[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X., 3. — MATHEMATICA, 12., 1965]

ACTA

FACULTATIS RERUM NATURALIUM

UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X. FASC. III.

MATHEMATICA

PUBL. XII.

1965

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

Просим обмена публикаций
Austausch von Publikationen erbeten
Prière d'échanger des publications
We respectfully solicit the exchange of publications
Se suplica el canje de publicaciónes

Sborník Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Vydává Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasinkova 5, čís. tel. 458-51. Povolilo poverenictvo kultúry číslom 2265/56-IV/1. — Tlač: Tisk, knižní výroba, n. p., Brno, provoz 1

AH 4,884 — VH 5,020 — 03/2 — 67-473-65 — R-01*51004

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X, 3, MATHEMATIKA, 12., 1965]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X. FASC. III. MATHEMATICA XII. 1965

Über direkte Produkte von Relativen[1])

M. KOLIBIAR

Für universelle Algebren gilt der folgende Satz ([1], Chap. VI, Th. 4):[2])

(B) *Es besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den nicht-trivialen Zerlegungen* $A \approx A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *(n natürliche Zahl) einer universellen Algebra A und den Systemen von nicht-trivialen Kongruenzrelationen in* A, $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$, *mit den drei folgenden Eigenschaften:*

$$\Theta_1 \cap \ldots \cap \Theta_n = 0, \tag{1}$$

$$(\Theta_1 \cap \ldots \cap \Theta_{k-1}) \cup \Theta_k = I \textit{ für } k = 2, \ldots, n, \tag{2}$$

$$\textit{die Kongruenzrelationen } \Theta_1 \cap \ldots \cap \Theta_{k-1},\ \Theta_k \textit{ sind vertauschbar für } k = 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Ein Satz ähnlicher Art für eine unendliche Anzahl der Faktoren wurde von *J. Hashimoto* [3] bewiesen.

In dieser Note wird ein analoger Satz für Systeme mit Relationen („Relative") angegeben und dann für den Fall der universellen Algebren spezialisiert. (Es zeigt sich, daß man den Satz (B) mechanisch auf Relative nicht übertragen kann.) Dabei ist der hier angegebene Satz über universelle Algebren von dem in [3] (Th. 3.2, Corollary) bewiesenen verschieden.

1. Definitionen und Bemerkungen

1.1. Gibt es eine ein-eindeutige Abbildung einer Menge M auf einen Cartesischen Produkt von Mengen A_γ, $\gamma \in \Gamma$, so werden wir schreiben

$$M \sim \Pi \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}. \tag{4}$$

[1]) Über einige Resultate dieser Note wurde auf dem 2. Ungarischen mathematischen Kongres 1960 in Budapest berichtet.

[2]) Die Formulation des Satzes in [1] ist nicht richtig (siehe 2.3.1). Die Richtigkeit der hier angegebenen Formulierung (B) wird in 3.5.2 bewiesen.

Wir sagen, daß (4) eine *Cartesische Zerlegung* von M darstellt. Die Zerlegung (4) wird als *nicht-trivial* bezeichnet, wenn jede Menge A_γ mehr als ein Element besitzt. Ist einem Element $x \in M$ in dieser Abbildung das Element $f \in \Pi \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ zugeordnet, so wird das Element $f(\gamma) \in A_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ mit x_γ bezeichnet werden. Setzen wir für $x, y \in M$ und $\gamma \in \Gamma$ $x\Theta_\gamma y$ genau wenn $x_\gamma = y_\gamma$. Dann ist Θ_γ eine Äquivalenzrelation, die als die zum Faktor A_γ der Zerlegung (4) *angehörige Äquivalenzrelation* bezeichnet wird. Das System $\{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ nennen wir das *zur Zerlegung* (4) *angehöriges Äquivalenzensystem.*

1.2. Sei $\{\varphi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ ein System von Äquivalenzrelationen einer Menge M. Mit $\bigcap \{\varphi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ bzw. $\bigcup \{\varphi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ werden der Durchschnitt und die Vereinigung der Elemente φ_γ im Verband aller Äquivalenzrelationen bezeichnet. Ähnliche Bedeutung haben $\varphi_1 \cap \varphi_2$, $\varphi_1 \cup \varphi_2$ u. a.

Ist Θ eine Äquivalenzrelation in M, so wird die Menge aller Klassen von Θ mit M/Θ bezeichnet werden. Die Äquivalenz Θ wird *nicht-trivial* genannt, wenn sie mehr als eine Klasse besitzt.

1.3. Ein System von Äquivalenzrelationen $\{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ in M wird *assoziiert* genannt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Sei $\{x^\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ ein System von Elementen vom M. Ist für jede $\alpha, \beta \in \Gamma$ $x^\alpha (\bigcup \{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\})\, x^\beta$, so gibt es ein Element $x \in M$, so daß $x^\gamma \Theta_\gamma x$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt. Offenbar ist ein System $\{\varphi, \psi\}$ von zwei Äquivalenzrelationen genau dann assoziiert, wenn φ und ψ vertauschbar sind (d. h. $\varphi\psi = \psi\varphi$ gilt; siehe z. B. [4], S. 97).

2. Hilfssätze über Cartesische Zerlegungen

2.1 Lemma. *Es besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den nicht-trivialen Cartesischen Zerlegungen* (4) *einer Menge M und den Systemen*

$$\{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \tag{5}$$

von nichttrivialen Äquivalenzrelationen in M, die den folgenden drei Bedingungen genügen:[3])

(a) $\bigcap \{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = 0$;

(b) $\bigcup \{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = I$;

(c) *das System* (5) *ist assoziiert.*

Dabei wird der Zerlegung (4) *das zu* (4) *angehöriges Äquivalenzensystem* (siehe 1.1) *zugeordnet. Dem System* (5) *wird die Zerlegung* $M \sim \Pi \{M/\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ *zugeordnet, wobei für* $m \in M$ m_γ *die das Element m enthaltende Äquivalenzklasse vom* Θ_γ *ist.*

Beweis. a) Sei (5) das zur Zerlegung (4) angehöriges Äquivalenzensystem. Offenbar gilt (a). Seien nun $x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$. Es gibt ein Element $z \in M$ mit $z_\alpha = x_\alpha$

[3]) Mit 0 bzw. I resp. werden die kleinste und die größte Äquivalenzrelation in M bezeichnet.

und $z_\gamma = y_\gamma$ für alle $\gamma \neq \alpha$. Dann gilt $x\Theta_\alpha z$, $z(\bigcap \{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma,\ \gamma \neq \alpha\})\, y$, also $x(\Theta_\alpha \cup \bigcap \{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma,\ \gamma \neq \alpha\})\, y$, hiermit gilt $\Theta_\alpha \cup \bigcap \{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma,\ \gamma \neq \alpha\} = I$ und damit auch (b).[4]) Sei nun $\{x^\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ ein System von Elementen der Menge M. Es gibt ein Element $z \in M$ mit $z_\gamma = x^\gamma_\gamma$ für jedes $\gamma \in \Gamma$. Dann gilt $z\Theta_\gamma x^\gamma$ für jedes $\gamma \in \Gamma$, womit (c) bestätigt ist.

b) Sei umgekehrt (5) ein System von Äquivalenzrelationen in M mit den Eigenschaften (a), (b), (c). Sei Φ die Abbildung, die einem beliebigen Element $m \in M$ ein Element $f \in \Pi\, \{M/\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = S$ zuordnet derart, daß für jedes $\gamma \in \Gamma$ $f_\gamma = f(\gamma)$ die das Element m enthaltende Klasse der Zerlegung M/Θ_γ ist. Sei $g \in S$ und sei für jedes $\gamma \in \Gamma$ x^γ ein beliebiges Element der Klasse $g(\gamma) \in M/\Theta_\gamma$. Nach (b) und (c) gibt es ein $z \in M$ derart, daß $x^\gamma \Theta_\gamma z$, also $z \in g(\gamma)$ für jedes $\gamma \in \Gamma$. Dann ist $\Phi(z) = g$, so daß Φ M auf S abbildet. Im Hinblick auf (a) ist Φ ein-eindeutig.

Man bestätigt nun leicht, daß die beschriebene Zuordnung zwischen den Zerlegungen (4) und den Systemen von Äquivalenzrelationen (5) mit den Eigenschaften (a), (b), (c) ein-eindutig ist.

2.2 Folgerung. *Es besteht eine umkehrbar eindutige Zuordnung zwischen den nicht trivialen Cartesischen Zerlegungen*

$$M \sim A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \tag{6}$$

(n natürliche Zahl) und den Systemen von nichttrivialen Äquivalenzrelationen $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ *in* M, *die den Bedingungen* (1), (2) *und* (3) *genügen.*

Beweis. Daß das zur Zerlegung (6) angehörige Äquivalenzensystem (1), (2) und (3) erfüllt, folgt aus dem Teil a) des Beweises vom Lemma 2.1 (siehe Bemerkung[4])). Sei nun ein System von Äquivalenzrelationen in M gegeben, das den Bedingungen (1), (2) und (3) genügt. Offenbar sind die Bedingungen (a) und (b) erfüllt. Die Bedingung (c) wollen wir durch Induktion beweisen. Für $n = 2$ folgt (c) aus (3). Sei (c) für Systeme von n Äquivalenzrelationen erfüllt und seien $x^1, \ldots, x^{n+1}$ Elemente von M. Nach der Induktionannahme gibt es ein Element $x \in M$ mit $x\Theta_i x^i$ für $i = 1, \ldots, n$. Aus (2) und (3) folgt, daß es ein Element $z \in M$ gibt, so daß $x(\Theta_1 \cap \ldots \cap \Theta_n)\, z$, $z\Theta_{n+1} x^{n+1}$ gilt. Dann ist für $1 \leqq i \leqq n$ $x^i \Theta_i x \Theta_i z$ und hiermit $x^i \Theta_i z$ für $i = 1, \ldots, n+1$.

2.3. Bemerkungen. **2.3.1.** Wie *G. Szász* [5, Kap. IX, Übungsaufg. 2] bemerkt, die Behauptung 2.2 würde nicht gelten, wenn wir statt (3) nur verlangten, daß jede zwei Äquivalenzrelationen Θ_i, Θ_j $(i \neq j)$ vertauschbar seien (demgemäß ist der Satz 4, Kap. VI [1] nicht richtig). Die hier angegebene Bedingung (3) ist aber schwächer als die in [5] (Kap. IX, Übungsaufg. 6).

2.3.2. Eine Analogie der Behauptung 2.2 für den Fall einer (abzählbar-) un-

---

[4]) Zugleich haben wir gezeigt, daß die Äquivalenzrelationen Θ_α und $\eta_\alpha = \cap\ \{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma, \gamma \neq \alpha\}$ vertauschbar sind. Dann ist Θ_α mit jeder Äquivalenzrelation φ, $\eta_\alpha \leqq \varphi \leqq \eta_\alpha \cup \Theta_\alpha = I$, vertauschbar (siehe [2], § 5, 3).

endlichen Anzahl der Faktoren in der Zerlegung (6) gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt. Sei M die Menge aller (abzählbaren) Folgen $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, wobei für jede natürliche Zahl n entweder $a_n = 0$ oder $a_n = 1$ und höchstens eine endliche Anzahl der Elemente a_n von Null verschieden ist. Erklären wir Θ_i für $i = 1, 2, \ldots$ wie folgt: $x\Theta_i y$ $(x, y \in M)$ genau wenn $x_i = y_i$. Offenbar ist $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Theta_i = 0$. Seien $x, y \in M$ und $i > 1$ eine natürliche Zahl. Sei z dasjenige Element von M, für das $z_i = x_i$ und $z_j = y_j$ für $j \neq i$ gilt. Dann gilt $y(\Theta_1 \cap \ldots \cap \Theta_{i-1})\, z$, $z\Theta_i x$. Daraus folgt, daß $\Theta_1 \cap \ldots \cap \Theta_{i-1}$ und Θ_i vertauschbar sind und $(\Theta_1 \cap \ldots \cap \Theta_{i-1}) \cup \cup\, \Theta_i = I$. Dabei ist die Bedingung (c) aus 2.1 nicht erfüllt, da zu den Elementen x^i, für die $x_i^i = 1$ und $x_j^i = 0$ für $j \neq i$ gilt, kein Element x der verlangten Eigenschaft existiert.

3. Direkte Zerlegungen von Relativen

3.1. Sei M eine Menge. Eine Menge R von k-Tupeln $\langle x^1, \ldots, x^k \rangle$, $x^i \in M$, k natürliche Zahl, heißt eine k-stellige Relation in M. Sei $\boldsymbol{S} = \{R_0, \ldots, R_\alpha, \ldots\}$ eine Folge, wobei R_ν eine n_ν-stellige Relation in M bedeutet (n_ν ist eine natürliche Zahl; die Menge der Indizen α kann endlich (eventuell auch leer), abzählbar oder von einer transfiniten Mächtigkeit sein). Das System $\mathfrak{M} = (M, \boldsymbol{S})$ soll ein Relativ [4] heißen. Die Folge $\{n_0, \ldots, n_\alpha, \ldots\}$ wird der Typ von $\mathfrak{M}$ heißen.

Sei nun $\{\mathfrak{M}_t = (M_t, \boldsymbol{S}_t) \mid t \in T\}$ ein System von Relativen vom gleichen Typ, $\boldsymbol{S}_t = \{R_0^t, \ldots, R_\alpha^t, \ldots\}$. Unter einem direkten Produkt $\Pi \{\mathfrak{M}_t \mid t \in T\}$ vom System $\{\mathfrak{M}_t \mid t \in T\}$ versteht man den Relativ $\mathfrak{M} = (\Pi \{M_t \mid t \in T\}, \boldsymbol{S})$, wobei $\Pi \{M_t \mid t \in T\}$ Cartesisches Produkt von Mengen M_t ist, $\boldsymbol{S} = \{R_0, \ldots, R_\alpha, \ldots\}$ und R_ν wie folgt erklärt ist: $\langle x^1, \ldots, x^k \rangle \in R_\nu$ genau wenn $\langle x_t^1, \ldots, x_t^k \rangle \in R_\nu^t$ für jedes $t \in T$ ist. Im weiteren werden wir manchmal bei den Relativen $\mathfrak{M}_t$ vom derselben Typ für festes ν alle Relationen R_ν^t mit derselben Zeichen R_ν bezeichnen.

3.2. Der Begriff der *Kongruenzrelation* in einem Relativ kann mit Hilfe eines Homomorphismus definiert werden. Seien $\mathfrak{M} = (M, \boldsymbol{S})$ und $\mathfrak{M}' = (M', \boldsymbol{S}')$ zwei Relative vom derselben Typ und φ eine Abbildung von M auf M'. Zur Erklärung von φ als Homomorphismus scheint es als natürlich eine der folgenden zwei Eigenschaften zu verlangen (R_ν ist eine beliebige Relation aus $\boldsymbol{S}$ und R'_ν die entsprechende aus $\boldsymbol{S}'$):[5])

Aus

$$\left.\begin{array}{l} \langle x^1, \ldots, x^{n_\nu} \rangle \in R_\nu \\ \text{folgt} \\ \langle \varphi(x^1), \ldots, \varphi(x^{n_\nu}) \rangle \in R'_\nu . \end{array}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \langle y^1, \ldots, y^{n_\nu} \rangle \in R'_\nu \text{ genau wenn es Elemente } x^1, \ldots, x^{n_\nu} \in M \text{ gibt, so daß } y^i = \\ = \varphi(x^i) \ (i = 1, \ldots, n_\nu) \text{ und } \langle x^1, \ldots, x^{n_\nu} \rangle \in R_\nu . \end{array}\right\} \quad (8)$$

---

[5]) Durch die Eigenschaft (7) bzw. (8) resp. wird ein Homomorphismus in [4] bzw. [6] charakterisiert.

Eine umkehrbar eindeutige Abbildung φ von M auf M' heißt ein Isomorphismus der Relativen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, wenn beide Abbildungen φ und φ^{-1} der Bedingung (7) genügen. Dann nennen wir $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ *isomorph* und schreiben $\mathfrak{M} \approx \mathfrak{M}'$.

Der Satz (B) gilt jedoch nicht für Relative, wenn man Kongruenzrelation durch einen der hier angegebenen Homomorphismusbegriffe erklärt.

Beispiel. Sei $\mathfrak{M} = (\{a, b, c, d\}, R_0)$ ein Relativ mit $R_0 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle c, d\rangle\}$ und $\mathfrak{M}' = (\{0, 1\}, R_0')$ ein Relativ mit $R_0' = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$ ($\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ sind geordnete Mengen). Die Abbildung φ: $\varphi(a) = \varphi(c) = 0$, $\varphi(b) = \varphi(d) = 1$ ist ein Homomorphismus in beiden oben angegebenen Sinnen. Die Äquivalenzrelation Θ_1 mit den Klassen $\{a, c\}$, $\{b, d\}$ ist daher eine Kongruenzrelation in beiden Sinnen. Dasselbe gilt für die Äquivalenzrelation Θ_2 mit den Klassen $\{c, b\}$, $\{a, d\}$. Die Kongruenzrelationen Θ_1, Θ_2 genügen den Bedingungen (1), (2), (3) des Satzes (B), doch ist $\mathfrak{M}$ (in nichttrivialer Weise) direkt unzerlegbar, wie man leicht bestätigen kann.

In dem folgenden Satz wird der Begriff der Kongruenzrelation nicht verwendet.

3.3. Satz. *Es besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den nicht-trivialen direkten Zerlegungen eines Relativs* $\mathfrak{M} = (M, \mathbf{S})$,

$$\mathfrak{M} \approx \Pi\,\{\mathfrak{M}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}, \tag{9}$$

und den Systemen (5) *von nicht-trivialen Äquivalenzrelationen in* M, *die den Bedingungen* (a), (b), (c) *aus* 2.1 *und der folgenden Bedingung* (d) *genügen:*

(d) *Ist* $R_\nu \in \mathbf{S}$, $x^1, \ldots, x^{n_\nu} \in M$ *und* $\{\langle a^{\gamma,1}, \ldots, a^{\gamma,n_\nu}\rangle \mid \gamma \in \Gamma\}$ *ein System von* n_ν*-Tupeln in* M, *so daß für jedes* $\gamma \in \Gamma$ $\langle a^{\gamma,1}, \ldots, a^{\gamma,n_\nu}\rangle \in R_\nu$ *und* $a^{\gamma,i}\,\Theta_\gamma x^i$, $i = 1, \ldots, n_\nu$, *so* $\langle x^1, \ldots, x^{n_\nu}\rangle \in R_\nu$.

Diese Zuordnung ist wie im Lemma 2.1 *erklärt.*

Beweis. Wir benützen die Bezeichnungen von Abschn. 2.1. Es gelte (9). Die Eigenschaften (a), (b), (c) des angehörigen Äquivalenzensystem (5) folgen aus Lemma 2.1. Es seien die Voraussetzungen von (d) erfüllt. Dann gilt für jedes $\gamma \in \Gamma$ und $R_\nu \in \mathbf{S}$ $a_\gamma^{\gamma,i} = x_\gamma^i$, $i = 1, \ldots, n_\nu$ und $\langle a_\gamma^{\gamma,1}, \ldots, a_\gamma^{\gamma,n_\nu}\rangle \in R_\nu$. Hieraus folgt $\langle x_\gamma^1, \ldots, x_\gamma^{n_\nu}\rangle \in R_\nu$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ und daher $\langle x^1, \ldots, x^{n_\nu}\rangle \in R_\nu$. Sei umgekehrt (5) ein System von Äquivalenzrelationen, das den Bedingungen (a)–(d) genügt. Nach Lemma 2.1 gilt $M \sim \Pi\,\{M/\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = Q$. Sei $R_\nu \in \mathbf{S}$, $x \in M$. Für $\gamma \in \Gamma$ sei $\bar{x}$ die das Element x enthaltende Klasse der Äquivalenzrelation Θ_γ. Wir erklären in M/Θ_γ eine n_ν-stellige Relation R_ν^γ wie folgt: $\langle \bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^{n_\nu}\rangle \in R_\nu^\gamma$ ($\bar{a}_i \in M/\Theta_\gamma$) genau wenn es Elemente $a^i \in \bar{a}^i$ ($i = 1, \ldots, n_\nu$) gibt mit $\langle a^1, \ldots, a^{n_\nu}\rangle \in R_\nu$. Es bleibt zu zeigen, daß die in 2.1 beschriebene ein-eindeutige Abbildung Φ von M auf Q ein Isomorphismus von Relativen $\mathfrak{M}$ und $\Pi\,\{\mathfrak{M}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = \mathfrak{M}'$ ($\mathfrak{M}_\gamma = (M/\Theta_\gamma, \mathbf{S}_\gamma)$, $\mathbf{S}_\gamma = \{R_0^\gamma, \ldots, R_\nu^\gamma, \ldots\}$; $\mathfrak{M}' = (Q, \mathbf{S}')$, $\mathbf{S}' = \{R_0', \ldots, R_\nu', \ldots\}$) ist. Sei also $\langle m^1, \ldots, m^{n_\nu}\rangle \in R_\nu$ ($m^i \in M$). Dann ist $\langle \bar{m}^1, \ldots, \bar{m}^{n_\nu}\rangle \in R_\nu^\gamma$. Hieraus folgt $\langle \Phi(m^1), \ldots, \Phi(m^{n_\nu})\rangle \in R_\nu'$. Sei umgekehrt $\langle f^1, \ldots, f^{n_\nu}\rangle \in R_\nu'$ ($f^i \in Q$). Dann ist für jedes $\gamma \in \Gamma$ $\langle f^1(\gamma), \ldots$

$f^{n_\nu}(\gamma)\rangle \in R_\nu^\gamma$ $(f^i(\gamma) \in M/\Theta_\gamma)$ und daher gibt es Elemente $a^{\gamma,i} \in f^i(\gamma)$, so daß $\langle a^{\gamma,1}, \ldots, a^{\gamma,n_\nu}\rangle \in R_\nu^\gamma$. Nach (b) und (c) gibt es Elemente $x^1, \ldots, x^{n_\nu} \in M$, so daß $a^{\gamma,i}\Theta_\gamma x^i$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ und $i = 1, \ldots, n_\nu$ gilt. Nach (d) ist $\langle x^1, \ldots, x^{n_\nu}\rangle \in R_\nu$. Da $x^i = \Phi^{-1}(f^i)$, ist der Beweis damit beendet.

3.4. Wenn wir direkte Zerlegungen eines Relativs $\mathfrak{M} = (M, \mathbf{S})$ in zwei Faktoren behandeln, so lauten die Bedingungen (a)–(d) für entsprechende Paare Θ_1, Θ_2 von Äquivalenzrelationen wie folgt:

(a') $\Theta_1 \cap \Theta_2 = 0$;

(b') $\Theta_1 \cup \Theta_2 = I$;

(c') Θ_1, Θ_2 sind vertauschbar;

(d') aus $R_\nu \in \mathbf{S}$, $\langle a^1, \ldots, a^{n_\nu}\rangle \in R_\nu$, $\langle b^1, \ldots, b^{n_\nu}\rangle \in R_\nu$, $a^i\Theta_1 x^i\Theta_2 b^i$, $i = 1, \ldots, n_\nu$, folgt $\langle x^1, \ldots, x^{n_\nu}\rangle \in R_\nu$.

Für den Fall der quasigeordneten Menge $(M, \leqq)$ kann der Satz in einer etwas anderen Form formuliert werden:

3.4.1. Satz. *Es besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den nicht-trivialen Zerlegungen einer quasigeordneten Menge* $(M, \leqq)$ *in direktes Produkt von zwei quasigeordneten Mengen und den Paaren von nicht-trivialen Äquivalenzrelationen* Θ_1, Θ_2 *in* M, *die den Bedingungen* (a'), (b'), (c') *und der folgenden Bedingung* (d'') *genügen:*

(d'') *Aus* $c_1\Theta_i d_1$, $c_2\Theta_i d_2$, $d_1\Theta_j d_2$, $i \neq j$, $c_1 \leqq c_2$ *folgt* $d_1 \leqq d_2$.

Beweis. Es seien (a'), (b'), (c'), (d') und die Voraussetzungen von (d'') erfüllt. Setzen wir $x^1 = d_1$, $x^2 = d_2$ und im Fall $i = 1$, $j = 2$ $a^i = c_i$, $b^1 = b^2 = d_1$, im Fall $i = 2$, $j = 1$, $a^1 = a^2 = d_1$, $b^i = c_i$. Mit Hilfe von (d') bekommt man $d_1 \leqq d_2$. Es seien nun umgekehrt (a'), (b'), (c'), (d'') und die Voraussetzungen von (d') erfüllt. Es gibt ein Element $y \in M$ mit $x^1\Theta_1 y$, $y\Theta_2 x^2$. Aus $a^1\Theta_1 y$, $a^2\Theta_1 x^2$, $y\Theta_2 x^2$ folgt nach (d'') $y \leqq x^2$; analog bekommt man $x^1 \leqq y$. Hieraus folgt $x^1 \leqq x^2$.

Bemerkung. Die Eigenschaft (d'') kann nicht durch diejenige ersetzt werden, die aus (d'') durch einsetzen $i = 1$, $j = 2$ entsteht. Es genügt eine geordnete Menge mit den Elementen a_1, a_2, b_1, b_2 zu nehmen, wobei $a_1 < a_2$, $a_1 < b_1 < b_2$, und a_2 mit b_1, b_2 unvergleichbar ist. Die Äquivalenzrelationen Θ_1, Θ_2 seien durch Klassen gegeben: $\Theta_1: \{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$; $\mathrm{O}_2: \{a_1, a_2\}$, $\{b_1, b_2\}$. Die Bedingungen (a'), (b'), (c'), sowie die Bedingung (d'') für $i = 1$, $j = 2$, sind erfüllt, nicht aber die Bedingung (d'') für $i = 2$, $j = 1$.

3.4.2. *Im Satz* 3.4.1 *kann die Bedingung* (d''), *durch folgende zwei Bedingungen ersetzt werden:*

(d$_1$) *Aus* $a\Theta_1 b$, $b\Theta_2 c$, $a \leqq c$ *folgt* $a \leqq b$, $b \leqq c$.

(d$_2$) *Ist* $a\Theta_1 b$, $c\Theta_1 d$, $a\Theta_2 c$, $b\Theta_2 d$, *dann aus* $a \leqq b$ *folgt* $c \leqq d$ *und aus* $a \leqq c$ *folgt* $b \leqq d$.

Beweis. (d$_1$) folgt unmittelbar aus (d''), wenn wir $a\Theta_2 a$ bzw. $c\Theta_1 c$ in Rücksicht nehmen. Auch (d$_2$) folgt unmittelbar aus (d''). Es seien umgekehrt die Bedingungen (b), (c′), (d_1), (d_2) und die Voraussetzungen von (d″) erfüllt. Ist $i = 1, j = 2$, so nehmen wir ein Element x mit $c_1\Theta_1 x\Theta_2 c_2$. Nach ($d_1$) $x \leqq c_2$ und hieraus folgt nach (d_2) $d_1 \leqq d_2$ (wegen $x\Theta_1 c_1\Theta_1 d_1$ ist $x\Theta_1 d_1$). Analog erwägt man im Fall $i = 2, j = 1$.

3.5. Jede n-stellige Operation Ω in der Menge M kann ein-eindeutig durch folgende $(n + 1)$-stellige Relation R charakteristisiert werden: $\langle a^1, \dots, a^n, a^{n+1}\rangle \in R$ genau wenn $\Omega(a^1, \dots, a^n) = a^{n+1}$. Das einer universellen Algebra $\mathfrak{A}$ in dieser Weise zugeordnete Relativ wird durch $\mathbf{R}(\mathfrak{A})$ bezeichnet werden. Der direkte Produkt von universellen Algebren ist so erklärt (siehe z. B. [3]), daß sich dabei die direkten Zerlegungen von $\mathfrak{A}$ (im Sinne der Algebren) und von $\mathbf{R}(\mathfrak{A})$ (im Sinne der Relativen) gegenseitig entsprechen. Die Äquivalenzrelation Θ auf einer universellen Algebra $\mathfrak{A}$ heißt eine Kongruenzrelation, wenn für jede Operation Ω in $\mathfrak{A}$ (Ω sei n-stellig) und je zwei n-Tupeln $(a^1, \dots, a^n)$, $(b^1, \dots, b^n)$ aus $a^i\Theta b^i$ $(i = 1, \dots, n)$ folgt $\Omega(a^1, \dots, a^n)\,\Theta\,\Omega\,(b^1, \dots, b^n)$.

Nun bekommt man aus 3.3 den folgenden Satz.

3.5.1. Satz. *Es besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den nichttrivialen direkten Zerlegungen einer universellen Algebra $\mathfrak{A}$ und den Systemen* (5) *von nichttrivialen Kongruenzrelationen in $\mathfrak{A}$, die den Bedingungen* (a), (b), (c) *genügen. Diese Zuordnung ist wie im Lemma* 2.1 *erklärt.*

Beweis. Das zu einer direkten Zerlegung angehöriges Äquivalenzensystem (5) genügt nach 2.1 den Bedingungen (a), (b), (c). Man bestätigt leicht, daß alle Θ_γ Kongruenzrelationen sind. Es seien umgekehrt für ein System (5) von Kongruenzrelationen in $\mathfrak{A}$ die Bedingungen (a), (b), (c) erfüllt. Es genügt zu zeigen, daß dieses System im Relativ $\mathbf{R}(\mathfrak{A})$ der Bedingung (d) genügt. Sei also R eine Relation, die einer beliebigen n-stelligen Operation Ω der Algebra $\mathfrak{A}$ entspricht und es seien die Voraussetzungen von (d) (mit R statt R_ν und $n_\nu = n + 1$) erfüllt. Dann gilt für jedes $\gamma \in \Gamma$ $a^{\gamma, n+1} = \Omega(a^{\gamma,1}, \dots, a^{\gamma,n})\,\Theta_\gamma \Omega(x^1, \dots, x^n)$, somit (wegen $x^{n+1}\Theta_\gamma a^{\gamma,n+1}$) $x^{n+1}\Theta_\gamma \Omega(x^1, \dots, x^n)$, woraus nach (a) $x^{n+1} = \Omega(x^1, \dots, x^n)$, d. h. $\langle x^1, \dots, x^n, x^{n+1}\rangle \in R$ folgt.

3.5.2. Folgerung. *Es gilt der Satz* (B).

Beweis. Die Bedingungen (1), (2), (3) sind notwendig, da sie Folgerungen von (a), (b) und (c) sind (siehe 2.2). Zugleich haben wir in 2.2 gezeigt, daß aus (1), (2), (3) die Bedingungen (a), (b), (c) folgen.

LITERATUR

[1] Birkhoff G., Lattice Theory. New York 1948.
[2] Borůvka O., Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie. Berlin 1960.
[3] Hashimoto J., Direct, subdirect decompositions and congruence relations. Osaka Math. J. 9 (1957), 87—112.

[4] Hermes H., Einführung in die Verbandstheorie. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.
[5] Szász G., Einführung in die Verbandstheorie. Budapest 1962.
[6] Tarski A., Contributions to the theory of models. I. Indagationes math. 16 (1954), 572—581.

Adresa autora: Katedra algebry a teórie čísel PFUK, Bratislava, Šmeralova 2

Do redakcie došlo: 5. 12. 1964

O priamych súčinoch systémov s reláciami

M. Kolibiar

Zhrnutie

Systém (*) $\{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ ekvivalencií na množine M nazývame asociovaným, ak k ľubovoľnému systému $\{x^\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ prvkov množiny M, takému, že pre ľubovoľné α, $\beta \in \Gamma$ platí $x^\alpha (\bigcup \{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\})\, x^\beta$, existuje taký prvok $x \in M$, že $x^\gamma \Theta_\gamma x$ pre každé $\gamma \in \Gamma$. Systémom s reláciami sa nazýva dvojica $(M, \mathbf{S})$, kde M je množina a $\mathbf{S}$ postupnosť finitárnych relácií na M.

Veta. *Existuje vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi netriviálnymi priamymi rozkladmi systému s reláciami* $(M, \mathbf{S}) = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \approx \Gamma\, \{\mathfrak{M}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ *a systémami* (*) *netriviálnych ekvivalencií na* M, *spĺňajúcich nasledujúce podmienky:*

(a) $\bigcap \{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = 0$;

(b) $\bigcup \{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = I$;

(c) *systém* (*) *je asociovaný;*

(d) *ak* $R_\nu \in \mathbf{S}$, $x^1, \ldots, x^{n_\nu} \in M$ *a* $\{\langle a^{\gamma,1}, \ldots, a^{\gamma,n_\nu}\rangle \mid \gamma \in \Gamma\}$ *je taký systém* n_ν*-tíc prvkov množiny* M, *že pre každé* $\gamma \in \Gamma$ *platí* $\langle a^{\gamma,1}, \ldots, a^{\gamma,n_\nu}\rangle \in R_\nu$ *a* $a^{\gamma,i}\, \Theta_\gamma x^i$, $i = 1, \ldots, n_\nu$, *potom* $\langle x^1, \ldots, x^{n_\nu}\rangle \in R_\nu$.

Ako dôsledok dostávame vetu: *Existuje vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi netriviálnymi priamymi rozkladmi univerzálnej algebry* $\mathfrak{A}$ *a systémami* (*) *netriviálnych kongruencií vyhovujúcimi podmienkam* (a), (b), (c).

V práci [3] bola dokázaná analogická veta o univerzálnych algebrách, v ktorej sú podmienky (b), (c) nahradené inými podmienkami.

Z vety o systémoch s reláciami dostávame vetu o priamych rozkladoch kvazi-usporiadaných množín s dvoma faktormi, v ktorej podmienky (a)—(d) majú jednoduchší tvar.

О прямых произведениях реляционных систем

М. Колибиар

Резюме

Систему (*) $\{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ отношений эквивалентности на множестве M называем *ассоциированной*, если для любой системы $\{x^\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ элементов из M, такой, что $x^\alpha (\bigcup \{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\})\, x^\beta$ для любых α, $\beta \in \Gamma$, существует такой элемент $x \in M$, что $x^\gamma \Theta_\gamma x$ для всякого $\gamma \in \Gamma$. Реляционной системой разумеется пара $(M, \mathbf{S})$, где M — множество, $\mathbf{S}$ — последовательность финитарных отношений на M.

Теорема. *Существует взаимно однозначное соответствие между нетривиальными прямыми разложениями реляционной системы* $(M, \mathbf{S}) = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \approx \Pi\{\mathfrak{M}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$, *и системами* (*) *нетривиальных отношений эквивалентности на* M, *удовлетворяющими условиям:*

(a) $\bigcap\{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = 0$;
(b) $\bigcup\{\Theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = I$;
(c) *система* (*) *ассоциирована;*
(d) *если* $R_\nu \in \mathbf{S}$, $x^1, \ldots, x^{n_\nu} \in M$ *и* $\{\langle a^{\gamma,1}, \ldots, a^{\gamma,n_\nu}\rangle \mid \gamma \in \Gamma\}$ *такая система упорядоченных систем из* n_ν *элементов множества* M, *что для всякого* $\gamma \in \Gamma \langle a^{\gamma,1}, \ldots, a^{\gamma,n_\nu}\rangle \in R_\nu$ *и* $a^{\gamma,i}\Theta_\gamma x^i$, $i = 1, \ldots, n_\nu$, *то* $\langle x^1, \ldots, x^{n_\nu}\rangle \in R_\nu$.

Как следствие получается теорема: *Существует взаимно однозначное соответствие между нетривиальными прямыми разложениями универсальной алгебры* $\mathfrak{A}$ *и системами* (*) *нетривиальных конгруенций на* $\mathfrak{A}$, *удовлетворяющими условиям* (a), (b), (c).

В работе [3] имеется аналогичная теорема об универсальных алгебрах, в которой условия (b), (c) заменены другими.

Теорема о реляционных системах специализируется для случая прямых разложений квазиупорядоченных множеств с двумя факторами.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X, 3, MATHEMATIKA, 12., 1965]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X. FASC. III. MATHEMATICA XII. 1965

Über die Eigenschaften der Lösungen einiger quasilinearer Gleichungen 3. Ordnung

M. GREGUŠ

Über die Koeffizienten der Differentialgleichungen

$$[r(x)\, y']'' + q(x)\, y = 0, \tag{a}$$

$$[r(x)\, z'']' - q(x)\, z = 0 \tag{b}$$

setzen wir im Weiteren voraus, daß $r(x) > 0$, $q(x)$ stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ sind.

Die Arbeit hat drei Teile.

Im ersten Teil werden die grundlegenden Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichungen (a) und (b) untersucht, weiter die Beziehungen zwischen den Lösungen dieser Gleichungen und die Eigenschaften der Büschel von Lösungen der Gleichungen (a) und (b).

Im zweiten Teil der Arbeit wurde ein Vergleichungssatz zwischen zwei Gleichungen der Form (a) und die hinreichenden Bedingungen zur Oszillationsfähigkeit und zur Oszillationsunfähigkeit der Lösungen der Gleichung (a) abgeleitet.

Im dritten Teil werden die Fragen der Begrenzung der Lösungen der Gleichung (a) und die Existenz der Lösungen ohne Nullstellen im ganzen Intervall $-\infty < x < \infty$ und die asymptotischen Eigenschaften der Lösungen ohne Nullstellen untersucht.

I. Die Differentialgleichung (a) kann als Differentialsystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} ry_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= -qy_1 \end{aligned}$$

geschrieben werden, woraus folgt, daß zu beliebigen vier Zahlen (x_0, k_1, k_2, k_3) gerade eine Funktion $y(x)$ mit der Eigenschaft $y(x_0) = k_1$, $y'(x_0) = k_2$, $[ry']'(x_0) = k_3$ existiert, welche die Lösung der Differentialgleichung (a) im Intervall $(-\infty, \infty)$ ist.

Die Lösungen y_1, y_2, y_3 der Differentialgleichung (a) sind linear unabhängig und bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen, wenn die Determinante (Wronskian)

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ y_1', & y_2', & y_3' \\ [ry_1']', & [ry_2']', & [ry_3']' \end{vmatrix}$$

wenigstens in einem Punkt verschieden von Null ist.

Satz 1. *y_1, y_2 seien zwei beliebige unabhängige Lösungen der Differentialgleichug* (a). *Dann ist die Funktion* $z(x) = r(x)\begin{vmatrix} y_1, y_2 \\ y_1', y_2' \end{vmatrix}$ *die Lösung der Differentialgleichung* (b).

Beweis. Ist

$$z' = \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ [ry_1']', & [ry_2']' \end{vmatrix}; \quad z'' = \begin{vmatrix} y_1', & y_2' \\ [ry_1']', & [ry_2']' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ [ry_1']'', & [ry_2']'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1', & y_2' \\ [ry_1']', & [ry_2']' \end{vmatrix};$$

$$[rz'']' = r\begin{vmatrix} y_1', & y_2' \\ -qy_1, & -qy_2 \end{vmatrix} = qr\begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ y_1', & y_2' \end{vmatrix} = qz.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bemerkung 1. *Vollkommen ähnlich kann man beweisen, daß wenn z_1, z_2 zwei beliebige Lösungen der Differentialgleichung* (b) *sind, dann ist* $y = \begin{vmatrix} z_1, z_2 \\ z_1', z_2' \end{vmatrix}$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (a).

Bemerkung 2. *Die im Satz* 1 *und in der Bemerkung* 1 *abgeleitete Eigenschaft ist analogisch zu den Eigenschaften der Lösungen der gegenseitig adjungierten Differentialgleichungen, deshalb werden wir weiterhin die Differentialgleichung* (b) *als adjungiert zu der Differentialgleichung* (a) *bezeichnen und umgekehrt.*

Bemerkung 3. *Die Wronskische Determinante des Fundamentalsystems der Differentialgleichung* (a) *ist $W = k/r$, wo k eine geeignete Konstante ist. Es ist nämlich*

$$[rW]' = \left[r \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ y_1', & y_2', & y_3' \\ [ry_1']', & [ry_2']', & [ry_3']' \end{vmatrix} \right]' = 0$$

Ähnlich ist die Wronskische Determinante des Fundamentalsystems der Differentialgleichung (b) *gleich k/r.*

Für die Lösung en der Differentialgleichung (a) gelten folgende Integralidentitäten:

$$ry'[ry']' - \int_a^x \{[ry']'^2 - rqyy'\}\, dt = Konst. \tag{1}$$

$$[ry']' + \int_a^x qy\, dt = Konst. \tag{1'}$$

Die Identität (1) erhalten wir wenn wir die Gleichung (a) mit ry' multiplizieren und zwischen a und x Glied um Glied integrieren. Die Identität (1') erhalten wir, wenn wir die Gleichung (a) Glied um Glied von a bis x integrieren.

Ähnlich können für die Gleichung (b) folgende Identitäten abgeleitet werden:

$$rzz'' - \int_a^x [rz'z'' + qz^2]\,\mathrm{d}t = Konst. \tag{2}$$

$$rz'' - \int_a^x qz\,\mathrm{d}t = Konst. \tag{2'}$$

Satz 2. $q(x) \geqq 0$ *sei für* $-\infty < x < \infty$. *Dann hat keine Lösung der Differentialgleichung* (a), *ihre erste Ableitung und die Funktion* $[ry']'$, *mit der Eigenschaft* $y(a) = y'(a) = 0$, $[ry']'(a) \neq 0$, *links von a eine Nullstelle. Ähnlich hat keine Lösung der Differentialgleichung* (b) *mit der Eigenschaft* $z(a) = z'(a) = 0$, $z''(a) \neq 0$ *rechts von a eine Nullstelle und auch keine Nullstelle der ersten und zweiten Ableitung.*

Der Beweis folgt aus der Integralidentität (1) und (2). Es sei z. B. $[ry']'(a) > 0$ und es sei $[ry']'(x_1) = 0$, wo $x_1 < a$ die erste Nullstelle der Funktion $[ry']''$ ist. Aus der Identität (1) erhalten wir $\int_{x_1}^{a} [[ry']'^2 - rqyy']\,\mathrm{d}t = 0$, was jedoch ein Widerspruch ist, da die Funktion unter dem Integral im Intervall $\langle x_1, a\rangle$ nicht das Zeichen ändert. Daraus folgt ebenfalls, daß für $x < a$ $y'(x) \neq 0$ und $y(x) \neq 0$ ist.

Definition. y_1, y_2 *seien unabhängige Lösungen der Differentialgleichung* (a) *mit der Eigenschaft* $y_1(a) = y_1'(a) = 0$, $[ry_1']'(a) = 1$, $y_2(a) = [ry_2'](a) = 0$, $y_2'(a) = 1$. *Die Menge der Lösungen* $y = c_1y_1 + c_2y_2$ *werden wir als Büschel der Differentialgleichung* (a) *im Punkte a bezeichnen.*

Das Büchsel erfüllt folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y \\ y_1', & y_2', & y' \\ [ry_1']', & [ry_2']', & [ry']' \end{vmatrix} = 0$$

d. h.

$$\frac{\omega}{r}[ry']' - \omega'y' + \omega''y = 0, \qquad wo \qquad \omega = r\begin{vmatrix} y_1; & y_2 \\ y_1', & y_2' \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung kann man in folgender Form schreiben:

$$\left[\frac{1}{\omega}ry'\right]' + \frac{r\omega''}{\omega^2}y = 0$$

Nach Satz 1 ist ω die Lösung der Differentialgleichung (b) mit einer doppelten Nullstelle im Punkte a und nach Satz 2 im Falle daß $q(x) \geqq 0$ in $-\infty < x < \infty$, ist $\omega(x) \neq 0$ für $x > a$.

Bemerkung 4. *Die Eigenschaften der Büschel von Lösungen und die von ihnen abgeleiteten Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung* (a) *sind vollkommen identisch mit den Eigenschaften der Büschel von Lösungen der linearen Differentialgleichung* 3. *Ordnung* [1]. *Deshalb führe ich diese hier nicht an.*

II. Außer der Differentialgleichung (a) sei hier noch die Differentialgleichung

$$[r(x)\, z']'' + q_1(x)\, z = 0 \tag{a$_1$}$$

gegeben, wo $q_1(x)$ eine stetige Funktion von $x \in (-\infty, \infty)$ ist.

Lemma 1. $y(x)$ *sei eine beliebige Lösung der Differentialgleichung* (a), *dann können wir sie in der Form*

$$y(x) = z(x) + \int_a^x [q_1(t) - q(t)]\, r(t)\, W(x, t)\, y(t)\, dt \tag{3}$$

schreiben, wo $z(x)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (a) *ist, welche im Punkte* a *dieselben Anfangsbedingungen wie* $y(x)$ *erfüllt,* $W(x, t)$ *ist eine Funktion der Form*

$$W(x, t) = \begin{vmatrix} z_1(x), & z_2(x), & z_3(x) \\ z_1(t), & z_2(t), & z_3(t) \\ z_1'(t), & z_2'(t), & z_3'(t) \end{vmatrix}$$

und z_1, z_2, z_3 *bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung* (a$_1$), *deren Wronskische Determinante im Sinne der Bemerkung* 3 *gleich* $1/r(x)$ *ist.*

Den Beweis führen wir mit der Variationsmetode der Konstanten durch, welche wir auf die Differentialgleichung

$$[ry']'' + q_1 y = (q_1 - q)\, y$$

verwenden. Die Gleichung (a) kann leicht in diese Form umgeändert werden.

Die Funktionen $c_1(x)$, $c_2(x)$, $c_3(x)$, welche bei der Variationsmethode der Konstanten auftreten, errechnen wir aus den folgenden drei Gleichungen

$$c_1'z_1 + c_2'z_2 + c_3'z_3 = 0$$
$$c_1'z_1 + c_2'z_2 + c_3'z_3 = 0$$
$$c_1'[rz_1']' + c_2'[rz_2']' + c_3'[rz_3']' = (q_1 - q)\, y.$$

Satz. 3. (Vergleichungssatz). *Es sei* $0 \leqq q_1(x) \leqq q(x)$ *für* $x \in (-\infty, \infty)$. *Dann gilt:*

1. *Wenn irgend eine Lösung* $z(x)$ *der Differentialgleichung* (a$_1$) *unendlich viele Nullstellen in* (a, ∞) *hat (oszilliert),* $-\infty < a < \infty$, *dann oszilliert im Intervall* (a, ∞) *jede Lösung* y *der Differentialgleichung* (a) *die eine Nullstelle hat. Wenn* y *und* z *Lösungen der Differentialgleichung* (a) *und* (a$_1$) *mit einer doppelten Nullstelle im Punkte* a *sind, d. dh.* $y(a) = y'(a) = 0$, $[ry']'(a) \neq 0$, $z(a) = z'(a) = 0$, $[rz']'(a) \neq 0$, *dann ist die erste Nullstelle der Lösung* y *rechts von* a *nicht weiter von* a *entfernt, als die erste Nullstelle der Lösung* z *rechts von* a.

2. *Wenn die Lösung y der Differentialgleichung* (a) *mit einer doppelten Nullstelle im Punkte a keine weitere Nullstelle rechts von a hat, dann hat auch die Lösung $\bar{z}$ der Differentialgleichung* (a_1) *mit einer doppelten Nullstelle im Punkte a keine weiteren Nullstellen.*

Der Beweis folgt aus den Eigenschaften der Büschel und aus dem Lemma 1. Setzen wir voraus, daß $z(x)$ in (a, ∞) unendlich viele Nullstellen hat. Es genügt zu zeigen, daß die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) mit einer doppelten Nullstelle im Punkte a in (a, ∞) unendlich viele Nullstellen hat. Wenn dann $\bar{y}(x)$ eine beliebige Lösung der Gleichung (a) mit der Eigenschaft $\bar{y}(\alpha) = 0$, $-\infty < \alpha < \infty$ ist, gehört sie in das Büschel im Punkte α. Es sei $\alpha < \bar{x}$, wo $\bar{x} \in (a, \infty)$ irgendeine Nullstelle der Lösung y ist. Den Punkt $\bar{x}$ durchquert eine Lösung des Büschels im Punkte α, welche oszilliert, da die Lösung y, welche auch in das Büschel im Punkte $\bar{x}$ gehört, ebenfalls oszilliert. Daher muß auch die Lösung $\bar{y}$ oszillieren.

Zeigen wir also, daß die Lösung y mit einer doppelten Nullstelle im Punkte a oszilliert und ihre erste Nullstelle rechts von a, von a nicht weiter entfernt ist, als die erste Nullstelle der Lösung $\bar{z}$ der Differentialgleichung (a_1) mit einer doppelten Nullstelle im Punkte a. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Lösung $\bar{z}$ oszilliert, weil wie vorausgesetzt wurde, die Lösung z oszilliert. Einfachheitshalber setzen wir voraus, daß $[ry']'(a) = [r\bar{z}']'(a) > 0$.

Nach dem Lemma 1 gilt zwischen y und $z = \bar{z}$ die Beziehung (3). Die Funktion $W(x, t)$ ist bei festem t eine Lösung der Differentialgleichung (a_1) mit einer doppelten Nullstelle im Punkte t, wobei $[r(x)\ W(x, t)]'_x\ (t) = 1$ ist, wenn $t = a$ ist $W(x, a) = k\bar{z}$, $k > 0$. Deshalb ist $W(x, t) \geqq 0$ für $a \leqq t \leqq x \leqq x_1$, wo x_1 eine feste Nullstelle der Lösung $\bar{z}$ ist. x_1 sei die erste Nullstelle der Lösung y rechts von a. Zeigen wir, daß $\bar{x}_1 \leqq x_1$. Die Behauptung folgt aus der Beziehung (3), da der Ausdruck unter dem Integral nicht positiv ist, weil $q_1 - q \leqq 0$. Damit zeigten wir, daß jede Lösung der Differentialgleichung (a) mit einer doppelten Nullstelle wenigstens eine weitere Nullstelle hat. Die Lösung y gehört deshalb in das Büchsel im Punkte $\bar{x}_1$. Die Lösung y hat auch eine weitere Nullstelle, da aus dem Punkte $\bar{x}_1$ eine Lösung mit einer doppelten Nullstelle hervorgeht, welche eine weitere Nullstelle hat. Aus dieser Erwägung geht aber hervor, daß die Lösung y unendlich viele Nullstellen in (a, ∞) hat.

Die zweite Behauptung folgt ebenfalls aus dem Lemma 1.

Satz 4. $\varphi(x) \geqq 0$ *sei eine Funktion, nicht identisch mit Null, definiert und stetig zusammen mit Ihrer ersten Ableitung* $\varphi'(x) \geqq 0$ *in irgendeinem Intervall* (a, ∞). *Weiter sei für* $a < x < \infty$:

$$q(x) \geqq \frac{\varphi'(x)}{\int_a^x (x - t)\frac{\varphi'(t)}{r(t)}\,dt} \qquad \left[0 \leqq q(x) \leqq \frac{\varphi'(x)}{\int_a^x (x - t)\frac{\varphi(t)}{r(t)}\,dt}\right].$$

Wenn dann die Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left[\frac{r}{\int\limits_a^x (x-t)\frac{\varphi(t)}{r(t)}\,dt}\, y'\right]' + \frac{\varphi(x)}{\left[\int\limits_a^x (x-t)\frac{\varphi(t)}{r(t)}\,dt\right]^2}\, y = 0 \qquad (\bar{c}_1)$$

in (a, ∞) *oszillieren (nicht oszillieren) dann oszilliert (hat eine endliche Anzahl von Nullstellen) in* (a, ∞) *jede Lösung der Differentialgleichung* (a) *mit einer Nullstelle.*

Beweis. Durch die Ableitung der Gleichung $(\bar{c}_1)$ erhalten wir die Gleichung dritter Ordnung

$$[ry']'' + \frac{\varphi'(t)}{\int\limits_a^x (x-t)\frac{\varphi(t)}{r(t)}\,dt}\, y = 0. \qquad (\bar{a}_1)$$

Die Gleichung $(\bar{c}_1)$ ist eine Gleichung des Büschels im Punkte a der Differentialgleichung $(\bar{a}_1)$ wobei

$$\omega(x) = \int\limits_a^x (x-t)\frac{\varphi(t)}{r(t)}\,dt.$$

Wenn wir jetzt die Gleichung (a) mit der Gleichung $(\bar{a}_1)$ vergleichen, erhalten wir die Behauptung des Satzes, da aus den Eigenschaften der Büschel folgt, daß wenn die Lösungen der Gleichung $(\bar{c}_1)$ oszillieren, oszilliert jede Lösung der Gleichung $(\bar{a}_1)$ mit einer Nullstelle. Wenn die Lösungen der Gleichung $(\bar{c}_1)$ nicht oszillieren, hat jede Lösung der Differentialgleichung (a_1) in (a, ∞) eine endliche Anzahl von Nullstellen.

Folgerung 1. *Es sei* $r(x) = 1$, *dann geht die Gleichung (a) in eine lineare binomische Differentialgleichung dritter Ordnung über. Wählen wir* $\varphi(x) = x^n$, $a = 0$ *und zeigen wir, daß aus dem abgeleiteten Kriterium das Kriterium für die binomische Gleichung folgt.*

Es ist

$$\int\limits_0^x (x-t)\, t^n\,dt = \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Die Gleichung $(\bar{c}_1)$ ist dann

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)}{x^{n+2}}\, y'\right]' + \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{x^{n+4}}\, y = 0,$$

welche in die Form

$$y'' - \frac{n+2}{x} y' + \frac{(n+1)(n+2)}{x^2} y = 0$$

gestaltet werden kann.

Durch die Substitution $y = x^{\frac{n+2}{2}} u$ geht die angeführte Gleichung in die Form

$$u'' + \frac{3n^2 + 6n}{4} \frac{1}{x^2} u = 0$$

über.

Wenn $3n^2 + 6n = 1$ ist, d. h. $n = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$, dann hat die Gleichung keine oszillatorische Lösung und die Lösungen der Gleichung (a), wo $r(x) = 1$ oszillieren nicht, wenn $0 \leqq q(x) \leqq \frac{n(n+1)(n+2)}{x^3}$, $n = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ gilt, d. h. wenn $0 \leqq q(x) \leqq \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^3}$. Wenn $3n^2 + 6n = 1 + \delta$, $\delta > 0$, d. h. wenn $n_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\delta}$, dann oszillieren die Lösungen der Gleichung $(\bar{c}_2)$ und die Lösungen der Gleichung (a), (wo $r(x) = 1$ ist) mit einer Nullstelle oszillieren, wenn $q(x) \leqq \frac{n(n+1)(n+2)}{x^3}$, $n = -1 + \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\delta}$, d. h. wenn $q(x) \geqq \frac{1}{3}(1 + \delta)\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\delta} \times \frac{1}{x^3}$. Wenn $n = n_2$ erhalten wir Ergebnisse für die zu der Gleichung (a) adjungierte Gleichung.

III. Außer der Differentialgleichung (a) sei wieder die Gleichung (a_1) mit stetigen Koeffizienten in $(-\infty, \infty)$ gegeben.

Satz 5. *Es sei* $\int_a^\infty | q(t) - q(t) | r(t)\, dt < \infty$, $-\infty < a < \infty$. *Wenn dann jede Lösung der Differentialgleichung* (a_1) *zusammen mit ihrer ersten Ableitung in* (a, ∞) *begrenzt ist (konvergiert für* $x \to \infty$ *zu Null), ist auch jede Lösung der Differentialgleichung* (a) *in* (a, ∞) *begrenzt (konvergiert zu Null für* $x \to \infty$*).*

Beweis. y und z seien Lösungen der Differentialgleichungen (a) und (a_1) mit denselben Anfangsbedingungen im Punkte α, wo $a < \alpha < \infty$.

$k > 0$ sei eine Konstante mit der Eigenschaft $| z | < k$, $| z_i | < k$, $| z_i' | < k$, $i = 1, 2, 3$, für $x \in (a, \infty)$, $z_i = 1, 2, 3$ sei ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (a_1). Weiter sei α derart, daß $\int_\alpha^\infty | q - q_1 | r(t)\, dt < 1/6k^3$.

Aus der Beziehung 3 folgt dann

$$|y(x)| \leqq |z(x)| + |y(\xi)|\, 3k^3 + \frac{1}{6k^3} = k + \frac{1}{2}|y(\xi)|, \tag{4}$$

wo $\xi \in \langle \alpha, x\rangle$ ein Punkt ist, in welchem $|y(x)|$ sein Maximum im Intervall $\langle \alpha, x\rangle$ hat. Die Ungleichheit (4) gilt auch für $x = \xi$. Deshalb ist

$$\frac{1}{2}|y(\xi)| < k$$

im beliebigen Intervall $\langle \alpha, x\rangle$.

Daraus folgt die erste Behauptung. Wenn die Lösungen der Differentialgleichung zusammen mit ihren ersten Ableitungen für $x \to \infty$ zu Null konvergieren, dann sind die Lösungen der Differentialgleichung (a) in (a, ∞) begrenzt und aus der Beziehung (3) erhalten wir dann

$$|y(x)| \leqq |z(x)| + k_1 |z_1(x)| + k_2 |z_2(x)| + k_3 |z_3(x)|,$$

wo k_1, k_2, k_3 passende positive Konstanten sind. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 6. Es sei $\int\limits_a^\infty \frac{t-a}{r(t)}\, \mathrm{d}t < \infty$, $\int\limits_a^\infty |q(t)|\, r(t)\, \mathrm{d}t < \infty$ *und* $0 < \frac{x-a}{r(x)}$ *in* (a, ∞). *Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung* (a) *im* (a, ∞) *begrenzt.*

Beweis. Vergleichen wir die Gleichung (a) mit der Gleichung $[rz']'' = 0$. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$z = k_1 \int\limits_a^x \frac{t-a}{r(t)}\, \mathrm{d}t + k_2 \int\limits_a^x \frac{\mathrm{d}t}{r(t)} + k_3.$$

Ersichtlich ist jede partikuläre Lösung zusammen mit ihrer ersten Ableitung in (a, ∞) begrenzt. Es sind also die Voraussetzungen des Satzes 5 erfüllt und deshalb ist jede Lösung der Gleichung (a) in (a, ∞) begrenzt.

Satz 7. Es sei $\int\limits_\infty^a \frac{t-a}{r(t)}\, \mathrm{d}t < \infty$, $\int\limits_\infty^a (t-a)\, |q(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$. *Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung* (a) *im Intervall* (a, ∞) *begrenzt.*

Beweis. Vergleichen wir wieder die Gleichung (a) mit der Gleichung $[rz']'' = 0$. Aus der Beziehung 3 erhalten wir

$$y = z - \int\limits_\alpha^x q(t)\, r(t)\, W(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}t, \qquad a < \alpha < \infty, \tag{5}$$

wo y, z im Punkte α dieselben Anfansbedingungen erfüllen.

$$W(x,t) = \begin{vmatrix} \int\limits_\alpha^x \frac{u-\alpha}{r(u)}\,\mathrm{d}u, & \int\limits_\alpha^x \frac{du}{r(u)}, & -1 \\ \int\limits_\alpha^t \frac{u-\alpha}{r(u)}\,\mathrm{d}u, & \int\limits_\alpha^u \frac{du}{r(u)}, & -1 \\ \frac{t-\alpha}{r(t)}, & \frac{1}{r(t)}, & 0 \end{vmatrix}$$

wo die Funktionen in der ersten Reihe ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $[rz']'' = 0$ bilden, deren Wronskische Determinante gleich $1/r(x)$ ist.

$W(x, t)$ kann folgendermassen geschrieben werden

$$W(x,t) = \frac{1}{r(t)} \int\limits_\alpha^x \frac{u-\alpha}{r(u)}\,\mathrm{d}u - \frac{t-\alpha}{r(t)} \int\limits_\alpha^x \frac{\mathrm{d}u}{r(u)} -$$

$$- \frac{1}{r(t)} \int\limits_\alpha^t \frac{u-\alpha}{r(u)}\,\mathrm{d}u + \frac{t-\alpha}{r(t)} \int\limits_\alpha^t \frac{\mathrm{d}u}{r(u)}.$$

Aus der Beziehung (5) erhalten wir dann

$$y(x) = z(x) - \int\limits_\alpha^x q(t)\, y(t)\,\mathrm{d}t \int\limits_\alpha^u \frac{u-\alpha}{r(u)}\,\mathrm{d}u +$$

$$+ \int\limits_\alpha^x \frac{\mathrm{d}u}{r(u)} \int\limits_\alpha^x (t-\alpha)\, q(t)\, y(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_\alpha^x (t-\alpha)\, q(t)\, y(t) \int\limits_\alpha^t \frac{\mathrm{d}u}{r(u)}\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int\limits_\alpha^x q(t)\, y(t) \int\limits_\alpha^t \frac{u-\alpha}{r(u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Wählen wir α so, daß

$$\int\limits_\alpha^\infty |q(t)|\,\mathrm{d}t \int\limits_\alpha^\infty \frac{u-\alpha}{r(u)}\,\mathrm{d}u + \int\limits_\alpha^\infty \frac{\mathrm{d}u}{r(u)} \int\limits_\alpha^\infty (t-\alpha)\,|q(t)|\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int\limits_\alpha^\infty (t-\alpha)\,|q(t)|\,\mathrm{d}t \int\limits_\alpha^\infty \frac{\mathrm{d}u}{r(u)} + \int\limits_\alpha^\infty |q(t)|\,\mathrm{d}t \int\limits_\alpha^\infty \frac{u-\alpha}{r(u)}\,\mathrm{d}u \leqq \frac{1}{2}.$$

Das ist ersichtlich möglich, da jedes der angeführten Integrale konvergiert.

$|y(x)|$ habe in $\xi \in \langle \alpha, x \rangle$ ein Maximum. Dann erhalten wir aus der Beziehung (6)

$$|y(x)| \leqq z(x)| + |y(\xi)| \left\{ \int_\alpha^\infty |q(t)| \, dt \int_\alpha^\infty \frac{u-\alpha}{r(u)} \, du + \int_\alpha^\infty \frac{du}{r(u)} \int_\alpha^\infty (t-\alpha) \, q(t) \, dt + \right.$$

$$\left. + \int_\alpha^\infty (t-\alpha) \, |q(t)| \, dt \int_\alpha^\infty \frac{du}{r(u)} + \int_\alpha^\infty |q(t)| \, dt \int_\alpha^\infty \frac{u-\alpha}{r(u)} \, du \right\} \leqq$$

$$\leqq |z(x)| + \frac{1}{2} |y(\xi)| \leqq k + \frac{1}{2} |y(\xi)|.$$

Da die letzte Ungleichheit auch für $x = \xi$ gilt, ist $\frac{1}{2} |y(\xi)| \leqq k$. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 8. *Es sei* $q(x) \geqq 0$ *für* $x \in (-\infty, \infty)$. *Dann hat die Differentialgleichung* (a) *so wie auch* (b) *wenigstens eine Lösung ohne Nullstellen im Intervall* $(-\infty, \infty)$.

Beweis. Die Behauptung beweisen wir für die Differentialgleichung (a).

y_1, y_2, y_3 sei ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (a) mit den Eigenschaften $y_1(a) = y_1'(a) = 0$, $[ry_1']'(a) = 1$, $y_2(a) = [ry_2']'(a) = 0$, $y_2'(a) = 1$, $y_3'(a) = [ry_3']'(a) = 0$, $y_3(a) = 1$, $-\infty < a < \infty$.

Nach Satz 2 ist $y_1(x) \neq 0$, $y_1'(x) \neq 0$, $[ry_1']'(x) \neq 0$ für $x < a$.

$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ sei eine Folge von Zahlen, welche ins $+\infty$ divergiert. Bilden wir eine Folge von Lösungen der Gleichung (a) $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $u_n = c_1^n y_1 + c_2^n y_2 + c_3^n y_3$ mit der Eigenschaft $u_n(x_n) = u_n'(x_n) = 0$, $[ru_n']'(x_n) > 0$, wobei $u_n^2(a) + u_n'^2(a) + [ru_n']'^2(a) = 1$. Dies ist ersichtlich möglich. Aus dem Satz 2 folgt abermals, daß $u_n(x) > 0$, $u_n'(x) < 0$, $[ru_n']'(x) > 0$ für $x < x_n$.

Bilden wir diese Folgen von Zahlen

$$\{u_n(a)\}_{n=1}^\infty, \quad \{u_n'(a)\}_{n=1}^\infty, \quad \{[ru_n']'(a)\}_{n=1}^\infty. \tag{7}$$

Ersichtlich ist jede von ihnen begrenzt. Es existieren deshalb aus den Folgen (7) ausgewählte Folgen mit denselben Indizes, welche konvergieren. Der Einfachheit wegen setzen wir voraus, daß dies die Folgen (7) sind. Ihre Grenzwerte bezeichnen wir u_0, u_0', u_0''. $u(x)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung (a), welche die Bedingungen $u(a) = u_0$, $u'(a) = u_0'$, $[ru']'(a) = u_0''$ erfüllt. Diese Lösung ist nicht trivial, weil $u_0^2 + u_0'^2 + u_0''^2 = 1$ gilt. Die Lösungen $u_n(x)$ und $u(x)$ kann man in der Form

$$u_n(x) = [ru_n']'(a) \, y_1(x) + u_n'(a) \, y_2(x) + u_n(a) \, y_3(x),$$

$$u(x) = u_0'' y_1(x) + u_0' y_2(x) + u_0 y_3(x).$$

schreiben. Daraus folgt, daß $\lim u_n(x) = u(x)$ für jedes $x \in (-\infty, \infty)$, gilt. Zeigen wir jetzt, daß $u(x) > 0$, $u'(x) \leqq 0$, $[ru']'(x) \geqq 0$ für alle $x \in (-\infty, \infty)$ ist. Setzen wir voraus, daß $u(\bar{x}) = 0$, $u'(\bar{x}) \neq 0$. Dann existiert aber ein solcher Punkt ξ in der Umgebung des Punktes $\bar{x}$, in welchem $u(\xi) < 0$ ist. Aus dem vorhergehenden folgt, daß $\lim_{n \to \infty} u_n(\xi) = u(\xi) < 0$ ist. Dies ist aber nicht möglich, da von einem gewissen n beginnend $u_n(\xi) > 0$ ist.

Wenn $u(\bar{x}) = u'(\bar{x}) = 0$, dann existiert in der Umgebung des Punktes $\bar{x}$ ein solcher Punkt ξ, in welchem $u'(\xi) > 0$. Dies ist aber wieder nicht möglich, da von einem gewissen n beginnend $u_n'(\xi) < 0$ ist. Damit haben wir gleichzeitig bewiesen, daß $u'(x) \leqq 0$ für alle $x \in (-\infty, \infty)$ ist. Ähnlich kann man beweisen, daß $[ru']'(x) \geqq \geqq 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$.

Bemerkung 5. *Im vorhergehenden Beweis haben wir nicht nur die Existenz der Lösung der Gleichung* (a) *ohne Nullstellen, aber auch die Existenz der Lösung ohne Nullstellen der Differentialgleichung* (a) *mit der Eigenschaft* $s \operatorname{gn} u = s \operatorname{gn} [ru']' \neq \neq s \operatorname{gn} u'$ *für alle* $x \in (-\infty, \infty)$ *bewiesen.*

Zeigen wir nämlich, daß $u(x) > 0$, $u'(x) < 0$, $[ru'(x)]' > 0$ für $-\infty < x < \infty$ ist.

Die Integralidentität (1) für $u_n(x)$ bei $a = x_n$ ist

$$ru_n'[ru_n']' - \int_{x_n}^{x} [(ru_n')'^2 - rqu_nu_n'] \, dt = 0 \tag{7}$$

Ganz einfach stellen wir fest, daß nach Durchführen des Grenzwertes für $n \to \infty$ die Integralidentität (7) in die Form

$$ru'[ru']' = -\int_{x}^{\infty} \{[ru']'^2 - rquu'\} \, dt \tag{8}$$

übergeht.

Setzen wir nun voraus, daß $u'(\bar{x}) = 0$ resp. $[ru']'(\bar{x}) = 0$. Aus den Voraussetzungen des Satzes 8 und aus der angeführten Identität folgt, daß dies nicht möglich ist.

Bemerkung 6. *Die Existenz der Lösungen ohne Nullstellen der Differentialgleichung* (b) *mit der Eigenschaft* $s \operatorname{gn} z(x) = s \operatorname{gn} z'(x) = s \operatorname{gn} z''(x)$ *wird ähnlich bewiesen, nur konstruiert man dabei die Folge* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *mit einer doppelten Nullstelle in* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *wo* $x_n \to -\infty$ *für* $n \to \infty$.

Folgerung 2. *Die im Satz* 8 *konstruierte Lösung* $u(x)$ *hat folgende Eigenschaft* $\lim_{x \to \infty} u'(x) = \lim_{x \to \infty} [ru']'(x) = 0$.

Beweis. Setzen wir nämlich voraus, daß $u(x) > 0$, $u'(x) < -k < 0$ ist. Nach der Integration der letzten Ungleichheit erhalten wir $u(x) < -k(x - a) + u(a)$. Daraus folgt, *daß* $u' \to 0$ für $x \to \infty$. Ähnlich aus der Ungleichheit $[ru']' > k > 0$ erhalten wir $ru' > k(x - a) + r(a)\,u'(a)$. Daraus folgt, daß von einem gewissen x beginnend $u'(x) > 0$ ist und dies ist mit dem vorhergehenden im Widerspruch.

LITERATUR

[1] Greguš M., Über einige Eigenschaften der Büschel von Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung, Čas. pro pěst. mat., 87 (1962) Praha.

Adresa autora: Katedra matematickej analýzy PFUK Bratislava, Šmeralova 2

Do redakcie došlo: 1. 12. 1964

O vlastnostiach riešení niektorých kvasilineárnych rovníc 3. rádu

M. Greguš

Výťah

O koeficientoch diferenciálnych rovníc

$$[r(x)\,y']'' + q(x)\,y = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$[r(x)\,z'']' - q(x)\,z = 0 \qquad \text{(b)}$$

predpokladajme, že $r(x) > 0$, $q(x)$ sú spojité funkcie $x \in (-\infty, \infty)$.

V prvej časti práce sú odvodené základné vlastnosti riešení diferenciálnych rovníc (a) a (b), vzťahy medzi riešeniami rovníc (a) a (b) a vlastnosti sväzkov riešení týchto rovníc.

V druhej časti práce je dokázaná porovnávacia veta a odvodené postačujúce podmienky pre oscilatoričnosť, resp. neoscilatoričnosť riešení rovnice (a).

V poslednej časti práce je dokázaná existencia riešenia bez nulových bodov rovnice (a) a (b) a odvodené podmienky, za ktorých riešenia rovnice (a) sú ohraničené.

О свойствах решений некоторых квазилинейных уравнений 3-го порядка

М. Грегуш

Резюме

Пусть заданы дифференциальные уравнения

$$[r(x')]'' + q(x)y = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$[r(x)z'']' - q(x)z = 0 \qquad \text{(b)}$$

где $r(x) > 0$, $q(x)$ непрерывны на $(-\infty, \infty)$.

В первой части работы исследованы основные свойства решений дифференциальных уравнений (a) и (b), соотношения между решениями уравнений (a) и (b) и свойства связов решений этих уравнений.

Во второй части доказана теорема сравнения и установлены достаточные условия для колеблемости (неколеблемости) решений уравнения (a).

В последней части работы доказано существование решения без нулевых точек уравнений a) и (b) и установлены условия, при которых решения уравнения (a) ограничены.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X, 3, MATHEMATIKA, 12., 1965]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X. FASC. III. MATHEMATICA XII. 1965

Über eine Klasse metrischer Räume

T. NEUBRUNN — T. ŠALÁT

In dieser vorliegenden Arbeit werden einige Ergebnisse der Arbeit [1] ergänzt und verallgemeinert.

In der Arbeit [1] wurden gewisse Typen von metrischen Räumen untersucht und die für diese Räume gewonnenen Ergebnisse wurden bei den Beweisen der analogischen Sätze verwendet, welche für die zu den Räumen mit Maß gehörenden metrischen Räume gelten.

1. Einleitung

Führen wir einige Begriffe und Ergebnisse der Arbeit [1] an. Die Ergebnisse, welche wir hier anführen sind etwas allgemeiner formuliert als in [1], können jedoch grundsätzlich auf die gleiche Art bewiesen werden wie die betreffenden Ergebnisse in [1].

Im Weiteren werden wir mit T irgendeine abstrakte Menge bezeichnen. X wird irgendeine Menge nichtnegativer reeler Funktionen auf T definierten bedeuten, welche in Bezug zur Summe geschlossen ist. Von dem Funktional A, definiert auf X werden wir behaupten, daß es die Eigenschaft V besitzt, wenn es nichtfallend und subaditiv ist und den Nullwert auf der Funktion identisch gleich Null und nur auf dieser Funktion gewinnt. Wenn $T = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ und wenn X die Menge aller reeller nichtnegativen Folgen ist, dann werden wir anstatt X, s^* schreiben und s^* halten wir für einen metrischen Raum mit Frechetscher Metrik. Wenn X die Menge aller nichtnegativen begrenzten Folgen bedeutet, werden wir anstatt X, m^* schreiben und m^* halten wir für den metrischen Raum mit der Metrik ϱ^*:

$$\varrho^*(\{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty) = \sup_n (a_n - b_n)$$

Wenn X die Menge aller auf T definierten nichtnegativen begrenzten Funktionen bedeutet, werden wir anstatt X, M^* schreiben und M^* halten wir für einen metrischen

Raum mit der Metrik ϱ^*

$$\varrho^*(x, y) = \sup_{t \in T} | x(t) - y(t) |$$

Satz 1. *$\{(S_t, \varrho_t)\}$ $(t \in T)$ sei ein System von metrischen Räumen, S bedeute das karksische Produkt der Mengen S_t. Es gehöre die Funktion $\varrho_t(s(t), s'(t))$ für jede zwei Punkte s, s' zu X. A sei in Funktional mit der Eigenschaft V, definiert auf X. Dann ist die Funktion $\varrho(s, s') = A[\varrho_t(s(t), s'(t)]$ eine Metrik auf S.*

Bemerkung. Die Bezeichnung (S, ϱ) wird im Weiteren die gleiche Bedeutung haben, wie im Satz 1,1.

Beispiel 1. Die Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes sind z. B. dann erfüllt, wenn X eine Menge aller nichtnegativen begrenzten auf T definierten Funktionen ist und $\{(S_t, \varrho_t)\}$ $(t \in T)$ ist ein solches System von metrischen Räumen, für welches die Funktionen $\varrho_t(s(t), s'(t))$ $(s, s' \in S$ beliebig) in X gehören. Das stellt sich z. B. dann ein, wenn $\sup d(S_t) < +\infty$ $(d(S_t)$ bedeutet den Diameter des Raumes $S_t)$.

Beispiel 2. Wenn X eine Menge aller nichtnegativen auf T definierten Funktionen ist, können wir für $\{(S_t, \varrho_t)\}$ $(t \in T)$ ein beliebiges System von metrischen Räumen nehmen.

2. Der Zusammenhang der Räume (S, ϱ) mit Frechetischer Metrik

Weiter verwenden wir folgenden Hilfsatz.

Lemma 2.1. *A sei ein Funktional mit der Eigenschaft V definiert auf X. Für die Folge $\{a^{(n)}\}_1^\infty$, $a^{(n)} \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gelte $\lim_{n\to\infty} A\ [a^{(n)}] = 0$. Dann ist für jedes $t \in T$ $\lim_{n\to\infty} a^{(n)}(t) = 0$.*

Beweis. Beweisen wir indirekt. Die Behauptung des Lemma gelte nicht z. B. für $t = t_0$. Dann existiert $C > 0$ und die aus der Folge $\{a^{(n)}(t_0)\}_1^\infty$ ausgewählte Folge $\{a^{(n_k)}(t_0)\}_{k=1}^\infty$ derart, daß $a^{(n_k)}(t_0) \geqq C$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Bilden wir die Folge $\{b^{(n_k)}(t)\}_{k=1}^\infty$ so dass $b^{(n_k)}(t) = 0$ für $t \neq t_0$ und $b^{(n_k}(t_0) = a^{(n_k)}(t_0)$. Aus der Monotonie des Funktionals A folgt $A\ [b^{(n_k)}(t)] \geqq C_1 > 0$, wo C_1 der Wert des Funktionals A auf der Funktion ist, deren Wert im Punkt t_0 gleich C ist und alle ihre anderen Werte gleich Null sind. Aus der Monotonie von A folgt weiter $A[a^{(n_k)}] \geqq A[b^{(n_k)}] \geqq$ $\geqq C_1 > 0$ also konvergiert die ausgewählte Folge $\{A[a^{(n_k)}]\}_{l=1}^\infty$ der Folge $\{A[a^{(n)}]\}_{n=1}^\infty$ nicht zu Null. Dies ist aber im Widerspruch mit der Voraussetzung des Lemma.

Bemerkung. Das oben angeführte Lemma kann vollkommen analogisch für Folgen der Type $\{a^{(m,n)}\}_{m,n=1}^\infty$ bewiesen werden.

Satz 2.1. *A sei ein auf s^* definiertes und im Punkte $\{0\}_1^\infty$ stetiges Funktional. $\{(S_k, \varrho_k)\}_{k=1}^\infty$ sei eine Folge von metrischen Räumen. Dann ist die mit Hilfe des*

Funktionals auf dem kartesischen Produkt dieser Räume gebildete Metrik ϱ äquivalent mit der Frechetischen Metrik.

Beweis. Bezeichnen wir die Frechetsche Metrik auf dem Produkt S mit dem Zeichen ϱ^*, so daß

$$\varrho^*(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\varrho_n(a_n, b_n)}{1 + \varrho_n(a_n, b_n)}$$

wo $a = \{a_n\}_1^\infty$, $b = \{b_n\}_1^\infty$, $a_n, b_n \in S_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Erinnern wir weiter an die bekannte Tatsache, daß die Folge $\{\{a_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty\}_{m=1}^\infty$ der Elementen S in der Metrik ϱ^* dann und nur dann zum Element $\{a_n\}_1^\infty$ konvergiert, wenn für jedes $k = 1, 2, 3\ldots$ $\lim_{m\to\infty} \varrho_k(a_k^{(m)}, a_k) = 0$.

Es konvergiere also die Folge $\{\{a_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty\}_{m=1}^\infty$ zum Element $\{a_n\}_1^\infty$ im Sinne der Frechetschen Metrik. Das heißt, daß

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_k(a_k^{(m)}, a_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Aus der Stetigkeit des Funktionals A in $\{0\}_{n=1}^\infty$ folgt, daß $\lim A[\varrho_k(_k^{(m)}, a_k)] = 0$ also $\lim_{m\to\infty} \varrho(\{a_k^{(m)}\}_{k=1}^\infty, \{a_k\}_{k=1}^\infty) = 0$. Das heißt jedoch, daß $\{\{a_k^m\}_{k=1}^\infty\}_{m=1}^\infty$ im Sinne der Metrik ϱ zu $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ konvergiert.

Die umgekehrte Beziehung zwischen den Konvergenzen im Sinne der Metrik ϱ, ϱ^* folgt sofort aus dem Lemma 2.1.

3. Die Vollständigkeit des Raumes (S, ϱ)

In der Arbeit [1] war folgender Satz bewiesen worden.

Satz 3.1. *A sei ein Funktional mit der Eigenschaft V definiert auf M^* und stetig in $x(t) \equiv 0$. $\{(S_t, \varrho_t)\}$ $(t \in T)$ sei ein solches System von metrischen Räumen, daß $\sup_{t\in T} d(S_t) < \infty$. Es exsitiere $c > 0$ derart, daß für jede Funktion $a \in M^*$ $A[a] \geqq$ $\geqq c \sup_{t\in T} a(t)$ ist. Dann ist der Raum (S, ϱ) dann und nur dann vollständig, wenn alle Räume (S_t, ϱ_t) $(t \in T)$ vollständig sind.*

Für den Fall, daß das Funktional A auf der Mengen allen reellen Funktionen definiert ist, führen wir hier den analogischen Satz an. Es ist nicht nötig hier über die metrischen Räume (S_t, ϱ_t) $(t \in T)$ einige Voraussetzungen zu machen. Über das werden wir voraussetzen, daß es in der Funktion identisch gleich Null stetig ist, Vom Funktional A damit meinen wir dieses: $\{a^{(n)}(t)\}_{n=1}^\infty$ ist eine Folge der Elemente aus S und wenn für jedes $t \in T$ $\lim_{n\to\infty} a^{(n)}(t) = 0$ ist, dann $\lim_{n\to\infty} A[a^{(n)}] = 0$.

Satz 3.2. *$\{(S_t, \varrho_t)\}$ $(t \in T)$ sei ein System von metrischen Räumen, A sei ein Funktional mit der Eigenschaft V definiert auf der Menge aller nichtnegativen Funktionen* *definierten auf T. A sei stetig in der Funktion identisch gleich Null. Dann ist der Raum (S, ϱ) vollständig.*

Beweis. $\{s^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ sei eine Cauchysche Folge der Elemente aus S. Also $A[\varrho_t(s^{(m)}(t), s^{(n)}(t))] \to 0$ für $m, n \to \infty$. Auf Grund der Bemerkung nach dem Lemma 2.1 folgt daraus, daß für jedes $t \in T$ ist $\varrho_t(s^{(m)}(t), s^{(n)}(t)) \to 0$ wenn $m, n \to \infty$. Das bedeutet, daß jede der Folgen $\{s^{(n)}(t_0)\}_{n=1}^{\infty}$ $(t_0 \in T)$ eine Cauchysche Folge ist. Nach der Voraussetzung des Satzes existiert $\lim\limits_{n\to\infty} s^{(n)}(t_0) = s_{t_0}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_{t_0}(s^{(n)}(t_0), s_{t_0}) = 0$. Wenn wir jetzt s so definieren, daß $s(t_0) = s_{t_0}$ für jedes $t_0 \in T$ ist, und wenn wir erwägen, daß das Funktional A stetig ist in der Funktion identisch gleich Null, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(s^{(n)}, s) = \lim_{n\to\infty} A[\varrho_t(s^{(n)}(t), s(t)] = 0$$

Damit ist der Beweis beendet.

Aus der Vollständigkeit des Raumes folgt auch in diesem Falle die Vollständigkeit eines jeden der Räume (S_t, ϱ_t) $(t \in T)$ sogar unter schwächeren Voraussetzungen über das Funktional wie im Satz 3,2.

Satz 3.3. *A sei ein Funktional mit der Eigenschaft V definiert auf der Menge aller reellen Funktionen und stetig in der Funktion identisch gleich Null bei der durch gleichmässige Konvergenzen gegebenen Topologie. (S, ϱ) sei ein vollständiger Raum. Dann ist jeder der Räume (S_t, ϱ_t) $(t \in T)$ vollständig.*

Beweis. (S, ϱ) sei ein vollständiger Raum, es sei $t_0 \in T$. $\{s_{t_0}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ sei eine Cauchysche Folge von Elementen aus S_{t_0}. Definieren wir die Folge $\{s^{(n)}\}_1^{\infty}$ der Elemente aus S derart: Wählen wir für $t \neq t_0$ die Elemente s_t fix und für $n = 1, 2, \ldots$ bezeichnen wir $s^{(n)}(t) = s_t$. Für $t = t_0$ bezeichnen wir $s^{(n)}(t_0) = s_{t_0}^{(n)}$. Da für $t \neq t_0$ $\varrho_t(s^{(n)}(t), s^{(m)}(t)) = 0$ ist und für $t = t_0$ $\varrho_t(s_{t_0}^{(n)}(t_0), s^{(m)}(t_0))$ konvergiert bei $m, n \to \infty$ zu Null, die Folge reeller Funktionen $\varrho_t(s^{(n)}(t), s^{(m)}(t))$ konvergiert mit Hinsicht auf $t \in T$ gleichmäßig zu der Funktion identisch gleich Null. Aus der Voraussetzung des Satzes über das Funktional A erhalten wir dann

$$A[\varrho_t(s^{(n)}(t), s^{(m)}(t))] = \varrho(s^{(n)}, s^{(m)}) \to 0 \qquad (m, n \to \infty)$$

also existiert $s \in S$ derart, daß $\varrho(s^{(n)}, s) \to 0$ daher $s^{(n)}(t_0) \to s(t_0)$.

Der folgende Satz ergänzt im gewissen Sinne die Sätze 3.1 und 3.2.

Satz 3.4. *$\{(S_t, \varrho_t)\}$ $(t \in T)$ sei ein System metrischer Räume und $\{(\tilde{S}_t, \tilde{\varrho}_t)\}$ $(t \in T)$ sei ein System vollständiger Hüllen dieser Räume. A sei ein Funktional definiert auf die Menge aller auf T definierten nichtnegativen Funktionen und sei stetig in der Funktion identisch gleich Null bei der durch gleichmäßige Konvergenz gegebenen Topologie. (S, ϱ) resp. $(\tilde{S}, \tilde{\varrho})$ sei ein mit Hilfe des Funktionals A und des kartesischen Produktes der Mengen S_t resp. $\tilde{S}_t$ gebildeter metrischer Raum. Dann ist $(\tilde{S}, \tilde{\varrho})$ eine vollständige Hülle des Raumes (S, ϱ).*

Beweis. Nach Satz 3.3 ist $(\tilde{S}, \tilde{\varrho})$ ein vollständiger Raum. Es genügt zu zeigen, daß S in $(\tilde{S}, \tilde{\varrho})$ eine dichte Menge ist. Es sei $\tilde{x} \in \tilde{S}$, es sei $\varepsilon > 0$. Aus der Stetigkeit des Funktionals A in der Funktion identisch gleich Null folgt, daß $\delta > 0$ derart existiert, daß für $x \in X$, $\sup_{t \in T} | x(t) | < \delta$, $A[x] < \varepsilon$ ist. Da $(\tilde{S}_t, \tilde{\varrho}_t)$ $(t \in T)$ vollständige Hüllen der Räume (S_t, ϱ_t) sind, existiert für jedes $t \in T$, $x_t \in S_t$ derart, daß $\varrho_t(\tilde{x}(t), x_t) < \delta/2$.

Schreiben wir $x(t) = x_t$ für $t \in T$. Ersichtlich ist $\sup_{t \in T} \varrho_t(\tilde{x}(t), x(t)) < \delta$, also ist $\varrho(\tilde{x}, x) < \varepsilon$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

4. Separabilität des Raumes (S, ϱ)

Wenn (S_t, ϱ_t), $(t \in T)$ separable Räume sind und A ein beliebiges Funktional mit der Eigenschaft V ist, muß (S, ϱ) kein separabler Raum sein. Dies ist ersichtlich aus dem Beispiel (siehe [1]) in welchem (S_n, ϱ_n) $(n = 1, 2, \dots)$ metrische Räume sind, $S_n = \{0, 1\}$, ϱ_n ist die Euklidische Metrik. Das Funktional A definieren wir auf den Raum m^* so, daß wir für $a = \{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty} \in m^*$ $A[a] = \sup_{l=1,2\dots} \alpha_l$ setzen. Dieses Funktion ist im Raume m^* sogar stetig. Im Raume aller begrenzten nichtnegativen Folgen bei der Frechetschen Metrik ist es jedoch nicht stetig. Für das bei der Frechetischen Metrik stetige Funktional A gilt folgender Satz:

Satz 4.1. (S_n, ϱ_n) $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *seien separable metrische Räume, das Funktional A definiert auf* s^* *sei stetig in* $\{0\}_1^{\infty}$. *Dann ist* (S, ϱ) *ein separabler metrischer Raum.*

Für spezielle Typen von Folgen metrischer Räume genügt es die Stetigkeit des Funktionals A im Raum m^* vorauszusetzen.

Satz 4.2. *A sei ein auf* m^* *definiertes und in* $\{0\}_1^{\infty}$ *stetiges Funktional.* (S_n, ϱ_n) $(n = 1, 2, \dots)$ *seien separable Räume und es sei* $\lim_{n \to \infty} d(S_n) = 0$. *Dann ist* (S, ϱ) *ein separabler Raum.*

Beweis. M_n $(n = 1, 2, \dots)$ *sei eine abzählbare dichte Menge in* S_n. *Es sei* $x^0 = \{\xi_k^0\}_{k=1}^{\infty} \in S$. *Setzen wir* $B_k = M_1 \times M_2 \times M_k \times \{\xi_{k+1}^0\} \times \dots \times \{\xi_{k+n}\} \times \dots$. $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ ist ersichtlich eine abzählbare Menge. Zeigen wir, daß B in (S, ϱ) dicht ist. Es sei $y_0 = \{\eta_k^0\}_{k=1}^{\infty} \in S$ es sei $\varepsilon > 0$. $y = \{\eta_n\}_1^{\infty} \in B$ sollen wir so kostruieren, daß $\varrho(y, y^0) < \varepsilon$. Da A stetig ist in $\{0\}_1^{\infty}$ (mit Hinsicht auf den Raum m^*) existiert zu der Zahl $\varepsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ derart, daß für jede Zahlenfolge $\{\delta_n\}_1^{\infty}$, $\delta_n \geqq 0$, $\sup_{n=1,2,\dots} \delta_n < \delta$ gilt $A[\{\delta_n\}_1^{\infty}] < \varepsilon$. Zu der Zahl $\delta > 0$ finden wir n_0 derart, daß für $n > n_0$ $\delta(S_n) < \delta/2$ sein wird. In den Mengen M_i $(i = 1, 2, \dots, n_0)$ wählen wir die Elemente ξ_i so, daß $\varrho_i(\xi_i \eta_i^0) < \delta/2$ $(i = 1, 2, \dots, n_0)$. Für $n \leqq n_0$ setzen wir $\eta_n = \xi_n$ und für $n > n_0$ $\eta_n = \xi_n^0$. Dann ist $y = \{\eta_n\}_1^{\infty} \in B, \varrho_n(\eta_n, \eta_n^0) = \varrho_n(\eta_n^0, \xi_n) <$

$< \delta/2$ für $n \leqq n_0$ und $\varrho_n(\eta_n, \eta_n^0) = \varrho_n(\eta_n^0, \xi_n^0) < \delta/2$ für $n > n_0$. Also ist $\sup\limits_n \varrho_n(\eta_n, \eta_n^0) < \delta$, $\varrho(y, y_0) = A[\{\varrho_n(\eta_n, \eta_n^0)\}_1^\infty] < \varepsilon$.

Als Aplikation des vorhergehenden Satzes führen wir folgendes Beispiel an. (S_n, ϱ_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ seien Intervalle $\langle 0, \frac{1}{2}n \rangle$ auf der Zahlenachse mit Euklidischer Metrik. A sei definiert in der Menge aller reellen Folgen $\{\xi_n\}_1^\infty$ für welche $\sum\limits_1^\infty \xi_n^2 < +\infty$ ist. Der Raum (S, ϱ) ist der Hilbertsche Quader. Leicht stellen wir die Erfüllung der Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes fest und erhalten so auf dieser Grundlage den Beweis des bekannten Ergebnisses, daß der Hilbertische Quader separabel ist.

Für einen vollkommen allgemeinen Fall kann bewiesen werden, daß die Separabilität der Räume (S_t, ϱ_t) $(t \in T)$ eine notwendige Bedingung für die Separabilität des Raumes (S, ϱ) ist.

Satz 4.3. *$\{(S_t, \varrho_t)\}$ $(t \in T)$ sei ein System metrischer Räume. A sei ein Funktional mit der Eigenschaft V definiert auf X und für jedes $s, s' \in S$ gehöre die Funktion $\varrho_t(s(t), s'(t))$ zu X. Es sei wenigstens einer der Räume (S_t, ϱ_t) nicht separabel. Dann ist (S, ϱ) nicht separabel.*

Beweis. (S_{t_0}, ϱ_{t_0}) sei nicht separabel. Zeigen wir, daß wenn $M = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(n)}, \ldots\}$ eine beliebige abzählbare Menge von Elementen aus S ist, dann existiert $\delta > o$ und ein Punkt $\dot{x} = x(t) \in S$ derart, daß $\varrho(x, a^{(n)}) \geqq \delta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ M sei eine solche Menge. Da (St_0, ϱ_{t_0}) nicht separabel ist, existiert $d' > 0$ derart, daß für die beliebig abzählbare Menge $M_{t_0} \subset S_{t_0}$ das Element $\tau_{t_0} \in S_{t_0}$ so existiere, daß $\varrho_{t_0}(\tau_{t_0}, M_{t_0}) \geqq \delta'$. Setzen wir jetzt $M_{t_0} = \{a^{(1)}(t_0), a^{(2)}(t_0), \ldots\}$. Dann ist $\varrho_{t_0}(\tau_{t_0}, M_{t_0}) \geqq \delta'$. Es existiert also in M_{t_0} das Element σ_{t_0}, derart, daß $\varrho_{t_0}(\tau_{t_0}, \sigma_{t_0}) = \delta'' > 0$. Definieren wir jetzt die Funktion $r(t)$ derart: $r(t) = 0$, wenn $t \neq t_0$ und $r(t_0) = \varrho_{t_0}(\tau_{t_0}, \sigma_{t_0})$. Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt, daß $r(t) \in X$ und ersichtlich $\delta = A[r(t)] > 0$. Definieren wir jetzt die Funktion x so: für $t \neq t_0$ wählen wir $x(t) \in S_t$ beliebig und für $t = t_0$ setzen wir $x(t_0) = \tau_{t_0}$. Auf Grund der Monotonie des Funktionals A erhalten wir für $n = 1, 2, \ldots$

$$\varrho(a^{(n)}, x) = A[\varrho_t(a^{(n)}(t), x(t))] \geqq A[r(t)] = \delta > 0$$

5. Der Raum (S, ϱ) und die Eigenschaft S_2'

(Y, σ) sei ein metrischer Raum. Wir werden sagen, daß die Menge $E \subset Y$ die Eigenschaft S_2' hat, wenn $\delta > 0$ derart existiert, daß die Menge der Entfernungen $D(E)$ der Menge E den Intervall $\langle 0, \delta \rangle$ enthält. Im speziellen Fall, wenn $Y = (-\infty, \infty)$ und δ eine Euklidische Metrik ist, stimmt die Eigenschaft mit der Eigenschaft S_2 überein (siehe [2]). Zeigen wir im weiteren, daß wenn die Mengen $E_t \subset S_t$ $(t \in T)$ in den metrischen Räumen (S_t, ϱ_t) die Eigenschaft S_2' haben, dann hat unter einer gewissen Voraussetzung über das Funktional A (welche sehr an die sog. Darbouxische Eigenschaft der Funktion einer reellen Veränderlichen erinnert) auch das kartesische Produkt dieser Mengen im Raume (S, ϱ) die Eigenschaft S_2'. Formulieren wir das für den Fall des auf M^* definierten Funktionals.

Satz 5.1. *(S_t, ϱ_t) $(t \in T)$ sei ein System von metrischen Räumen und für jedes $s, s' \in S$ sei $\varrho_t(s(t), s'(t)) \in M^*$. A sei ein auf M^* definiertes Funktional, habe außer der Eigenschaft V noch folgende Eigenschaft: Wenn $A[x(t)] = \alpha$ und $0 \leqq \beta \leqq \alpha$, dann existiert $y(t) \leqq x(t)$ derart, daß $A[y(t)] = \beta$.*

$E_t \subset S_t$ habe die Eigenschaft S_2' (im Raume (S_t, ϱ_t)). *Dann hat das kartesische Produkt $E \subset S$ dieser Mengen die Eigenschaft S_2' im Raum (S, ϱ).*

Beweis. $\delta_t (t \in T)$ seien solche positive Zahlen, daß $D(E_t)$ den Intervall $\langle 0, \delta_t \rangle$ enthält. Bilden wir die reelle Funktion $r(t)$ so, daß wir $r(t) \mp \delta_t$ $(t \in T)$ setzen. Dann ist $r(t) \in M^*$ und setzen wir $\delta = A[r(t)]$, also ist $\delta > 0$. Nach der Voraussetzung über das Funktional A wenn $\delta' \leqq \delta$ ist, existiert dann $p(t) \leqq r(t)$ derart, daß $A[p(t)] = \delta'$. Für jedes $t \in T$ ist $p(t) \leqq \delta_t$ und weil E_t die Eigenschaft S_2 hat, existiert $u_t, v_t \in E_t$ so, daß $\varrho_t(u_t, v_t) = p(t)$. Definieren wir jetzt die Funktion $u(t)$, $v(t)$ so, daß wir $u(t) = u_t$, $v(t) = v_t$ setzen. Dann gehören die Funktionen $u(t)$, $v(t)$ in das kartesische Produkt der Mengen E_t und $\varrho(u(t), v(t)) = A[\varrho_t(u_t, v_t)] = A[p(t)] = \delta'$. Damit ist der Satz bewiesen.

6. Der Raum (S, ϱ) und die Produkttopologie

In der Arbeit [3] war folgender Satz bewiesen worden.

Satz A. *$S = \prod_{t \in T} S_t$ sei ein topologisches Produkt (mit der Produkttopologie) der Hausdorffschen Räume S_t $(t \in T)$ wobei jeder Raum S_t wenigstens zwei Punkte enthält. S ist dann und nur dann separabel wenn jeder der Räume S_t separabel ist und card $T \leqq c$ (c ist die Mächtigkeit des Continuum).* Es entsteht die natürliche Frage, welche Beziehung zwischen der Produkttopologie τ_p und der Topologie τ_ϱ welche durch das Funktional A auf dem kartesischen Produkt $\mathsf{X}_{t \in T} S_t$ gebildet wurde besteht.

Es ist leicht zu zeigen, daß $\tau_p \subset \tau_\varrho$. Es genügt zu zeigen, daß $U(V_{t_1}) \in \tau_\varrho$. Dabei bedeutet $U(V_{t_1})$ ein Element der Base der Topologie τ_p, $U(V_{t_1})$ ist die Menge aller jener $x = x(t) \in S$, für welche gilt: wenn $t = t_1$ dann $x(t_1) \in V_{t_1}$ (V_{t_1} ist eine offene Menge des Raumes S_t) und für $t \neq t_1$ ist $x(t) \in S_t$. Bilden wir das Komplement $CU(V_{t_1})$ der Menge $U(V_{t_1})$, es sei $a^{(n)} \in CU(V_{t_1})$, $a^{(n)} \to a$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (im Sinne der Metrik). Dann $a^{(n)}(t_1) \notin V_{t_1}$ also $a^{(n)}(t_1) \in CV_{t_1}$ und so ist auf Grund des Lemmas 2,1 $a(t_1) \in CV_{t_1}$, also $a = a(t) \in CU(V_{t_1})$ also ist $CU(V_{t_1})$ eine abgeschlossene Menge, in (S, ϱ), also ist $U(V_{t_1}) \in \tau_\varrho$. Die Produkttopologie und die durch das Funktional A gebildete Topologie stimmen im Algemeinen nicht überein. Dies ist z. B. an folgendem Beispiel ersichtlich.

Beispiel. Es sei $T = \{1, 2, 3 \ldots\}$, $S_t = \langle 0, 1 \rangle$ für jedes $t \in T$. $A(x) = \sup_{t \in T} x(t)$ für jede nichtnegative begrenzte Funktion. Die Konvergenz im Raume (S, ϱ), welche mit Hilfe dieses Funktionals gebildet wurde ist gleichmäßig in Bezug auf die Koordinaten, während in der Produkttopologie dies nur eine Konvergenz in Bezug auf die Koordinaten ist.

LITERATUR

[1] Neubrunn T., O metrických priestoroch patriacich k priestorom s mierou. Acta F. R. N. UNIV. COMEN. VII, 12 (1963), 663—672.

[2] Marczewski E., O presunieciach zbiorów i o pevnym tvierdzeniu Steinhausa, Prace matem. I (1955), 256—263.

[3] Ross K. A.—Stone A. H., Product of separable spaces, Amer. Math Monthly 71 (1964), 398—403

Adresa autorov: Katedra matematickej analýzy PFUK, Bratislava, Šmeralova 2

Do redakcie došlo: 10. 12. 1964

O jednej triede metrických priestorov

T. Neubrunn a T. Šalát

Výťah

Nech T je množina a (X_t, ϱ_t) $(t \in T)$ systém metrických priestorov. Ak funcionála A definovaná na (vhodnej) množine Y nezáporných reálnych funkcií je nezáporná monotonná subaditívna a nadobúdajúca nulovú hodnotu na funkcii identicky rovnej nule a len na tejto funkcii, potom na kartézskom súčine S množín S_t možno definovať metriku $\varrho(s, s') = A[\varrho_t(s(t), s'(t)]$. V [1] bol metrický priestor (S, ϱ) použitý pri štúdiu istých metrických priestorov patriacich k priestorom s mierou. V tejto práci sa vyšetrujú rôzne vlastnosti priestoru (S, ϱ) (napr. separabilita, úplnosť) a ich vzťah k zodpovedajúcim vlastnostiam priestorov (S_t, ϱ_t). Vyšetruje sa vzťah topologie danej metrikou ϱ a produktovej topológie. Ak $T = \{1, 2, 3, \ldots\}$ študuje sa vzťah metriky ϱ k Frechetovskej metrike.

Об одном классе метрических пространств

Т. Неубрунн и Т. Шалат

Резюме

Иусть T некоторое множество и (X_t, ϱ_t) $(t \in T)$ система метрических пространств. Если A функциональ определенный на (подходящем) множестве неотрицательных вещественных функций и если он неотрицательный полуадитывный и обращающийся в нуль на функции тождеътвенно нулевой и только на этой функции, то на произведении S множеств S_t можно определить метрику $\varrho(s, s') = A[\varrho_t(s(t), s(t))]$ Метрическое пространство (S, ϱ) было в [1] использовано к изучению некоторых метрических пространств принадлежащих пространствам с мерой. В настоящей работе изучаются свойства пространства (S, ϱ) и их отношение к свойствам пространств (S_t, ϱ_t). (Так напр. полнота (S, ϱ) и связь с полнотой пространств (S_t, ϱ_t) и т. п.) Далее изучается связь топологии определенной метрикой ϱ с продуктовой топологией и в случае $T = \{1, 2, \ldots\}$ связь ϱ с метрикой Фреше.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X, 3, MATHEMATIKA, 12., 1965]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X. FASC. III. MATHEMATICA XII. 1965

Über die Existenz der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung im komplexen Gebiet, welche den Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ähnlich sind

V. ŠEDA

In der Arbeit ist die Existenz der Differentialgleichungen $y'' = Q(x) . y$ bewiesen, deren Lösungen Nullstellen mit ähnlichen Eigenschaften haben, wie die Lösungen der Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Man verwendet hierbei eine hinreichende Bedingung der Einwertigkeit der analytischen und in der reduzierten Umgebung des Punktes O unbeschränkt fortsetzbaren Funktionen.

Erwägen wir die Differentialgleichung

$$y'' = Q(x)\, y, \tag{1}$$

$Q(x)$ ist eine holomorphe Funktion im einfach zusammenhängenden Gebiet T, $\infty \notin T$. In der Arbeit [1] wurde die Differentialgleichung (1) untersucht, welche die *Eigenschaft* $\mathscr{A}$ hat, was der Einfachheit halber folgendes bedeutet: Zu jeder Lösung u dieser Gleichung existiert eine linear unabhängige Lösung v derselben Gleichung derart, daß die Funktionen u, v' wie auch die Funktionen u', v gleiche Nullstellen mit derselben Vielfachheit haben. In [2] ist die Teilung der Gleichungen (1) mit der Eigenschaft $\mathscr{A}$ in 4 Arten gegeben. Die Gleichungen (1) mit der Eigenschaft $\mathscr{A}$ 1. und 2. Art wurden in der Arbeit [1] untersucht. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit zu zeigen, daß Differentialgleichungen (1) mit der Eigenschaft $\mathscr{A}$ 3. und 4. Art verschieden von den Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten existieren. Als Teilergebnis ist hier eine hinreichende Bedingung dazu angeführt, daß die analytischen und unbeschränkt fortsetzbaren Funktionen in der reduzierten Umgebung des Punktes O univalent seien.

Vor allem bemerken wir, daß die Differentialgleichung (1) mit der Eigenschaft $\mathscr{A}$ 3. Art (4. Art) ist, wenn wenigstens eine ihrer Lösungen u existiert, welche zusammen mit der ersten Ableitung u' wenigstens eine Nullstelle hat und keine Lösung u dieser Gleichung existiert (eine Lösung u existiert) welche mehr als eine Nullstelle hat.

Aus dem Satz 1 der angeführten Arbeit [1] kann man mit Hilfe der in dem Beweis der Sätze 4, 6 und 7 in [1] verwendeten Erwägungen, die notwendige und hinreichende Bedingung dazu beweisen, daß die Differentialgleichung (1) die Eigenschaft $\mathscr{A}$ der 3. (4.) Art habe. Dazu ist es notwendig die Differentialgleichung

$$-\{z, x\} = Q(x) \tag{2}$$

einzuführen, in welcher das Symbol $\{z, x\} = 1/2\, z'''(x)/z'(x) - 3/4\,(z''(x)/z'(x))^2$ die Schwarz'sche Ableitung z nach x bedeutet.

Satz 1. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, daß die Differentialgleichung* (1) *die Eigenschaft $\mathscr{A}$ 3. Art (4. Art) habe, ist, daß eine Lösung $z(x)$ der Differentialgleichung* (2) *existiere, welche folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *$z(x)$ ist eine ein-eindeutige ($z(x)$ ist nicht eine ein-eindeutige) meromorphe Funktion im Gebiet T.*

2. *Wenn H_1 das Wertebereich der Funktion $z(x)$ und H_2 das Wertebereich der Funktion $t(x) = z(x) - 2z'^2(x)/z''(x)$ ist, ist $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ und daß die Abbildung F des Gebietes H_1 auf das Gebiet H_2 definiert durch die Beziehung*

$$F[z(x)] = z(x) - 2z'^2(x)/z''(x) \tag{3}$$

diese Eigenschaften habe:

a) *F bildet das Gebiet H_1 konform auf das Gebiet H_2 ab*

b) *hat keinen festen Punkt in H_1 und*

c) *es existiert analytische Fortsetzung F_1 der Funktion F im Gebiet $H_1 \cup H_2$, welche $H_1 \cup H_2$ ein-eindeutig auf sich abbildet und die Identität $F_1 = F_1^{-1}$ erfüllt, wo F_1^{-1} die zu der Funktion F_1 inverse Funktion bezeichnet.*

Aus [2] ist bekannt, daß die hinreichende Bedingung dazu, daß die Gleichung (1) mit der Eigenschaft $\mathscr{A}$ 3. Art (4. Art) einen konstanten Koeffizienten habe, ist, daß die Abbildung F, welche in der Beziehung (3) auftritt, eine linear-gebrochene sei. Dies ist aber auch eine notwendige Bedingung.

In der Tat formen wir die Schwarz'sche Ableitung der Funktion $t(x) = F[z(x)]$. Es ist $-\{t, x\} = -\{F, z(x)\}\, z'^2(x) - \{z, x\} = -\{F, z(x)\}\, z'^2(x) + Q(x)$. Andererseits, auf Grund des Lemma 7, [1], ist $-\{t, x\} = Q(x) - \{\int Q\, dx, x\}$. Durch Vergleich folgt

$$\{F, z(x)\}\, z'^2(x) = \{\textstyle\int Q\, dx, x\},$$

woraus $Q(x) =$ const. impliziert $\{F, z(x)\} \equiv 0$, d. h. F ist eine linear-gebrochene Transformation.

Es gilt also der Anhang.

Anhang des Satzes 1. *Die Differentialgleichung* (1) *mit der Eigenschaft $\mathscr{A}$ 3. Art (4. Art) hat gerade dann einen konstanten Koeffizienten, wenn die Abbildung F gegeben durch die Beziehung* (3) *eine linear-gebrochene Transformation ist.*

Wir sehen, daß zu jeder Differentialgleichung (1) mit der Eigenschaft $\mathscr{A}$ 3. Art (4. Art) eine konforme Abbildung F mit den Eigenschaften a) – c) existiert, wobei $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$. Aus den Eigenschaften b) und c) folgt, daß

d) *F_1 in $H_1 \cup H_2$ keinen festen Punkt hat.*

Die Lösung $z(x)$ der Differentialgleichung (2) genügt dann der Differentialgleichung (3). Führen wir noch an, daß die Funktion $z(x)$ als Lösung der Differentialgleichung (2) auch die Eigenschaft hat:

3. *$z(x)$ ist lokal-ein-eindeutig in T* ([1], Seite 34). Umgekehrt, sei die konforme Abbildung F mit den Eigenschaften a) – d) gegeben und es existiere die Lösung $z_1(x)$ der Differentialgleichung (3), welche die Bedingungen 1. – 3. erfüllt, wobei T ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $\infty \notin T$, ist. Dann ist die Funktion $Q_1(x) = -\{z_1, x\}$ im Gebiet T holomorph ([1], Seite 46) und auf Grund des Satzes 1 hat die Differentialgleichung

$$y'' = Q_1(x)\, y \tag{1'}$$

die Eigenschaft $\mathscr{A}$ 3. Art (4. Art). Weiter gilt aus Lemma 5, [1], daß, wenn die Funktion $z_1(x)$ jeden ihrer Werte gerade in einem Punkte (in unendlich vielen Punkten) annimmt, hat jede Lösung der Differentialgleichung (1′) mit einer Nullstelle gerade eine Nullstelle (unendlich viele Nullstellen). Wenn F keine linear-gebrochene Transformation ist, $Q_1(x) \not\equiv$ const. Die Existenz der Differentialgleichung (1) mit der Eigenschaft $\mathscr{A}$ 3. Art (4. Art) hängt also von den Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung (3) ab. Deshalb werden wir diese Gleichung erwägen.

$F(z)$ sei eine holomorphe Funktion im Gebiet H_1, $\infty \notin H_1$ und es sei $F(z) - z \neq 0$, $z \in H_1$. Daraus folgt, das jedes Element der Lösung $z(x)$ der Differentialgleichung

$$F(z) = z - 2z'^2/z'' \tag{3}$$

schlicht ist. Sein inverses Element genügt nach [1], Seite 48, der Differentialgleichung

$$x'' - \frac{2}{F(z) - z}\, x' = 0 \tag{4}$$

Für diese Gleichung gilt der Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der durch die Anfangsbedingungen gegebenen Lösung. Weiter gilt, daß jede Lösung $x(z)$ der Gleichung (4) eine analytische und unbeschränkt fortsetzbare Funktion im Gebiet H_1 ist. Aus der Form dieser Gleichung ist ersichtlich, daß $x(z)$ entweder konstant ist oder sie besteht nur aus schlichten Elementen. Das inverse Element jedes Elementes der nicht konstanten Lösung $x(z)$ der Gleichung (4) genügt der Gleichung (3) und weil die inversen Elemente der Kette schlichter Elemente eine Kette bilden, bilden die inversen Elemente der Lösung $z(x)$ der Gleichung (3) eine nichtkonstante Lösung $x(z)$ der Gleichung (4) und umgekehrt sind die inversen Elemente der nicht-konstanten Lösung $x(z)$ der Gleichung (4) die Lösung $z(x)$ der Gleichung (3). Die Lösung $z(x)$ ist gerade dann eindeutig, wenn $x(z)$ einwertig ist.

Weil $\{x, z\} = (x''/2x')' - (x''/2x')^2$ und $(1/(F(z) - z))' - (1/(F(z) - z))^2 = -F'(z)/(F(z) - z)^2$, ist jede nichtkonstante Lösung der Differentialgleichung (4) auch die Lösung der Gleichung

$$\{x, z\} = -\frac{F'(z)}{(F(z) - z)^2} \tag{5}$$

Die Gleichung (5) hat aber auch weitere Lösungen, welche die Gleichung (4) nicht erfüllen. Wenn $x_1(z)$ eine Lösung der Differentialgleichung (5) ist, dann kann jede Lösung $x(z)$ dieser Gleichung in der Form $h[x_1(z)]$ geschrieben werden, wo h eine linear-gebrochene Transformation ist. Deshalb, wenn eine Lösung dieser Gleichung einwertig, eindeutig (unendlich vieldeutig) ist und ihr Wertebereich mit dem Einheitskreis konform äquivalent ist, dann haben alle Lösungen dieser Gleichung diese Eigenschaft. Weiter erhalten wir daraus, daß alle Lösungen der Gleichung (5) unbeschränkt fortsetzbare Funktionen im Gebiet H_1 sind, wenn wir ihre Elemente nicht als Potenzreihen, sondern im in [3], Seite 239, angeführtem Sinne verstehen. Wenn wir die Beziehung zwischen den Lösungen der Gleichung (3) und denen der Gleichung (4) erwägen, erhalten wir den Hilfsatz 1.

Hilfsatz 1. *$F(z)$ sei eine holomorphe Funktion im Gebiet H_1, $\infty \notin H_1$, und es sei $F(z) - z \neq 0$ für $z \in H_1$. Dann gilt: Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, daß jede Lösung $z(x)$ der Differentialgleichung* (3) *eine holomorphe Funktion in irgendeinem einfach zusammenhängenden Gebiet T_z welches mit dem Einheitskreis konform äquivalent ist, das Gebiet T_z auf das Gebiet H_1 abbildet, eine lokal ein-eindeutige Funktion ist und jeden ihrer Werte gerade in einem Punkte (in unendlich vielen Punkten) des Gebietes T_z annimmt, ist, daß eine Lösung $x(z)$ der Differentialgleichung* (5) *existiert, welche einwertig, eindeutig (unendlich vieldeutig) im Gebiet H_1 ist und deren Wertebereich ein einfach zusammenhängendes Gebiet konform äquivalent mit dem Einheitskreis ist.*

Bemerkung. Wenn $H_0 \subset H_1$ ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet ist, dann ist die Lösung $x(z)$ der Gleichung (5), welche in H_1 einwertig ist, eindeutig in H_0, wie das aus dem Monodromiesatz folgt.

Erwägen wir jetzt die im Kreis $|\zeta| < 1$ ein-eindeutige holomorphe Funktion $z = f(\zeta)$ mit der Eigenschaft $f(0) = 0$. P sei das Gebiet $0 < |\zeta| < 1$ und $H_1 = f(P)$. H_1 ist ein zweifach zusammenhängendes Gebiet und $\infty \notin H_1$. Auf diesem Gebiet ist die Funktion

$$F(z) = f[-f^{-1}(z)] \tag{6}$$

definiert, in welcher $\zeta = f^{-1}(z)$ die inverse Funktion der Funktion $f(\zeta)$ ist. Die Funktion $F(z)$ hat folgende Eigenschaften:

1. Sie bildet das Gebiet H_1 konform auf sich selbst ab.
2. Sie ist identisch mit ihren inversen Funktion $F^{-1}(z)$, $F(z) = F^{-1}(z)$ für $z \in H_1$,
3. $F(z) - z \neq 0$, $z \in H_1$.

Sie erfüllt also die Bedingungen a) – d) im Satz 1, wenn wir das Gebiet H_2 dem Gebiet H_1 gleichsetzen.

Es gilt der Hilfssatz 2.

Hilfssatz 2. *Die Funktion $z = f(\zeta)$ habe alle oben angeführten Eigenschaften und die Funktion $F(z)$ sei mit der Beziehung (6) gegeben. Es sei $q(\zeta) = \{f(\zeta), \zeta\}$. Dann hat die Differentialgleichung (5) die Lösung $x(z)$, welche im Gebiet H_1 einwertig und unendlich vieldeutig ist und deren Wertebereich ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, konform äquivalent mit dem Einheitskreis, gerade dann, wenn die Differentialgleichung*

$$\{x_1, \zeta\} = f'(-\zeta)f'(\zeta) \frac{1}{(f(-\zeta) - f(\zeta))^2} + q(\zeta) \tag{7}$$

eine Lösung mit denselben Eigenschaften, aber im Gebiet P, hat.

Beweis. $x(z)$ sei die Lösung der Differentialgleichung (5). Bilden wir eine zusammengesetzte Funktion $x_1(\zeta) = x[f(\zeta)]$. Aus der Formel für die Schwarz'sche Ableitung der zusammengesetzten Funktion erhalten wir, daß $x_1(\zeta)$ eine Lösung der Gleichung

$$\{x_1, \zeta\} = -\frac{F'[f(\zeta)]}{(F[f(\zeta)] - f(\zeta))^2} f'^2(\zeta) + q(\zeta)$$

ist.

Da aber $F[f(\zeta)] = f(-\zeta)$, $F'[f(\zeta)] = -f'(-\zeta)/f'(\zeta)$, daher ist die letzte Gleichung die Gleichung (7). Umgekehrt erhalten wir, daß, wenn $x_1(\zeta)$ eine Lösung der Gleichung (7) ist, die Funktion $x(z) = x_1[f^{-1}(z)]$ ist wieder eine Lösung der Differentialgleichung (5). Daraus erhalten wir mit Rücksicht auf die Ein-eindeutigkeit der Funktion $f(\zeta)$ die Behauptung des Hilfssatzes. Wir bemerken noch, daß die rechte Seite der Gleichung (7) im Gebiet P holomorph ist.

Ein weiteres Ergebnis, welches wir benützen werden, kann auch selbständig bestehen, deshalb führen wir es als Satz 2 an.

Satz 2. *Die Funktion $p(\zeta)$ sei holomorph im Gebiet P: $0 < |\zeta| < 1$. Eine hinreichende Bedingung dazu, daß jede Lösung der Differentialgleichung*

$$\{x_1, \zeta\} = p(\zeta) \tag{8}$$

einwertig, unendlich vieldeutig in P und ihr Wertebereich ein einfach zusammenhängendes Gebiet konform äquivalent mit dem Einheitskreis sei, ist, daß

$$\left| \zeta^2 p(\zeta) - \frac{1}{4} \right| \leqq \frac{1}{4} \frac{1}{(\ln |\zeta|)^2} \quad \textit{für} \quad \zeta \in P. \tag{9}$$

Beweis. Jede Lösung $x_1(\zeta)$ der Gleichung (8) ist im vorherangeführten Sinne unbeschränkt fortsetzbar in P. Deshalb können wir sie als zusammengesetzte Funktion

$$x_1(\zeta) = \Phi(\log \zeta) \tag{10}$$

schreiben, wo $\Phi(v)$ eine meromorphe lokal ein-eindeutige Funktion im Gebiet R: $-\infty < \mathrm{Re}\{v\} < 0$ ist. Wenn $\Phi(v)$ ein-eindeutig ist, hat $x_1(\zeta)$ alle im Satz 2 angeführten Eigenschaften. Die Funktion $\Phi(v)$ genügt jener Differentialgleichung, welche wir durch die Bildung der Schwarz'schen Ableitung der Funktion $x_1(\zeta)$ erhalten. Auf Grund von (8) und (10) gilt

$$p(\xi) = \{\Phi(v), v\} \,.\, (\log \zeta)'^2 + \{\log \zeta, \zeta\} =$$
$$= \{\Phi(v), v\} \,.\, \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\zeta^2}$$

woraus folgt, daß $\Phi(v)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\{\Phi, v\} = \zeta^2 \,.\, p(\zeta) - \frac{1}{4}, \qquad \zeta = e^v \tag{11}$$

ist. Das Gebiet R kann konform abgebildet werden durch die Transformation

$$\omega = \frac{v+1}{v-1} \tag{12}$$

auf den Einheitskreis K: $|\,\omega\,| < 1$. Wenn wir die inverse Funktion der Funktion (12) als $v(\omega)$ bezeichnen, erfüllt die Funktion

$$\Phi_1(\omega) = \Phi[v(\omega)]$$

die Differentialgleichung

$$\{\Phi_1, \omega\} = q[v(\omega)] \,.\, v'^2(\omega), \quad q(v) = \zeta^2 p(\zeta) - \frac{1}{4}, \quad \zeta = e^v \tag{13}$$

Hier nahmen wir in Erwägung, daß auf Grund von (12) $\{v, \omega\} \equiv 0$ ist. Die Lösungen der Gleichung (11) sind ein-eindeutig, wenn die Lösungen der Gleichung (13) solche sind. Eine hinreichende Bedingung dazu, daß die letzten ein-eindeutig seien, ist, daß für alle $\omega \in K$ gelte

$$|\, q[v(\omega)] \,.\, v'^2(\omega) \,| \leqq \frac{1}{(1 - |\,\omega\,|^2)^2} \qquad \text{([4], Seite 545)} \tag{14}$$

Die Bedingung (14) kann in der Form

$$|\, q(v) \,| \leqq \frac{1}{\left(1 - \left|\dfrac{v+1}{v-1}\right|^2\right)^2} \,|\, \omega'^2(v) \,| = \frac{4}{(|\, v-1\,|^2 - |\, v+1\,|^2)^2}, \qquad v \in R,$$

geschrieben werden. Der Kosinus Satz ergibt die Beziehung

$$|\, v-1\,|^2 - |\, v+1\,|^2 = 4 - 4\,|\, v+1\,| \cos\gamma = 4(1 - \mathrm{Re}\{v+1\}) =$$
$$= 4(-\mathrm{Re}\{v\})$$

wo $\gamma = \mathrm{Arg}\,(v+1)$,

so daß $4/(|v-1|^2-|v+1|^2)^2 = 1/4(\mathrm{Re}\{v\})^2$ und die äquivalente Form der Bedingung (14) ist

$$|q(v)| \leqq \frac{1}{4(\mathrm{Re}\{v\})^2}, \qquad v \in R. \tag{15}$$

Durch den Übergang zu der Veränderlichen ζ erhalten wir daraus die Bedingung (9).

Jetzt wenden wir uns dem Beweis der Existenz der Differentialgleichung (1) mit der Eigenschaft $\mathscr{A}$ 4. Art zu, deren Koeffizient $Q(x) \neq$ const. ist. Als Funktion $f(\zeta)$ nehmen wir die Funktion

$$f(\zeta) = \zeta + \varepsilon\zeta^2 \tag{16}$$

wo die Zahl ε die Ungleichheit $0 < |\varepsilon| \leqq 1/2$ erfüllt. Die Funktion $f(\zeta)$ ist ein-eindeutig im Kreis $|\xi| < 1$, weiter $f(0) = 0$. P habe dieselbe Bedeutung wie vorhin und $H_1 = f(P)$. Für die derart gewählte Funktion $f(\zeta)$ hat die Funktion $F(z)$, gegeben durch (6), die Eigenschaften a)–d) erwähnt im Satz 1. Zeigen wir, daß sie kein Zweig der linear-gebrochenen Transformation ist. Es gelte das Gegenteil, d. h. $F(z) = (az + b)/(cz + d)$. Dann gilt

$$F[f(\zeta)] = f(-\xi) \tag{17}$$

nicht nur in $|\zeta| < 1$, aber auf der ganzen Ebene. Wenn $c = 0$ (und $d = 1$), haben wir $a(\zeta + \varepsilon\zeta^2) + b = -\zeta + \varepsilon\zeta^2$, aber die Beziehung $\varepsilon(a-1)\zeta^2 + (a+1)\xi + b = 0$ kann identisch nicht erfüllt werden, weil $\varepsilon \neq 0$. Wenn $c \neq 0$ ist, dann $\lim\limits_{\zeta\to\infty} f(-\zeta) = \infty$, während $\lim\limits_{\zeta\to\infty} F[f(\zeta)] = a/c$, so daß auch in diesem Falle (17) identisch nicht erfüllt werden kann.

Weiter ist $f'(\zeta) = 1 + 2\varepsilon\zeta$ und $\{f(\xi), \xi\} = -3\varepsilon^2/(1 + 2\varepsilon\zeta)^2$ so daß die Differentialgleichung (7) die Form

$$\{x_1, \zeta\} = \frac{1 - 4\varepsilon^2\zeta^2}{4\zeta^2} - \frac{3\varepsilon^2}{(1 + 2\varepsilon\zeta)^2} \tag{18}$$

hat. Wenn wir ihre rechte Seite mit $p(\zeta)$ bezeichnen, ist

$$\zeta^2 p(\zeta) - \frac{1}{4} = -\varepsilon^2\zeta^2\left(1 + \frac{3}{(1 + 2\varepsilon\zeta)^2}\right)$$

Produkt

$$(ln|\zeta|)^2 \cdot \left|\zeta^2 \cdot p(\zeta) - \frac{1}{4}\right| \leqq (|\zeta|\, ln|\zeta|)^2 |\varepsilon|^2 \left(1 + \frac{3}{(1 - 2|\varepsilon|)|^2}\right)$$

und $\lim\limits_{|\zeta|\to 0^+} |\zeta| \ln |\zeta| = 0$, deshalb existiert eine solche positive reale Zahl ε_0, $\varepsilon_0 < 1/2$, daß für $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ $\left|\zeta^2 p(\zeta) - \dfrac{1}{4}\right| \leqq \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(ln|\zeta|)^2}$ ist. Daraus erhalten wir durch schrittweisen Gebrauch des Satzes 2 und des Hilfssatzes 2, daß wenn die Funktion $f(\zeta)$ durch die Beziehung (16) bestimmt ist, ε erfüllt die Ungleichheiten $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $F(z)$ ist durch die Beziehung (6) gegeben, die Differentialgleichung (5) hat die Lösung $x(z)$, welche einwertig, unendlich vieldeutig im Gebiet H_1 ist, und ihr Wertebereich ist ein einfach zusammenhängendes mit dem Einheitskreis konform äquivalentes Gebiet. Der Hilfssatz 1 garantiert daraus die Existenz der Lösung $z(x)$ der Differentialgleichung (3), welche in irgendeinem einfach zusammenhängenden mit dem Einheitskreis konform äquivalentem Gebiet T_z, $\infty \notin T_z$, holomorph, lokal ein-eindeutig ist, $z(T_z) = H_1$ und welche jeden ihrer Werte in unendlich vielen Punkten annimmt. Daraus folgt die Existenz der Differentialgleichung (1) in T_z mit der Eigenschaft $\mathscr{A}$ 4. Art, deren Koeffizient $Q(x) \not\equiv$ konst. ist.

Zeigen wir noch, wenn darüber hinaus ε eine positive reelle Zahl ist, (welche $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ erfüllt), existiert ein einfach zusammenhängendes Gebiet $T_0 \subset T_z$, in welchem die erwähnte Gleichung (1) die Eigenschaft $\mathscr{A}$ 3. Art hat. Die Funktion (16) ist dann steigend im Intervall $(-1, 1)$. $P^*(P^{**})$ sei das Gebiet P, aus welchem der Intervall $(0, 1)$ (Intervall $(-1, 0)$) ausgelassen ist und $H_1^* = f(P^*)$, $H_1^{**} = f(P^{**})$. $H_1^* \subset H_1$, $H_1^{**} \subset H_1$ sind einfach zusammenhängende Gebiete. Aus der Konstruktion der Funktion $F(z)$ folgt, daß $F(H_1^*) = H_1^{**}$. Weil $P^* \cup P^{**} = P$, ist $H_1^* \cup H_1^{**} = H_1$. Gleichzeitig $H_1^* \cap H_1^{**} \neq \emptyset$. Die Funktion $F(z)$ hat im Gebiet H_1^* alle Eigenschaften a)–d). Nach der auf den Hilfsatz 1 folgenden Bemerkung ist die Lösung $x(z)$ der Gleichung (5), welche im H_1 univalent ist, eindeutig in H_1^* und daher ein-eindeutig. Daraus folgt die Existenz der ein-eindeutigen Lösung $z(x)$ der Differentialgleichung (3) in dem einfach zusammenhängenden Gebiet T_0. Alle in der letzten Erwägung erscheinenden Lösungen sind Zweige der entsprechenden Lösungen, von welchen beim Beweis der Existenz der Differentialgleichung (1) mit der Eigenschaft $\mathscr{A}$ 4. Art gesprochen wurde. Dies beendigt den Beweis der letzten Behauptung. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

Satz 3. *Es existiert die Differentialgleichung* (1) *mit nichtkonstantem Koeffizienten, definiert im einfach zusammenhängenden, mit dem Einheitskreis konform äquivalentem Gebiet T, $\infty \notin T$, welche die Eigenschaft $\mathscr{A}$ 4. Art hat, wobei jede ihrer Lösungen mit wenigstens einer Nullstelle deren unendlich viele hat. Diese Gleichung in irgendeinem einfach zusammenhängenden Teilgebiet $T_0 \subset T$ hat die Eigenschaft $\mathscr{A}$ 3. Art.*

LITERATUR

[1] Шеда В., Несколько теорем о линейном дифференциальном уравнении второго порядка типа Якоби в комплексной области. Čas. pro pěst. mat. 88 (1963), 29—58.

[2] Шеда В., Поправка работы „Несколько теорем о линейном дифференциальном уравнении второго порядка типа Якоби в комплексной области“. Čas. pro pěst. mat. 89 (1964), 359—361.

[3] Saks S.—Zygmund A., Analytic functions. Warszawa—Wrocław 1952.
[4] Nehari Z., The Schwarzian derivative and schlicht functions. Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 545—551.

Adresa autora: Katedra matematickej analýzy PFUK, Bratislava, Šmeralova 2

Do redakcie došlo: 15. 12. 1964

O existencii lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu v komplexnom obore podobných rovniciam s konštantným koeficientom

V. Šeda

Výťah

V práci je dokázaná existencia diferenciálnych rovníc (1) $y'' = Q(x)\,y$, $Q(x) \not\equiv$ konšt. je holomorfná funkcia v jednoducho súvislej oblasti T, $\infty \notin T$, s podobnou vlastnosťou ako má rovnica (1) s konštantným koeficientom: Ku každému riešeniu u tejto rovnice jestvuje lineárne nezávislé riešenie v tej istej rovnice tak, že funkcie u, v' ako aj funkcie u', v majú rovnaké nulové body tej istej násobnosti. Táto vlastnosť sa nazýva vlastnosťou $\mathscr{A}$ 3. druhu (4. druhu), ak ďalej jestvuje aspoň jedno jej riešenie u, ktoré má spolu s prvou deriváciou u' aspoň jeden nulový bod a ak nejestvuje (ak jestvuje) riešenie u tejto rovnice, ktoré má viac ako jeden nulový bod.

Hlavné výsledky tejto práce sú zhrnuté vo vetách:

Veta 2. *Nech funkcia $p(\zeta)$ je holomorfná v oblasti P: $0 < |\zeta| < 1$. Postačujúcou podmienkou, aby každé riešenie diferenciálnej rovnice (8) $\{x_1, \zeta\} = p(\zeta)$, kde $\{x_1, \zeta\} = \frac{1}{2}x_1'''/x_1' - \frac{3}{4}(x_1''/x_1')^2$, bolo univalentné, nekonečne mnohoznačné v P a jeho oblasť hodnot bola jednoducho súvislá oblasť, konformne ekvivalentná s jednotkovým kruhom, je aby (9) $|\zeta^2 p(\zeta) - \frac{1}{4}| \leqq 1/[4\,(ln\,|\zeta|)^2]$ pre $\zeta \in P$.*

Veta 3. *Jestvuje diferenciálna rovnica (1) s nekonštantným koeficientom, definovaná v jednoducho súvislej oblasti T, konformne ekvivalentnej s jednotkovým kruhom, $\infty \notin T$, ktorá má vlastnosť A 4. druhu, pričom každé jej riešenie s aspoň jedným nulovým bodom má ich nekonečne mnoho. Táto rovnica v nejakej jednoducho súvislej podoblasti T_0 oblasti T má vlastnosť $\mathscr{A}$ 3. druhu.*

О существовании линейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области подобных уравнениям с постоянным коэффициентом

В. Шеда

Выводы

В работе доказано существование дифференциальных уравнений (1) $y'' = Q(x)y$, $Q(x)$ не постоянная голоморфная функция в односвязной области T, $\infty \notin T$, обладающих свойством подобным свойству уравнения (1) с постоянным коэффициентом: Для всякого решения u этого уравнения существует линейно независимое решение v того же уравнения так, что функ-

ции u, v', подобно как и u', v, имеют те же нули той же кратности. Это свойство называется свойством $\mathscr{A}$ 3. рода (4. рода), если, кроме того, существует по крайней мере одно его решение u, которое вместе со своей первой производной u' имеет хотя бы один нуль и если не существует (если существует) решение u этого уравнения, у которого более чем один нуль.

Главные результаты этой работы следующие:

Теорема 2. *Пусть функция $p(\zeta)$ голоморфна в области P: $0 < |\zeta| < 1$. Достаточным условием, чтобы всякое решение дифференциального уравнения* (8) $\{x_1, \zeta\} = p(\zeta)$, *где* $\{x_1, \zeta\} = \frac{1}{2} x_1'''/x_1' - \frac{3}{4} (x_2''/x_1')^2$, *было унивалентно, бесконечно многозначно в P и его область значений была односвязна область, конформно эквивалентна с единичным кругом, есть* (9) $|\zeta^2 . p(\zeta) - \frac{1}{4}| = 1/[4 (ln(|\zeta|)^2)]$ *для P.*

Теорема 3. *Существует дифференциальное уравнение* (1) *с не постоянным коэффициентом, определенное в односвязной области T, конформно эквивалентной с единичным кругом, $\infty \notin T$, которое обладает свойством A 4. рода и всякое решение которого с одним нульем имеет их бесконечно много. Это уравнение в некоторой односвязной подобласти T_0 области T имеет свойство $\mathscr{A}$ 3. рода.*

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X, 3, MATHEMATIKA, 12., 1965]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X. FASC. III. MATHEMATICA XII. 1965

Der Jordan-Höldersche Satz für unendliche Ketten in teilweise geordneten Mengen

E. GEDEONOVÁ

W. Felscher hat in seiner Arbeit [1] gezeigt, daß der Jordan-Höldersche Satz für Gruppen aus der Theorie der teilweise geordneten Mengen folgt. A. G. Kurosch in [3] hat mit Hilfe des Schreierschen Verfeinerungstheorems den verallgemeinerten Jordan-Hölderschen Satz für Gruppen in denen es keine Kompostitionsreihe gibt, bewiesen.

In der vorliegenden Arbeit ist ein Satz der Ordnungstheorie bewiesen, aus dem noch ein allgemeinerer Jordan-Höldersche Satz für Gruppen folgt. Einen ähnlichen Satz für Verbände hat V. Vilhelm in [4] und J. Jakubík in [2] bewiesen. Beide diese Sätze sind Folgerungen des in unserer Arbeit angeführten Satzes.

§ 1 Einleitende Bemerkungen

Sei $(E, \leqq)$ eine teilweise geordnete Menge. Sind a, b Elemente von E und gilt weder $a \leqq b$ noch $b \leqq a$, so schreibe man $a \| b$ und nenne a, b unvergleichbar. Die Menge aller Elemente $c \in E$, für die $a \leqq c \leqq b$, $a, b \in E$ gilt, nenne man Intervall $[a, b]$ in E. Wenn das Intervall $[a, b]$ aus genau zwei Elementen besteht, so schreibe man $a \Delta b$ un man heiße $]a, b]$ Δ -Intervall. Sei $a, b \in E, a \leqq b$.
Die Kette der Elemente $x \in E$, für die $a \leqq x \leqq b$ gilt, heiße man Kette zwischen den Elementen a, b. Eine Kette K zwischen $a, b \in E$ heißt maximal, wenn sie kein echter Teil einer anderen Kette zwischen $a, b \in E$ ist. Wenn K eine unendliche Kette in E zwischen der Elementen $a, b \in E$, $a < b$ ist, schreibe man diese in der Form $\{a_\lambda\}_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho}$, wo die Indexe λ eine Menge M durchlaufen, die mit einer Relation $\prec$, mit dem ersten Element O und mit dem letzten Element ϱ, geordnet ist, wo $a = a_0$, $b = a_\varrho$ und $\lambda, \varkappa \in M$, $\lambda \prec \varkappa \Rightarrow a_\lambda \leqq a_\varkappa$. Wenn $\lambda, \varkappa \in M$; $\lambda \prec \varkappa \Rightarrow a_\lambda < a_\varkappa$, ist die Kette $\{a_\lambda\}_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho}$ eine Kette ohne Wiederholungen. Zwei Intervalle der Menge E sind in der Relation $\mathscr{P}$, man schreibe $[x, y] \mathscr{P} [w, z]$, wenn x maximale untere

Schranke und z minimale obere Schranke der Elemente y, w ist. Diese Relation nennt man Perspektivität.

In E gilt die *Bedingung* P, wenn aus $s \lhd v$ und $[u, t] \mathscr{P} [s, v]$ $u \lhd t$ folgt, wobei s, t, u, v Elemente von E sind.

Zwei Ketten K, L in E werden den verallgemeinerten Jordan-Hölderschen Satz, der sich auf eine binäre reflexive, symmetrische Relation $\mathscr{R}$ zwischen der den Intervalen bezieht, erfüllen, wenn es gilt:

($JH_{\mathscr{R}}$) *Es existiert eine umkehrbare Abbildung der Menge der $\lhd$-Intervalle der Kette K auf die Menge der $\lhd$-Intervalle der Kette L so, daß die zugeordneten Intervalle in der Relation $\mathscr{R}$ stehen.*

§ 2

Sei die teilweise geordnete Menge E ein Halbverband nach unten, (weiter nur Halbverband n. u.).

1.1. Definition. *Für eine Kette K zwischen den Elementen a, b aus dem Halbverband n. u. E wird die Bedingung $\bar{A}$ erfüllt, wenn für jede nicht leere Teilmenge M der Kette K das Element $c = ; \bigcap \{a, a \in M\}$ existiert.*

Ein Halbverband n. u. E wird die Bedingung A erfüllen, wenn für alle Ketten K zwischen a, b, wo a, b beliebige Elemente von E sind, die Bedingung $\bar{A}$ erfüllt ist.

1.2. Lemma. *Sei E ein Halbverband n. u., welcher der Bedingung A genügt. Sei $\{a_\lambda\}_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma}$, $\lambda \in T$, eine Kette in E, sei $c \in E$. Dann gilt*

$$\bigcap_{\lambda \in T'} a_\lambda \cap c = \bigcap_{\lambda \in T'} (a_\lambda \cap c), \qquad T' \subset T. \tag{1}$$

Beweis. Wir bezeichnen $\bigcap_{\lambda \in T'} a_\lambda = a$. Da für beliebiges $\lambda \in T'$, $a \leqq a_\lambda$ ist, gilt $a \cap c \leqq a_\lambda \cap c \leqq a_\lambda$. Daraus ergibt sich

$$a \cap c \leqq \bigcap_{\lambda \in T'} (a_\lambda \cap c) \leqq \bigcap_{\lambda \in T'} a_\lambda = a. \tag{2}$$

Gilt $a_\lambda \cap c \leqq c$, woraus $\bigcap_{\lambda \in T'} (a_\lambda \cap c) \leqq c$ folgt. Daraus und aus (2) ergibt sich $\bigcap_{\lambda \in T'} (a_\lambda \cap c) \leqq a \cap c$. Diese Beziehung und die Beziehung (2) geben die Gleichung (1).

1.3. Definition. *Der Halbverband n. u. E erfülle die Bedingung A. Er wird der Bedingung B genügen, wenn für jede maximale Kette ohne Wiederholungen $K = \{b_\lambda\}_0^\sigma$, $\lambda \in T$, und für jedes Element $a \in E$, $a \lhd b_\sigma$ gilt: Wenn $b_\lambda \parallel a$ für jede λ, $\tau \prec \lambda \prec \sigma$ ist, dann gilt $\bigcap_{\tau \prec \lambda \prec \sigma} b_\lambda \parallel a$, $\lambda \in T$.*

1.4. Lemma. *Der Halbverband n. u. E erfülle die Bedingungen A, B. Sei $K = \{b_\lambda\}_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma}$, $\lambda \in T$, eine Kette von E. Es gebe ein solches Element $c \in E$, $c \lhd b_\sigma$, daß* *für alle b_λ, $\lambda \in T'$, $T' \subset T$, gilt entweder $b_\lambda \parallel c$ oder $b_\lambda = b_\sigma$. Dann gilt für das Element $x = \bigcap_{\lambda \in T'} b_\lambda$ entweder $x = b_\sigma$ oder $x \parallel c$.*

Beweis. Wenn für alle b_λ, $\lambda \in T'$, $b_\lambda = b_\sigma$ ist, dann $x = b_\sigma$. Es existiere $\lambda \in T'$ so, daß $b_\lambda \parallel c$. Wenn $x = \bigcap_{\lambda \in T'} b_\lambda = b_{\lambda_0}$, wo $\lambda_0 \in T'$, dann ist nach der Voraussetzung $x \parallel c$. Sei $x \neq b_\lambda$ für jede $\lambda \in T'$. Wir verfeinern die Kette $K \cap [x, b_\sigma]$ auf maximale Kette ohne Wiederholungen $K' = \{b'_\gamma\}_{\gamma=0}^{\gamma=\varrho}$, wo $b'_0 = x$, $b'_\varrho = b_\sigma$. Für jeden Index γ, $0 \prec \gamma \prec \varrho$, ist $b'_\gamma \parallel c$, weil immer ein Element b_λ, $b_\lambda \leqq b'_\gamma$, $b_\lambda \parallel c$, existiert. Nach der Bedingung B ist $\bigcap_{0 \prec \gamma} b'_\gamma \parallel c$. Aber $\bigcap_{0 \prec \gamma} b'_\gamma = x$.

1.5. Seien im Halbverband n. u. E zwei maximale Ketten K, L ohne Wiederholungen zwischen $a, b \in E$ gegeben:

$$K = \{a_\lambda\}_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho}, \qquad \lambda \in M, \qquad a_0 = a,\ a_\varrho = b, \tag{3}$$

$$L = \{b_\varkappa\}_{\varkappa=0}^{\varkappa=\sigma}, \qquad \varkappa \in N, \qquad b_0 = a,\ b_\sigma = b. \tag{4}$$

Lemma. *Der Halbverband n. u. E erfülle die Bedingungen* A, B. *Seien in E zwischen Elementen a, b die Ketten* (3), (4) *gegeben. Sei $[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ ein $\lhd$-Intervall der Kette* (3). *Dann existiert ein Element $b_\gamma \in L$ so, daß eine der Beziehungen*

$$a_{\lambda+1} \cap b_\gamma \parallel a_\lambda, \qquad a_{\lambda+1} \cap b_\gamma = a_{\lambda+1} \tag{5}$$

gilt und für $b_\varkappa \in L$, $\varkappa \prec \gamma$, gelten die Beziehungen (5) *nicht.*

Beweis. Sei N' die Indexmenge solcher Elemente der Kette (4), für die eine von den Beziehungen (5) gilt. Nach der Bedingung A existiert ein Element $b_\gamma = \bigcap_{\varkappa \in N'} b_\varkappa$. Nach Lemma 1.2 gilt

$$b_\gamma \cap a_{\lambda+1} = (\bigcap_{\varkappa \in N'} b_\varkappa) \cap a_{\lambda+1} = \bigcap_{\varkappa \in N'} (b_\varkappa \cap a_{\lambda+1}).$$

Nach Lemma 1.4 gilt für das Element $b_\gamma \cap a_{\lambda+1}$ eine von den Beziehungen $b_\gamma \cap a_{\lambda+1} = a_{\lambda+1}$, $b_\gamma \cap a_{\lambda+1} \parallel a_\lambda$.

Es gälte für ein Element $b_\varkappa$, $\varkappa \prec \gamma$, eine der Beziehungen (5). Dann $\varkappa \in N'$, also $b_\gamma \leqq b_\varkappa$, was ein Widerspruch ist.

1.6. Seien im Halbverband n. u. E die Ketten (3), (4) gegeben. Die Abbildung, die jedem $\lhd$-Intervall $[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ der Kette K das $\lhd$-Intervall $[b_\delta, b_\gamma]$ der Kette L so zuordnet, daß b_γ das kleinste Element der Kette L ist, für das eine der Beziehungen (5) gilt, bezeichnen wir $\Phi(K, L)$.

1.7. Lemma. *Sei im Halbverband n. u. E die Bedingung* P *erfüllt. Wenn eine Abbildung $\Phi(K, L)$, der mit den Beziehungen* (3), (4) *gegebenen Ketten K, L von E,* *existiert und das Bild des $\lhd$-Intervalls $[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ der Kette K in dieser Abbildung $\lhd$-Intervall $[b_\delta, b_\gamma]$ der Kette L ist, dann gilt*

$$[b_\gamma \cap a_\lambda, b_\gamma \cap a_{\lambda+1}]\,\mathscr{P}[a_\lambda, a_{\lambda+1}] \tag{6}$$

$$[b_\gamma \cap a_\lambda, b_\gamma \cap a_{\lambda+1}]\,\mathscr{P}[b_\delta, b_\gamma] \tag{7}$$

Beweis. Wir beweisen die Beziehung (6). Die maximale untere Schranke der Elemente $b_\gamma \cap a_{\lambda+1}$ und a_λ ist $a_\lambda \cap (b_\gamma \cap a_{\lambda+1}) = a_\lambda \cap b_\gamma$, die minimale obere Schranke der Elemente a_λ und $b_\gamma \cap a_{\lambda+1}$ ist $a_{\lambda+1}$, weil $a_\lambda \lhd a_{\lambda+1}$, $b_\gamma \cap a_{\lambda+1} \parallel a_\lambda$ oder $b_\gamma \cap a_{\lambda+1} = a_{\lambda+1}$. Aus der Bedingung P folgt $b_\gamma \cap a_\lambda \lhd b_\gamma \cap a_{\lambda+1}$. Wir beweisen die Beziehung (7). Die minimale obere Schranke der Elemente $b_\gamma \cap a_{\lambda+1}$ und b_δ ist b_γ, da $b_\delta \lhd b_\gamma$ und $b_\gamma \cap a_{\lambda+1} \parallel b_\delta$ oder $b_\gamma \cap a_{\lambda+1} > b_\delta$. (Wenn es gälte $b_\gamma \cap a_{\lambda+1} \leqq b_\delta$, dann $b_\gamma \cap a_{\lambda+1} = b_\delta \cap a_{\lambda+1}$, was im Widerspruch mit der Wahl des Elementes b_γ wäre.) Die maximale untere Schranke der Elemente $b_\gamma \cap a_{\lambda+1}$ und b_δ ist $b_\delta \cap a_{\lambda+1}$. Aus de Wahl des Elementes b_γ folgt $b_\delta \cap a_{\lambda+1} \leqq a_\lambda$, also $b_\delta \cap a_{\lambda+1} = b_\delta \cap a_\lambda$. Aus der Bedingung P folgt $b_\delta \cap a_\lambda \lhd b_\gamma \cap a_{\lambda+1}$. Aber

$$b_\delta \cap a_\lambda \leqq b_\gamma \cap a_\lambda \lhd b_\gamma \cap a_{\lambda+1},$$

woher $b_\delta \cap a_\lambda = b_\gamma \cap a_\lambda$.

Bemerkung. Bei dem Beweis der Beziehung (6) war nur die Existenz eines solchen Elementes b_γ benützt, daß eine der Beziehungen (5) gilt und b_γ das kleinste Element mit dieser Eigenschaft ist. Es war weder die Existenz der Abbildung $\Phi(K, L)$ noch die Bedingung P ausgenützt.

1.8. Lemma. *Der Halbverband n. u. E erfülle die Bedingung* P. *Wenn eine Abbildung $\Phi(K, L)$ und eine Abbildung $\Phi(L, K)$ der Ketten* (3), (4) *in E existiert, dann ist die zusammengesetzte Abbildung $\Phi(K, L) \circ \Phi(L, K)$ eine identische Abbildung auf der Menge der $\lhd$-Intervalle der Kette L,* (*wo* $\alpha \circ \beta(I) = \alpha(\beta(I))$).

Beweis. Dem $\lhd$-Intervall $[b_\varkappa, b_{\varkappa+1}]$ der Kette L in der Abbildung $\Phi(L, K)$ gehöre das $\lhd$-Intervall $[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ der Kette K. Dann gilt nach Lemma 1.7, (7)

$$[a_{\lambda+1} \cap b_\varkappa, a_{\lambda+1} \cap b_{\varkappa+1}]\,\mathscr{P}[a_\lambda, a_{\lambda+1}] \tag{8}$$

Das Bild des $\lhd$-Intervalls $[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ in der Abbildung $\Phi(K, L)$ sei das $\lhd$-Intervall $[b_\delta, b_\gamma]$ der Kette L. Wir beweisen, daß $b_{\varkappa+1} = b_\gamma$. Sei $b_{\varkappa+1} < b_\gamma$. Nach der Definition 1.6 ist b_γ das kleinste Element, für das eine der Beziehungen (5) gilt, folglich $b_{\varkappa+1} \cap a_{\lambda+1} \leqq a_\lambda$, was mit (8) im Widerspruch ist. Sei $b_\gamma < b_{\varkappa+1}$. Dann $b_\gamma \leqq b_\varkappa$. Nach (8) ist $b_\varkappa \cap a_{\lambda+1} \leqq a_\lambda$, daher $b_\gamma \cap a_{\lambda+1} \leqq a_\lambda$, was mit der Definition der Abbildung $\Phi(K, L)$ im Widerspruch ist.

1.9. Folgerung. *Der Halbverband n. u. E erfülle die Bedingung* P. *Wenn eine Abbildung $\Phi(K,L)$ und eine Abbildung $\Phi(L,K)$ der Ketten K, L in E existiert, dann ist $\Phi(K,L)$ eine eineindeutige Abbildung der Menge aller $\lhd$-Intervalle der Kette K auf die Menge aller $\lhd$-Intervalle der Kette L und gilt $\Phi(L, K) = \Phi^{-1}(K, L)$.*

Beweis. Nach Lemma 1.8 gilt $\Phi(K, L) \circ \Phi(L, K) = 1$, wo 1 eine identische Abbildung auf der Menge der $\lhd$-Intervalle der Kette L ist und symmetrisch $\Phi(L, K) \circ \Phi(K, L)$ ist eine identische Abbildung auf der Menge der $\lhd$-Intervalle der Kette K. Daraus folgt die Behauptung.

1.10. Definition. *Für die teilweise geordnete Menge E ist die Bedingung* C *erfüllt, wenn für jede maximale Kette $K = \{b_\lambda\}_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma}$, $\lambda \in N$, und für jedes Element $c \in E$ gilt: Wenn es in der Kette K kein Element $b_\lambda \lhd b_\sigma$ gibt, dann gibt es in E kein Element x, für das $b_\lambda \cap c \leqq x$, $x \lhd b_\sigma \cap c$, für alle $\lambda \prec \sigma$, gilt.*

1.11. Satz. *Der Halbverband n. u. E erfülle die Bedingungen* A, B, C, P. *Dann gilt in E* $\mathrm{JH}_{\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}}$ *für jede zwei maximale Ketten K, L zwischen $a, b \in E$,* (wo $\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}$ das Produkt der Relationen $\mathscr{P}^{-1}$, $\mathscr{P}$ in üblichem Sinne des Wortes ist).

Beweis. Seien K, L beliebige durch (3), (4) gegebenen Ketten der Menge E. Wir beweisen, daß die Abbildung $\Phi(K, L)$ existiert. Nach Lemma 1.5 existiert zu jedem $\lhd$-Intervall $[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ der Kette K ein Element b_γ der Kette L, für das eine der Beziehungen (5) gilt und für $b_\varkappa$, wo $\varkappa \prec \gamma$, gelten die Beziehungen (5) nicht. Wir zeigen, daß ein Element $b_\delta \in L$, $b_\delta \lhd b_\gamma$ existiert. Es existiere in der Kette L kein Element b_δ, $b_\delta \lhd b_\gamma$. Nach der Bemerkung 1.7 gilt die Beziehung (6) und aus der Bedingung P folgt $b_\gamma \cap a_\lambda \lhd b_\gamma \cap a_{\lambda+1}$. Für $b_\varkappa$, $\varkappa \prec \gamma$, ist $b_\varkappa \cap a_{\lambda+1} \leqq a_\lambda$, also $b_\varkappa \cap a_{\lambda+1} \leqq a_\lambda \cap b_\gamma$. Wir haben ein solches Element $a_\lambda \cap b_\gamma$ gefunden, daß für alle $\varkappa \prec \gamma$ gilt

$$b_\varkappa \cap a_{\lambda+1} \leqq a_\lambda \cap b_\gamma \lhd a_{\lambda+1} \cap b_\gamma,$$

was mit der Bedingung C im Widerspruch ist.

Ähnlich könnten wir beweisen, daß eine Abbildung $\Phi(L, K)$ existiert. Aus der Folgerung 1.9 folgt, daß $\Phi(K, L)$ eine eineindeutige Abbildung ist. Nach Lemma 1.7 sind die zugehörigen $\lhd$-Intervalle in der Beziehung $\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}$.

1.12. Seien die Ketten (3), (4) gegeben. Sei $[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ ($[b_\varkappa, b_{\varkappa+1}]$) ein $\lhd$-Intervall der Kette $K(L)$. Dann wird $M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ ($M[b_\varkappa, b_{\varkappa+1}]$) die Menge der Elemente $b_\varkappa(a_\lambda)$ der Kette $L(K)$ mit $a_\lambda \cap b_\varkappa = a_{\lambda+1} \cap b_\varkappa$ ($a_\lambda \cap b_\varkappa = a_\lambda \cap b_{\varkappa+1}$) bedeuten.

1.13. Definition. *Die Ketten K, L zwischen a, b aus dem Halbverband n. u. E erfüllen die Bedingung* D, *wenn für jedes $\lhd$-Intervall $[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ der Kette K, bzw. L, die Menge $M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ ein größtes Element hat.*

1.14. Definition. *Die Ketten K, L zwischen a, b aus dem Halbverband n. u. E genügen der Bedingung* E, *wenn für jedes $\lhd$-Intervall $[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ der Kette $K(L)$ die Menge $L - M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ ($K - M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$) ein kleinstes Element hat.*

1.15. Satz. *Wenn die maximalen Ketten K, L zwischen a, b vom Halbverband n. u. E, wo die Bedingung* P *gilt, die Bedingungen* D, E *erfüllen, dann gilt für sie* $\mathrm{JH}_{\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}}$.

Beweis. Wir beweisen, daß eine Abbildung $\Phi(K, L)$ existiert. Sei $[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ ein beliebiges $\lhd$-Intervall der Kette K. Aus den Bedingungen D, E folgt, daß ein

$\lhd$-Interval $[b_\delta, b_\gamma]$ der Kette L so existiert, daß b_δ das größte Element der Menge $M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ und b_γ das kleinste Element der Menge $L - M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ ist. Für das Element b_γ gilt eine der Beziehungen (5). Wenn keine von den Beziehungen (5) gälte, dann $a_{\lambda+1} \cap b_\gamma \leqq a_\lambda$, also $a_{\lambda+1} \cap b_\gamma = a_\lambda \cap b_\gamma$. Dann $b_\gamma \in M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$, was ein Widerspruch wäre. Für $b_\nu < b_\gamma$ ist $b_\nu \in M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$, also gilt $b_\nu \cap a_{\lambda+1} \leqq a_\lambda$. Demnach kann für b_ν keine von den Beziehungen (5) gelten. Ähnlich könnten wir zeigen, daß eine Abbildung $\Phi(L, K)$ existiert. Aus 1.7, 1.8, 1.9 folgt nun die Behauptung.

1.16. Lemma. *Der Halbverband n. u. E erfülle die Bedingungen* P, C. *Genügen zwei seine maximale Ketten zwischen $a, b \in E$ der Bedingung* $\bar{\text{A}}$, *dann ist für sie die Bedingung* D *erfüllt.*

Beweis. Seien die Ketten (3), (4) gegeben. Wenn das Element $b_\gamma \in M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$, $b_\gamma \in L$, dann gilt $b_\gamma \cap a_\lambda = b_\gamma \cap a_{\lambda+1}$. Wenn $b_\varkappa \in L$, $\varkappa \prec \gamma$, dann $b_\varkappa \cap (b_\gamma \cap a_\lambda) = b_\varkappa \cap (b_\gamma \cap a_\lambda)$, also $b_\varkappa \in M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$. Es existiere ein $\lhd$-Intervall $[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ so, daß die Menge $M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ kein größtes Element habe. Dann gehört das Element

$$b_\gamma = \bigcap \{b_\varkappa, b_\varkappa \in (L \dot{-} M[a_\lambda, a_{\lambda+1}])\}$$

der Menge $M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ nicht, wonach $a_{\lambda+1} \cap b_\gamma \neq a_\lambda \cap b_\gamma$. Daraus folgt, daß für b_γ eine der Beziehungen (5) gilt und für $b_\varkappa$, $\varkappa \prec \gamma$, gelten die Beziehungen (5) nicht. Nach der Bemerkung 1.7 gilt

$$[a_\lambda \cap b_\gamma, a_{\lambda+1} \cap b_\gamma] \,\mathscr{P}[a_\lambda, a_{\lambda+1}],$$

woraus $b_\gamma \cap a_\lambda \lhd b_\gamma \cap a_{\lambda+1}$. In der maximalen Kette $L' = \{b_\varkappa\}_0^\gamma$ existiert kein Element $b_\delta \lhd b_\gamma$ und für jeden Index $\varkappa \prec \gamma$ gilt

$$a_{\lambda+1} \cap b_\varkappa = a_\lambda \cap b_\varkappa \leqq a_\lambda \cap b_\gamma \lhd a_{\lambda+1} \cap b_\gamma,$$

was nach der Bedingung C nicht gelten kann.

1.17. Lemma. *Der Halbverband n. u. E erfülle die Bedingungen* A, B. *Dann genügen jede zwei seine maximale Ketten K, L zwischen $a, b \in E$ der Bedingung* E.

Beweis. Seien die Ketten (3), (4) gegeben. Es existiere ein $\lhd$-Intervall $[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ der Kette K so, daß die Menge $L - M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$ kein kleinstes Element enthalte. Dann gehört das Element

$$b_\delta = \bigcap \{b_\varkappa, b_\varkappa \in (L - M[a_\lambda, a_{\lambda+1}])\}$$

der Menge $M[a_\lambda, a_{\lambda+1}]$. Nach Lemma 1.2 gilt

$$\bigcap_{\delta \prec \varkappa \prec \sigma} (b_\varkappa \cap a_{\lambda+1}) = \Big(\bigcap_{\delta \prec \varkappa \prec \sigma} b_\varkappa\Big) \cap a_{\lambda+1} = b_\delta \cap a_{\lambda+1} = b_\delta \cap a_\lambda.$$

Also $\bigcap_{\delta \varkappa \prec \sigma} (b_\varkappa \cap a_{\lambda+1}) \leqq a_\lambda$, was im Widerspruch mit Lemma 1.4 ist, weil für jeden Index $\varkappa$, $\delta \prec \varkappa$, entweder $b_\varkappa \cap a_{\lambda+1} \parallel a_\lambda$ oder $b_\varkappa \cap a_{\lambda+1} = a_{\lambda+1}$ gilt und außerdem gilt noch $a_\lambda \lhd a_{\lambda+1} = a_{\lambda+1} \cap b_\sigma$.

Bemerkung. V. Vilhelm hat in der Arbeit [4] für jede zwei maximale Ketten im Verband S, der den in [4] angegebenen Bedingungen I, II, V, P genügt, den Satz $JH_{\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}}$ bewiesen. J. Jakubík hat in der Arbeit [2] $JH_{\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}}$ für jede zwei maximale Ketten zwischen a, b in einer vollständigen Booleschen Algebra bewiesen. Genügt der Verband S den Bedingungen I, II, V, P oder ist S eine vollständige Boolesche Algebra, dann erfüllt der Verband S auch die Bedingungen A, B, C, P. Demnach sind die erwähnten Sätze aus [4] und [2] Spezialfälle des Satzes 1.11.

§ 3

Sei G eine Gruppe, $\subseteq$ die Inklusion zwischen Untergruppen von G.

2.1. Definition. (Felscher [1].) *Sind A, B Untergruppen von G, so heißen wir A nachinvariant in B und schreiben $A \leqq B$, wenn Untergruppen N_i von G ($i = 0, \ldots, k$) so existieren, daß $N_0 = A$, $N_k = B$ und N_{j-1} Normalteiler in N_j ($j = 1, \ldots, k$) ist.*

2.2. (Felscher [1].) Die Menge $E(G)$ aller Untergruppen A von G, $A \leqq G$, geordnet mit der Relation $\leqq$, bildet einen Halbverband n. u.. Für $A, B \in E(G)$ gilt $A \lhd B$ genau dann, wenn A maximaler Normalteiler in B ist.

2.3. (Felscher [1].) In der Menge $E(G)$ gilt die Bedingung P: Wenn $[A, B]\, \mathscr{P}\, [C, D]$ gilt, wo A, B, C, D Untergruppen von G sind und $[C, D]$ ist ein $\lhd$-Intervall, dann ist auch $[A, B]$ $\lhd$-Intervall und die Faktorgruppen B/A und D/C sind isomorph.

2.4. Im weiteren werden wir uns mit einer Gruppe G befassen, die keine Kompositionsreihe hat. Also die Menge $E(G)$ enthält unendliche maximale Ketten zwischen E und G, wo E eine nur aus dem Einselement bestehende Untergruppe von G ist. Solche unendliche maximale Ketten nennen wir Kompositions systeme von G.

2.5. Die Faktorgruppe B/A, wo Untergruppen A, B, $A \lhd B$, einem Kompositionssystem K gehören, nennen wir ein Faktor des Kompositionssystems K. Zwei Kompositionssysteme heißen isomorph, wenn man zwischen ihren Faktoren eine eineindeutige Zuordnung derart herstellen kann, daß die entsprechende Faktoren isomorph sind.

2.6. Lemma. *Wenn G eine kommutative Gruppe ist, dann gilt im Halbverband n. u. $E(G)$ die Bedingung* C.

Beweis. Es existiere in $E(G)$ eine unendliche maximale Kette $K = \{H_\gamma\}_{\gamma=0}^{\gamma=\sigma}$ und in K existiere kein Element $H_\gamma \lhd H_\sigma$. Dann ist die mengentheoretische Vereinigung aller Untergruppen H_γ, $o \prec \gamma \prec \sigma$, die Gruppe H_σ. Sei $C \in E(G)$. Es existiere in $E(G)$ eine Untergruppe X von G, daß

$$H_\gamma \cap C \leqq X \lhd H_\sigma \cap C$$

für alle $o \prec \gamma \prec \sigma$ gälte. Dann ist

$$H_\sigma \cap C = \Big(\bigcup_{0 \prec \gamma \prec \sigma} H_\gamma\Big) \cap C = \bigcup_{0 \prec \gamma \prec \sigma} (H_\gamma \cap C) \subseteq X,$$

was ein Widerspruch ist.

2.7. Satz. *Wenn eine kommutative Gruppe G zwei wohlgeordnete Kompositionssysteme enthält, dann sind diese Systeme isomorph. Es gilt für sie* $\mathrm{JH}_{\wp-1\wp}$.

Beweis. Die Menge $E(G)$ enthält zwei wohlgeordnete maximale Ketten K, L. Für die Ketten K, L gilt die Bedingung $\bar{\mathrm{A}}$. Nach Lemma 1.16 genügen die Ketten K, L der Bedingung D. Die Bedingung E ist dabei auch erfüllt. Aus dem Satz 1.15 und aus 2.3 folgt die Behauptung.

2.8. Definition. *Eine Kette K in $E(G)$ zwischen E, G hat die Eigenschaft* F, *wenn jede Gruppe $A \in K$, zu der keine Gruppe $B \in K$, $B \lhd A$ existiert, eine Vereinigung aller Gruppen $C \in K$, $C < A$ ist, also $A = \bigcup \{C, C < A, C \in K\}$.*

Maximale Ketten aus E (G), die die Eigenschaft F haben, nennen wir F-*Kompositions-systeme.*

2.9. Satz. *Wenn die Gruppe G zwei wohlgeordnete* F-*Kompositionssysteme enthält, dann sind diese Systeme isomorph. Es gilt für sie* $\mathrm{JH}_{\wp-1\wp}$.

Beweis. Die Menge $E(G)$ enthält zwei wohlgeordnete maximale Ketten K, L. Zuerst werden wir die Bedingung D für die Ketten K, L beweisen. Sei $L = \{H_\gamma\}_{\gamma=0}^{\gamma=\sigma}$. Es existiere ein $\lhd$-Intervall $[A, B]$ der Kette K so, daß $M[A, B]$ kein größes Element habe. Dann gehört die Gruppe

$$H_\varkappa = \bigcap \{H_\gamma, H_\gamma \in (L - M[A, B])\}$$

der Menge $M[A, B]$ nicht, also

$$B \cap H_\varkappa \neq A \cap H_\varkappa. \tag{9}$$

In der Kette L existiert kein Element $H_\gamma \lhd H_\varkappa$, also $H_\varkappa = \bigcup_{\gamma \prec \varkappa} H_\gamma$. Für alle $0 \prec \prec \gamma \prec \varkappa$ gilt $B \cap H_\gamma = A \cap H_\gamma$, wonach $\bigcup_{\gamma \prec \varkappa} (B \cap H_\gamma) = \bigcup_{\gamma \prec \varkappa} (A \cap H_\gamma)$, also $B \cap \cap \bigcup_{\gamma \prec \varkappa} H_\gamma = A \cap \bigcup_{\gamma \prec \varkappa} H_\gamma$, was mit (9) im Widerspruch ist.

Die Bedingung E ist auch erfüllt. Aus dem Satz 1.15 und aus 2.3 folgt die Behauptung.

2.10. Bemerkung. A. G. Kurosch hat in seiner Arbeit [3] das Kompositionssystem für Gruppe G, die keine Kompositionsreihe hat, folgendermassen definiert:

Die Menge K ist ein Kompositionssystem der Gruppe G, wenn K die folgenden Eigenschaften erfüllt:

a) Die Menge K enthält die Gruppe G und die Gruppe E.

b) Wenn die Untergruppen H', H'' in K enthalten sind, so ist eine von ihnen eine Untergruppe der andern.

c) Wenn die Untergruppe H in der Menge K enthalten ist so läßt sich in K ein endliches System H_i $(i = 0, \ldots, n)$ $H_0 = H$, $H_n = G$ von Untergruppen finden, daß jedes H_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, Normalteiler von H_{i+1} ist.

d) Es existiert keine Menge K', $K \subset K'$, die die Eigenschaften a), b), c) hat.

Weiter bezeichnen wir das Kompositionssystem in Kuroschs Sinne als K-Kompostionssystem.

A. G. Kurosch hat in [3] bewiesen, daß jede zwei wohlgeordnete K-Kompositionssysteme der Gruppe G isomorph sind. Diesen Satz hat er mit Hilfe des Schreierschen Verfeinerungssatzes bewiesen. Da jedes wohlgeordnete K-Kompositionssystem ein wohlgeordnetes F-Kompositionssystem ist, folgt der oben angeführte Satz von A. G. Kurosch aus dem Satz 2.9.

Bis daher haben wir den Jordan-Hölderschen Satz nur für einige wohlgeordnete Ketten in $E(G)$ bewiesen. Der Satz $JH_{\mathscr{P}-1\mathscr{P}}$ kann auch für solche Kompostionssysteme gelten, die nicht wohlgeordnet sind.

2.11. Beispiel. Sei die Gruppe G eine direkte Summe zweier gleichen unendlichen zyklischen Gruppen $\{1\}$. Die Gruppe G bezeichnen wir mit $\{1\} + \{1\}$.

Dann bilden die Gruppen

$$\{1\} + \{1\}, \{1\} + \{3\}, \{1\} + \{3^2\}, \ldots, \{1\} + \{0\}, \{3\} + \{0\}, \ldots, \{0\} + \{0\}$$
$$\{1\} + \{1\}, \{3\} + \{1\}, \{3^2\} + \{1\}, \ldots, \{0\} + \{1\}, \{0\} + \{3\}, \ldots, \{0\} + \{0\}$$

zwei Kompositionssysteme in der Gruppe G. Wir bezeichnen sie mit K, L. Die Ketten K, L erfüllen die Bedingung D, weil jede Teilmenge der Kette K, L ein größtes Element hat, also hat ein größtes Element auch die Menge $M[a, b]$, wo $[a, b]$ ein $\lhd$-Intervall der Kette $K(L)$ ist. Die Bedingung E beweisen wir für beliebiges $\lhd$-Intervall der Kette K. Sei $a \lhd b$, $a, b \in K$. Wir zeigen, daß das größte Element der Menge $M[a, b]$ verschieden von den Elementen $\{0\} + \{1\}$, $\{0\} + \{0\}$ ist. Also zu dem größten Element der Menge $M[a, b]$ existiert ein oberer Nachbar, was das kleinste Element der Menge $L - M[a, b]$ ist. Das $\lhd$-Intervall $[a, b]$ hat die Form entweder

a) $[\{1\} + \{3^{n+1}\}, \{1\} + \{3^n\}]$, $n = 0, 1, \ldots$ oder

b) $[\{3^{n+1}\} + \{0\}, \{3^n\} + \{0\}]$, $n = 0, 1, \ldots$.

a) Es gilt

$$(\{1\} + \{3^{n+1}\}) \cap (\{0\} + \{1\}) \neq (\{1\} + \{3^n\}) \cap (\{0\} + \{1\}),$$
$$(\{1\} + \{3^{n+1}\}) \cap (\{0\} + \{3^{n+1}\}) = (\{1\} + \{3^n\}) \cap (\{0\} + \{3^{n+1}\}),$$

also $\{0\} + \{1\} \notin M[a, b]$ und das Element $\{0\} + \{3^{n+1}\}$, das größer ist als $\{0\} + \{0\}$, gehört der Menge $M[a, b]$.

b) Es gilt

$$(\{3^{n+1}\} + \{0\}) \cap (\{3^{n+1}\} + \{1\}) = (\{3^n\} + \{0\}) \cap (\{3^{n+1}\} + \{1\}).$$

Das Element $\{3^{n+1}\} + \{1\}$ gehört der Menge $M[a, b]$ und ist größer als $\{0\} + \{1\}$, $\{0\} + \{0\}$.

Die Kompositionssysteme K, L erfüllen die Bedingungen D, E, also gilt für sie $JH_{\varphi-1\varphi}$.

LITERATUR

[1] Felscher W., *Jordan-Hölder Sätze und modular geordnete Mengen.* Math. Zeitschr. **75** (1961), 83—114.

[2] Jakubík J., *O reťazcoch v Boolových algebrách.* Mat. fyz. č. **8** (1958), 193—202.

[3] Kurosch A. G., *Gruppentheorie*, Berlin 1953.

[4] Vilhelm V., *Teorema Žordana-Gel'dera v strukturach bez uslovija konečnosti cepej*, Čech. mat. žurnal **4**, 79 (1954), 29—49.

Adresa autorky: Katedra algebry a teórie čísel PFUK, Bratislava, Šmeralova 2

Do redakcie došlo: 15. 12. 1964

Теорема Жордана—Гельдера для неконечных цепей в частично упорядоченных множествах

Е. Гедеонова

Резюме

В. Фельшер в работе [1] показал, что теорема Жордана-Гельдера для групп следует из теорем теории частично упорядоченных множеств. А. Г. Курош в [3] доказал обобщенную теорему Жордана—Гельдера для групп, в которых не существует композиционный ряд. В этой работе доказана теорема о частично упорядоченных множествах, из которой следует еще общая теорема Жордана—Гельдера для групп. Главным результатом является теорема 1.11. Подобную теорему для структур доказал В. Вильгелм [4] и Я. Якубик в [2]. Обе эти теоремы являются следствием теоремы 1.11.

Jordan—Hölderova veta pre nekonečné retazce v čiastočne usporiadaných množinách

E. Gedeonová

Obsah

W. Felscher v práci [1] ukázal, že Jordan—Hölderova veta pre grupy vyplýva z viet teórie čiastočne usporiadaných množín. A. G. Kuroš v [3] dokázal zobecnenú Jordan—Hölderovu vetu pre grupy, v ktorých neexistuje kompozičný rad. V tejto práci je dokázaná veta o čiastočne usporiadaných množinách, z ktorej vyplýva ešte obecnejšia Jordan—Hölderova veta pre grupy. Hlavným výsledkom práce je veta 1.11. Podobnú vetu pre zväzy dokázal V. Vilhelm v [4] a J. Jakubík v [2]. Obidve tieto vety sú dôsledkami vety 1.11.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X, 3, MATHEMATIKA, 12., 1965]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X. FASC. III. MATHEMATICA XII. 1965

О функциях, графы которых являются замкнутыми множествами II

П. КОСТЫРКО, Т. НОЙБРУН И Т. ШАЛАТ

Эта работа надвязывает на работу [1], углубляет и распространяет ее результаты.

Пусть (X, ϱ), (Y, ϱ_1) два метрические пространства. Обозначим знаком $U(X, Y)$ систему всех тех отображений пространства X в пространство Y, графики которых являются замкнутыми подмножествами пространства $(X\times Y, \sigma)$, $\sigma = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2}$. Если $Y = E_1 = (-\infty, +\infty)$ и ϱ_1 евклидова метрика, то вместо $U(X, E_1)$ пишем кратко $U(X)$.

В работе [1] была доказана следующая теорема (теорема 9). Здесь ее новое доказательство.

Теорема 1. *Пусть (X, ϱ) является метрическим пространством, пусть $U(X)$ имеет выше введенное значение и пусть $B_1(X)$ система всех реальных функций первого Бэровского класса (на X), то $U(X) \subset B_1(X)$.*

Доказательство. Известно (смотри [2] стр. 18), что f принадлежит классу $B_1(X)$ тогда и только тогда, если f измерима $F_\sigma(X)$. Итак достаточно показать, что если $f \in U(X)$, то для каждого $c \in E_1$ имеем

$$\{x \in X : f(x) > c\} \in F_\sigma(X),\ \{x \in X : f(x) < c\} \in F_\sigma(X).$$

Покажем, что для всякого $c \in E_1$ множество $\{x \in X : f(x) > c\}$ принадлежит системе $F_\sigma(X)$. Аналогично доказывается $\{x \in X : f(x) < c\} \in F_\sigma(X)$.

Пусть $f \in U(X)$, $c \in E_1$ и пусть G_f является графиком функции f. Построим множество $M = G_f \cap (X\times(c, +\infty))$, $(c \in E_1)$. Так как G_f является замкнутым множеством в $X\times E_1$ и $X\times(c, +\infty)$ является множеством типа F_σ в $X\times E_1$, то множество M типа F_σ в $X\times E_1$. Значит $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, $M_n (n = 1, 2, \dots)$ замкнуто в $X\times E_1$. Пусть $z_0 \in X\times E_1$, $p > 0$. Положим $R_p = \overline{S(z_0, p)}$ ($S(z_0, p)$ сферическая окрестность точки $z_0 \in X \times E_1$ радиуса p). Далее положим $M_{np} = M_n \cap R_p$. Очевидно $M_n = \bigcup_{p=1}^{\infty} M_{np}$ и всякое множество M_{np} $(n = 1, 2, \ldots;\ p = 1, 2, \ldots)$ замкнуто и ограничено в $X \times E_1$. Положим далее

$$E_{np} = \{x \in X : \sum_{y \in E_1}' (x, y) \in M_{np}\}, \qquad E = \{x \in X : \sum_{y \in E_1} (x, y) \in M\},$$

очевидно

$$E = \bigcup_{n,\, p=1}^{\infty} E_{np}, \qquad E = \{x \in X : f(x) > c\} \tag{1}$$

Докажем теперь, что для каждых фиксированных n и p E_{np} является замкнутым в X. Тогда из (1) вытекает, что E является F_σ в X. Пусть $x_0 \in E'_{np}$ (H' — производная множества H), то существует последовательность $\{x_m\}_1^\infty$ элементов E_{np} так, что $x_m \to x_0$. Из определения E_{np} вытекает, что для каждого m существует $y_m \in E_1$ так, что $(x_m, y_m) \in M_{np}$. Так как M_{np} является замкнутым и ограниченным в $X \times E_1$, то и $\{y_m\}_1^\infty$ ограничена в E_1, итак существует (в E_1) сходящая частичная последовательность $\{y_{m_s}\}_{s=1}^\infty$. Пусть $y_{m_s} \to y_0 \in E_1$, то $(x_{m_s}, y_{m_s}) \to (x_0, y_0) \in M_{np}$ и $x_0 \in E_{np}$.

В связи с теоремой 1 возникает вопрос не верна-ли аналогичная теорема для любых функций определенных на X с значениями в Y, где (X, ϱ) и (Y, σ) любые метрические пространства. Сначала заметим, что систему $B_1(X, Y)$ определяем в этом случае так, что $f \in B_1(X, Y) \Leftrightarrow f^{-1}(G) \in F_\sigma(X)$, для любого открытого множества G. Покажем, что малой модификацией доказательства теоремы 1 можно доказать такую теорему для определенных типов метрических пространств (Y, σ).

Теорема 1'. *Пусть (X, ϱ), (Y, σ) — метрические пространства и пусть $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, где C_n компакты, то $U(X, Y) \subset B_1(X, Y)$.*

Замечание. Заметим, что если $Y = E_1$, то из теоремы 1', вытекает теорема 1. Имеем

$$\{x : f(x) > c\} = f^{-1}((c, +\infty)), \qquad \{x : f(x) < c\} = f^{-1}((-\infty, c)),$$

где $(c, +\infty)$, $(-\infty, c)$ открытые множества. Наоборот, если (a, b) любой интервал числовой прямой, то $f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((-\infty, b)) \cap f^{-1}((a, +\infty))$. Итак, если множество $f^{-1}((-\infty, b)) \cap f^{-1}((a, +\infty))$ принадлежит классу $F_\sigma(X)$, то множество $f^{-1}((a, b))$ принадлежит также тому-же классу. Так как всякое открытое множество G можно выразить в виде $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, где G_n $(n = 1, 2, \ldots)$ открытые промежутки и $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(G_n)$, то видим, что $f^{-1}(G) \in F_\sigma(X)$.

Доказательство теоремы 1'. Пусть $f \in U(X, Y)$, пусть G_f график функции f. Пусть $G \subset Y$ открытое множество. Как в доказательстве теоремы 1 и здесь видим, что множество $M = G_f \cap (X \times G)$ типа F_σ в $X \times Y$, значит $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n замкнутые множества в $X \times Y$. Так как $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, где C_n компакты очевидно возможно предполагать, что $C_n \subset C_{n+1}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $z_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, p натуральное число. Обозначим $S(x_0, p)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ сферическую окрестность точки x_0. Существует n_0 так, что $y_0 \in C_{n_0}$. Обозначим $D_n = C_{n_0+n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $R_p = \overline{S(x_0, p)} \times D_p$. Пусть $M_{np} = M_n \cap D_p$. Так как в доказательстве теоремы 1 легко видеть, что $M_n = \bigcup_{p=1}^{\infty} M_{np}$ и каждое из множеств M_n является замкнутым и ограниченным в $X \times Y$. Если E_{np} имеет то значение как в доказательстве теоремы 1, то имеем $E = \bigcup_{n,p=1}^{\infty} E_{np}$, где $E = f^{-1}(G)$. Следовательно, достаточно показать, что для любого n и p множество E_{np} замкнуто. Это доказывается аналогично как в теореме 1 имея ввиду, что элементы $\{y_m\}_1^{\infty}$ (обозначение как в теореме 1) принадлежат компакту D_p. Теорема 1' полностью доказана.

Условие $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, где C_n компакты в теореме существенно. Для любого (Y, σ) теорема неверна. Следующий пример показывает, что существует функция $f(x)$ определена на X с значениями в Y, где (X, ϱ), (Y, σ) метрические пространства, которая имеет замкнутый график и не принадлежит никакому Бэровскому классу. (Функция $f(x)$ принадлежит классу α, если множество $f^{-1}(G)$ является бореловским множеством аддитивного класса A_α бореловских множеств пространства (X, ϱ) для любого открытого множества $G \subset Y$ — смотри [2] стр. 202).

Пример 1. Пусть (X, ϱ) метрическое пространство, где $X = \langle 0, 1 \rangle$ и ϱ евклидовская метрика. Пусть (Y, σ) метрическое пространство, причем Y есть множество мощности континуума и σ является тривиальной метрикой. Пусть $f(x)$ простое отображение пространства X в Y. Пусть $(x_n, y_n) \in G_f$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Значит $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. Так как σ тривиальная метрика, то $y_n = y_0$ для $n = k, k+1, \ldots$. Из $y_n = f(x_n)$ вытекает $y_0 = f(x_n)$ для $n \geqq k$ и потому что f простое отображение, то последовательность $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ является стационарной. Из $x_n \to x_0$ вытекает $x_n = x_0$ для $n = k, k+1, \ldots$. Следовательно $(x_0, y_0) \in G_f$. Функция $f(x)$ имеет замкнутый график в $X \times Y$. Возьмем теперь в X любое неборелевское множество E. Пусть $G = f(E) \subset Y$. G открытое множество, потому что в (Y, σ) все множества открыты. Из того, что $f(x)$ является одно однозначной функцией имеем $E = f^{-1}[f(E)] = f^{-1}(G)$.

Следовательно функция f не принадлежит никакому Бэровскому классу.

В связи с рассмотриванием системы $U(X, Y)$ возникает вопрос, какой является композиция $\varphi[f(x)]$, если f и φ имеют замкнутые графики. В следующем примере покажем, что композиция двух функций с замкнутыми графиками не должна быть функцией с замкнутым графиком ни в том случае, если $\varphi(y)$ является непрерывной функцией на образе множества X.

Пример 2. $X = \langle 0, 1\rangle$, $Y = (-\infty, +\infty)$ и метрики на X и Y являются евклидовскими. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$ для $x \in (0, 1\rangle$, $f(0) = 2$; $\varphi(y) = \frac{1}{y}$ для $y \neq 0$, $\varphi(0) = 0$. $\varphi(y)$ является непрерывной функцией на образе множества X, $f(x)$ имеет замкнутый график, но $\varphi[f(x)] = x$ для $x \neq 0$, $\varphi[f(0)] = \frac{1}{2}$ не имеет замкнутый график в $X \times Y$.

Приведем некоторые условия для замкнутости графика композиции функций.

Теорема 2. *Пусть (X, ϱ), (Y, σ), (Z, τ) метрические пространства. Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на X с значениями в Y. Пусть $\varphi(y) \in U(Y, Z)$, то $\varphi[f(x)] \in \in U(X, Z)$.*

Доказательство. Пусть $G_{\varphi_0 f}$ график функции $\varphi[f(x)] = \varphi_0 f$ и пусть $(x_n, y_n) \in \in G_{\varphi_0 f}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, то $x_n \to x_0$ и следовательно $f(x_n) \to f(x_0.)$ Введем обозначение $f(x_n) = u_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f(x_0) = u_0$. Из того что $(u_n, y_n) \in \in G_\varphi$, $u_n \to u_0$, $y_n \to y_0$, вытекает $(u_0, y_0) \in G_\varphi$, итак $y_0 = \varphi(u_0) = \varphi[f(x_0)]$, значит $(x_0, y_0) \in G_{\varphi_0 f}$.

Теорема 3. *Пусть (X, ϱ), (Y, σ), (Z, τ) метрические пространства. Пусть (X, ϱ), $f(X)$ компакты и пусть $f \in U(X, Y)$. Пусть $\varphi(y)$ непрерывно отображает Y в Z, то $\varphi[f] \in U(X, Z)$.*

Доказательство. Легко видеть, что $X \times f(X)$ компакт в $X \times Y$ и $G_f \subset X \times f(X)$. Потому что $f \in U(X, Y)$, то G_f тоже компакт. Определим на $X \times Y$ отображение $T(x, y)$ следующим образом: $T(x, y) = (x, \varphi(y))$. Из непрерывности φ вытекает, что T является тоже непрерывным. $T(x, y)$ отображает компакт G_f на $G_{\varphi_0 f}$, значит $G_{\varphi_0 f}$ является компакт в $X \times Z$, следовательно $\varphi_0 f \in U(X, Z)$.

В связи с рассматриванием системы $U(X)$ появляются следующие простые вопросы: Из $f, g \in U(X)$ вытекает, что $f + g, f \,.\, g, c \,.\, f$ $(c \in E_1) \in U(X)$? Подобные вопросы появились и были решены при изучении систем $B_0(X) = C(X)$ (система всех непрерывных функций на X) и $B_1(X)$.

Покажем на примерах, что множество $U(X)$ не является при любом X замкнутым имея ввиду сумму и произведение и если $f, g \in U(X)$ то $\max(f, g)$ и $\min(f, g)$ не должны принадлежать $U(X)$.

Пример 3. Пусть $X = \langle 0, 1\rangle$, $f(0) = 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1\rangle$; $g(0) = 0$, $g(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in (0, 1\rangle$, то $f(0) + g(0) = 1$ и $f(x) + g(x) = 0$ для $x \in (0, 1\rangle$, значит $f + g \notin U(X)$.

Пример 4. $X = \langle 0, 1\rangle$, пусть f имеет то же значение как в примере 3. Определим $g(x) = x$ для $x \in \langle 0, 1\rangle$, тогда $f(0) \,.\, g(0) = 0$ и $f(x) \,.\, g(x) = 1$ для $x \in (0, 1\rangle$, значит $f \,.\, g \notin U(X)$.

Пример 5. $X = (0, 1\rangle$, $f(0) = 1$, $f(x) = -\frac{1}{x}$ для $x \in (0, 1\rangle$ и $g(x) = 0$ для $x \in \langle 0, 1\rangle$. Тогда $\max(f, g)$ имеет значение 0 в промежутке $(0, 1\rangle$ и значение 1 в точке 0. Следовательно $\max(f, g) \notin U(X)$.

Аналогично можно показать, что если $f, g \in U(X)$, то $\min(f, g)$ не должна принадлежать $U(X)$.

Покажем далее, что система $U(X)$ является замкнутой ввиду на произведение функции на число и абсолютную величину.

Теорема 4. *Пусть* $f \in U(X)$, *то* $c \,.\, f \in U(X)$ $(c \in E_1)$.

Доказательство. Для $c = 0$ теорема очевидно верна. Пусть $c \neq 0$, $f \in U(X)$. Пусть для какого нибудь $c \neq 0$ $c \,.\, f$ не принадлежит $U(X)$. Тогда существует последовательность $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $(x_n, y_n) \in G_{cf}$ (т. е. $y_n = cf(x_n)$) так, что

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0), \tag{2}$$

$(x_0, y_0) \notin G_{cf}$ (т. е. $y_0 \neq cf(x_0)$). Итак $\frac{y_0}{c} \neq f(x_0)$. Из (2) вытекает $(x_n, f(x_n)) \to \left(x_0, \frac{y_0}{c}\right) \notin G_f$ и это в противоречии с предположением теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $f \in U(X)$, *то* $|f| \in U(X)$.

Доказательство. Пусть $f \in U(X)$, $(x_n, y_n) \in G_{|f|}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Если $f(x_n) \geqq 0$ для бесконечного числа n, например, для $n = m_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $y_{m_k} = |f(x_{m_k})| = f(x_{m_k}) \to f(x_0) = y_0 = |f(x_0)|$, значит $(x_0, y_0) \in G_{|f|}$. Если для $n > N$ $f(x_n) < 0$, то для $n > N$ имеем $y_n = |f(x_n)| = -f(x_n) \to -f(x_0) = y_0$, следовательно $y_0 = -f(x_0) = |f(x_0)|$, $(x_0, y_0) \in G_{|f|}$.

В дальшем мы будем рассматривать систему $U(X, Y)$. Эта система в общем не является замкнутой принимая во внимание простую сходимость, как показывает следующий пример ($Y = E_1$).

Пример 6. $X = \langle 0, 1\rangle$, $f_n(x) = x^n \in U(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \notin U(X)$ $(f(x) = 0$ для $x \in \langle 0, 1)$, $f(1) = 1)$.

Покажем, что при произвольных метрических пространствах (X, ϱ), (Y, ϱ_1) система $U(X, Y)$ является замкнутой принимая во внимание почти равномерную сходимость.

Теорема 6. *Пусть $f_n \in U(X, Y)$ $(n = 1, 2, \dots)$ и пусть последовательность $\{f_n\}_1^\infty$ сходится почти равномерно (на X) к f, то $f \in U(X, Y)$.*

Доказательство. Докажем теорему от противного. Пусть существуют элементы $(x_p, y_p) \in G_f$ $(p = 1, 2, \dots)$ так, что $(x_p, y_p) \to (x_0, y_0) \notin G_f$, значит существуют положительные числа δ_1, δ_2 так, что

$$S((x_0, y_0), \delta_1) \cap S((x_0, f(x_0)), \delta_2) = \emptyset. \tag{3}$$

Так как $f_n(x_0) \to f(x_0)$, то существует k_1 так, что для $k > k_1$ $\varrho_1(f_k(x_0), f(x_0)) < \delta_2$, и так для $k > k_1$ $\sigma((x_0, f(x_0)), (x_0, f_k(x_0))) = \sqrt{\varrho_1^2(f_k(x_0), f(x_0))} < \delta_2$, следовательно

$$(x_0, f_k(x_0)) \in S((x_0, f(x_0)), \delta_2) \quad (k > k_1). \tag{4}$$

Поскольку $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ компакт, то для каждого натурального k существует $n_k (n_1 < n_2 < \dots)$ так, что

$$\varrho_1(f_{n_k}(x_p), f(x_p)) < \frac{1}{k} \qquad (p = 0, 1, \dots)$$

Из последнего вытекает

$$\sigma((x_p, y_p), (x_p, f_{nk}(x_p))) = \sqrt{\varrho_1^2(f_{nk}(x_p), f(x_p))} < \frac{1}{k}$$

Если $p \to \infty$, то получаем $\sigma((x_0, y_0), (x_0, f_{n_k}(x_0))) \leqq \frac{1}{k}$ итак существует k_2, что для $k > k_2$

$$(x_0, f_{n_k}(x_0)) \in S((x_0, y_0), \delta_1),$$

следовательно, имея ввиду (3),

$$(x_0, f_{n_k}(x_0)) \notin S((x_0, f(x_0)), \delta_2) \quad (k > k_2),$$

что противоречит (4).

Следовательно из предыдущей тероремы вытекает, что почти равномерная сходимость является достаточным условием к тому, чтобы пределная функция последовательности функций из $U(X, Y)$ снова принадлежала $U(X, Y)$. Следующий пример покажет, что почти равномерная сходимость не является необходимым условием для того, чтобы пределная функция последовательности функций из $U(X, Y)$ опять принадлежала $U(X, Y)$. Пример 7 одновременно показывает что и тогда если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать измеримое множество $A \subset X$ меры μA, $\mu A > \mu X - \varepsilon$, с тем свойством, что сходимость последовательности функций к пределной функции (на A) равномерна, то теорема не должна быть верной. Следовательно, почти равномерную сходимость в предположении теоремы 6 невозможно взять в смысле меры.

Пример 7. $X = \langle 0, 1\rangle$, $f_n(0) = 1$, $f_n(x) = x^{-\frac{1}{n}}$ для $x \in (0, 1\rangle$. Тогда очевидно $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ для каждого $x \in X$. Значит f_n, $f \in U(X)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, но сходимость $f_n \to f$ не является почти равномерной. Это вытекает из того, что для каждого n имеем

$$\sup_{x\in(0,1\rangle} \left| x^{-\frac{1}{n}} - 1 \right| = +\infty.$$

Пусть $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ любая система топологических пространств. Обозначим знаком $\bigtimes_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ декартовое и знаком $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ топологическое произведения этих пространств. Пусть π_γ является проекцией $\bigtimes_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ в X_γ, т. е. π_γ является изображением, при котором всякому $x = \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ соответствует его γ-ая координата $x_\gamma \in X_\gamma$. Под топологическим произведением $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ мы будем подрозумевать декартого произведение $\bigtimes_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ снабженное той самой слабой топологией, при которой всякая проекция π_γ является непрерывной функцией (смотри [3] стр. 89–90). И дальше мы будем пользоваться понятиями (например сеть) в согласии с [3].

При доказательстве следующей теоремы воспользуемся следующей известной теоремой (смотри [3] стр. 91), которую сформулируем как лемму.

Лемма 1. *Пусть $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ система топологических пространств и пусть $X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Тогда для того чтобы сеть $(x^\alpha, \alpha \in A)$, $x^\alpha = \{x_\gamma^\alpha\}_{\gamma\in\Gamma} \in X$ сходилась к $x = \{x_\gamma\} \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\gamma \in \Gamma$ сеть $(x_\gamma^\alpha, \alpha \in A)$, $x_\gamma^\alpha \in X_\gamma$ сходилась к $x_\gamma \in X_\gamma$.*

Теорема 7. *Пусть $\{X_i\}_{i=0}^\infty$ система топологических пространств и пусть на X_0 определены функции f_i $(i = 1, 2, \ldots)$ (f_i изображает X_0 в X_i), и пусть $G_{f_i} = \{(x, f_i(x)),\ x \in X_0\}$ является замкнутым множеством в топологическом произведении $\Pi\{X_s\colon s = 0, i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда функция f определена следующим образом*

$$f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_i(x), \ldots\}$$

(на множестве X_0) имеет график G_f, который является замкнутым подмножеством топологического пространства X.

Доказательство. Достаточно показать, что $G'_f \subset G_f$. Пусть $x = \{x_i\}_{i=0}^\infty \in G'_f$. Тогда существует сеть $(x^\alpha, \alpha \in A)$, $x^\alpha = \{x_i^\alpha\}_{i=0}^\infty \in G_f - \{x\}$ $(x_i^\alpha = f_i(x_0^\alpha)$ $(i = 1, 2, \ldots)$

так, что $x^\alpha \to x$. Так как $x^\alpha \to x$, то из леммы 1 вытекает $f_i(x_0^\alpha) \to x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $x_0^\alpha \to x_0$. Из последнего вытекает, что для каждого $i = 1, 2, \ldots$ сеть $(x_0^\alpha, f_i(x_0^\alpha), \alpha \in A)$ сходится (на основании леммы 1) к (x_0, x_i) и из замкнутости G_{f_i} следует $x_i = f_i(x_0)$, значит $x \in G_f$.

Теорема 8. *Пусть на (X_0, ϱ_0) определены функции $f_i \in U(X_0, X_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (f_i изображает X_0 в (X_i, σ_i)). Определим на X_0 функцию f следующим образом* $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_i(x), \ldots\} \in X_1 \times X_2 \times \ldots x X_i x \ldots = (Y, \sigma)\left(\sigma(y, y') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \right.$ $\left. \cdot \frac{\sigma_i(\eta_i, \eta_i')}{1 + \sigma_i(\eta_i, \eta_i')}, y = \{\eta_i\}_1^\infty, y' = \{\eta_i'\}_1^\infty\right)$. *Тогда $f \in U(X_0, Y)$ $(X_0 \times Y$ метрическое пространство с метрикой $\mu = \sqrt{\varrho_0^2 + \sigma^2})$.*

Теорема 8 является следствием теоремы 7 если покажем, что топология на $X = \prod_{i=0}^{\infty} X_i$ совпадает с топологией на $\bigtimes_{i=0}^{\infty} X_i$ образованной метрикой μ и топология на $\Pi\{X_s : s = 0, i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ совпадает с топологией на $X_0 \times X_i$ образованной метрикой $\sqrt{\varrho_0^2 + \sigma_i^2}$.

В доказательстве теоремы 8 мы применим следующий результат, который сформулируем как лемму.

Лемма 2. *Пусть на множестве X определена метрика σ. Тогда топологии образованные на X метриками σ и $\bar{\sigma} = \dfrac{\sigma}{1 + \sigma}$ совпадают.*

Доказательство леммы 2. Легко проверить, что $\bar{\sigma}$ метрика. Пусть $\mathbf{L}$ $(\bar{\mathbf{L}})$ топология на X образована метрикой σ $(\bar{\sigma})$. Пусть $G \in \mathbf{L}$. Если $a \in G$, то существует такой открытый шар $S(a, \varepsilon')$, $\varepsilon' = \varepsilon_a'$ (в смысле σ) точки a, что $S(a, \varepsilon') \subset G$. Мы можем уже предпологать, что $\varepsilon' < 1$. Положим $\varepsilon_a = \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon'}$, следовательно $\varepsilon < 1$. Пусть $\bar{S}(a, \varepsilon)$ сферическая (открытая) окрестоснь точки a в смысле метрики $\bar{\sigma}$. Если $x \in \bar{S}(a, \varepsilon)$, то $\bar{\sigma}(x, a) < \varepsilon < 1$. Так как $\varphi(z) = \dfrac{z}{1 - z}$, $z \in \langle 0, 1)$ возрастающая, то

$$\sigma(x, a) = \frac{\bar{\sigma}(x, a)}{1 - \bar{\sigma}(x, a)} < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \varepsilon'.$$

Значит $\bar{S}(a, \varepsilon) \subset S(a, \varepsilon')$. Отсюда видим, что $G = \bigcup_{a \in G} \bar{S}(a, \varepsilon_a) \in \bar{\mathbf{L}}$. Следовательно $\mathbf{L} \subset \bar{\mathbf{L}}$, аналогично легко проверим, что $\bar{\mathbf{L}} \subset \mathbf{L}$, итак $\mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}$.

Доказательство теоремы 8. На основе леммы 2 топология пространства $X = \prod_{i=0}^{\infty} X_i$ неизменяется, если пространства X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ будем рассматривать с метрикой $\varrho_i = \dfrac{\sigma_i}{1+\sigma_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. На $\bigtimes\limits_{i=0}^{\infty} X_i$ определим метрику μ^* при помощи метрик ϱ_i $(i = 0, 1, \ldots)$

$$\mu^*(x, y) = \sqrt{\varrho_0^2(\xi_0, \eta_0) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \varrho_i(\xi_i, \eta_i)\right)^2}$$

$x = \{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$, $y = \{\eta_i\}_{i=0}^{\infty}$. Потому что $\mu^*(x, y) = \mu(x, y)$, топологии образованные метриками μ^* и μ на $\bigtimes\limits_{i=0}^{\infty} X_i$ совпадают.

Обозначим знаком $\mathbf{L}_1$ топологию на $X = \prod\limits_{i=0}^{\infty} X_i$ и $\mathbf{L}_2$ топологию на $\bigtimes\limits_{i=0}^{\infty} X_i$ образованную метрикой μ^*. Покажем, что $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$. Пусть $G \in \mathbf{L}_1$ и пусть $a = \{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} \in G$. Если π_i есть проекцией X в X_i $(i = 0, 1 \ldots)$, то $\pi_i(G) = G_i$, G_i открытая в X_i в смысле метрики ϱ_i, причем $G_i \neq X_i$ только для конечного числа индексов $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Очевидно для каждого $l = 1, 2, \ldots, k$ существует δ_{i_l} так, что $S(\alpha_{i_l}, \delta_{i_l}) \subset G_{i_l}$ $(l = 1, 2, \ldots k)$. Обозначим $\delta = 2^{-i_k} \min\{\delta_{i_1}, \ldots \ldots, \delta_{i_k}\}$. Легко можно показать, что $S(a, \delta) = \{x \in X : \mu^*(x, a) < \delta\} \subset G$. Действительно, пусть $x = \{\xi_i\}_{i=0}^{\infty} \in S(a, \delta)$, то для каждого $l = 1, 2, \ldots, k$

$$\varrho_{i_l}(\xi_{i_l}, \alpha_{i_l}) \leqq 2^{i_l}\mu^*(x, a) < 2^{i_l}\delta \leqq 2^{i_k}\delta \leqq \delta_{i_l},$$

итак $\xi_{i_l} \in S(\alpha_{i_l}, \delta_{i_l}) \subset G_{i_l}$. Для остальных индексов $i \neq i_l$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ есть $\xi_i \in G_i = X_i$. Мы показали, что для каждого $a \in G$ существует $\delta_a > 0$ так, что $S(a, \delta_a) \subset G$, следовательно $G = \bigcup\limits_{a \in G} S(a, \delta_a) \in \mathbf{L}_2$, итак $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$.

Покажем, что $\mathbf{L}_2 \subset \mathbf{L}_1$. Пусть $G \in \mathbf{L}_2$, $a = \{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} \in G$. Существует $\varepsilon > 0$ так, что $S(a, \varepsilon) \subset G$. Выберем натуральное l так, чтобы $2^{-l} < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Положим $S_0 = $
$= S\left(\alpha_0, \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \subset X_0$, $S_i = S(\alpha_i, \varepsilon_i) \subset X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l+1)$, $\varepsilon_i = \dfrac{1}{2^{l+1}(l+1)}$.

Потом множество $T = \bigcap\limits_{i=0}^{l+1} \pi_i^{-1}(S_i)$ принадлежит очевидно в $\mathbf{L}_1$ и $a \in T$. Покажем, что $T \subset S(a, \varepsilon)$. Если $x = \{\xi_i\}_{i=0}^{\infty} \in T$, то из определения T вытекает $\xi_i \in S_i$ $(i = 0, 1, \ldots, l+1)$ итак $\varrho_0(\xi_0, \alpha_0) < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $\varrho_i(\xi_i, \alpha_i) < \dfrac{1}{2^{l+1}(l+1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, l+1)$. Ввиду того, что $\varrho_i = \dfrac{\sigma_i}{1+\sigma_i} < 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, и учитывая выбор числа l, получим

$$\mu^*(x, a) = \sqrt{\varrho_0^2(\xi_0, \alpha_0) + \left(\sum_{i=1}^{l+1} \frac{1}{2^i} \varrho_i(\xi_i, \alpha_i) + \sum_{i=l+2}^{\infty} \frac{1}{2^i} \varrho_i(\xi_i, \alpha_i)\right)^2} <$$
$$< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \left(\sum_{i=1}^{l+1} \frac{1}{2^{l+1}(l+1)} + \frac{1}{2^{l+1}}\right)^2} < \varepsilon .$$

Итак для каждого $a \in G$ существует $T = T_a \in \mathbf{L}_1$ так, что $T_a \subset G$. Поэтому $G = \bigcup_{a \in G} T_a \in \mathbf{L}_1$. Следовательно $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$. Аналогично бы доказали мы, что топология на $X_0 \times X_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ образована метрикой $\sqrt{\varrho_0^2 + \sigma_i^2}$ совпадает с топологией на $\Pi\{X_s : s = 0, i\}$.

Из теоремы 7 вытекает, что $X - G_f$ открыто в смысле топологии на $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, значит тоже в смысле топологии на $\bigtimes_{i=0}^{\infty} X_i$, образованной метрикой μ^*, так что G_f замкнуто в X в смысле метрики μ^* и следовательно замкнуто тоже в смысле метрики μ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Костырко П.—Шалат Т., О функциях, графы которых являются замкнутыми множествами, Časopis pro pěstování matematiky, 89, (1964), 426—432.

[2] Sikorski R., Funkcje rzeczywiste 1, Warszawa, 1958.

[3] Kelley J. L., General Topology, Toronto—New York—London, 1955.

Adresa autorov: Katedra algebry a teórie čísel PFUK, Bratislava, Šmeralova 2

Do redakcie došlo: 10. 12. 1964

O funkciách, ktorých grafy sú uzavreté množiny II

P. Kostyrko, T. Neubrunn a T. Šalát

Práca doplňuje a zovšeobecňuje niektoré výsledky práce [1]. Uvedieme najdôležitejšie výsledky.

Veta 1'. *Nech (X, ϱ), (Y, σ) sú dva metrické priestory, nech* $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, kde C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *sú kompakty (v Y). Nech $U(X, Y)$ je množina všetkých takých zobrazení priestoru X do Y, ktorých grafy sú uzavretými podmnožinami priestoru $(X \times Y, \tau)$, $\tau = \sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}$. Nech $B_1(X, Y)$ značí množinu všetkých tých zobrazení priestoru X do Y, pre ktoré platí: Ak $G \subset Y$, G otvorená v Y, potom $f^{-1}(G) \in F_\sigma(X)$. Potom $U(X, Y) \subset B_1(X, Y)$.*

V práci sú ďalej odvodené niektoré postačujúce podmienky k tomu, aby zložené zobrazenie dvoch zobrazení s uzavretými grafmi bolo opäť zobrazením s uzavretým grafom. Taktiež je detailnejšie študovaná štruktúra systému $U(X, Y)$, zvlášť v prípade $Y = (-\infty, +\infty)$.

Uvedieme ešte dva výsledky.

Veta 6. *Nech $f_n \in U(X, Y)$ a nech $\{f_n\}_1^\infty$ konverguje skoro rovnomerne na X ku f (t. j. $\{f_n\}_1^\infty$ konverguje rovnomerne ku f na každom kompakte $K \subset X$). Potom $f \in U(X, Y)$.*

Veta 8. *Nech (Y_0, ϱ_0), (X_i, σ_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ sú metrické priestory. Nech $f_i \in U(X_0, X_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Nech $Y = X_1 \times X_2 \times \ldots$ je kartézsky súčin priestorov X_i s Fréchetovou metrikou σ*

$\left(t.\, j.\ ak\ y = \{\eta_i\}_1^\infty \in Y,\ y' = \{\eta_i'\}_1^\infty \in Y,\ potom\ \sigma(y, y') = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\sigma_i(\eta_i, \eta_i')}{1 + \sigma_i(\eta_i, \eta_i')} \right)$. *Položme pre* $x \in X_0$

$$f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_i(x), \ldots\}.$$

Potom $f \in U(X_0, Y)$.

On the functions, the graphs of which are closed sets II

P. Kostyrko, T. Neubrunn and T. Šalát

Summary

In the paper are accomplished and generalized sonie results of the paper [1]. Let us introduce some of them.

Theorem 1'. *Let* (X, ϱ), (Y, σ) *be two metric spaces. Let* $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ *where* C_n $(n = 1, 2, \ldots$ *are compacts (in* Y*). Let* $U(X, Y)$ *denote the set of all such mappings with the domains* X *and the range* Y*, the graps of which are closed subsets of the space* $(X \times Y, \tau)$ *where* $\tau = \sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}$. $B_1(X, Y)$ *denotes the set of all such mappings from* X *into* Y *for which the following property holds: If* $G \subset Y$, G *is open in* Y *then* $f^{-1}(G) \in F_\varrho(X)$*. Under these asumptions* $U(X, Y) \subset B_1(X, Y)$ *holds.*

Further some sufficient conditions on two functions implying their graph to be a function with closed graph are given. The structure of the system $U(X, Y)$ is studied deeper when $Y = (-\infty, \infty)$.

Further results are:

Theorem 6. *Let* $f_n \in U(X, Y)$ *and let* $\{f_n\}_1^\infty$ *is almost uniformly convergent to* f *(i.e.* $\{f_n\}_1^\infty$ *is convergent uniformly ot* f *on each compact* $K \subset X$*). Then* $f \in U(X, Y)$.

Theorem 8. *Let* (X_0, ϱ_0), (X_i, σ_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ *be metric spaces. Let* $f_i \in U(X_0, X_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$*. Let* $Y = X_1 \times X_2 \times \ldots$ *be cartesian product with the Frechets metric* σ *of the, spaces* X_i $\left(\text{i.e. if } y = \{\eta_i\}_1^\infty \in Y,\ y' = \{\eta_i'\} \in Y \text{ then } \sigma(y, y') = \sum_1^\infty \frac{1}{2^i} \frac{\sigma_i(\eta_i, \eta_i')}{1 + \sigma(\eta_i, \eta_i')}\right)$*. Let us put for every* $x \in X_0$ $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots\}$*. Then* $f \in U(X_0, Y)$.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. X, 3, MATHEMATIKA, 12., 1965]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X. FASC. III. MATHEMATICA XII. 1965

O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice $y^{IV} + 2A(x)\,y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0.$

J. Mamrilla

V práci sú študované oscilatorické vlastnosti riešení diferenciálnej rovnice

$$y^{IV} + 2A(x)\,y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0, \tag{a}$$

kde $A(x) \in C_1(a, \infty)$, $b(x) \in C(a, \infty)$, $a \in (-\infty, \infty)$.

Hovoríme, že riešenie rovnice (a) je oscilatorické na (a, ∞) ak má nekonečne mnoho nulových bodov na (a, ∞), v opačnom prípade hovoríme, že je neoscilatorické na (a, ∞). Z ďalších úvah vylučujeme triviálne riešenie ($y = 0$).

Najskôr vyslovíme lemmy, na ktoré sa budeme v ďalšom odvolávať:

Lemma 1. *Nech $b(x) \geqq 0$, $A(x) \geqq 0$, pritom nech $b(x)$ nerovná sa identicky nule na žiadnom intervale, potom nulové body riešenia $y(x)$ rovnice* (a) *a jeho druhej derivácie sa oddeľujú napravo od bodu x_0 ($> a$), v ktorom platí*

$$F(y(x_0)) = y(x_0)\,y'''(x_0) - y'(x_0)\,y''(x_0) + A(x_0)\,y^2(x_0) \leqq 0. \tag{b}$$

Táto lemma je dokázaná v [2; lemma 2].

Lemma 2. *Nech $A(x) \geqq 0$, $b(x) - A'(x) < 0$, potom riešenie $y(x)$ rovnice* (a) *s trojnásobným nulovým bodom nemá naľavo od toho bodu nulový bod.*

Dôkaz. Nech $x_1 < x_0$ je prvý nulový bod (v bode x_0 má $y(x)$ trojnásobný nulový bod), potom existuje $\xi_1 \in (x_1, x_0)$ taký, že $y'(\xi_1) = 0 \Rightarrow$ existuje $\xi_2 \in (\xi_1, x_0)$ taký, že $y''(\xi_2) = 0 \Rightarrow$ existuje bod $\xi_3 \in (\xi_2, x_0)$ taký, že $y'''(\xi_3) = 0$, ale to nie je možné, lebo z integrálnej identity

$$y'''(x) = y'''(x_0) - 2A(x_0)\,y(x_0) - 2A(x)\,y(x) - \int_{x_0}^{x} (b - A')\,y\,dt \tag{c}$$

vyplýva, že $y'''(x) \neq 0$ pre $x < x_0$.

Poznámka. Z dôkazu plynie, že ani y', y'' nemajú naľavo od bodu x_0 nulový bod.

Lemma 3. *Nech* $b(x) \geqq 0$ ($b(x) = 0$ *neplatí v žiadnom intervale*), *potom každé riešenie rovnice* (a) *spĺňa najviac jednu z podmienok*

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0,$$
$$y(x_0) = y''(x_0) = 0$$

a to nanajvýš v jednom bode x_0.

Táto lemma je dokázaná v [2; veta 1].

Lemma 4. *Nech* $b(x) \geqq 0$ ($b(x) = 0$ *neplatí v žiadnom intervale*) *a nech* $y_j(x)$, $j = 1, 2, 3, 4$ *je fundamentálny systém riešení rovnice* (a) *vyhovujúci v bode* x_0 *počiatočným podmienkam*

$$y_j^{(i)}(x_0) = \begin{cases} 1, & ak \quad i + 1 = j \\ 0, & ak \quad i + 1 \neq j, \end{cases}$$

$i = 0, 1, 2, 3$, *potom funkcie*

$$\omega_{24} = \begin{vmatrix} y_2, & y_4 \\ y_2', & y_4' \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \omega_{34} = \begin{vmatrix} y_3, & y_4 \\ y_3', & y_4' \end{vmatrix} \neq 0$$

pre $x \neq x_0$ *a teda nulové body riešení* y_2, y_4; y_3, y_4 *sa oddeľujú, t. j. medzi dvomi súsednými bodmi jedného riešenia leží práve jeden nulový bod druhého riešenia.*

Táto lemma je dokázaná v [2, veta 5 a dôsledok 1 vety 5].

Veta 1. *Nech* $A(x) \geqq 0$, $b(x) \geqq 0$ ($b(x) = 0$ *neplatí v žiadnom intervale*), $b(x) + A'(x) > 0$, $\int^{\infty} (b - A')\,dx = \infty$. *Potom k tomu, aby riešenie* $y(x)$ *diferenciálnej rovnice* (a) *osciloval̈o na intervale* (x_0, ∞) *stačí, aby*

$$F(y(x_0)) \leqq 0,$$

kde $x_0 \in (a, \infty)$.

Dôkaz. Nepriamo. Nech nejaké riešenie $y(x)$ rovnice (a) neosciluje a nech $F(y(x_0)) \leqq 0$. Z predpokladu neoscilatoričnosti riešenia $y(x)$ vyplýva, že môžu nastať tieto prípady:

1. $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$ od určitého x počínajúc,
2. $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$ od určitého x počínajúc,
3. $y(x) > 0$ a $y'(x)$ má nekonečne mnoho miním a maxím.

(Ak $y(x) < 0$, potom berieme riešenie $-y(x) > 0$).

Ukážeme, že každý z uvedených prípadov vedie k sporu.

Prvý prípad nemôže nastať, lebo z rovnice (a) vyplýva, že $y^{IV}(x) < 0$ a tedy $y'''(x)$ ako klesajúca funkcia má limitu, označme ju α, t. j. $\lim_{x \to \infty} y'''(x) = \alpha$. Nech $\alpha \geqq 0$. Potom z integrálnej identity

$$y'''(x) = k - 2Ay - \int_{x_0}^{x} (b - A')\, y\, dt, \tag{c}$$

kde $k = y'''(x_0) - 2A(x_0)\,y(x_0)$ odvodíme spor, lebo

$$y''' = k - 2Ay - \int_{x_0}^{x} (b - A')\,y\,\mathrm{d}t \leqq k - 2Am^2 - n^2 \int_{x_0}^{x} (b - A')\,\mathrm{d}t \to -\infty.$$

Ak by $\alpha < 0$, resp. $\alpha = -\infty$, potom od určitého $\bar{x}$ je $y''' < \alpha/2$ a po trojnásobnej integrácii dochádzame k sporu s $y(x) > 0$.

Druhý prípad nemôže nastať, lebo z integrálnej identity

$$F(y(x)) \equiv yy''' - y'y'' + Ay^2 = F(y(x_0)) - \int_{x_0}^{x} (by^2 + y''^2)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(d)}$$

vyplýva, že ľavá strana má zápornú limitu (nakoľko pravá strana má zápornú limitu $-n^2 < 0$ $(= -\infty)$) pre $x \to \infty$. Z lemmy 1 vyplýva, že $y''(x)$ nemá od určitého x nulový bod, nakoľko $y(x) > 0$. Z toho, že aj $-y'(x) > 0$ vyplýva, že aspoň jedna z derivácií $y''(x)$, resp. $y'''(x)$ je od určitého x záporná. Ukážeme, že oba prípady vedú k sporu. Keby $y''(x) < 0$, potom po dvojnásobnej integrácii pre dostatočne veľké x dostaneme, že $y(x) < 0$ (nakoľko $-y'(x) > 0$). Teda musí byť $y''(x) > 0$ a $y'''(x) < 0$ od určitého x počínajúc. Z integrálnej identity (d) vyplýva, že $yy''' < -n^2$ odkiaľ dostaneme, že $y''' < -m^2$ a opäť po trojnásobnej integrácii dochádzame k sporu s $y(x) > 0$.

Z lemmy 1 vyplýva, že ani tretí prípad nemôže nastať.

Poznámka. Úplne podobne by sme dokázali túto postačujúcu podmienku oscilatoričnosti:

Nech $b(x) \geqq k > 0$, $k = \text{konš.}$, $A(x)$ je nezáporná monotónna funkcia, potom k tomu aby riešenie $y(x)$ rovnice (a) *oscilovalo napravo od bodu x_0 stačí, aby $F(y(x_0)) \leqq 0$.*

Veta 2. *Nech $b(x) \geqq 0$ ($b(x) = 0$ neplatí v žiadnom intervale) $b(x) - A'(x) < 0$, $2A(x) + \int_{x_0}^{x} (b - A')\,\mathrm{d}t \geqq l^2 > 0$, $x > x_0$, potom existujú ako oscilatorické tak aj neoscilatorické riešenia rovnice* (a) *na (x_1, ∞), kde $x_1 \geqq x_0$.*

Dôkaz. A) Existencia oscilatorických riešení. Nech $y_j(x)$ $j = 1, 2, 3, 4$ je fundamentálny systém riešení rovnice (a) vyhovujúci v bode x_0 počiatočným podmienkam

$$y_j^{(i)}(x_0) = \begin{cases} 1, & \text{ak} \quad i + 1 = j, \\ 0, & \text{ak} \quad i + 1 \neq j, \end{cases} \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

Ukážeme, že riešenia y_2, y_3, y_4 sú oscilatorické. Stačí ukázať, že riešenie y_3 je oscilatorické, lebo potom na základe lemmy 4 oscilujú aj y_2 a y_4.

Pri dôkaze oscilatoričnosti riešenia $y_3(x)$ postupujeme podobne ako pri dôkaze predchádzajúcej vety. Je jasné, že od určitého $x > x_0$ je $A(x) > 0$ a $F(y_2(x)) < 0$ a teda druhý a tretí prípad nemôže nastať. Že nemôže nastať ani prvý prípad vyplýva z integrálnej identity (c) lebo

$$y_2'''(x) = 0 - 2A(x)\,y_2(x) - \int_{x_0}^{x} (b - A')\,y_2\,\mathrm{d}t \leqq -l^2k_1 < 0,$$

kde $y_2(x) > k_1 > 0$, odkiaľ po trojnásobnej integrácii prichádzame k sporu s $y_2(x) >$ $> k_1 > 0$.

B. Existencia neoscilatorického riešenia. Vytvorme si nasledujúcu postupnosť riešení rovnice (a)

$$u_n(x) = c_1^{(n)}y_1(x) + c_2^{(n)}y_2(x) + c_3^{(n)}y_3(x) + c_4^{(n)}y_4(x),$$

kde $n = 1, 2, \ldots$ a $c_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ sú konštanty s počiatočnými podmienkami

$$u_n(x_n) = u_n'(x_n) = u_n''(x_n) = 0, \qquad u_n'''(x_n) > 0,$$

v $(x_0 <)\ x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots \to \infty$ a s vlastnosťou v čísle x_0

$$u_n^2(x_0) + u_n'^2(x_0) + u_n''^2(x_0) = u_n'''^2(x_0) = 1. \tag{e}$$

Podľa lemmy 2 riešenia $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ nemajú naľavo od bodu x_n žiaden nulový bod a platí: $u_n(\bar{\bar{x}}) < u_n(\bar{x}) < 0$ pre ľubovoľné $\bar{\bar{x}} < \bar{x} < x_n$.

Uvažujme o týchto postupnostiach

$$\{u_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{u_n'(x_0)\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{u_n''(x_0)\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{u_n'''(x_0)\}_{n=1}^{\infty}. \tag{f}$$

Každá z uvedených postupností je ohraničená vzhľadom na (e) a preto z každej postupnosti možno vybrať konvergentnú postupnosť. Jestvujú vybrané postupnosti

$$\{u_m(x_0)\}, \quad \{u_m'(x_0)\}, \quad \{u_m''(x_0)\}, \quad \{u_m'''(x_0)\}$$

z postupností (*f*), ktoré súčasne konvergujú pre $m \to \infty$. Označme ich limity u_0, u_0', u_0'', u_0'''. Označme $u(x)$ také riešenie rovnice (*a*), ktoré v bode x_0 spĺňa počiatočné podmienky

$$u(x_0) = u, \quad u'(x_0) = u_0', \quad u''(x_0) = u_0'', \quad u'''(x_0) = u_0'''.$$

Ľahko nahliadneme, že

$$u(x) = \lim_{m \to \infty} u_m(x),$$

kde

$$u_m(x) = u_m'''(x_0)\, y_1(x) + u_m''(x_0)\, y_2(x) + u_m'(x_0)\, y_3(x) + u_m(x_0)\, y_4(x),$$

$$u(x) = u_0'''y_1(x) + u_0''y_2(x) + u_0'y_3(x) + u_0y_4(x).$$

Ukážeme, že riešenie $u(x)$ je neoscilatorické. Dokážeme to nepriamo. Nech teda $u(x)$ je oscilatorické, potom má nekonečne mnoho nulových bodov (najviac jeden viacnásobný, lemma 3) a teda existuje bod ξ, v ktorom

$$u(\xi) = 0, \qquad u'(\xi) > 0,$$

potom tiež $u(\xi + \eta) > 0$ pre dostatočne malé $\eta > 0$. Odtiaľ vyplýva, že $u_m(\xi + \eta) > 0$ od určitého m_0 počnúc, ale to vedie k sporu, pretože pre dostatočne veľké m $(\geqq m_0)$ je $x_m > \xi + \eta$ a $u_m(\xi + \eta) < 0$.

V ďalšom budeme vyšetrovať oscilatorické vlastnosti riešení diferenciálne rovnice

$$y^{IV} + Q(x)\,y' + Q'(x)\,y = 0 \tag{a$_1$}$$

Rovnica (a_1) je špeciálny tvar rovnice (a) $[b \equiv A',\ Q = 2A]$. Riešenia rovnice (a_1) úzko súvisia s riešeniami rovnice

$$y''' + Q(x)\,y = 0 \tag{a$_2$}$$

Ak označíme y_1, y_2, y_3 fundamentálny systém riešení rovnice (a_2) taký, že Wronskián je rovný 1, potom funkcia

$$y_4(x) = \int_{x_0}^{x} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \end{vmatrix} \mathrm{d}t,$$

kde $x_0 \in (a, \infty)$ tvorí spolu s $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ fundamentálny systém riešení rovnice (a_1). Je zrejmé, že $y_4(x_0) = y_4'(x_0) = y_4''(x_0) = 0$, $y_4'''(x_0) = 1$. Pre diferenciálnu rovnicu (a_1) platí nasledujúca integrálna identita

$$y''' = k_1 - Q(x)\,y, \tag{c$_1$}$$

kde $k_1 = y'''(x_0) - Q(x_0)\,y(x_0)$. Pre riešenie $y_4(x)$ konštanta $k_1 = 1$. V. A. Kondratjev [1] dokázal túto vetu:

Ak v diferenciálnej rovnice (a_2):

1. $Q(x) \geqq \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} + \varepsilon_1(x)\right)\frac{1}{x^3}$, kde $\varepsilon_1(x) \geqq 0$, $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_1(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$, *potom existuje taký fundamentálny systém riešení, že dve riešenia sú oscilatorické a ich nulové body sa oddeľujú a jedno je neoscilatorické a monotónne konverguje k nule.*

2. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9} - \varepsilon_2(x)\right)\frac{1}{x^3} \leqq Q(x) \leqq \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} + \varepsilon_3(x)\right)\frac{1}{x^3}$,

kde $\varepsilon_2(x) \geqq 0$, $\varepsilon_3(x) \geqq 0$ a $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_2(x)\ln x}{x}\,\mathrm{d}x < \infty$, $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_3(x)\ln x}{x}\,\mathrm{d}x < \infty$, *potom riešenia diferenciálnej rovnice (a_2) sú neoscilatorické.*

3. $Q(x) \leqq \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9} - \varepsilon_4(x)\right)\frac{1}{x^3}$, kde $\varepsilon_4(x) \geqq 0$ a $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_4(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$, *potom existuje taký fundamentálny systém riešení rovnice (a_2), že dva z nich sú oscilatorické a ich nulové body sa oddeľujú a tretie je neoscilatorické a monotónne konverguje do $+\infty$.*

O riešeniach diferenciálnej rovnice (a_1) dá sa dokázať nasledujúca veta:

Veta 3. *Nech v diferenciálnej rovnici* (a_1):

1. $Q(x) \geqq \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} + \varepsilon_1(x)\right)\frac{1}{x^3}$, kde $\varepsilon_1(x) \geqq 0$, $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_1(x)}{x}\, dx = \infty$, $Q'(x) \geqq 0$

(= nenastáva v žiadnom intervale), potom existuje fundamentálny systém riešení rovnice (a_1) *taký, že tri riešenia oscilujú a každé dva z nich si nulové body oddeľujú a jedno je neoscilatorické, monotónne konvergujúce k nule.*

2. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9} - \varepsilon_2(x)\right)\frac{1}{x^3} \leqq Q(x) \leqq 0$, kde $\varepsilon_2(x) \geqq 0$ a $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_2(x)\ln x}{x}\, dx < \infty$,

potom každé riešenie rovnice (a_1) *neosciluje.*

3. $Q(x) \leqq \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9} - \varepsilon_4(x)\right)\frac{1}{x^3}$, kde $\varepsilon_4(x) \geqq 0$, $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_4(x)}{x}\, dx = \infty$, *potom existuje fundamentálny systém riešení taký, že dve riešenia oscilujú a ich nulové body sa oddeľujú a ostatné dve riešenia neoscilujú a divergujú (monotónne) do* $+\infty$.

Dôkaz. Uvažujme fundamentálny systém riešení rovnice (a_1), ktorý v bode x_0 vyhovuje týmto počiatočným podmienkam

$$y_j^{(i)}(x_0) = \begin{cases} 1, & ak \quad i+1 = j \\ 0, & ak \quad i+1 \neq j, \end{cases} \qquad i = 0, 1, 2, 3; \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

Dokážeme teraz tvrdenie 1. Z [1] vyplýva, že riešenie y_1 vyhovujúce týmto podmienkam

$$\bar{y}_1(x_0) = 1, \qquad \bar{y}_1'(x_0), \qquad \bar{y}_1''(x_0), \qquad \bar{y}_1'''(x_0) = -Q(x_0)$$

neosciluje a monotónne konverguje k nule a riešenia $y_2(x)$, $y_3(x)$ oscilujú a ich nulové body sa oddeľujú. Pretože $Q'(x) \geqq 0$, potom Wronskiány riešení y_2, y_4; y_3, y_4 nerovnajú sa nule pre $x \neq x_0$ ako to vyplýva z lemmy 4 $\left(b(x) = \frac{Q'}{2} \geqq 0\right)$ a tedy nulové body týchto riešení sa navzájom oddeľujú.

Riešenia $\bar{y}_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ tvoria hľadaný fundamentálny systém rovnice (a_1)

2. Z [1] vyplýva, že každé netriviálne riešenie rovnice (a_2) tvaru $\bar{y} = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ je neoscilatorické. Ukážeme najsamprv, že $y_4(x)$ je neoscilatorické a potom ukážeme, že aj riešenie $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4$ je neoscilatorické pre $x > x_0$.

Riešenie y_4 nemá nulový bod pre $x > x_0$ a je dokonca konvexnou funkciou pre $x > x_0$, čo vyplýva z integrálnej identity (c_1).

Riešenie $\bar{y}(x)$ je buď rastúcou alebo klesajúcou funkciou pre $x > x_0$. Stačí ukázať, že nemôže nastať: $\bar{y}(x) > 0$ a $\bar{y}'(x)$ má nekonečne veľa maxím a miním. Nech by tomu tak nebolo, potom $\bar{y}'$ má nekonečne veľa nulových bodov. Označme ξ prvý nulový bod $\bar{y}''(x)$, potom z rovnice (a_2) dostávame

$$\bar{y}''(x) = -\int_{\xi}^{x} Q(t)\,\bar{y}(t)\,dt > 0$$

čo je spor s tým, že $\bar{y}''$ má ďalší nulový bod a teda $\bar{y}'(x)$ je od určitého $\bar{x}$ buď kladná, resp. záporná. Z toho, že $\bar{y}(x)$ je buď rastúcou, alebo klesajúcou funkciou pre $x > \bar{x} > x_0$ a z toho, že $y_4(x)$ je konvexnou funkciou pre $x > x_0$ vyplýva, že $y = \bar{y} + c_4 y_4$ nemá od určitého $\bar{\bar{x}}$ ani jeden nulový bod.

3. Z [1] vyplýva, že existujú riešenia $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ také, že $\bar{y}_1$ neosciluje a $\lim_{x \to \infty} \bar{y}_1(x) = \infty$ a $\bar{y}_2, \bar{y}_3$ oscilujú a ich nulové body sa oddeľujú. Ukážeme, že y_4 je neoscilatorické a $\lim_{x \to \infty} y_4(x) = \infty$. Je zrejmé, že $y_4(x)$ (ba ani y_4', y_4'') nemôže mať nulový bod pre $x > x_0$. Naozaj, nech $x_1 > x_0$ je ďalší nulový bod riešenia $y_4(x)$, potom existuje bod $\xi \in (x_0, x_1)$ taký, že $y_4'''(\xi) = 0$ (na základe Rolleovej vety), čo ale nie je možné, lebo z integrálnej identity (c_1) vyplýva, že

$$y_4'''(x) = 1 - Q(x)\,y_4 > 1 \quad \text{pre} \quad x \in (x_0, x_1).$$

Z poslednej nerovnosti vyplýva, že $y_4(x)$ nemôže mať vlastnú limitu pre $x \to \infty$ a nemôže nastať ani prípad aby $y_4(x) > 0$ a $y_4'(x)$ mala nekonečne veľa maxím a miním a je tiež vidieť, že $\lim_{x \to \infty} y_4 = \infty$. Riešenia $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, y_4$ tvoria hľadaný fundamentálny systém rovnice (a_1).

Záverom ďakujem M. Gregušovi a V. Šedovi za pripomienky pri príprave tejto práce.

LITERATÚRA

[1] Кондратьев В. А.: О колеблемости решений уравнений третьего и четвертого порядка, Труды Московского матем. общества, том 8 (1959 г.) 259—281.

[2] Mamrilla J., O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice $y^{IV} + 2Ay' + [A' + b]\,y = 0$, Acta F. R. N. Univ. Comen., VII., 11., Mathem. 1963.

Adresa autora: Katedra matematickej analýzy PFUK, Bratislava, Šmeralova 2

Do redakcie došlo: 15. 12. 1964

О некоторых свойствах решений дифференциального уравнения $y^{IV} + 2A(x)\,y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0$

Г. Мамрилла

Резюме

В работе доказаны следующие три теоремы:

Теорема 1. Пусть $A(x) \geqq 0$, $b(x) \geqq 0$ ($b(x)$ не равна тождественно нулю ни в каком промежутке), $b(x) + A'(x) > 0$, $\int^{\infty} (b - A')\,\mathrm{d}x = \infty$, то выполнение условия $F(y(x_0)) \leqq 0$ хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, \infty)$ достаточно для колеблемости решения $y(x)$ на (x_0, ∞).

Теорема 2. Пусть $b(x) \geqq 0$ ($b(x)$ не равна тождественно нулю ни в каком промежутке), $b(x) - A'(x) < 0$, $2A(x) + \int_{x_0}^{x} (b - A')\,\mathrm{d}t \geqq l^2 > 0$, $x > x_0$, то уравнение (a) обладает колеблющимися и неколеблющимися решениями на (x_1, ∞), где $x_1 \geqq x_0$.

Теорема 3. Пусть в уравнении (a_1)

1. $Q(x) \geqq \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} + \varepsilon_1(x)\right)\frac{1}{x^3}$, где $\varepsilon_1(x) \geqq 0$, $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_1(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$, $Q'(x) \geqq 0$ (= не верно ни в каком промежутке), то существует фундаментальная система решений уравнения (a_1) такая, что одно из них монотонно стремится к нулю, остальные три решения колеблются, причем нули всяких двух из них чередуются;

2. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9} - \varepsilon_2(x)\right)\frac{1}{x^3} \leqq Q(x) \leqq 0$, где $\varepsilon_2(x) \geqq 0$ и $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_2(x)\ln x}{x}\,\mathrm{d}x < \infty$, то всякое решение уравнения (a_1) не колеблется

3. $Q(x) \leqq \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9} - \varepsilon_4(x)\right)\frac{1}{x^3}$, где $\varepsilon_4(x) \geqq 0$, $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_4(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$, то существует фундаментальная система решений такая, что два из входящих в нее решений колеблются и их нули чередуются, а остальные два не колеблются и монотонно стремятся к $+\infty$.

Über einige Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $y^{IV} + 2A(x)y' + [A'(x) - b(x)]y = 0$

J. MAMRILLA

Zusammenfassung

In der Arbeit sind folgende drei Sätze bewiesen:

Satz 1. Es sei $A(x) \geqq 0$, $b(x) \geqq 0$ ($b(x) = 0$ gelte in keinem Intervall), $b(x) + A'(x) > 0$, $\int^{\infty} (b - A')\,\mathrm{d}x = \infty$. Eine hinreichende Bedingung für die Oszillation der Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) im Intervall (x_0, ∞) ist

$$F(y(x_0)) < 0,$$

wo $x_0 \in (a, \infty)$.

Satz 2. Es sei $b(x) \geqq 0$ ($b(x) = 0$ gelte in keinem Intervall), $b - A'(x) < 0$, $2A(x) + \int_{x_0}^{x} (b - A')\,dt \geqq \geqq l^2 > 0$, $x > x_0$ dann existiert eine oszillatorische sowie auch eine nichtoszillatorische Lösung der Gleichung (a) in (x_1, ∞), wo $x_1 \geqq x_0$.

Satz 3. In der Differentialgleichung (a_1) sei:

1. $Q(x) \geqq \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} + \varepsilon_1(x)\right)\frac{1}{x^3}$, wo $\varepsilon_1(x) \geqq 0$, $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_1(x)}{x}\,dx = 0$, $Q'(x) \geqq 0$ (= in keinem Intervall), dann existiert ein solches Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (a_1), daß drei Lösungen oszillatorisch sind und je zwei von ihnen trennen ihre Nullstellen ab und eine Lösung ist nichtoszillatorisch und konvergiert monoton zu Null.

2. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9} - \varepsilon_2(x)\right)\frac{1}{x^3} \leqq Q(x) \leqq 0$, wo $\varepsilon_2(x) \geqq 0$ und $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_2(x)\ln x}{x}\,dx < \infty$, dann ist jede Lösung der Differentialgleichung (a_1) nichtoszillatorisch.

3. $Q(x) \leqq \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9} - \varepsilon_4(x)\right)\frac{1}{x^3}$, wo $\varepsilon_4(x) \geqq 0$, $\int^{\infty} \frac{\varepsilon_4(x)}{x}\,dx = \infty$, dann existiert ein solches Fundamentalsystem von Lösungen, daß zwei Lösungen oszillieren und ihre Nullstellen trennen sich ab, und die übrigen zwei Lösungen oszillieren nicht und divergieren gegen $+\infty$.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

sú fakultný sborník určený k publikáciam vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých ašpirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracovávajú materiál získaný za dobu pobytu na našej fakulte. Redakčná rada vyhradzuje si právo z tohto pravidla urobiť výnimku.

Práce musia byť doporučené katedrou. Práce študentov musia byť doporučené študentskou vedeckou spoločnosťou a príslušnou katedrou.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom alebo anglickom, francúzskom alebo nemeckom. Práce podané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, ob riadok, tak aby jeden riadok tvorilo 60 úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na účet autora.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšete názov práce, pod to meno autora. Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, sa uvádzajú všetky pracoviská. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba ich obidve uviesť.

Fotografie načim podať na čiernom lesklom papieri a uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba urobiť tušom na priehľadnom papieri (pauzák) alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať resumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam, publikovaným v cudzom jazyku, načim pripojiť resumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom v prípade publikácie v ruskom jazyku, alebo v ruskom jazyku v prípade publikácie v jazyku západnom. *Nezabudnite pri resumé uviesť vždy názov práce a meno autora v rovnakom poradí ako v základnom texte.* Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a zlámané korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny v priebehu korektúry idú na ťarchu autorského honoráru. Každý autor dostane okrem príslušného honoráru i 50 separátov.

Redakčná rada.