x}, y], [y, \bar{x}] : x, y \in N\}$ исполнено (4). Потом имеет место

A1, A′1, A4, A5, A6, A7, A′7, A8, A′8

B2 $\emptyset \neq X \subseteq [\bar{y}, x] \Rightarrow \bigcup_{\bar{y}} X \in [\bar{y}, x]$

B′2 $\emptyset \neq X \subseteq [x, \bar{y}] \Rightarrow \bigcap_{\bar{y}} X \in [x, \bar{y}]$

B3 $\emptyset \neq X \subseteq N \Rightarrow$ *множество* $\bigwedge_{x \in X} [\bigcup_M (Xf), x]$ *имеет наибольший элемент относительно* R_0.

B′3 $\emptyset \neq X \subseteq N \Rightarrow$ *множество* $\bigwedge_{x \in X} [\bigcup_M (Xf, x]$ *имеет наименьший элемент относительно* R_0.

Доказательство (6). B2. Пусть $\emptyset \neq X \subseteq [\bar{y}, x]$; для всякого $z \in X$ есть $z \leqq x(R)$. Потом и $\bigcup_R X \leqq x(R)$, а $(\bigcup_R X)f = \bar{y}$, т. е. $\bigcup_R X \in [\bar{y}, x]$.

B3 Имеет место $\bigwedge_{x \in X} [\bigcap_M (Xf), x] = \bigwedge \{z : z \in \bigcap_M (Xf) \,.\, z \leqq x(R)\} =$
$= [\bigcap_M (Xf), \bigcap_R X]$. А $(\bigcap_R X)f = \bigcap_M (Xf)$, и потому $\bigcap_R X$ является исканным наибольшим элементом.

---

(6) Если $(И, R)$ удовлетворяет задаче 3, то удовлетворяет и задаче 2, и потому достаточно доказать B2 и B3 (B′2 и B′3 уже следуют из дуальности).

Определение 3. *Пусть исполнены предпосылки задачи 3. Систему множеств* $W = \{[\bar{x}, y], [x, \bar{y}] : x, y \in N\}$ *мы назовем* ***полно создающей системой****, если она обладает свойствами*

A1, A'1, A2, A'2, B2, B'2, B3, A4, A5, A6, A7, A'7, A8, A'8.

7.2. Пусть W является полно создающей системой. Пусть отношение S создано системой W. Потом (N, S) удовлетворяет задаче 3.

Доказательство. Если в B2, B'2, B3, B'3 мы возмем $X = \{x, y\}$ или $X = \{y_1, y_2\}$, мы получим A2, A'2, A3, A'3. Потому всякая полно создающая система является создающей системой. Следовательно, достаточно показать, что (N, S) — полная структура и что f — полный гомоморфизм(7).

Пусть $\emptyset \neq A \subseteq N$. Мы обозначим $\bar{z} = \bigcap_M(Af)$ и z обозначим наименьший элемент $\bar{z}$ относительно $\bar{z}_r$. Для всякого $x \in A$ есть $\bar{z} \leqq \bar{x}(M_r)$, т. е. $[\bar{z}, x] \neq \emptyset$. Потому что z — наименьший элемент структуры $(\bar{z}, \bar{z}_r)$, есть $z \leqq x(S)$. Следовательно, z является нижней гранью множества A (относительно частичного упорядочения S). Мы обозначим Z множество всех элементов множества $\bar{z}$, которые являются нижними гранями множества A относительно S и далее обозначим $u = \bigcup_{\bar{z}} Z$ (что, конечно, равно $\bigcup_S Z$). Мы имеем $u \in \bar{z}$, т. е. $\bar{u} = \bar{z}$. Для всякого $x \in A$ есть $Z \subseteq [\bar{z}, x]$ и в силу B2 $u \in [\bar{z}, x]$, т. е. $u \leqq x(S)$. Потому $u \in Z$.

Пусть v является нижней гранью множества A относительно частичного упорядочения S. Потом для всякого $x \in A$ есть $\bar{v} \leqq \bar{x}(M_r)$, т. е. $v \leqq \bigcap_M(Af) = \bar{u}(M_r)$. Для всякого $x \in A$ мы имеем $\bar{v} \leqq \bar{u} \leqq \bar{x}(M_r)$, т. е. в силу A7 существует $x_1 \in [\bar{u}, x]$ так, что $v \in [\bar{v}, x_1]$. Мы выберем для всякого $x \in A$ такое x_1 и множество всех этих элементов мы обозначим A_1. Для всякого $x_1 \in A_1$ верно $v \in [\bar{v}, x_1]$, т е. $x_1 \in [\bar{v}, \bar{x}_1]$, и следовательно $x_1 \in [v, \bar{u}]$. Мы имеем $A_1 \subseteq [v, \bar{u}]$. В силу B'2 $\bigcap_{\bar{u}} A_1 = \bigcap_S A_1 \in [v, \bar{u}]$, т. е. $v = \bigcap_S A_1(S)$. А $\bigcap_S A_1$ является нижней гранью A в частичном упорядочении S, $\bigcap_S A_1 \in \bar{u} = \bar{z}$, т. е. $\bigcap_S A_1 \leqq u(S)$. Окончательно мы имеем $v \leqq u(S)$, что требовалось доказать.

Далее мы имеем $\bar{u} = \bigcap_M(Af)$, т. е. $(\bigcap_S A)f = \bigcap_M(Af)$. Следовательно, f является полным гомоморфизмом.

В силу 7.2. если отношение S создано (какой-нибудь) полно создающей системой, удовлетворяет (N, S) задаче 3. В силу 7.1. и 6.8. мы получим этим путем все решения задачи 3. Следовательно, имеет место

Теорема 5. *Пусть* (M, M_r) *— полная структура, пусть элементы множества* M *— непустые попарно непересекающиеся множества. Пусть*

(7) По принципу дуальности достаточно показать, что в (N, S) имеет всякое (непустое) множество точную нижнюю грань и что f — гомоморфизм относительно точной нижней грани. Далее, можно пользоваться всеми результатами абзаца 6.

всякому $\bar{x} \in M$ сопоставлено частичное упорядочение $\bar{x}_r$ множества $\bar{x}$ такое, что $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ — полная структура. Потом все (с точностью до изоморфизма) полные структуры (K, K_r) такие, что существует полный гомоморфизм g (K, K_r) на (M, M_r) так, что для всякого $\bar{x} \in M$ полная структура $(\bar{x}g^{-1}, K_r)$ изоморфна с $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ — это все (N, R), где R пробегает все отношения, для которых существует полно создающая система W так, что R создано системой W. Наоборот, если R создано полно создающей системой, то (N, R) удовлетворяет задаче 3.

Литература

[1] В. В. Пашенков: Об одном классе структур с неединственными дополнениями. Известия высших учебных заведений, математика, 1958, № 4 (5).

[2] G. Szász: Einführung in die Verbandstheorie, Verlag der Ungarischen Akademie der Wisenschaften, Budapest 1962.

Adresa autora: Katedra algebry PFUK, Bratislava, Šmeralova 2

Do redakcie došlo: 5. 11. 1964.

Konštrukcia všetkých čiastočne usporiadaných množín, ktoré možno homomorfne zobraziť na danú čiastočne usporiadanú množinu

I. KOREC

Súhrn

V článku sa rieši úloha:

Je daná čiastočne usporiadaná množina (resp. zväz, resp. úplný zväz) (M, M_r), pričom prvky množiny M sú po dvoch dizjunktné neprázdne množiny. Ku každému prvku $\bar{x} \in M$ je priradené $\bar{x}_r$ tak, že $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ je čiastočne usporiadaná množina (resp. zväz, resp. úplný zväz). Nájsť všetky (až na izomorfizmus) (N, N_r) také, že (N, N_r) je čiastočne usporiadaná množina (resp. zväz, resp. úplný zväz) a že existuje homomorfizmus g (resp. zväzový homomorfizmus, resp. úplný homomorfizmus) čiastočne usporiadanej množiny (N, N_r) na čiastočne usporiadanú množinu (M, M_r) taký, že pre každé $\bar{x} \in M$ je čiastočne usporiadaná množina $(\bar{x}g^{-1}, N_r)$ izomorfná s čiastočne usporiadanou množinou $(\bar{x}, \bar{x}_r)$.

Dokazujú sa vety:

Riešením uvedenej úlohy pre prípad čiastočne usporiadaných množín sú všetky (N, R), kde $N = \bigvee M$, (N, R) je čiastočne usporiadaná množina a platí $R_0 \subset R \subset R_2$.

Riešením horeuvedenej úlohy pre prípad zväzov (resp. úplných zväzov) sú všetky (N, R), kde $N = \bigvee M$, (N, R) je zväz (resp. úplný zväz), $R_0 \subset R \subset R_2$ a platí (3).

Pritom (N, R) sú relácie definované vzťahmi (I), (II) v odseku 3., podmienka (3) je uvedená v odseku 4.

Pre prípad zväzov a úplných zväzov je podané ešte druhé riešenie, v ktorom nevystupuje podmienka, aby (N, R) bol zväz, resp. úplný zväz.

Die Konstruktion aller teilweise geordneten Mengen, welche man auf die gegebenen teilweise geordneten Mengen homomorph abbilden kann

I. KOREC

Zusammenfassung

Im Artikel wird die Aufgabe gelöst:

Es ist eine teilweise geordnete Menge (resp. ein Verband, resp. ein vollständiger Verband) (M, M_r) wobei die Elemente der Menge M, paarweise disjunkte unleere Mengen sind: Zu jedem Element $\bar{x} \in M$ wird $\bar{x}_r$ derart zugereiht, dass $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ eine teilweise geordnete Menge (resp. ein Verband, resp. ein vollständiger Verband) ist. Die Aufgabe lautet: Alle solche (N, N_r) zu finden, dass (N, N_r) eine teilweise geordnete Menge (resp. ein Verband, resp. ein vollständiger Verband) ist und dass ein solcher Ordnungshomomorphismus (resp. vollständiger Homomorphismus), g der teilweise geordneten Menge (N, N_r) auf teilweise geordnete Menge (M, M_r) existiert, dass für jedes eine teilweise geordnete Menge $(\bar{x}g^{-1}, N_r)$ isomorph mit der teilweise geordneten Menge $(\bar{x}, \bar{x}_r)$ ist.

Folgende Sätze sind bewiesen:

Die Lösung der oben angeführten Aufgabe für den Fall der teilweise geordneten Mengen sind alle (N, R), wo $N = \bigvee M$, (N, R) ist eine teilweise geordnete Menge und es gilt $R_0 \subset R \subset R_2$. Die Lösung der oben angeführten Aufgabe für den Fall der Verbände (resp. vollständiger Verbände) sind alle (N, R), wo $N = \bigvee M$, (N, R) ist ein Verband (resp. vollständiger Verband) und es gilt (3) und $R_0 \subset R \subset R_2$. Dabei sind R_0, R_2 die Relationen, welche mit Beziehungen (I), (II) im Absatz 3 definiert sind und Bedingung (3) ist im Absatz 4 angeführt.

Für den Fall der Verbände und der vollständigen Verbände ist noch eine andere Lösung angeführt, wo die Bedingung, dass (N, R) ein Verband (resp. ein vollständiger Verband) sein soll, fehlt.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X,5 — MATHEMATICA. XIII. 1966)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X., FASC. V. MATHEMATICA XIII 1966

O asociatívnej operácii Δ na triede sväzov Ω_0

J. BADIDA

V prácach [4], [5] zaoberali sme sa problémom o existencii asociatívnych a komutatívnych operácií na niektorých triedach sväzov, pričom tieto operácie sú rôzne od priameho a voľného súčinu. Podrobne tento problém bol sformulovaný v práci [4] (pre grupy pozri [2]).

V predloženej práci poukazujeme na ďalšiu takúto operáciu, ktorú označujeme Δ, na určitej triede sväzov Ω_0, do ktorej triedy patria všetky sväzy, splňujúce určité podmienky.

V ďalšom texte kardinálny súčin (sväzov $A_i (i \in M)$) budeme označovať $\Pi^{\times} A_i (i \in M)$, voľný súčin $\Pi^* A_i (i \in M)$. Ďalšie pojmy a označenia budeme používať ako v [4] a čiastočne ako v [1].

§ 1. Operácia Δ na triede Ω_0

Definícia 1,1. Nech S je sväz, ktorý sa dá vyjadriť v tvare ordinálneho súčtu dvoch sväzov (porov. [1], kap. II, § 7, str. 48)

$$S = X \oplus Y. \tag{a}$$

Budeme hovoriť, že vzťah (*a*) vyjadruje ordinálny rozklad sväzu S, v ktorom X je dolnou a Y hornou triedou sväzu S.

Definícia 1,2. Budeme hovoriť, že sväz S patrí do triedy Ω_0, keď sú splnené nasledujúce podmienky:

1. sväz S je atomárny,

2. existuje ordinálny rozklad sväzu S tak, že v ordinálnom rozklade (*a*) je dolná trieda sväzu S najmenší podsväz, ktorý obsahuje všetky atómy sväzu S.

Z vlastnosti 1. je zrejmé, že sväzy patriace do triedy Ω_0 obsahujú najmenší prvok, ktorý budeme označovať symbolom O, prípadne s indexami, vyjadrujúcimi, do ktorého príslušný prvok patrí.

Lemma 1,1. *Nech S je ľubovoľný sväz z triedy Ω_0. Ak $S = X \oplus Y$, $S = U \oplus V$ a oba tieto rozklady splňujú podmienky* 1., 2. *z definície* 1,2, *potom platí:*

$$X = U, \quad Y = V.$$

Dôkaz bezprostredne vyplýva z definície 1,2.

Lemma 1,2. *Nech $A_i (i \in M)$ sú atomárne sväzy. Potom sväz $A = \Pi^{\times} A_i$ je tiež atomárny.*

Toto tvrdenie je zrejmé.

Lemma 1,3. *Nech $A = \Pi^{\times} A_i (i \in M)$, pričom A_i sú atomárne sväzy. Nech m_i, m, n sú (konečné alebo nekonečné) kardinálne čísla. Nech počet atómov sväzu A_i je m_i a počet atómov sväzu A je m. Potom platí:*

a) *prvky sväzu A, ktorých i-tá zložka je atóm sväzu A_i a ostatné zložky sú najmenšie prvky sväzov $A_j (j \in M, j \neq i)$, sú atómy sväzu A a každý atóm v A je takéhoto tvaru;*

b) *pre počet atómov sväzu A platí vzťah*

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Tvrdenie lemmy je zrejmé.

Nech $S_i = X_i \oplus Y_i (i \in M)$ sú ľubovoľné navzájom disjunktné sväzy z triedy Ω_0.

Definícia 1,3. Nech $\Gamma = \{S_i\}$ $(i \in M)$, pričom rozklad $S_i = X_i \oplus Y_i$ má vlastnosť 2 z definície 1,2. Symbolom $\Delta(\Gamma)$ budeme označovať sväz

$$\Pi^{\times} X_i \oplus \Pi^{*} Y_i \ (i \in M) .$$

Lemma 1,4. *Nech $\Gamma = \{S_i\}$, $S_i = X_i \oplus Y_i$ $(i \in M)$ je systém navzájom disjunktných sväzov z triedy Ω_0. Nech pre každé $i \in M$ je X_i najmenší podsväz sväzu S_i, ktorý obsahuje všetky atómy sväzu S_i. Ak množina indexov M je konečná, potom $\Pi^{\times} X_i$ $(i \in M)$ je najmenší podsväz sväzu $\Delta(\Gamma)$, ktorý obsahuje všetky atómy sväzu $\Delta(\Gamma)$.*

Dôkaz. Z lemmy 1,3 a z definície ordinálneho rozkladu vyplýva, že podsväz $\Pi^{\times} X_i$ $(i \in M)$ sväzu $\Delta(\Gamma)$ obsahuje všetky atómy sväzu $\Delta(\Gamma)$.

Nech teraz množina indexov M je konečná a nech X je najmenší podsväz sväzu $\Delta(\Gamma)$, ktorý obsahuje všetky atómy sväzu $\Delta(\Gamma)$. Zrejme $X \subset \Pi^{\times} X_i$ $(i \in M)$. Pre každé $i \in M$ existuje v $\Delta(\Gamma)$ podsväz S_i', ktorý je izomorfný so sväzom S_i. Potom $S_i' = X_i' \oplus Y_i'$, kde sväz X_i' je izomorfný s X_i. Množina $X \cap X_i'$ je podsväz v S_i', obsahujúci všetky atómy sväzu S_i', teda platí (vzhľadom na minimálnosť sväzu X_i') $X_i' \subset X \cap X_i'$, t. j. $X \cap X_i' = X_i'$, takže platí $X_i' \subset X$. Z toho vyplýva, že podsväz sväzu X, vytvorený podsväzmi $X_i' (i \in M)$, je obsiahnutý v X. Tento podsväz je však $\Pi^x X_i$ $(i \in M)$. Platí teda $\Pi^x X_i \subset X$, a teda $X = \Pi^x X_i$ $(i \in M)$, čím je tvrdenie lemmy 1,4 dokázané.

Poznámka. V ďalšom texte teda množinu indexov M budeme považovať za konečnú.

Veta 1,1. *Nech $\Gamma = \{S_i\}$ $(i \in M)$ je systém navzájom disjunktných svázov, patriacich do triedy Ω_0. Potom sváz*

$$\Delta(\Gamma) = \Pi^x X_i \oplus \Pi^* Y_i \ (i \in M)$$

splňuje podmienky 1., 2., vyslovené v definícii 1,2 a teda patrí do triedy Ω_0.

Dôkaz. Podmienka 1. vyplýva z lemmy 1,2 a z toho, že $\Pi^x X_i \subset \Delta(\Gamma)$. Podmienka 2. vyplýva z lemmy 1,1 a z lemmy 1,4.

§ 2. Niektoré vlastnosti operácie Δ

V tomto odseku dokážeme, že operácia Δ, definovaná na triede Ω_0, priraďuje každej neprázdnej množine navzájom disjunktných svázov $\Gamma = \{S_i\}$ $(i \in M)$, patriacich do triedy Ω_0, sváz $\Delta(\Gamma)$, patriaci do triedy Ω_0 tak, že platí:

a) pre každé S_i existuje v $\Delta(\Gamma)$ podsváz $\bar{S}_i$, izomorfný so svázom S_i,
b) sváz $\Delta(\Gamma)$ je vytvorený množinovým súčtom $\cup \bar{S}_i$,
c) operácia Δ je asociatívna.

(Podrobnejšie, pozri úvod v [4].) Ďalej dokážeme, že sváz $\Delta(\Gamma)$ sa dá získať až na izomorfizmus zo svázu $\xi(\Gamma) = \Pi^* S_i$ $(i \in M)$ pomocou vhodnej kongruencie.

Veta 2,1. *Pre operáciu Δ sú splnené vlastnosti a), b).*

Dôkaz vyslovenej vety bezprostredne vyplýva z definície priameho súčinu, z lemmy 6,2 (pozri [4], § 6) a z konštrukcie svázu $\Delta(\Gamma)$ (porov. dôkaz vety 6,1 v práci [4], § 6).

Veta 2,2. *Nech množina indexov $M = \cup M_j$, kde $j \in N$ a pre ľubovoľné $k, l \in N$ $(k \neq l)$ nech je $M_k \cap M_l = \emptyset$, $\Gamma_j = \{S_i\}$ $(i \in M_j)$. Potom operácia Δ splňuje podmienku c), t. j. operácia Δ je asociatívna, čiže*

$$\Delta(\Gamma) \cong \Delta(\{\Delta(\Gamma_j)\}) \ (j \in N)\,.$$

Dôkaz vyplýva z asociatívnosti operácií priameho a voľného súčinu.

Poznámka. Komutatívnosť operácie Δ je zrejmá. Vyplýva z komutatívnosti operácií priameho a voľného súčinu.

Lemma 2,1. *Nech A je sváz, ktorý obsahuje podsvázy A_i $(i \in M)$, pričom množinový súčet $\cup A_i$ je množina generátorov pre sváz A. Potom sváz A je homomorfným obrazom svázu $\xi(\Gamma) = \Pi^* A_i$ (voľného súčinu svázov A_i).*

Dôkaz. Nech $\xi(\Gamma)$ je voľný súčin sväzov A_i. Vyberme teraz navzájom disjunktné sväzy A_i' tak, že $A_i' \cong A_i$, pričom A_i' sú podsväzy sväzu $\xi(\Gamma)$ a $\cup A_i'$ je množina generátorov pre sväz $\xi(\Gamma)$. Príslušný izomorfizmus označme φ_i. Podľa [3] (§ 2, veta 2) existuje homomorfné zobrazenie φ sväzu $\xi(\Gamma)$ do sväzu A tak, že pre každé $i \in M$ a každé $x \in A_i'$ je

$$\varphi(x) = \varphi_i(x).$$

Keďže $\cup A_i$ je množina generátorov pre sväz A a platí

$$\cup A_i \subset \varphi(\xi(\Gamma)) \subset A,$$

je $\varphi(\xi(\Gamma)) = A$, čím je tvrdenie lemmy dokázané.

Nech $\xi(\Gamma) = \Pi^* S_i$ $(i \in M)$ je voľný súčin navzájom disjunktných sväzov S_i z triedy Ω_0. Je známe, že vo sväze $\xi(\Gamma)$ existujú podsväzy S_i', izomorfné s S_i (pre každé $i \in M$).

Nech $S_i = X_i \oplus Y_i$ $(i \in M)$. Nájdime ku sväzu X_i izomorfný podsväz v $\Pi^x X_i$ $(i \in M)$ a označme ho $\bar{X}_i$. Ďalej nájdime vo sväze $\Pi^* Y_i$ $(i \in M$ podsväz, izomorfný so sväzom Y_i a označme ho $\bar{Y}_i$. Je zrejmé, že množinový súčet sväzov $\bar{X}_i$, $\bar{Y}_i$ dáva podsväz $\bar{S}_i$ sväzu $\Delta(\Gamma)$ $(\Gamma = \{S_i\}, i \in M)$ a platí:

$$\bar{S}_i = \bar{X}_i \oplus \bar{Y}_i.$$

Veta 2,3. *Nech $\xi(\Gamma) = \Pi^* S_i$, kde $\Gamma = \{S_i\}$ $(i \in M)$ a S_i sú navzájom disjunktné sväzy z triedy Ω_0. Potom sväz $\Delta(\Gamma)$ sa dá získať, až na izomorfizmus, pomocou vhodnej kongruencie definovanej na sväze $\xi(\Gamma)$.*

Dôkaz. Podľa predchádzajúcich úvah vo sväze $\xi(\Gamma)$ a $\Delta(\Gamma)$ existuje systém podsväzov S_i' a $\bar{S}_i$ tak, že platí:

$$(b) \qquad S_i \cong S_i' \quad \text{a} \quad S_i \cong \bar{S}_i \ (i \in M).$$

Zo vzťahov (b) vyplýva izomorfizmus sväzov S_i', $\bar{S}_i$, t. j.

$$S_i' \cong \bar{S}_i \ (i \in M).$$

Ďalej je známe, že $\bar{S}_i$ sú generátory sväzu $\Delta(\Gamma)$ a teda podľa lemmy 2,1 sväz $\Delta(\Gamma)$ je homomorfným obrazom sväzu $\xi(\Gamma)$, t. j. voľného súčinu sväzov S_i.

Literatúra

[1] G. Birkhoff: Teorija struktur, Moskva 1952.
[2] A. G. Kuroš: Teorija grupp (1944 r.)
[3] Ju. I. Sorkin: Svobodnye obiedinenija struktur. Mat. sb. 30 (1952), 677—694.
[4] J. Badida: Asociatívne operácie na niektorých triedach sväzov, Acta Fac. Natur. Univ. Comenian. Mathematica 7 (1963), 609—621.
[5] J. Badida: O asociatívnej operácii na určitej triede sväzov, Acta Fac. Natur. Univ. Comenian. Mathematika 9 (1964), 71—74.

Adresa autora: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie BF
VŠT v Košiciach, Švermova 3.

Do redakcie došlo 20. 5. 1964.

Über assoziative Operationen Δ auf der Klasse von Verbänden Ω_0

J. BADIDA

Zusammenfassung

In der Arbeit [4] wurde die Frage über die Existenz assoziativer und kommutativer Operationen auf Klasse aller Verbände, bzw. auf gewissen Verbandklassen gestellt, wobei diese Operationen verschieden vom direkten und freien Produkt sein sollen.

In der Arbeit wird bewiesen, dass die Antwort an diese Frage auch für eine gewisse Verbandklasse Ω_0 bejahend wird. Die Klasse Ω_0 ist mit Hilfe einer gewissen Bedingung (s. Abschn. 1, 2) definiert.

Обассоциаривной операции Δ наклассе структур Ω_0

ЯН БАДИДА

Резюме

В настоящей работе доказывается, что ответ на поставленный вопрос в работе [4] (вопрос о существовании ассоциативных и комутативных операций на классе всех структур, или же для определенных классов структур, причём эти операции должны быть неодинаковыми с прямым и свободным произведением) является положительным и для определенного класса Ω_0. Класс Ω_0 определяется при помощи определенного условия и его подробное определение приводится в абзаце 1,2.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X,5 — MATHEMATICA, XIII, 1966)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X., FASC. V. MATHEMATICA XIII 1966

Kořenové vlastnosti řešení systému tří lineárních homogenních diferenciálních rovnic 1. řádu

S. ŠANTAVÁ-KROHOVÁ

Úvod. V práci jsou studovány kořenové vlastnosti řešení systému

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{1}$$

a jsou zobecněny známé vlastnosti řešení diferenciálních rovnic 3. řádu pro řešení systému (1) za předpokladu, že A je čtvercová matice třetího řádu, jejíž prvky a_{ij}, $i,j = 1,2,3$, jsou spojité funkce proměnné $x \in (-\infty, \infty)$ a $\mathbf{y}$ sloupcový vektor o složkách y_1, y_2, y_3.

Práce používá a navazuje na výsledky prací M. Greguše [1], [2], [3], které se zabývají vlastnostmi řešení diferenciální rovnice 3. řádu

$$y''' + 2a(x)y' + [a'(x) + b(x)]y = 0, \tag{a}$$

a to ve větě 2[1], 3[1], 4[1], 6[3], 7[2]. Důkazy v této práci bylo třeba provést bez použití Mammanovy identity, které se běžně používá při studiu kořenových vlastností rovnice (a).

V prvé části je ukázáno, že za daných předpokladů pro koeficienty a_{ij}, $i, j = 1,2,3$, systému (1) může mít řešení systému (1) pouze jeden dvojnásobný nulový bod a že tento kořen rozděluje interval $(-\infty, \infty)$ na dva intervaly tak, že v jednom z těchto intervalů leží všechny kořeny složek uvažovaného řešení, dále je ukázáno, že za uvedených předpokladů se kořeny jednotlivých složek vzájemně oddělují, že existuje alespoň jedno řešení bez nulových bodů a jsou vysloveny věty o lineárně závislých řešení systému (1).

Druhá část práce se zabývá vztahy mezi řešeními systému (1) a systému k němu adjungovanému a je ukázáno, že složky těchto systémů hoví systémům dvou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu. Kořenové vlastnosti řešení těchto systémů lze aplikovat na složky řešení systému (1).

I.

Uvažujme systém

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \tag{1}$$

kde A je čtvercová matice třetího řádu, jejíž prvky $a_{ij}(x)$, $i,j = 1,2,3$, jsou spojité funkce proměnné $x \in (-\infty, \infty)$ a kde $\mathbf{y}$ je sloupcový vektor o složkách y_1, y_2, y_3. Předpokládejme, že v matici A jsou všechny prvky kromě a_{12}, a_{23}, a_{31} identicky rovny nule. Označme dále $a_{12} = a_1$, $a_{23} = a_2$, $a_{31} = a_3$ a předpokládejme, že existují první derivace funkcí $a_1(x), a_2(x), a_3(x)$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

Věta 1. *Předpokládejme, že řešení systému (1)* $\mathbf{y}_j(x) = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ y_{3j} \end{pmatrix}, j = 1, 2, 3,$ *splňují v bodě* x_0 *podmínky* $y_{ij}(x_0) = 1$ *pro* $i = j$, $y_{ij}(x_0) = 0$ *pro* $i \neq j$. *Je-li pro* $x \in (-\infty, \infty)$ $a_i > 0$, $i = 1,2,3$, *potom pro* $x \in (x_0, \infty)$ *je* $y_{ij} > 0$, $i,j = 1,2,3$. *Je-li pro* $x \in (-\infty, \infty)$ $a_i < 0$, $i = 1$, *resp.* $i = 2$, *resp.* $i = 3$ *a* $a_i > 0$, $i = 2,3$, *resp.* $i = 1,3$, *resp.* $i = 1,2$, *potom pro* $x \in (-\infty, x_0)$ *je* $y_{ij} < 0$, $i,j = 1,2,3$ *v případě* $i \neq j$ *a přitom* $i + j \geqq 4$, *resp.* $i \neq j$ *a přitom* $i + j \leqq 4$, *resp.* $i \neq j$ *a přitom* $i + j \neq 4$, *pro ostatní hodnoty* i,j *je* $y_{ij} > 0$. *Totéž platí pro* $x \in (x_0, \infty)$ *v případě, že pro* $x \in (-\infty, \infty)$ *je* $a_i > 0$, $i = 1$, *resp.* $i = 2$, *resp.* $i = 3$ *a* $a_i < 0$, $i = 2,3$, *resp.* $i = 1,3$, *resp.* $i = 1,2$. *Je-li pro* $x \in (-\infty, \infty)$ $a_1 < 0$, $i = 1,2,3$, *potom pro* $x \in (-\infty, x_0)$ *je* $y_{ij} > 0$, $i,j = 1,2,3$.

Důkaz. Předpokládejme, že pro $x \in (-\infty, \infty)$ je $a_i{}^1 > 0$, $i = 1,2,3$, a uvažujme řešení $\mathbf{y}_3$, pro které v bodě x_0 platí $y_{13}(x_0) = 0$, $y_{23}(x_0) = 0$, $y_{33}(x_0) = 1$; tedy pro toto řešení platí $y_{13}'(x_0) = 0$, $y_{13}''(x_0) = a_1 a_2$. Předpokládejme, že existuje číslo $x_1 > x_0$ tak, že $y_{13}(x_1) = 0$, přičemž $y_{13}(x) > 0$ pro $x \in (x_0, x_1)$. Jelikož $y_{33}' = a_3 y_{13} > 0$ pro $x \in (x_0, x_1)$, $y_{33}(x_0) = 1$, je $y_{33}(x) > 0$ pro $x \in [x_0, x_1]$. Podobně $y_{23}' = a_2 y_{33} > 0$ pro $x \in [x_0, x_1]$, $y_{23}(x_0) = 0$, tedy $y_{23} > 0$ pro $x \in (x_0, x_1 >$. Jelikož tedy $y_{13}' = a_1 y_{23} > 0$ pro $x \in (x_0, x_1 >$, nemůže platit $y_{13}(x_1) = 0$. Odtud plyne, že $y_{13}(x) > 0$ pro $x \in (x_0, \infty)$. Pro třetí složku řešení $\mathbf{y}_3$ platí $y_{33}(x_0) = 1$, $y_{33}'(x_0) = a_3 y_{13} > 0$ pro $x > x_0$, tedy $y_{33}(x) > 0$ pro $x \in (x_0, \infty)$. Pro druhou složku řešení $\mathbf{y}_3$ platí $y_{23}(x_0) = 0$, $y_{23}'(x) = a_2 y_{33} > 0$ pro $x > x_0$, tedy $y_{23}(x) > 0$ v intervalu (x_0, ∞). Pro řešení $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ a ostatní případy se důkaz provede obdobně.

Poznámka 1. Hodnotu třetí složky v bodě x_0 uvažujeme rovnou jedné bez omezení obecnosti, neboť ve větě 3. bude dokázáno, že všechna řešení typu $\mathbf{y}_1(x_0) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, resp. $\mathbf{y}_2(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$, resp. $\mathbf{y}_3(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, kde $k \neq 0$ je libovolná konstanta, jsou lineárně závislá.

Věta 2. *Každé řešení* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ *systému* (1), *jehož jedna složka se v bodě* x_0 *anuluje, se dá psát ve tvaru*

$$y_i = c_1 y_{i1} + c_2 y_{i2}, \; i = 1,2,3. \tag{2}$$

Je-li $y_i(x_0) = 0$, $i = 1$, *resp.* $i = 2$, *resp.* $i = 3$, *potom*

$$y_{i1} = \begin{vmatrix} \bar{y}_{j1}(x_0) & \bar{y}_{j2}(x_0) & \bar{y}_{j3}(x_0) \\ \bar{y}_{k1}(x_0) & \bar{y}_{k2}(x_0) & \bar{y}_{k3}(x_0) \\ \bar{y}_{i1}(x) & \bar{y}_{i2}(x) & \bar{y}_{i3}(x) \end{vmatrix}, \quad y_{i2} = \begin{vmatrix} \bar{y}_{j1}(x_0) & \bar{y}_{j2}(x_0) & \bar{y}_{j3}(x_0) \\ \bar{y}_{m1}(x_0) & \bar{y}_{m2}(x_0) & \bar{y}_{m3}(x_0) \\ \bar{y}_{i1}(x) & \bar{y}_{i2}(x) & \bar{y}_{i3}(x) \end{vmatrix}, \tag{3}$$

přičemž $i = 1,2,3$, $j = 1$, *resp.* 2, *resp.* 3, $k = 2$, *resp.* 3, *resp.* 1

$m = 3$, *resp.* 1, *resp.* 2 *a kde* $\begin{pmatrix} \bar{y}_{11} \\ \bar{y}_{21} \\ \bar{y}_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_{22} \\ \bar{y}_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{y}_{13} \\ \bar{y}_{23} \\ \bar{y}_{33} \end{pmatrix}$ *je libovolný fundamentální systém systému* (1).

Důkaz: Každé řešení $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ systému (1) můžeme psát ve tvaru

$$y_i = c_1 y_{i1} + c_2 y_{i2} + c y_{i3}, \; i = 1,2,3, \tag{4}$$

kde y_{ij}, $i,j = 1,2,3$, jsou složky libovolného fundamentálního systému (1) a c_i, $i = 1,2,3$, jsou konstanty. Uvažujme řešení systému (1), pro které $y_1(x_0) = 0$, $y_2(x_0) = \alpha$, $y_3(x_0) = \beta$, kde α, β jsou dané konstanty. Složky tohoto řešení vyjádřeme ve tvaru (4), přičemž y_{i1}, y_{i2}, $i = 1,2,3$, jsou dány rovnicemi (3), y_{i3}, $i = 1,2,3$, jsou složky libovolného řešení systému (1) lineárně nezávislého na řešeních o složkách $y_{i1}, y_{i2}, i = 1,2,3$. Pro uvažované řešení platí

$$\begin{aligned} y_{11}(x_0)c_1 + y_{12}(x_0)c_2 + y_{13}(x_0)c_3 &= 0, \\ y_{21}(x_0)c_1 + y_{22}(x_0)c_2 + y_{23}(x_0)c_3 &= \alpha, \\ y_{31}(x_0)c_1 + y_{32}(x_0)c_2 + y_{33}(x_0)c_3 &= \beta. \end{aligned} \tag{5}$$

Ze soustavy (5) pro c_3 obdržíme

$$c_3 = \frac{\begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0) & 0 \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) & \alpha \\ y_{31}(x_0) & y_{32}(x_0) & \beta \end{vmatrix}}{W}, \tag{6}$$

kde W je wronskián fundamentálního systému $\begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ y_{3j} \end{pmatrix}$, $j = 1,2,3$; po dosazení za $y_{i1}, y_{i2}, i = 1,2,3$, z rovnic (3) do rovnice (6) obdržíme $c_3 = 0$.

Věta 3. *Všechna řešení $\mathbf{y}_j$, $j = 1$, resp. $j = 2$, resp. $j = 3$ systému* (1), *pro která v bodě x_0 platí $\mathbf{y}_1(x_0) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, resp. $\mathbf{y}_2(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$, resp. $\mathbf{y}_3(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, kde k je libovolná konstanta, jsou lineárně závislá.*

Důkaz. Provedeme důkaz pro $\mathbf{y}_3$, ostatní případy se dokáží obdobně. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{y}_3(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$; složky uvažovaného řešení můžeme dle věty 2. vyjádřit rovnicemi (2), kde $y_{i1}, y_{i2}, i = 1,2,3$, jsou vyjádřeny rovnicemi (3). Konstanty c_1, c_2 můžeme vypočíst ze soustavy

$$y_{21}(x_0)c_1 + y_{22}(x_0)c_2 = 0,$$
$$y_{31}(x_0)c_1 + y_{32}(x_0)c_2 = k.$$

Obdržíme

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_{22}(x_0) \\ k & y_{32}(x_0) \end{vmatrix}}{D} = \frac{k}{W}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_{21}(x_0) & 0 \\ y_{31}(x_0) & k \end{vmatrix}}{D} = 0,$$

kde

$D = \begin{vmatrix} y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) \\ y_{31}(x_0) & y_{32}(x_0) \end{vmatrix} = W^2$, přičemž W je wronskián fundamentálního systému řešení, pomocí něhož jsou vytvořeny funkce $y_{i1}, y_{i2}, i = 1,2,3$.

Stejně tak pro každé jiné řešení $\mathbf{y}_3$ typu $\mathbf{y}_3(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \end{pmatrix}$ obdržíme $c_1 = \dfrac{k_1}{W}$.

Položíme-li $\dfrac{k}{k_1} = c$, obdržíme $\dfrac{y_{i3}}{\bar{y}_{i3}} = c$, tj. $y_{i3} = c\bar{y}_{i3}$, $i = 1,2,3$.

Věta 4. *Nechť $x_0 < x_1 \in (-\infty, \infty)$ a nechť $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix}$ jsou dvě řešení systému* (1), *pro která platí*

$$y_{ij}(x_0) = y_{ij}(x_1) = 0, \tag{7}$$

$j = 1,2$, $i = 1$, resp. $i = 2$, resp. $i = 3$, potom řešení jsou závislá.

Důkaz. Ukážeme, že pro každé řešení $\mathbf{y}_2$, pro které platí rovnice (7), $i = 1$, se dá psát ve tvaru $\mathbf{y}_2 = c\mathbf{y}_1$, kde c je konstanta a $\mathbf{y}_1$ je rovněž řešení systému (1), pro které platí rovnice (7), $i = 1$. Utvořme řešení $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix}$ tak, že

$$y_{i1} = \begin{vmatrix} \bar{y}_{11}(x_0) & \bar{y}_{12}(x_0) & \bar{y}_{13}(x_0) \\ \bar{y}_{11}(x_1) & \bar{y}_{12}(x_1) & \bar{y}_{13}(x_1) \\ \bar{y}_{i1}(x) & \bar{y}_{i2}(x) & \bar{y}_{i3}(x) \end{vmatrix}, \quad i = 1,2,3,$$

kde $\begin{pmatrix} \bar{y}_{1j} \\ \bar{y}_{2j} \\ \bar{y}_{3j} \end{pmatrix}$, $j = 1,2,3$, je fundamentální systém systému (1) a kde jeden, z determinantů matice

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_{11}(x_0) & \bar{y}_{12}(x_0) & \bar{y}_{13}(x_0) \\ \bar{y}_{11}(x_1) & \bar{y}_{12}(x_1) & \bar{y}_{13}(x_1) \end{pmatrix}$$

je nenulový.

Zřejmě $y_{11}(x_0) = y_{11}(x_1) = 0$. Ukážeme, že $y_{i2} = cy_{i1}$. Složky y_{i2} můžeme psát ve tvaru

$$y_{i2} = c_1\bar{y}_{i1} + c_2\bar{y}_{i2} + c_3\bar{y}_{i3},$$

konstanty c_1, c_2, c_3 volíme tak, aby

$$\begin{aligned} c_1\bar{y}_{11}(x_0) + c_2\bar{y}_{12}(x_0) + c_3\bar{y}_{13}(x_0) &= 0, \\ c_1\bar{y}_{11}(x_1) + c_2\bar{y}_{12}(x_1) + c_3\bar{y}_{13}(x_1) &= 0; \end{aligned}$$

předpokládejme

$$\begin{vmatrix} \bar{y}_{11}(x_0) & \bar{y}_{12}(x_0) \\ \bar{y}_{11}(x_1) & \bar{y}_{12}(x_1) \end{vmatrix} \neq 0;$$

potom, označíme-li tento determinant D, obdržíme

$$\text{(8)} \qquad c_1 = \frac{c_3 \begin{vmatrix} \bar{y}_{12}(x_0) & \bar{y}_{13}(x_0) \\ \bar{y}_{12}(x_1) & \bar{y}_{13}(x_1) \end{vmatrix}}{D}, \qquad c_2 = \frac{c_3 \begin{vmatrix} \bar{y}_{13}(x_0) & \bar{y}_{11}(x_0) \\ \bar{y}_{13}(x_1) & \bar{y}_{11}(x_1) \end{vmatrix}}{D}, \qquad c_3 = c_3,$$

tj.

$$y_{i2}(x) = \frac{c_3}{D} \left\{ \bar{y}_{i1}(x) \begin{vmatrix} \bar{y}_{12}(x_0) & \bar{y}_{13}(x_0) \\ \bar{y}_{12}(x_1) & \bar{y}_{13}(x_1) \end{vmatrix} + \bar{y}_{i2}(x) \begin{vmatrix} \bar{y}_{13}(x_0) & \bar{y}_{11}(x_0) \\ \bar{y}_{13}(x_1) & \bar{y}_{11}(x_1) \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \bar{y}_{i3}(x) \begin{vmatrix} \bar{y}_{11}(x_0) & \bar{y}_{12}(x_0) \\ \bar{y}_{11}(x_1) & \bar{y}_{12}(x_1) \end{vmatrix} \right\} = cy_{i1}(x), \quad \text{kde} \quad c = \frac{c_3}{D}.$$

Tedy celkem platí $\mathbf{y}_2 = c\mathbf{y}_1$. Pro $i = 2$, resp. $i = 3$ v rovnicích (7) se důkaz provede obdobně.

Věta 5. *Předpokládejme, že pro $x \in (-\infty, \infty)$ je v systému (1) $a_i \neq 0$, $i = 1,2,3$. Potom pro řešení $\mathbf{y}$ systému (1) platí, že mezi dvěma po sobě následujícími kořeny složky y_i leží právě jeden kořen složky y_{i+1}, $i = 1,2,3$, přičemž pro $i = 3$ je $i + 1 = 1$.*

Důkaz. Za předpokladu $a_i \neq 0$ leží mezi dvěma kořeny složky y_1 alespoň jeden kořen složky y_2, neboť jsou-li $x_1 < x_2$ čísla, ve kterých $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$, potom existuje číslo $x_3 \in (x_1, x_2)$ tak, že $y_1'(x_3) = 0$; jelikož $y_1' = a_1 y_2$, $a_1 \neq 0$, je $y_2(x_3) = 0$. Podobný výsledek obdržíme pro y_2, y_3. Mezi dvěma po sobě následujícími kořeny $x_1 < x_2$ funkce y_1 leží lichý počet kořenů funkce y_1', tedy také lichý počet kořenů funkce y_2. V intervalu (x_1, x_2) však nemohou ležet tři kořeny složky y_2, neboť medzi těmito kořeny by ležely dle předchozího alespoň dva kořeny složky y_3, mezi kterými by ležel alespoň jeden kořen složky y_1 a čísla x_1, x_2 by nebyly dva po sobě následující kořeny složky y_1. Podobně provedeme důkaz pro y_2 a y_3.

Věta 6. *Systém (1) má za předpokladu $a_i(x) > 0$, $i = 1,2,3$, pro $x \in (-\infty, \infty)$ alespoň jedno řešení $\mathbf{y}$, které má v intervalu $(-\infty, \infty)$ všechny složky kladné.*

Důkaz. Utvořme fundamentální systém řešení systému (1), který označme $\bar{\mathbf{y}}_j = \begin{pmatrix} \bar{y}_{1j} \\ \bar{y}_{2j} \\ \bar{y}_{3j} \end{pmatrix}$, $j = 1,2,3$, přičemž v bodě x_0 pro tato řešení platí $\bar{\mathbf{y}}_1(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{\mathbf{y}}_2(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{\mathbf{y}}_3(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tato řešení mají pro $x > x_0$ všechny složky kladné. Buď $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$ posloupnost čísel konvergujících k $-\infty$. Utvořme posloupnost řešení systému (1) $\{\mathbf{y}_n\}_1^\infty$ tak, že složky

$$y_{in} = c_{1n}\bar{y}_{i1} + c_{2n}\bar{y}_{i2} + c_{3n}\bar{y}_{i3}, \tag{9}$$

$i = 1,2,3$, splňují podmínky $y_{1n}(x_n) = 0$, $y_{2n}(x_n) = 0$, $y_{3n}(x_n) > 0$, přičemž

$$y_{1n}^2(x_0) + y_{2n}^2(x_0) + y_{3n}^2(x_0) = 1. \tag{10}$$

Řešení $\mathbf{y}_n$ má tedy pro $x > x_n$, $n = 1,2,3, \ldots$ všechny složky kladné. Posloupnosti

$$\{y_{1n}(x_0)\}_1^\infty, \quad \{y_{2n}(x_0)\}_1^\infty, \quad \{y_{3n}(x_0)\}_1^\infty \tag{11}$$

jsou vzhledem k (10) chraničené. Existují tedy posloupnosti z (11) vybrané, které konvergují. Označme limity těchto vybraných posloupností α, β, γ.

Kvůli jednoznačnosti označme tyto posloupnosti jako (11). Označme dále $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ řešení systému (1), které splňuje podmínky

$$y_1(x_0) = \alpha,\ y_2(x_0) = \beta,\ y_3(x_0) = \gamma.$$

Řešení $\mathbf{y}$ zřejmě není triviální, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \{y_{1n}^2(x_0) + y_{2n}^2(x_0) + y_{3n}^2(x_0)\} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{12}$$

Zřejmě je pro $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} y_{1n}(x) = y_1,\ \lim_{n\to\infty} y_{2n}(x) = y_2,\ \lim_{n\to\infty} y_{3n}(x) = y_3,$$

neboť řešení (9) můžeme psát ve tvaru

$$y_{in}(x) = y_{3n}(x_0)\bar{y}_{i1}(x) + y_{2n}(x_0)\bar{y}_{i2}(x) + y_{1n}(x)\bar{y}_{i3}(x)$$

$i = 1,2,3$, a tedy

$$y_i(x) = \gamma\bar{y}_{i1}(x) + \beta\bar{y}_{i2}(x) + \alpha\bar{y}_{i3}(x),$$

$i = 1,2,3.$

Předpokládejme dále, že existuje číslo $\bar{x}$, ve kterém $y_1(\bar{x}) = 0$. Ukažme, že to není možné. Zřejmě existuje přir. číslo n_0 tak, že $x_{n0} < \bar{x}$, přičemž x_{n0} je číslo z výše uvedené posloupnosti čísel $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$, pro které $y_{1n0}(x_{n0}) = 0$, $y_{2n0}(x_{n0}) = 0$, $y_{3n0}(x_{n_0}) > 0$. Pro $n > n_0$ a pro $x > x_{n0}$ má řešení $\mathbf{y}_n$ všechny složky kladné, neboť $x > x_{n0} > x_n$, tj. $y_{1n}(x) > 0$, $y_{2n}(x) > 0$, $y_{3n}(x) > 0$; odtud plyne $\lim_{n\to\infty} y_{1n}(x) = y_1(x) \geqq 0$, $\lim_{n\to\infty} y_{2n}(x) = y_2(x) \geqq 0$, $\lim_{n\to\infty} y_{3n}(x) = y_3(x) \geqq 0$. Podle předpokladu má být $\lim_{n\to\infty} y(\bar{x}) = y_1(\bar{x}) = 0$. Zvolme libovolné $\bar{\bar{x}}$ tak, že $x_{n0} < \bar{\bar{x}} < \bar{x}$. Pro všechna $x > x_{n0}$, $n > n_0$, je $y_{1n}(x) > 0$, $y_{2n}(x) > 0$, $y'_{1n}(x) = a_1 y_{2n}(x) > 0$, tj. $0 < y_{1n}(\bar{\bar{x}}) < y_{1n}(\bar{x})$. Je-li $\lim_{n\to\infty} y_{1n}(\bar{x}) = 0$, je též $\lim_{n\to\infty} y_{1n}(\bar{\bar{x}}) = 0$. Jelikož $\bar{\bar{x}}$ je libovolné číslo z intervalu $(x_{n0}, \bar{x})$, je $\lim_{n\to\infty} y_{1n}(x) = 0$ v intervalu $(x_{n0}, \bar{x})$, t. j. $y_1(x) \equiv 0$ v intervalu $(x_{n0}, \bar{x})$, což je ve sporu s předpokladem, že $\mathbf{y}$ není triviální řešení. Tedy pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$ je $y_1(x) > 0$.
Obdobně provedeme důkaz pro $y_2(x)$ a $y_3(x)$.

II.

Označme A^* matici sdruženou s maticí A.
Adjungovaným systémem k systému (1) je systém

(13) $$\mathbf{z}' = -A^*\mathbf{z}.$$

Pro libovolná dvě řešení $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ systémů (1) a (13) platí

(14) $$y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = \text{konst.}$$

Máme-li dvě libovolné lineárně nezávislá řešení systému (1) $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix}$ a utvoříme-li funkce

(15) $$\omega_1 = \begin{vmatrix} y_{21} y_{22} \\ y_{31} y_{32} \end{vmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{vmatrix} y_{31} \, y_{33} \\ y_{11} \, y_{13} \end{vmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{vmatrix} y_{11} \, y_{12} \\ y_{21} \, y_{22} \end{vmatrix},$$

potom je známo, že $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ je řešením systému (1) [4].

Je-li $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ libovolné řešení systému (1), potom

(16) $$y_1\omega_1 + y_2\omega_2 + y_3\omega_3 = W,$$

kde W je wronskián řešení $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$; jsou-li řešení $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ lineárně závislá, je $W = 0$ a rovnice (16) je tvaru

(17) $$y_1\omega_1 + y_2\omega_2 + y_3\omega_3 = 0.$$

Z rovnice (16) obdržíme systémy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu, kterým vyhovují vždy dvě a dvě složky řešení $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$. Násobme rovnici (16) postupně funkcemi a_1, a_2, a_3, obdržíme rovnice

(18) $$a_i y_1 \omega_1 + a_i y_2 \omega_2 + a_i y_3 \omega_3 = a_i W,$$

$i = 1,2,3$. Dosadíme-li za $a_1 y_2$ do prvé rovnice y_1', za $a_2 y_3$ do druhé rovnice y_2' a za $a_3 y_1$ do třetí rovnice y_3', obdržíme z rovnic (1) a (18) pro složky řešení $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ postupně tyto výsledky:

složky y_1, y_2 hoví systému

$$(19)\qquad y_1' = a_1 y_2,$$
$$\omega_3 y_2' = a_2 W - a_2\omega_1 y_1 - a_2\omega_2 y_2,$$

složky y_2, y_3 hoví systému

$$(20)\qquad y_2' = a_2 y_3,$$
$$\omega_1 y_3' = a_3 W - a_3\omega_2 y_2 - a_3\omega_3 y_3,$$

složky y_3, y_1 hoví systému

$$(21)\qquad y_3' = a_3 y_1,$$
$$\omega_2 y_1' = a_1 W - a_1\omega_1 y_1 - a_1\omega_3 y_3.$$

Dosadíme-li za $a_1\omega_1$ do prvé rovnice (18) $-\omega_2'$, za $a_2\omega_2$ do druhé rovnice (18) $-\omega_3'$, za $a_3\omega_3$ do třetí rovnice (18) $-\omega_1'$, obdržíme z rovnice (13) a (18) pro složky řešení $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}$ postupně tyto výsledky:

složky ω_1, ω_3 hoví systému

$$(22)\qquad \omega_1' = -a_3\omega_3,$$
$$y_2\omega_3' = a_2 W + a_2 y_1\omega_1 + a_2 y_3\omega_3,$$

složky ω_2, ω_1 hoví systému

$$(23)\qquad \omega_2' = -a_1\omega_1,$$
$$y_3\omega_1' = a_3 W + a_3 y_2\omega_2 + a_3 y_1\omega_1,$$

složky ω_3, ω_2 hoví systému

$$(24)\qquad \omega_3' = -a_2\omega_2,$$
$$y_1\omega_2' = a_1 W + a_1 y_3\omega_3 + a_1 y_2\omega_2.$$

Vlastnosti řešení systému (19)—(24) lze aplikovat na příslušné složky řešení systému (1), resp. (13).

Předpokládáme stále, že funkce a_i, i = 1,2,3, jsou funkce spojité v intervalu $(-\infty, \infty)$ a že v tomto intervalu je $a_i \neq 0$, $i = 1,2,3$. Předpokládejme, že některá složka řešení $\mathbf{y}$ systému (1) se anuluje v bodě x_0. Na př. $y_1(x_0) = 0$. Potom složky řešení $\mathbf{y}$ můžeme dle věty 2. psát ve tvaru (2), kde y_{ij}, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$ jsou vyjádřeny rovnicemi (3). Pro funkce $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, definované rovnicemi (15), pak platí

$$\omega_1(x_0) = \overline{W}^2,\ \omega_2(x_0) = 0,\ \omega_3(x_0) = 0,$$

kde $\overline{W}$ je wronskián fundamentálního řešení systému, pomocí něhož jsou vytvořeny funkce y_{ij}, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$. Jelikož za našich předpokladů můžeme složky řešení y psát ve tvaru (2), je wronskián v systému (19)—(24) roven nule.

Stejně jako ve větě 1. lze pro funkce $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ dokázat, že v intervalu $(-\infty, x_0)$ je $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, $\omega_3 > 0$. Pro $x < x_0$ lze tedy funkcí ω_3 ve druhé rovnici systému (19) dělit; obdržíme

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_1 y_2, \\
y_2' &= -\frac{a_2}{\omega_3}(\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Položme $A = a_1 \exp\left\{-\int \frac{a_2\omega_2}{\omega_3}\,dx\right\}$, $B = -\frac{a_2\omega_1}{\omega_3}\exp\left\{\int \frac{a_2\omega_2}{\omega_3}\,dx\right\}$; systém

$$
\begin{aligned}
y_1' &= A y_2, \\
y_2' &= B y_1,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

má stejné kořenové vlastnosti jako systém (25). Známé kořenové vlastnosti systému (26) můžeme aplikovat na složky y_1, y_2 řešení $\mathbf{y}$ systému (1). K podobným výsledkům dojdeme u systémů (20), (21) za předpokladu $y_2(x_0) = 0$, resp. $y_3(x_0) = 0$.

Věta 7. *Nutnou a postačující podmínkou, aby pro řešení $\mathbf{y}(x)$ systému (1) typu $\mathbf{y}(x_0) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, resp. $\mathbf{y}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$, resp. $\mathbf{y}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, $k \neq 0$, platilo v prvém případě $y_2(x_1) = 0$, ve druhém případě $y_3(x_1) = 0$, ve třetím případě $y_1(x_1) = 0$, kde $x_1 \neq x_0$, je, aby existovalo řešení $\mathbf{z}(x)$ systému (13) typu $\mathbf{z}(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ v prvém případě, $\mathbf{z}(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ ve druhém případě, $\mathbf{z}(x_1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve třetím případě, kde $\alpha \neq 0$, pro které platí $z_1(x_0) = 0$ v prvém případě, $z_2(x_0) = 0$ ve druhém případě a $z_3(x_0) = 0$ ve třetím případě.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathbf{y}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, kde $k \neq 0$ a $y_1(x_1) = 0$, kde $x_1 \neq x_0$. Jelikož první složka se anuluje v bodě x_0, lze řešení $\mathbf{y}$ psát dle věty 2. ve tvaru

$$y_i = c_1 y_{i1} + c_2 y_{i2},\ i = 1,2,3,$$

kde funkce y_{i1}, y_{i2}, $i = 1,2,3$, jsou funkce určené rovnicemi (3), přičemž v rovnicích (3) místo bodu x_0 uvažujeme bod x_1. Pro uvedené funkce platí $y_{11}(x_1) = y_{21}(x_1) = 0$, $y_{12}(x_1) = y_{32}(x_1) = 0$. V bodě x_0 má být

$$c_1 y_{11}(x_0) + c_2 y_{12}(x_0) = 0,$$
$$c_1 y_{21}(x_0) + c_2 y_{22}(x_0) = 0,$$

tedy, aby konstanty c_1, c_2 byly nenulové, musí platit

$$\begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0) \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Funkci $\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix}$ můžeme považovat za třetí složku řešení $\mathbf{z}(x)$ systému (1), pro které

$$z_1 = \begin{vmatrix} y_{21} y_{22} \\ y_{31} y_{32} \end{vmatrix}, \quad z_2 = \begin{vmatrix} y_{31} y_{32} \\ y_{11} y_{12} \end{vmatrix}, \quad z_3 = \begin{vmatrix} y_{11} y_{12} \\ y_{21} y_{22} \end{vmatrix}$$

a které splňuje podmínky

$$z_1(x_1) \neq 0, \; z_2(x_1) = 0, \; z_3(x_1) = 0, \; z_3(x_0) = 0.$$

Ukažme obráceně, že ke každým dvěma bodům $x_0 \neq x_1$, pro které $z_3(x_0) = 0$, $\mathbf{z}(x_1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, existuje řešení $\mathbf{y}(x)$ systému (1), které splňuje podmínky

$$\mathbf{y}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \; y_1(x_1) = 0, \; k \neq 0.$$

Složky uvažovaného řešení $\mathbf{z}(x)$ můžeme psát ve tvaru (15), přičemž $\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislá řešení systému (1), splňující podmínky $y_{11}(x_1) = 0$, $y_{21}(x_1) = 0$, $y_{12}(x_1) = 0$, $y_{32}(x_1) = 0$, $\begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0) \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) \end{vmatrix} = 0$, takže $z_1(x_1) \neq 0$, $z_2(x_1) = 0$, $z_3(x_1) = 0$, $z_3(x_0) = 0$.

Řešení $\mathbf{y}(x)$ systému (1) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$y_i = c_1 y_{i1} + c_2 y_{i2} + c_3 y_{i3}, \tag{27}$$

$i = 1,2,3$, kde $\begin{pmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{pmatrix}$ je řešení systému (1), které spolu s řešeními $\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix}$

tvoří fundamentální systém řešení systému (1) a které splňuje podmínky $y_{23}(x_1) = y_{33}(x_1) = 0$. Konstanty c_1, c_2, c_3 v rovnicích (27) volíme tak, aby

$$\begin{aligned} c_1y_{11}(x_0) + c_2y_{12}(x_0) + c_3y_{13}(x_0) &= 0, \\ c_1y_{21}(x_0) + c_2y_{22}(x_0) + c_3y_{23}(x_0) &= 0, \\ c_1y_{31}(x_0) + c_2y_{32}(x_0) + c_3y_{33}(x_0) &= k, \end{aligned}$$

tj.

$$c_1 = \frac{k}{W}\begin{vmatrix} y_{12}(x_0) & y_{13}(x_0) \\ y_{22}(x_0) & y_{23}(x_0) \end{vmatrix}, \quad c_2 = \frac{k}{W}\begin{vmatrix} y_{13}(x_0) & y_{11}(x_0) \\ y_{23}(x_0) & y_{21}(x_0) \end{vmatrix}, \quad c_3 = \frac{k}{W}\begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0) \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) \end{vmatrix}$$

kde W je wronskián fundamentálního systému řešení $\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{pmatrix}$.

Odtud plyne $c_3 = 0$, $y_1(x_1) = c_1y_{11}(x_1) + c_2y_{12}(x_1) = 0$.

Tvrzení věty v prvém, resp. druhém případě obdržíme obdobně.

Literatura

[1] M. Greguš: O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice homogénnej tretieho rádu. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, roč. V, č. 2, 1955, 73—85.

[2] M. Greguš: O niektorých vzťahoch medzi integrálmi navzájom adjungovaných lineárnych diferenciálnych rovníc tretieho rádu a o jednom okrajovom probléme. Acta facultatis rerum naturalium U. C., Bratislava, T. I., 1956, 265—272.

[3] M. Greguš: Über einige Eigenschaften der Büschel von Lösungen der linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung. Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha, 311—319.

[4] E. A. Coddington—N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations.

Adresa autorky: Katedra matematiky, Brno, Janáčkovo nám. 2a

Do redakcie došlo 20. 10. 1964

О свойствах корней решений системы трёх линейных однородных дифференциальных уравнений 1-ого порядка

С. ШАНТАВА-КРОГОВА

Выводы

В настоящей работе изучаются свойства корней решений системы (1)$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, где A-квадратная матрица 3-го порядка и y-вектор с тремя компонентами.

В первой части работы показано, что при некоторых условиях компоненты решения исследуемой системы (1) имеют только одну двойную нулевую точку; эта точка делит интервал (—∞, ∞) в такие два интервала, что в одном из них компоненты решения

системы (1) не обладают нулевыми точками. Далее заданы условия, при которых нули компонент решений системы (1) взаимно разделяют друг друга, и условия, при которых существует решение, компоненты которого не имеют ни одной нулевой точки.

Во второй части изучаются соотношения между решениями системы (1) и решениями сопряженной с ней системой.

В конце работы показано, что компоненты исследуемых решений соответствуют системе двух линейных дифференциальных уравнений 1-ого порядка.

Die Wurzeleigenschaften des Systems von drei linearen homogenen Differentialgleichungen I. Ordnung

S. ŠANTAVÁ-KROHOVÁ

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Wurzeleigenschaften des Systems $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, wo A eine quadratische Matrix des 3. Grades und $\mathbf{y}$ ein Spaltenvektor mit drei Komponenten ist, studiert. In dem ersten Teil wird gezeigt, dass die Komponenten der Lösung des erwähnten Systems unter gegebenen Bedingungen nur eine Doppelnullstelle haben können; diese Nullstelle teilt das Intervall $(-\infty, \infty)$ in zwei Intervalle, so dass in einem von ihnen die Komponenten der Lösung des Systems $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ keine Nullstellen besitzen.

Weiter werden angegeben: Bedingungen, unter denen sich die Nullstellen der Komponenten abtrennen; Bedingungen, unter denen eine Lösung existiert, deren Komponenten keine Nullstellen haben; Sätze über linear abhängige Lösungen.

In dem zweiten Teil werden die Relationen zwischen den Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ und des zu diesem adjungierten Systems erörtert. Zum Abschluss wird gezeigt, dass die früher erwähnten Komponenten den Systemen von zwei Lineardifferentialgleichungen 1. Ordnung entsprechen.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X,5 — MATHEMATICA XIII, 1966)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X., FASC. V. MATHEMATICA XIII 1966

O použití Ritzovej metódy

J. KAČUR

V práci sa dokazuje, že za istých podmienok mocnina kladne definitného operátora je kladne definitná. Z toho vyplýva kladná definitnosť niektorých operátorov, napr. polyharmonických, vystupujúcich v istých okrajových úlohách z teórie parciálnych diferenciálnych rovníc.

Pod kladne definitným operátorom A v H budeme rozumieť operátor, ktorého obor definície D_A je hustá množina v H, je lineárny (môže byť i neohraničený) a pre všetky $u \in D_A$ platí:

$$(Au, u) \geqq \gamma^2 \| u \|^2, \ \gamma > 0 \text{ je konštanta.}$$

Je známe, že problém existencie riešenia

$$Ax = f, \quad f \in H \tag{1}$$

je pre kladne definitný operátor A v H ekvivalentný s problémom existencie minima funkcionála

$$F(x) = (Ax, x) - (x, f) - (f, x) \tag{2}$$

Pre takýto operátor postupnosť približných riešení minima funkcionála (2) Ritzovou metódou konverguje v H ku zovšeobecnenému riešeniu x_0 rovnice (1), a teda ak $x_0 \in D_A$, je x_0 aj riešením (1).

Lemma. *Kladne definitný operátor A v komplexnom priestore H je symetrický, t. j. pre všetky $u, v \in D_A$* je $(Au, v) = (u, Av)$.

D ô k a z. Nech $u \in D_A$, potom $(Au, u) \geqq \gamma^2 \| u \|^2$ a preto výraz (Au, u), $u \in D_A$, je reálny. Platí teda

$$(Au, u) = (Au, u) = (u, Au) \tag{3}$$

Z vlastnosti operátora A plynie, že D_A je lineárny podsystém H. Ak $u, v \in D_A$, podľa (3) máme, že

$$(A(u+v), u+v) = (u+v, A(u+v))$$
$$(A(u+iv), u+iv) = (u+iv, A(u+iv))$$

Po úprave a sčítaní týchto rovníc dostávame $(Au, v) = (u, Av)$.

Z definície súčinu operátorov je zrejmé, ak A je operátor s definičným oborom M_1, a ak postupnosť množín $M_1, M_2, \dots M_n$ má vlastnosti

1° $M_k \subseteq M_{k-1}, k = 2, \dots, n$

2° ak $u \in M_k$, potom $Au \in M_{k-1}, k = 2, \dots, n$

potom možno na M_k definovať operátor A^k.

Veta 1. *Nech A je kladne definitný operátor v H s konštantou γ (v prípade reálneho H aj symetrický), definovaný na M_1. Ak existuje postupnosť množín $M_1, M_2, \dots, M_n$ tak, že*

1° $M_k \subseteq M_{k-1}$, $k = 2, \dots, n$

2° ak $u \in M_k$, potom $Au \in M_{k-1}$, $k = 2, \dots, n$

3° M_n je hustá v H,

potom operátor A^k je kladne definitný v H s konštantou γ^k.

Dôkaz.

Podľa predpokladu $(Au, u) \geqq \gamma^2 \| u \|^2$, $u \in M_1$.

Z toho na základe Schwarzovej nerovnosti

$$\| Au \| \, \|u\| \geqq (Au, u) \geqq \gamma^2 \| u \|^2,$$

odkiaľ

$$\| Au \|^2 \geqq \gamma^4 \| u \|^2 \tag{4}$$

Vetu dokážeme úplnou indukciou. Nech $(A^k u, u) \geqq \gamma^{2k} \| u \|^2, u \in M_k$ pre $k = 1, 2, \dots, n-1$. Potom $(A^{k+1}u, u) = (A(A^k u), u) = (A^k u, u) = (A^{k-1}(Au), Au) \geqq \gamma^{2k-2} \| Au \|^2 \geqq \gamma^{2k+2} \| u \|^2, u \in M_{k+1}$. Ak $k = 1$, potom pod operátorom A^{k-1} rozumieme identický operátor.

Vetu 1 môžme aplikovať na tento problém:

Na množine $\Omega + \Gamma$, kde Ω je ohraničená oblasť v E_m (Eukleidovský m-rozmerný priestor) a Γ je po kusoch hladká hranica oblasti Ω, uvažujeme o okrajovej úlohe pre eliptickú samoadjungovanú parciálnu diferenciálnu rovnicu s konštantnými koeficientmi $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f$, f je spojitá funkcia, $u = 0$ na Γ. Označme operátor na ľavej strane tejto rovnice

$$A \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \tag{5}$$

a M_k množinu funkcií, ktoré majú spojité 2k-té parciálne derivácie v $\Omega + \Gamma$ a na Γ spĺňajú podmienky

$$u = 0 \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x_{i1}\partial x_{i2}\partial x_{i3}\partial x_{i4}} = 0$$

(6) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{i1}\partial x_{i2}} = 0 \qquad \frac{\partial^{2k-2} u}{\partial x_{i1}\partial x_{i2}\ldots\partial X_{2k-2}} = 0$$

pre všetky kombinácie indexov.

Platí veta (1, str. 100): Množina funkcií, ktoré majú všetky parciálne derivácie v Ω a sú rovné nule v nejakej hraničnej oblasti Ω (t. j. v prieniku ε-ého okolia hranice Γ s množinou $\Omega + \Gamma$), je hustá v $L_2(\Omega)$.

Tým skôr pre $k = 1,2, \ldots, n$ je množina M_k hustá v $L_2(\Omega)$. Je známe, že A definovaný na M_1 možno považovať za kladne definitný operátor v komplexnom priestore $L_2(\Omega)$. Pretože množiny M_k spĺňajú podmienky vety 1, operátor A^k vystupujúci v okrajovej úlohe pre rovnicu

(7) $$A^k u = f$$

s okrajovými podmienkami (6), je kladne definitný v $L_2(\Omega)$.

Špeciálnym prípadom rovnice (7) s okrajovými podmienkami (6) je polyharmonická rovnica $L^k u = f$, kde L je Laplaceov operátor, s okrajovými podmienkami (6).

Na ten istý problém sa dá previesť rovnica (7) s nehomogénnymi okrajovými podmienkami (6).

Označme λ prvú vlastnú hodnotu operátora (5). Nech $B(x)$ je spojitá funkcia z $L_2(\Omega)$ a nech $B(x) > -\lambda$, potom operátor

(8) $$A' = A + B(x) \quad \text{(t. j. } A'u = Au + B(x)u\text{)}$$

definovaný na M_1 je opäť kladne definitný v $L_2(\Omega)$.

Vidno, že aj operátor A'^k v rovnici $A'^k u = f$, pri nehomogénnych okrajových podmienkach (6) je kladne definitný v $L_2(\Omega)$.

Literatúra

(1) С Михлин: Проблема минимума квадратичного функционала, Москва 1952

Adresa autora: Katedra matematickej analýzy PFUK, Bratislava,
Šmeralova 2/b

Do redakcie došlo 20. 6. 1964.

О применении метода Ритца

Й. КАЧУР

Выводы

В работе доказана теорема:

Пусть A положительно-определенный оператор в H, с постоянной γ (в случае действительного H и симметричен), определенный на M_1.

Если существует последовательность множеств M_1, M_2, ... M_n так, что

1° $M_k \subseteq M_{k-1}$ $k = 2, \ldots, n$

2° эсли $y \in M_k$, то $Ay \in M_{k-1}$, $\kappa = 2, \ldots, n$

3° M_n плотно в H

то оператор A^k, определенный на M_k, положительно-определенный в H, с постоянной γ^k.

Далее теорема применена в краевой задаче самосопряженного уравнения в частных производных эллиптического типа, с постоянными коэфициентами.

Über die Verwendung der Ritz-schen Methode

J. KAČUR

Zusammenfassung

In der Arbeit wird folgender Satz bewiesen:

Satz 1. A sei ein positiv definit Operator in H mit der Konstante γ (im Falle reellen H auch symmetrisch) definiert auf M_1. Wenn eine solche Folge der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ existiert dass,

1° $M_k \subset M_{k-1}$, $k = 2, \ldots, n$

2° wenn $u \in M_k$, dann $Au \in M_{k-1}$, $k = 2, \ldots, n$

3° M_n ist dicht in H,

dann ist der Operator A^k definiert auf M_k, positiv definit mit der Konstante γ^k.

Weiter wird der Satz in der Randaufgabe der selbstadjungierten elliptischen Parziellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten verwendet.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X,5 — MATHEMATICA, XIII, 1966)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X., FASC. V. MATHEMATICA XIII 1966

O niektorých vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice tvaru $y'''(x) + p(x)y''(x) + 2A(x)y'(x) + [A'(x) + b(x)]y(x) = 0$

L. MORAVSKÝ

Práca je rozdelená na tri časti.

V prvej časti je odvodená diferenciálna rovnica druhého rádu, ktorej vyhovujú tzv. zväzky riešení diferenciálnej rovnice (a) a zostrojená tzv. kváziadjungovaná diferenciálna rovnica k rovnici (a).

V druhej časti sú odvodené postačujúce podmienky, za ktorých riešenia diferenciálnej rovnice (a) s dvojnásobným nulovým bodom nemajú ďalší nulový bod pre $x < a$, resp. $x > a$, kde $a \in (-\infty; \infty)$ a za ktorých nulové body riešení diferenciálnej rovnice (a) sa oddeľujú.

V tretej časti sú odvodené postačujúce podmienky, pri ktorých každé riešenie diferenciálnej rovnice (a) má najviac dva nulové body, alebo jeden dvojnásobný.

V článku sme použili metódy z prác M. Greguša [1] a [2] o vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice $y'''(x) + 2A(x)y'(x) + [A'(x) + b(x)]y(x) = 0$.

I.

Uvažujme homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu tretieho rádu

$$(\bar{a}) \qquad y'''(x) + p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0,$$

kde $p(x)$, $q'(x)$, $r(x)$ sú spojité funkcie $x \in (-\infty; \infty)$. Potom diferenciálna rovnica (a) sa dá písať v tvare

$$(a) \qquad y'''(x) + p(x)y''(x) + 2A(x)y'(x) + [A'(x) + b(x)]y(x) = 0,$$

kde $q(x) = 2A(x)$, $r(x) = A'(x) + b(x)$, $b(x) = r(x) - A'(x) = r(x) - \frac{1}{2}q'(x)$.

Nech $a \in (-\infty; \infty)$. Pre každé riešenie diferenciálnej rovnice (a) platia integrálne identity

$$(1)\quad y(x)y''(x) - \frac{1}{2}y'^2(x) + A(x)y^2(x) + \int_a^x pyy''dt + \int_a^x by^2dt = y(a)y''(a) -$$

$$- \frac{1}{2}y'^2(a) + A(a)y^2(a)$$

$$(2)\quad y''(x) + 2A(x)y(x) + \int_a^x py''dt + \int_a^x (b - A')ydt = y''(a) + 2A(a)y(a).$$

O ich správnosti sa presvedčíme derivovaním a vhodným upravením.

Veta 1. *Nech* $A(x) \leqq 0$, $A'(x)$, $p(x) \geqq 0$, $b(x) \geqq 0$ $[p(x) \leqq 0,\ b(x) \leqq 0]$ *sú spojité funkcie* $x \in (-\infty; \infty)$. *Nech aspoň jedna z funkcií* $p(x)$, $b(x)$ *nie je identicky rovná nule v žiadnom čiastočnom intervale. Nech riešenie* $y(x)$ *diferenciálnej rovnice* (a) *vyhovuje podmienkam*

$$y(a) = y'(a) = 0,\ y''(a) \neq 0.$$

Potom $y(x)$ *a jeho prvá a druhá derivácia nemá nulový bod pre* $x < a$ $[x > a]$.

Dôkaz. Vetu 1. dokážeme pre $p(x) \geqq 0$, $b(x) \geqq 0$. Podobne sa veta dokáže pre $p(x) \leqq 0$, $b(x) \leqq 0$.

Nech $y(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (a) s dvojnásobným nulovým bodom v bode a.

Predpokladajme opak. Nech $y''(x)$ má v bode x_1 prvý nulový bod naľavo od a. Integrálna identita (1) pre riešenie $y(x)$ má tvar

$$y(x)y''(x) - \frac{1}{2}y'^2(x) + A(x)y^2(x) + \int_a^x pyy''dt + \int_a^x by^2dt = 0.$$

V bode x_1 platí

$$-\frac{1}{2}y'^2(x_1) + A(x_1)y^2(x_1) - \int_{x_1}^a pyy''dt - \int_{x_1}^a by^2dt = 0.$$

Čo je spor. Teda $y''(x)$ nemá pre $x < a$ žiaden nulový bod, t. j. $y''(x) < 0$ $[y''(x) > 0]$ pre $x < a$. Preto funkcia $y(x)$ je konkávna [konvexná] pre $x < a$ a teda ani $y'(x)$, ani $y(x)$ nemá nulový bod pre $x < a$.

Dôsledok 1. Každé riešenie diferenciálnej rovnice (a), ktoré spĺňa predpoklady vety 1. má najviac jeden dvojnásobný nulový bod.

Každé riešenie diferenciálnej rovnice (a), ktoré vyhovuje podmienke $y(a) = 0$, dá sa písať v tvare $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, kde $y_1(x)$, $y_2(x)$ v bode a vyhovuje podmienkam

$$y_1(a) = y_1'(a) = 0,\ y_1''(a) \neq 0,$$
$$y_2(a) = y_2''(a) = 0,\ y_1'(a) \neq 0.$$

Množinu riešení diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $y(a) = 0$ nazývame zväzkom v bode a.

Zväzok v bode $a \in (-\infty; \infty)$ vyhovuje diferenciálnej rovnici druhého rádu tvaru

$$\begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x), & y(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x), & y'(x) \\ y_1''(x), & y_2''(x), & y''(x) \end{vmatrix} = 0,$$

t. j.

$$(\alpha) \quad y''(x) \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x) \end{vmatrix} - y'(x) \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1''(x), & y_2''(x) \end{vmatrix} + y(x) \begin{vmatrix} y_1'(x), & y_2'(x) \\ y_1''(x), & y_2''(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Aby sme mohli (α) prepísať do jednoduchšieho tvaru, označme

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Potom

$$\omega'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1''(x), & y_2''(x) \end{vmatrix}, \quad \omega''(x) = \begin{vmatrix} y_1'(x), & y_2'(x) \\ y_1''(x), & y_2''(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1'''(x), & y_2'''(x) \end{vmatrix}.$$

Pretože $y_1(x)$, $y_2(x)$ sú riešenia diferenciálnej rovnice (a), platí

$$\omega''(x) + p(x)\omega'(x) + 2A(x)\omega(x) = \begin{vmatrix} y_1'(x), & y_2'(x) \\ y_1''(x), & y_2''(x) \end{vmatrix}.$$

Takto (α) môžeme prepísať do tvaru

$$(\beta) \quad \omega(x)y''(x) - \omega'(x)y'(x) + [\omega''(x) + p(x)\omega'(x) + 2A(x)\omega(x)]y(x) = 0.$$

Ak $\omega(x) \neq 0$, rovnicu (β) možno napísať v tvare

$$(\gamma) \qquad \left[\frac{y'(x)}{\omega(x)}\right]' + \frac{\omega''(x) + p(x)\omega'(x) + 2A(x)\omega(x)}{\omega^2(x)} \cdot y(x) = 0.$$

Ukážeme, že za predpokladov vo vete 1. je $\omega(x) \neq 0$ pre $x > a[x < a]$. Je zrejmé, že $\omega(a) = \omega'(a) = 0$, $\omega''(a) \neq 0$. Predpokladajme opak. Nech $\omega(x)$ má v bode $x_1 > a$ prvý nulový bod napravo od bodu a. Potom by rovnice

$$c_1 y_1(x_1) + c_2 y_2(x_1) = 0$$
$$c_1 y_1'(x_1) + c_2 y_2'(x_1) = 0$$

mali netriviálne riešenie pre c_1, c_2, t. j. existovalo by riešenie $\bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x)$ zo zväzku v bode a, ktoré má v bode x_1 dvojnásobný nulový bod. Čo je spor s vetou 1.

Veta 2. *Nech $y_1(x)$, $y_2(x)$ sú dve lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (a). Potom*

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

je riešením diferenciálnej rovnice

$$(b) \quad \omega'''(x) + [p(x)\omega'(x)]' + p(x)\omega''(x) + [2A(x) + p^2(x)]\omega'(x) + [A'(x) - b(x) + 2A(x)p(x)]\omega(x) = 0.$$

D ô k a z. Pretože $y_1(x)$, $y_2(x)$ sú lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (a) platí

$$\omega''(x) + p(x)\omega'(x) + 2A(x)\omega(x) = \begin{vmatrix} y_1'(x), & y_2'(x) \\ y_1''(x), & y_2''(x) \end{vmatrix}.$$

Derivovaním tejto rovnice dostávame

$$\omega'''(x) + [p(x)\omega'(x)]' + 2A'(x)\omega(x) + 2A(x)w'(x) = \begin{vmatrix} y_1'(x), & y_2'(x) \\ y_1'''(x), & y_2'''(x) \end{vmatrix},$$

odkiaľ vyplýva

$$(b) \qquad \omega'''(x) + [p(x)\omega'(x)]' + p(x)\omega''(x) + [2A(x) + p^2(x)]\omega'(x) + [A'(x) - b(x) + 2A(x)p(x)]w(x) = 0.$$

Rovnicu (b) budeme v ďalšom nazývať kváziadjungovanou diferenciálnou rovnicou k rovnici (a).

P o z n á m k a 1. Ak v rovnici (a) je $p(x) \equiv 0$ pre $x \in (-\infty; \infty)$, potom táto prejde do tvaru

$$(a_1) \qquad y'''(x) + 2A(x)y'(x) + [A'(x) + b(x)]y(x) = 0$$

a k nej kváziadjungovaná do tvaru

$$(b_1) \qquad \omega'''(x) + 2A(x)\omega'(x) + [A'(x) - b(x)]\omega(x) = 0.$$

P o z n á m k a 2. Ukážme, že derivovaním diferenciálnej rovnice (β) za predpokladu $\omega(x) \neq 0$ dostávame diferenciálnu rovnicu (a).

Derivovaním rovnice (β) dostávame

$$\omega(x)y'''(x) + \{\omega'''(x) + [p(x)\omega'(x)]'\}y(x) + p(x)\omega'(x)y'(x) + 2A'(x)\omega(x)y(x) + 2A(x)\omega'(x)y(x) + 2A(x)\omega(x)y'(x) = 0.$$

Z diferenciálnej rovnice (β) vyplýva

$$(3) \qquad \omega''(x)y(x) - \omega'(x)y'(x) = -\omega(x)y''(x) - p(x)\omega'(x)y(x) - 2A(x)\omega(x)y(x)$$

a teda z rovnice (b) a zo vzťahu (3) dostávame diferenciálnu rovnicu (a).

II.

Veta 3. *Nech* $A(x) \leqq 0$, $A'(x)$, $p(x) \geqq 0$, $A'(x) + b(x) \geqq 0$ $[p(x) \leqq 0$, $A'(x) + b(x) \leqq 0]$ *sú spojité funkcie* $x \in (-\infty; \infty)$. *Nech* $y(x)$ *je riešením diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti* $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) \neq 0$.

Potom $y(x)$ *a jeho prvá a druhá derivácia nemá nulový bod pre* $x < a[x > a]$.

Dôkaz. Dokážeme prvý prípad vety 3. Násobme diferenciálnu rovnicu (a) funkciou $y'(x)$ a integrujme člen za členom od a po x. Dostávame integrálnu identitu

$$(4)\quad y'(x)y''(x) - \int_a^x y''^2 dt + \int_a^x py'y''dt + \int_a^x 2Ay'^2 dt + \int_a^x (A'+b)yy'dt = y'(a)y''(a).$$

Predpokladajme opak. Nech x_1 je prvý nulový bod $y''(x)$ pre $x < a$. Integrálna identita (4) v bode x_1 pre riešenie $y(x)$ je tvaru

$$\int_{x_1}^a y''^2 dt - \int_{x_1}^a py'y''dt - \int_{x_1}^a 2Ay'^2 dt - \int_{x_1}^a (A' + b)yy'dt = 0.$$

Čo je spor. Tým je dokázaná prvá časť vety 3. Podobne sa dokáže druhá čať vety.

Veta 4. *Nech* $A(x) \leqq 0$, $A'(x)$, $p(x) \geqq 0$, $b(x) - A'(x) \geqq 0[p(x) \leqq 0$, $b(x) - A'(x) \leqq 0]$ *sú spojité funkcie* $x \in (-\infty; \infty)$. *Nech aspoň jedna z funkcií* $p(x)$, $b(x) - A'(x)$ *nie je identicky rovná nule v žiadnom čiastočnom intervale.*

Potom riešenie $y(x)$ *diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti*

$$y(a) = y'(a) = 0,\ y''(a) \neq 0$$

a jeho prvá a druhá derivácia nemá pre $x < a$ $[x > a]$ *žiaden nulový bod.*

Dôkaz. Dokážeme prvý prípad vety 4. Podobne sa dokáže druhý prípad vety.

Predpokladajme opak. Nech x_1 je prvý nulový bod $y''(x)$ pre $x < a$. Integrálna identita (2) v bode x_1 pre riešenie $y(x)$ je tvaru

$$0 = y''(a) - 2A(x_1)y(x_1) + \int_{x_1}^a py''dt + \int_{x_1}^a (b - A')ydt.$$

Čo je spor. Tým je dokázaný prvý prípad vety 4.

Podobne, ako v práci [1] sa dá dokázať nasledujúca veta.

Veta 5. *Nech* $\omega(x) \neq 0$ *pre* $x > a[x < a]$ *je riešením diferenciálnej rovnice* (b) *s dvojnásobným nulovým bodom v bode a. Potom nulové body zväzku v bode a diferenciálnej rovnice (a) sa oddeľujú napravo [naľavo] od bodu a. Ak* x_1 *je prvý nulový bod riešenia* $y_1(x)$ *vlastnosti* $y_1(a) = y_1'(a) = 0$, $y''(a) \neq 0$ *napravo [naľavo] od bodu a, potom každé riešenie zväzku rôzne od* $y_1(x)$ *má medzi* a *a* x_1 *práve jeden nulový bod.*

III.

Lemma 1. Nech $p(x) \geqq 0[p(x) \leqq 0]$ je spojitá funkcia $x \in (-\infty; \infty)$ a nech $p(x) \equiv 0$ neplatí v žiadnom intervale. Nech $z(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice

$$z'''(x) - p(x)z''(x) = 0 \tag{c}$$

vlastnosti

$$z(a) = z'(a) = 0, \; z''(a) \neq 0.$$

Potom riešenie $z(x)$ a jeho prvá a druhá derivácia nemá žiaden nulový bod pre $x > a$.

Dôkaz. Dokážeme prvý prípad lemmy 1. Je zrejmé, že

$$[z(x)z''(x)]' = z'(x)z''(x) + z(x)z'''(x). \tag{5}$$

Z diferenciálnej rovnice (c) a zo vzťahu (5) vyplýva

$$[z(x)z''(x)]' = z'(x)z''(x) + p(x)z(x)z''(x). \tag{6}$$

Nech $x_0 > a$ je prvý nulový bod $z''(x)$. Integrovaním (6) od a do x_0 dostávame

$$\frac{1}{2} z'^2(x_0) + \int_a^{x_0} pzz''dt = 0.$$

Čo je spor. Odtiaľ vyplýva dôkaz prvej časti lemmy 1. Podobne sa dokáže druhá časť.

Lemma 2. Nech $z(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (c) a $y(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (a). Nech $a < b \in (-\infty; \infty)$.

Potom platí

$$y''(b)z''(b) - y''(a)z''(a) + \int_a^b 2Ay'z''dt + \int_a^b (A' + b)yz''dt = 0 \tag{7}$$

$$y''(b)z''(b) - y''(a)z''(a) + 2A(b)y(b)z''(b) - 2A(a)y(a)z''(a) + \int_a^b (b - - A' - 2Ap)yz''dt = 0. \tag{8}$$

Dôkaz prevedieme jednoducho tak, že násobíme diferenciálnu rovnicu (a) funkciou $z''(x)$ a integrujeme člen po člene od a po b. Vhodnou úpravou dostávame (7) a (8).

Veta 6. *Nech $A(x) \leqq 0$, $A'(x)$, $p(x) \geqq 0$, $b(x) \geqq 0$ $[p(x) \leqq 0$, $b(x) \leqq 0]$ sú spojité funkcie $x \in (-\infty; \infty)$ také, že $A'(x) + b(x) \leqq 0$ $[A'(x) + b(x) \geqq 0]$, pritom nech $p(x)$ nie je identicky rovná nule v žiadnom čiastočnom intervale.*

Potom každé riešenie diferenciálnej rovnice (a) má najviac dva nulové body, alebo jeden dvojnásobný.

Dôkaz. Dokážeme prvý prípad vety 6. Nech $a \in (-\infty; \infty)$ je ľubovoľný, ale pevný bod. Nech $y(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti

$$y(a) = y'(a) = 0, \; y''(a) > 0.$$

Stačí, ak ukážeme, že $y(x)$ nemá nulový bod pre $x > a$ (pre $x < a$ nemá nulový bod, ako vyplýva z vety 1. pretože každé riešenie $\bar{y}(x)$ diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $\bar{y}(a) = 0$ vyhovuje tej istej diferenciálnej rovnici druhého radu tvaru (β) a za predpokladov vety 6. je $\omega(x) \neq 0$ pre $x > a$.

Predpokladajme opak. Nech x_1 je prvý nulový bod $y''(x)$ pre $x > a$. Na interval $< a; x_1 >$ použijeme identitu (7) z lemmy 2., pritom $z(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (c) vlastnosti

$$z(a) = z'(a) = 0, \; z''(a) > 0.$$

Z integrálnej identity (7) dostávame

$$-y''(a)z''(a) + \int_a^{x_1} 2Ay'z''dt + \int_a^{x_1} (A' + b)yz''dt = 0.$$

Čo je spor. Odtiaľ a z lemmy 1. vyplýva prvé tvrdenie vety 6. Podobne sa dokáže druhý prípad vety 6.

Veta 7. *Nech $A(x) \leqq 0$, $A'(x)$, $b(x) \geqq 0$, $p(x) \geqq 0$ [$p(x) \leqq 0$, $b(x) \leqq 0$] sú spojité funkcie $x \in (-\infty; \infty)$ také, že $b(x) - A'(x) - 2A(x)p(x) \leqq 0$ [$b(x) - A'(x) - 2A(x)p(x) \geqq 0$] pre $x \in (-\infty; \infty)$ a pritom funkcia $p(x)$ nie je identicky rovná nule v žiadnom čiastočnom intervale.*

Potom každé riešenie diferenciálnej rovnice (a) má najviac dva nulové bod y, alebo jeden dvojnásobný.

Dôkaz sa prevedie podobne ako vo vete 6. s použitím identity (8) a lemmy 1.

Literatúra

[1] M. Greguš: Lineárna diferenciálna rovnica homogénna tretieho rádu. Habilitačná práca, Prírodovedecká fakulta UK v Bratislave, 1959.

[2] M. Greguš: Über die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung. Wiss. Z. Univ. Halle-Math.-Nat. XII/3, S. 265—286. März 1963.

[3] Dž. Sansone: Obyknovennyje dif. uravnenija, I. Perivod s italijanskogo, Moskva, 1963.

Adresa autora: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie BF-VŠT, Košice, Švermova 3.

Do redakcie došlo: 5. 10. 1964.

О некоторых свойствах решений дифференциального уравнения вида

$$y'''(x) + p(x)y''(x) + 2A(x)y'(x) + [A'(x) + b(x)]y(x) = 0$$

Л. МОРАВСКИ

Выводы

Работа разделена на три части:

В первой части выведено дифференциальное уравнение второго порядка, которому соответствуют тнз. пучки решений дифференциального уравнения и построенное тнз. квазиадъюнированное дифференциальное уравнение к уравнению (a).

Во второй части выведены достаточные условия, при которых решения дифференциального уравнения с двукратной нулевой точкой не имеют дальнейшей нулевой точки для $x < a$, респ. $x > a$, где $a \in (-\infty; \infty)$ и при которых нулевые точки решений дифференциального уравнения отделяются.

В третьей части выведены достаточные условия, при которых каждое решение дифференциального уравнения имеет самое большее две нулевые точки, или одну двукратную.

В статье применялись методы работ М. Грегуша [1] и [2] о свойствах решения дифференциального уравнения $y'''(x) + 2A(x)y'(x) + [A'(x) + b(x)]y(x) = 0$.

Über einige Eigenschaften der Lösungen der Diferentialgleichung

$$y'''(x) + p(x)y''(x) + 2A(x)y'(x) + [A'(x) + b(x)]y(x) = 0$$

L. MORAVSKÝ

Zusammenfassung

Die Arbeit wird in drei Teile geteilt:

Im ersten Teil wird die Differentialgleichung zweiten Grades abgeleitet, der die sog. Lösungsbündel der Differentialgleichung (*a*) entsprechen und die sog. quasiadjungierte Differentialgleichung zur Gleichung (*a*) definiert.

Im zweiten Teil werden die genügenden Bedingungen abgeleitet, unter denen die Lösungen der Differentialgleichung (*a*) mit doppelten, Nullstelle keine weitere Nullstelle für $x < a$ bzw. $x > a$ haben, wo $a \in (-\infty; \infty)$ und unter denen sich die Nullstellen der Lösungen der Differenzialgleichung (*a*) trennen.

Im dritten Teil werden die genügenden Bedingungen abgeleitet, unter denen jede Lösung der Differentialgleichung (*a*) höchstens zwei Nullstellenpunkte oder eine doppelte hat.

Im Artikel wurden die Methoden aus den Arbeiten von M. Greguš [1] und [2] über die Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $y'''(x) + 2A(x)y'(x) + [A'(x) + b(x)]y(x) = 0$ verwendet.

ACTA FACULTATIS
RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAIANAE
MATHEMATICA

Vydalo Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave — Schv. vým. SNR-OŠK č. 1268/I. 1965 — Náklad 1102 — Rukopis zadaný 9. decembra 1964 — Vytlačené vo februári 1965 — Papier 5153-01, 70 × 100, 70 g — Tlačili Polygrafické závody, záv. 2, Bratislava, ul. Februárového víťazstva 6/d — Tlačené zo sadzby monotypovej — Typ písma garmond a petit Modern Extended — K-20*51510 03/2 67 — 535 — 65 — AH 4,416 — VH 4,539

Celý náklad prevzala knižnica PFUK, Moskovská č. 2

Technický redaktor Adam Hanák

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

sú fakultný sborník určený na publikovanie vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých ašpirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracúvajú materiál získaný za pobytu na našej fakulte. Redakčná rada si vyhradzuje právo z tohto pravidla urobiť výnimku.

Práce musí odporúčať katedra. Práce študentov musí odporúčať študentská vedecká spoločnosť a príslušná katedra.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípade v ruskom alebo anglickom, francúzskom alebo nemeckom. Práce podané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, s riadkovou medzerou, tak, aby jeden riadok tvorilo 60 úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na autorov účet.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšete názov práce, pod to autorovo meno. Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, uvádzajú sa všetky pracoviská. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba obidve uviesť.

Fotografie treba podať na čiernom lesklom papieri a uviesť autorovo meno, zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba urobiť tušom na priehľadnom papieri (pauzák) alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť autorovo meno, zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať resumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam publikovaným v západnom jazyku, treba pripojiť resumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom; v prípade publikácie v ruskom jazyku, resumé v slovenskom jazyku a v západnom jazyku. *Nezabudnite pri resumé uviesť vždy názov práce a autorovo meno v rovnakom poradí ako v základnom texte.* Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a stránkové korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny počas korektúry idú na ťarchu autorského honorára. Každý autor dostane okrem príslušného honoráru i 50 separátov.

Redakčná rada