ACTA

FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X. FASC. VII.

MATHEMATICA

PUBL. XIV.

1966

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

Austausch von Publikationen erbeten
Piere d'échanger des publications
We respectfully solicit the exchange of publications
Se suplica el cauje de publicaciónes

Sborník Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Vydáva Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasinkova 5, čís. tel. 458-51. Povolilo Povereníctvo kultúry číslom 2265/56-IV/1. Tlač: Polygrafické závody, n. p., závod 02, Bratislava.
67-121-66 — 03/2 — AH 2,895 — VH 2,975 — K-07*61059
Celý náklad prevzala knižnica FFUK, Bratislava, Moskovská 2. Technický redaktor Adam Hanák

ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. MATHEMATICA XIV, 1966)

ACTA

FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X. FASC. VII.

MATHEMATICA

PUBL. XIV.

1966

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. X., FASC. VII. MATHEMATICA XIV. 1966

Dominated classes and related questions

V. FICKER

This paper contains some generalized results concerning dominated sets of measures, relation between the concepts of independent and of singular measures and decomposition of a measure into an absolutely continuous part and an independent part, respectively. These results have applications in mathematical statistics (by study of sufficiency). Essentially in this paper are generalized some results of [1] which generalization depends upon certain ideas of [2].

Many problems which are based upon concept of absolute continuity of measures can be formulated only by means of set theoretic concepts. We reach a generalization of certain results in this way since they are not used measure and the Radon-Nikodym theorem as was showed by Neubrunn [2].

Introduction

In terminology of set theory is here introduced a concept of class of null sets of a measurable space $(X, \mathbf{S})$, where throughout this paper $\mathbf{S}$ is a σ-algebra of sets. Classes of null sets will be denoted by $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{L}$, etc. Then the concept of collection of classes of null sets (in symbols $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{N}$, etc.) and two kinds of absolute continuity of two collections of null sets $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are introduced. Using fundamental results of [2], properties of absolute continuity of collections of classes of null sets are studied here. Further, the concepts of independence and singularity of two classes of null sets are introduced and the relations between these concepts are studied. A decomposition of a class $\mathbf{N}$ of null sets into an absolutely continuous part and a singular part with respect to another class $\mathbf{M}$ of null sets or a decomposition into an absolutely continuous part and an independent part are studied, respectively. Finally, applications of these results in measure theory are given.

In this paper are used some concepts, definitions of which are not given here. These concepts are used in such sense as it is introduced in [3], with a single difference that the complement of a subset A of X is denoted by A^c i.e. $A^c = X - A$.

I

Definition 1,1. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. A non empty class $\mathbf{M}(\mathbf{M} \subset \mathbf{S})$ of sets in X is called a class of null sets if it satisfies the following properties.*

(i) *If $E \in \mathbf{M}$ and $F \in \mathbf{S}$, then $E \cap F \in \mathbf{M}$.*

(ii) *If $E_n \in \mathbf{M}$, $n = 1,2,\ldots$, then $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{M}$.*

Let $\mathfrak{M}$ be a set of classes of null sets ($\mathfrak{M}$ is called a *collection of classes of null sets*). We correspond to $\mathfrak{M}$ two classes of sets $\bigcap_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}$ and $\bigcup_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}$. Then, it is evidently that

$\bigcap_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}$ is a class of null sets.

Definition 1,2. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. Let $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ be two collections of classes of null sets. We say that $\mathfrak{M}$ is absolutely continuous with respect to $\mathfrak{N}$ in the first sense, in symbols $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$, if*

$$\bigcap_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} \subset \bigcap_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}.$$

We say that $\mathfrak{M}$ is absolutely continuous with respect to $\mathfrak{N}$ in the second sense, in symbols $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$, if

$$\bigcup_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} \subset \bigcap_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}.$$

If $\mathfrak{N}$ is a one point set i.e. $\mathfrak{N} = \{\mathbf{N}\}$ and if $\mathfrak{M}$ is any collection then the concepts $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ and $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$ are equal. In this case we say that *the collection $\mathfrak{M}$ is dominated by* $\mathbf{N}$, or that $\mathbf{N}$ *dominates over* $\mathfrak{M}$ and we denote it by $\mathfrak{M} \ll \mathbf{N}$.

If $\mathfrak{M}$ is dominated by $\mathbf{N}$ and if $\mathfrak{M}$ is a one point set too ($\mathfrak{M} = \{\mathbf{M}\}$), we say $\mathbf{M}$ *is absolutely continuous with respect to* $\mathbf{N}$ and we write $\mathbf{M} \ll \mathbf{N}$.

Two classes of null sets $\mathbf{M}$ and $\mathbf{N}$ for which both $\mathbf{M} \ll \mathbf{N}$ and $\mathbf{N} \ll \mathbf{M}$ are called *equivalent*, in symbols $\mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$.

If for each pair $\mathbf{M}, \mathbf{M}^* \in \mathfrak{M}$ is $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}^*$, we say $\mathfrak{M}$ is a *homogeneous collection.*

Let $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ be two collections of classes of null sets for which both $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ and $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$, or $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$ and $\mathfrak{N} \ll \mathfrak{M}$, respectively. Then, we say $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are *equivalent in the first sense* or they are *equivalent in the second sense*, respectively. We denote it by $\mathfrak{M} \overset{I.}{=} \mathfrak{N}$ or by $\mathfrak{M} \doteq \mathfrak{N}$.

We note, *a necessary and sufficient condition for each pair* $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ *such that* $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ *and* $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$, *to be* $\mathbf{M} \ll \mathbf{N}$ *is that* $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$.

Proof. Let for each pair $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ such that $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ and $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$ be $\mathbf{M} \ll \mathbf{N}$ i.e. $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$. It follows $\bigcup\limits_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} \subset \mathbf{M}$ and from it

$\bigcup\limits_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} \subset \bigcap\limits_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}$, then $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$.

Conversely, let $\mathbf{M}_0 \in \mathfrak{M}$, $\mathbf{N}_0 \in \mathfrak{N}$ be fixed. If $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$, then $\bigcup\limits_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} \subset \bigcap\limits_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}$. It holds $\mathbf{N}_0 \subset \bigcup\limits_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} \subset \bigcap\limits_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M} \subset \mathbf{M}_0$ and hence we obtain $\mathbf{N}_0 \subset \mathbf{M}_0$ i.e. $\mathbf{M}_0 \ll \mathbf{N}_0$.

It is easy to verify the next lemma.

Lemma 1,1. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space and let* $\mathfrak{M}$ *and* $\mathfrak{N}$ *be two collections of classes of null sets.*

(i) *If* $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$, *then* $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$.

(ii) *If* $\mathfrak{M} \doteq \mathfrak{N}$, *then* $\mathfrak{M} \overset{I.}{=} \mathfrak{N}$.

Theorem 1,1. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space and let* $\mathfrak{M}$ *and* $\mathfrak{N}$ *be two collections of classes of null sets. If the condition*

$$\left(\bigcup_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} - \bigcap_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N}\right) \subset \bigcap_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}$$

holds for the classes $\mathbf{N}$ *belonging to* $\mathfrak{N}$, *then* $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$ *if and only if* $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$.

Proof. If $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$, then $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ follows from Lemma 1,1. If $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$, then from condition $\left(\bigcup\limits_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} - \bigcap\limits_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N}\right) \subset \bigcap\limits_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}$ for the classes of $\mathfrak{N}$ and from equalities

$$\begin{aligned} \bigcup_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} &= \left(\bigcup_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} - \bigcap_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N}\right) \cup \left(\bigcup_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} \cap \bigcap_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N}\right) \\ &= \left(\bigcup_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} - \bigcap_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N}\right) \cup \bigcap_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} \end{aligned}$$

follows that $\bigcup\limits_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}} \mathbf{N} \subset \bigcap\limits_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}$ i.e. $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$.

The next statements, Theorem 1,2 and its Corollary published in [2] are very useful for our further ideas.

Theorem 1,2. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space and let $\mathbf{N}$ be a class of null sets. Let each disjoint subclass of $\mathbf{S} - \mathbf{N}$ be countable. Let P be a property of measurable sets $E \in \mathbf{S}$. Let at least one set $E \in \mathbf{S} - \mathbf{N}$ have the property P. We assume that for every disjoint sequence $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ of measurable sets with property P the union has also the property P. Then, there exists a set $N \in \mathbf{S} - \mathbf{N}$ which is a maximal set with property P in that sense, if E is a measurable set with property P, $E \subset N^c$, then $E \in \mathbf{N}$.*

Corollary 1,2. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space, let $\mathbf{N}$ be a class of null sets. Let each disjoint subclass of $\mathbf{S} - \mathbf{N}$ be countable. Let $\mathbf{M}$, $(\mathbf{M} \subset \mathbf{S})$ be a class of null sets such that $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ is not true. Then, there exists a set $N \in \mathbf{S} - \mathbf{N}$ such that $N \in \mathbf{M}$, $N \notin \mathbf{N}$ and for every set $E \in \mathbf{M}$, $E \subset N^c$, E belongs to $\mathbf{N}$.*

Remark 1,1. Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space and let $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ be two classes of null sets..We say *a set* Z_{mn} (to $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ are corresponded indices m, n by Z_{mn}) *has the property* p_{mn} if it satisfies the following properties.

(i) $Z_{mn} \in \mathbf{M}$.

(ii) *If* $E \in \mathbf{M}$, $E \subset Z^c_{mn}$, *then* $E \in \mathbf{N}$.

(It is clear that $E \in \mathbf{S}$, $E \subset Z_{mn}$ implies $E \in \mathbf{M}$.)

As for the set N in Corollary 1,2 we denote it by Z_{mn} and we say, Z_{mn} has the property p_{mn}.

Throughout this paper, when we shall deal with a measurable space $(X, \mathbf{S})$ and such a class $\mathbf{N}$ of null sets that $\mathbf{S} - \mathbf{N}$ satisfies the following condition: each disjoint subclass of $\mathbf{S} - \mathbf{N}$ is countable we shall say, condition C is fulfilled by $\mathbf{S} - \mathbf{N}$.

Lemma 1,2. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space and let $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ be two classes of null sets. Let condition C be fulfilled by $\mathbf{S} - \mathbf{N}$. Then, there exists a measurable set Z_{mn} which has the property p_{mn}.*

Proof. If $\mathbf{M}$ is a subclass of $\mathbf{N}$, then put $Z_{mn} = A$, where A is any set from $\mathbf{M}$. It is easy to verify that A has the property p_{mn}.

If $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ does not hold, then from Corollary 1,2 there exists a set Z_{mn} with the property p_{mn}.

Lemma 1,3. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space and let $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ be two classes of null sets. Let condition C be fulfilled by $\mathbf{S} - \mathbf{N}$. Then, a set $B \in \mathbf{S}$ has the property p_{mn} if and only if*

$$Z_{mn} \triangle B \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}.$$

Proof. The existence of a measurable set Z_{mn} with property p_{mn} follows from assumption of our Lemma and from Lemma 1,2.

Let $B \in \mathbf{S}$ and let B have the property p_{mn}. Since

$$Z_{mn} \triangle B = (Z_{mn} \cap B^c) \cup (B \cap Z^c_{mn}),$$

then it follows from the properties p_{mn} for Z_{mn} and B that $Z_{mn} \triangle B \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$.

Now, suppose that $B \in \mathbf{S}$ and $Z_{mn} \triangle B \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$. To prove B have the property p_{mn}, at first we show according (i) in Remark 1,1 that $B \in \mathbf{M}$. It is evidently that $B \cap Z_{mn} \in \mathbf{M}$. Then from inclusions

$$B \cap Z^c_{mn} \subset (Z_{mn} \triangle B) \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N} \subset \mathbf{M}$$

and from equality

$$B = (B \cap Z_{mn}) \cup (B \cap Z^c_{mn})$$

it follows that $B \in \mathbf{M}$.

Further, we show according (ii) in Remark 1,1 that if $E \in \mathbf{M}$, $E \subset B^c$, then $E \in \mathbf{N}$. It follows from inclusions

$$B^c \cap Z_{mn} \subset (Z_{mn} \triangle B) \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N} \subset \mathbf{N},$$

from equalities

$$\begin{aligned} E &= E \cap B^c \\ &= (E \cap B^c \cap Z_{mn}) \cup (E \cap B^c \cap Z^c_{mn}) \end{aligned}$$

and from the property p_{mn} for Z_{mn}. This completes the proof.

Corollary 1,3. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space and let $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ be two classes of null sets. Let condition $\boldsymbol{C}$ be fulfilled by $\mathbf{S} - \mathbf{N}$. Let B be a measurable set, then $Z_{mn} \cup B$ has the property $\boldsymbol{p}_{mn}$ if and only if $B \cap Z^c_{mn} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$.*

Proof. Let us form the set Z_{mn} with property $\boldsymbol{p}_{mn}$. By Lemma 1,3 $Z_{mn} \cup B$ has the property $\boldsymbol{p}_{mn}$ if and only if $Z_{mn} \triangle (Z_{mn} \cup B) \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ or equivalently $B \cap Z^c_{mn} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ since $Z_{mn} \triangle (Z_{mn} \cup B) = B \cap Z^c_{mn}$.

Remark 1,2. Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space and $\mathbf{L}$ be a class of null sets. If $E \triangle F \in \mathbf{L}$, for $E, F \in \mathbf{S}$ we shall write

$$E = F \quad [\mathbf{L}].$$

Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space and let $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ be two classes of null sets which satisfy the assumptions of Lemma 1,2. Then, a necessary and sufficient condition for Z_{mn} and Z^*_{mn} to be two representations of sets with the property $\boldsymbol{p}_{mn}$ is that

$$Z_{mn} \triangle Z^*_{mn} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}.$$

In that sense, the set Z_{mn} is uniquely determined and we shall write according Remark 1,2

$$Z_{mn} = Z^*_{mn} \quad [\mathbf{M} \cap \mathbf{N}].$$

Lemma 1,4. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space and let $\mathbf{M}, \mathbf{M}^*, \mathbf{L}$ be classes of null sets. Let be $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}^*$. Let condition $\boldsymbol{C}$ be fulfilled by $\mathbf{S} - \mathbf{L}$. Then it holds*

$$Z_{m1} \triangle Z_{m^*1} \in \mathbf{L}.$$

Proof. Since $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}^*$, we have $\mathbf{M} = \mathbf{M}^*$. From assumptions of Lemmas 1,2 and 1,4 follows, that there exist sets Z_{m1} and Z_{m^*1} with the property $\boldsymbol{p}_{m1}$

and p_{m^*1}, respectively. Let us consider the set $E = Z_{m1} \cap Z^c_{m^*1}$. It is clear that $E \in \mathbf{M} = \mathbf{M}^*$ and $E \subset Z^c_{m^*1}$. Then, it follows from property p_{m^*1} that $E \in \mathbf{L}$. From the symmetry it is evidently that $F = Z_{m^*1} \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{L}$. Since $Z_{m1} \triangle Z_{m^*1} = E \cup F$, we have $Z_{m1} \triangle Z_{m^*1} \in \mathbf{L}$.

To show the condition $Z_{m1} \triangle Z_{m^*1} \in \mathbf{L}$ not to be sufficient for $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}^*$, we give an example.

Example. Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. Let $\mathbf{M}, \mathbf{M}^*, \mathbf{L}$ be classes of null sets. Let $\mathbf{M} = \mathbf{L} = \mathbf{S}$ and let $\mathbf{M}^* \subset \mathbf{S}$ ($\mathbf{M}^*$ be a proper subset of $\mathbf{S}$). It is clear that $\mathbf{S} - \mathbf{L}$ fulfils the condition C. Then $Z_{m1} \triangle Z_{m^*1} \in \mathbf{L}$ because $Z_{m1} \triangle Z_{m^*1} \in \mathbf{S} = \mathbf{L}$. In spite of it $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}^*$ does not hold since $\mathbf{M}^* \not\equiv \mathbf{M}$.

Lemma 1,5. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space and let $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ be classes of null sets. Let condition C be fulfilled by $\mathbf{S} - \mathbf{L}$. Let $\mathbf{M} \ll \mathbf{L}$ and $\mathbf{N} \ll \mathbf{L}$, then $\mathbf{M} \ll \mathbf{N}$ if and only if $Z_{n1} \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{M}$.*

Proof. Let us form sets Z_{n1} and Z_{m1}. Let $Z_{n1} \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{M}$. We prove $\mathbf{M} \ll \mathbf{N}$. If $E \in \mathbf{N}$, then from equality

$$E = (E \cap Z_{n1} \cap Z^c_{m1}) \cup (E \cap Z^c_{n1}) \cup (E \cap Z_{m1})$$

follows that $E \in \mathbf{M}$ since the first term on the right belongs to $\mathbf{M}$ according assumption $Z_{n1} \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{M}$. The second term on the right belongs to $\mathbf{M}$ because $E \cap Z^c_{n1} \subset E \in \mathbf{N}$ and from the property p_{n1} for Z_{n1} it follows that $E \cap Z^c_{n1} \in \mathbf{L}$ and also $E \cap Z^c_{n1} \in \mathbf{M}$ since $\mathbf{M} \ll \mathbf{L}$. The third term on the right belongs to $\mathbf{M}$ evidently. We proved that $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$ i.e. $\mathbf{M} \ll \mathbf{N}$.

Let be $\mathbf{M} \ll \mathbf{N}$. Since $Z_{n1} \in \mathbf{N} \subset \mathbf{M}, Z_{n1}$ belongs to $\mathbf{M}$ and hence $Z_{n1} \cap \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{M}$.

Remark 1,3. It always holds $Z_{ne} \cap Z^c_{me} \in \mathbf{N}$. Then, the condition $Z_n \cap \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{M}$ is equivalent to the condition $Z_{n1} \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ however this is equivalent to $Z_{n1} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ as we see it from equality

$$Z_{n1} = (Z_{n1} \cap Z_{m1}) \cup (Z_{n1} \cap Z^c_{m1}) .$$

Another condition which is equivalent to $Z_{n1} \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{M}$ is $Z_{n1} \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{L}$.

If namely $Z_{n1} \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{L}$, then from absolute continuity $\mathbf{M}$ with respect to $\mathbf{L}$ follows that $Z_{n1} \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{M}$.

Conversely, let $Z_{n1} \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{M}$ since $Z_{n1} \cap Z^c_{m1} \subset Z^c_{m1}$, then from property p_{m1} for Z_{m1} follows that $Z_{n1} \cap Z^c_{m1} \in \mathbf{L}$.

Lemma 1,6. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. Let $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{L}$ be classes of null sets. Let condition C be fulfilled by $\mathbf{S} - \mathbf{L}$ and $\mathbf{S} - \mathbf{M}$. Let $\mathbf{N} \ll \mathbf{M}$ and $\mathbf{M} \ll \mathbf{L}$, then*

$$Z_{n1} = Z_{nm} \cup Z_{m1} \quad [\mathbf{L}].$$

Proof. It follows $\mathbf{N} \ll \mathbf{L}$ from $\mathbf{N} \ll \mathbf{M}$ and $\mathbf{M} \ll \mathbf{L}$. Let us form sets Z_{nm}, Z_{m1} and Z_{n1} with property p_{nm}, p_{m1} and p_{n1}, respectively. We shall prove that $Z_{nm} \cup Z_{m_1}$ has the property p_{n_1}. From Remark 1,2 it follows that it is sufficient to prove that

$$Z_{n_1} \triangle (Z_{nm} \cup Z_{m_1}) \in \mathbf{N} \cap \mathbf{L}$$

and even it suffices to prove

$$Z_{n_1} \triangle (Z_{nm} \cup Z_{m_1}) \in \mathbf{L},$$

since from $\mathbf{N} \ll \mathbf{L}$ it follows $\mathbf{N} \cap \mathbf{L} = \mathbf{L}$.

We have

$$Z_{n_1} \triangle (Z_{nm} \cup Z_{m_1}) = (Z_{n_1} \cap Z^c_{nm} \cap Z^c_{m1}) \cup [(Z_{nm} \cup Z_{m_1}) \cap Z^c_{n1}].$$

The first term on the right belongs to $\mathbf{N}$ evidently, from property p_{nm} for Z_{nm} it also belongs to $\mathbf{M}$ but from property p_{m_1} for Z_{m_1} follows even it belongs to $\mathbf{L}$. To show, the second term on the right belongs to $\mathbf{L}$ we apply the property p_{nm} for Z_{nm} and p_{m_1} for Z_{m_1} and absolute continuity $\mathbf{N}$ with respect to $\mathbf{M}$. We have $Z_{nm} \cup Z_{m_1}$ belongs to $\mathbf{N}$. From the property p_{n_1} for Z_{n_1} follows that the second term on the right belongs to $\mathbf{L}$. Hence, $Z_{n_1} \triangle (Z_{nm} \cup Z_{m_1}) \in \mathbf{L}$ and this completes the proof.

Theorem 1,3. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space. Let* $\mathfrak{M}$ *and* $\mathfrak{N}$ *be two collections of classes of null sets. Let the condition* $\mathbf{C}$ *be fulfilled by* $\mathbf{S} - \mathbf{N}$ *for every* $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$. *Let be* $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$. *Then* $\mathfrak{M}$ *is homogeneous if and only if there exists a class* $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$ *that* $Z_{mn}, Z_{m*n} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{M}^*$ *whenever* $\mathbf{M}, \mathbf{M}^* \in \mathfrak{M}$.

Proof. Let $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^*$ be two classes of null sets from $\mathfrak{M}$ and let $\mathbf{N}$ be a class of null sets from $\mathfrak{N}$. Let be $Z_{mn}, Z_{m*n} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{M}^*$. By Remark 1,3 it is equivalent to $Z_{mn} \cap Z^c_{m*n} \in \mathbf{M}^*$ and $Z_{m*n} \cap Z^c_{mn} \in \mathbf{M}$ (since from assumption $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$ follows $\mathbf{M} \ll \mathbf{N}$ and $\mathbf{M}^* \ll \mathbf{N}$ evidently) and by Lemma 1,5 we have $\mathbf{M} \ll \mathbf{M}^*$ and $\mathbf{M}^* \ll \mathbf{M}$ i.e. $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}^*$ whenever $\mathbf{M}, \mathbf{M}^* \in \mathfrak{M}$, then $\mathfrak{M}$ is a homogeneous collection of classes of null sets.

Now, suppose $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}^*$ whenever $\mathbf{M}, \mathbf{M}^* \in \mathfrak{M}$. Then there exists $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$ such that $\mathbf{M} \ll \mathbf{N}$ and $\mathbf{M}^* \ll \mathbf{N}$ it follows from $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$. We have $\mathbf{M} \ll \mathbf{N}$, $\mathbf{M}^* \ll \mathbf{N}$ and $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}^*$. By applying Lemma 1,5 it implies that $Z_{m*n} \cap Z^c_{mn} \in \mathbf{M}$ and $Z_{mn} \cap Z^c_{m*n} \in \mathbf{M}^*$ and equivalently $Z_{mn}, Z_{m*n} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{M}^*$ according Remark 1,3.

Corollary 1,3. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space. Let* $\mathfrak{M}$ *and* $\mathfrak{N}$ *be two collections of classes of null sets. Let* $Z_{mn} = \emptyset$ *for each pair* $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ *where* $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ *and* $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$. *Then* $\mathfrak{M}$ *is a homogeneous collection of classes of null sets.*

Proof. Since $Z_{mn} = \emptyset$ for every $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ and $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$ we have $Z_{mn} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{M}^*$ and $Z_{m*n} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{M}^*$ whenever $\mathbf{M}, \mathbf{M}^* \in \mathfrak{M}$ and $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$. Then $\mathfrak{M}$ is a homogeneous collection of classes of null set according to the Theorem 1,3.

Theorem 1,4. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space and let* $\mathfrak{M}$ *be a collection of classes of null sets. Let* $\mathbf{L}$ *be a class of null sets which dominates over* $\mathfrak{M}$ *and let* *the condition* $\mathbf{C}$ *be fulfilled for* $\mathbf{S} - \mathbf{L}$. *Then* $\mathfrak{M}$ *is a homogeneous collection if and only if* $Z_{m_1} \triangle Z_{m^*_1} \in \mathbf{L}$ *whenever* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^* \in \mathfrak{M}$.

Proof. It follows from Remark 1,3 and Theorem 1,3.

It is easy to verify that Theorems 1,5 — 1,8 are valid. These statements can be directly proved. They are all based on Lemma 1,5 and therefore the proofs are omitted.

Theorem 1,5. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space. Let* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{N}$ *be collections of classes of null sets. Let the condition* $\mathbf{C}$ *be fulfilled by* $\mathbf{S} - \mathbf{N}$, *for every* $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$. *Let be* $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$ *and* $\mathfrak{M}^* \ll \mathfrak{N}$. *Let* $\mathfrak{M}$ *and* $\mathfrak{M}^*$ *be homogeneous collections. Then* $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{M}^*$ *if and only if there exist* $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$, $\mathbf{M}^* \in \mathfrak{M}^*$ *and* $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$ *such that* $Z_{m^*n} \in \mathbf{M}$.

Theorem 1,6. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space. Let* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{N}$ *be collections of classes of null sets. Let the condition* $\mathbf{C}$ *be fulfilled by* $\mathbf{S} - \mathbf{N}$ *for every* $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$. *Let* $\mathfrak{M}^* \ll \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$ *and let* $\mathfrak{M}$ *be homogeneous. Then* $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{M}^*$ *if and only if whenever* $\mathbf{M}^* \in \mathfrak{M}^*$ *and some* $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ *there exists* $\mathfrak{N} \in \mathbf{N}$ *such that* $Z_{m^*n} \in \mathbf{M}$.

Theorem 1,7. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space. Let* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{N}$ *be collections of classes of null sets. Let the condition* $\mathbf{C}$ *be fulfilled by* $\mathbf{S} - \mathbf{N}$ *for every* $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$. *Let* $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}^* \ll \mathfrak{N}$ *and let* $\mathfrak{M}^*$ *be homogeneous. Then* $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{M}^*$ *if and only if for any* $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ *there exists some* $\mathbf{M}^* \in \mathfrak{M}$ *and* $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$ *such that* $Z_{m^*n} \in \mathbf{M}$.

Theorem 1,8. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space. Let* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{N}$ *be collections of classes of null sets. Let the condition* $\mathbf{C}$ *be fulfilled by* $\mathbf{S} - \mathbf{N}$ *for every* $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$. *Let* $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}^* \ll \mathfrak{N}$ *and let* $\mathfrak{M}$ *and* $\mathfrak{M}^*$ *be homogeneous. Then* $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}^*$ *if and only if* $Z_{m^*n}, Z_{mn} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{M}^*$ *for at least one of three classes of null sets* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{N}$ *where* $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$, $\mathbf{M}^* \in \mathfrak{M}^*$ *and* $\mathbf{N} \in \mathfrak{N}$.

Definition 1,4. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space. Let* $\mathbf{M}$ *and* $\mathbf{N}$ *be classes of null sets. We shall say that* $\mathbf{M}$ *and* $\mathbf{N}$ *are mutually independent, in symbols* $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$, *if for any class* $\mathbf{L}$ *of null sets such* that $\mathbf{L} \ll \mathbf{M}$, $\mathbf{L} \ll \mathbf{N}$ *implies* $\mathbf{L} = \mathbf{S}$.

Lemma 1,7. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space and let* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *be two classes of null sets such that* $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ *and* $\mathbf{M} \ll \mathbf{N}$, *then* $\mathbf{M} = \mathbf{S}$.

Theorem 1,9. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space. Let* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *be two classes of null sets. Let the condition* $\mathbf{C}$ *be fulfilled by* $\mathbf{S} - \mathbf{M}$ *and* $\mathbf{S} - \mathbf{N}$. *Then* $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ *if and only if* $Z^c_{mn} \cap Z^c_{nm} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$.

Proof. At first we prove $Z^c_{mn} \cap Z^c_{nm} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ implies $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$. Let $\mathbf{L} \ll \mathbf{M}$, $\mathbf{L} \ll \mathbf{N}$ for an arbitrary class of null sets $\mathbf{L}$. Let E be any measurable set. We have

$$E = (E \cap Z_{mn} \cap Z_{nm}) \cup (E \cap Z^c_{mn} \cap Z_{nm}) \cup (E \cap Z_{mn} \cap Z^c_{nm}) \cup \\ \cup (E \cap Z^c_{mn} \cap Z^c_{nm})$$

Each of these terms on the right hand belongs either to $\mathbf{M}$ or to $\mathbf{N}$. The first three terms are subsets of a set which belongs to $\mathbf{M}$ or to $\mathbf{N}$, respectively. The last term by the assumption. From $\mathbf{L} \ll \mathbf{M}$, $\mathbf{L} \ll \mathbf{N}$ we have $E \in \mathbf{L}$. Hence is $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$.

Let be $Z^c_{mn} \cap Z^c_{nm} \notin \mathbf{M}$. We shall prove that $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ does not hold. We denote by $\mathbf{L}$ a class of sets

$$\mathbf{L} = \{E : E \in \mathbf{S},\ E \cap Z^c_{nm} \in \mathbf{M}\}.$$

Then we have:

1. $\mathbf{L}$ is a class of null sets for the measurable space $(X, \mathbf{S})$.
If $F \in \mathbf{S}$, $E \in \mathbf{L}$, then $E \cap F \subset E$, $E \cap F \cap Z^c_{nm} \subset E \cap Z^c_{nm} \in \mathbf{M}$, we have $E \cap F \cap Z^c_{nm} \in \mathbf{M}$ and hence $E \cap F \in \mathbf{L}$.
If $E_k \in \mathbf{L}$, $k = 1, 2, \ldots$ i.e. $E_k \in \mathbf{S}$, $E_k \cap Z^c_{nm} \in \mathbf{M}$ for $k = 1, 2, \ldots$ hence

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathbf{S}$ and $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (E_k \cap Z^c_{nm}) \in \mathbf{M}$, then from equality

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \cap Z^c_{nm} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (E_k \cap Z^c_{nm})$ follows that $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathbf{L}$.

2. $\mathbf{L} \ll \mathbf{M}$, $\mathbf{L} \ll \mathbf{N}$.
Let $E \in \mathbf{M}$ since $E \cap Z^c_{nm} \subset E$ we have $E \cap Z^c_{nm} \in \mathbf{M}$ and hence $E \in \mathbf{L}$ i.e. $\mathbf{L} \ll \mathbf{M}$.

Let $E \in \mathbf{N}$ since $E \cap Z^c_{nm} \subset Z^c_{nm}$ then from property p_{nm} for Z_{nm} follows that $E \cap Z^c_{nm} \in \mathbf{M}$ and from it we have $E \in \mathbf{L}$ i.e. $\mathbf{L} \ll \mathbf{N}$.

Now, we shall prove that $\mathbf{L} = \mathbf{S}$ does not hold. The set Z^c_{mn} belongs to $\mathbf{S}$ but this set does not belong to $\mathbf{L}$ since $Z^c_{mn} \cap Z^c_{nm} \notin \mathbf{M}$. We have $\mathbf{L} \ll \mathbf{M}$, $\mathbf{L} \ll \mathbf{N}$ and $\mathbf{L} \neq \mathbf{S}$ that means $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ is not valid.

We can prove similarly that if $Z^c_{mn} \cap Z^c_{nm} \notin \mathbf{N}$, then $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ does not hold.

Lemma 1,8. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space and let $\mathbf{N}_i$, $i = 1,2$ and $\mathbf{M}$ be classes of null sets. Let the condition C be fulfilled by $\mathbf{S} - \mathbf{N}_i$, $i = 1,2$ and $\mathbf{S} - \mathbf{M}$. Let $(\mathbf{N}_i, \mathbf{M})$ for $i = 1,2$ then $(\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2, \mathbf{M})$.*

Proof. It is clear that $\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$ is a class of null sets. From equality

$$\mathbf{S} - (\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2) = (\mathbf{S} - \mathbf{N}_1) \cup (\mathbf{S} - \mathbf{N}_2)$$

follows that $\mathbf{S} - (\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2)$ fulfils the condition C. Let us form measurable sets $Z_{n_1 \cap n_2, m}$ and $Z_{m, n_1 \cap n_2}$. We shall prove that

(a) $$Z_{n_1 m} \cap Z_{n_2 m} = Z_{n_1 \cap n_2, m} \qquad [\mathbf{M} \cap \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2] \quad \text{and}$$

(b) $$Z_{mn_1} \cup Z_{mn_2} = Z_{m, n_1 \cap n_2} \qquad [\mathbf{M} \cap \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2].$$

At first we shall prove (a). It suffices to show (see Remark 1,2) that $Z_{n_1 m} \cap Z_{n_2 m}$ has the property $p_{n_1 \cap n_2, m}$. It is evidently that $Z_{n_1 m} \cap Z_{n_2 m} \in \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$ since $Z_{n_1 m} \in \mathbf{N}_1$ and $Z_{n_2 m} \in \mathbf{N}_2$. We shall prove that for every set $E \in \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$ such that $E \subset (Z_{n_1 m} \cap Z_{n_2 m})^c$, E belongs to $\mathbf{M}$. Let be $E \in \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$ and

$E \subset (Z_{n_1m} \cap Z_{n_2m})^c$. Put $E_1 = E \cap Z^c_{n_1m}$ and $E_2 = E \cap Z_{n_1m} \cap Z^c_{n_2m}$, then $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \in \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$, $E_2 \in \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$ and $E_1 \subset Z^c_{n_1m}$, $E_2 \subset Z^c_{n_2m}$, then from the property p_{n_1m} for Z_{n_1m} and p_{n_2m} for Z_{n_2m} follows $E_1 \in \mathbf{M}$, $E_2 \in \mathbf{M}$ and hence $E = E_1 \cup E_2 \in \mathbf{M}$. We proved that $Z_{n_1m} \cap Z_{n_2m}$ has the property $p_{n_1 \cap n_2, m}$.

Further, we shall prove (b). It suffices to show that $Z_{mn_1} \cup Z_{mn_2}$ has the property $p_{m, n_1 \cap n_2}$ (see Remark 1,2). It is clear that $Z_{mn_1} \cup Z_{mn_2} \in \mathbf{M}$. Now, we shall prove that for every $E \in \mathbf{M}$ such that $E \subset (Z_{mn_1} \cup Z_{mn_2})^c$, E belongs to $\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$. Let be $E \in \mathbf{M}$, $E \subset (Z_{mn_1} \cup Z_{mn_2})^c$ it is evidently that $E \subset Z^c_{mn_1}$ and from the property p_{mn_1} for Z_{mn_1} follows $E \in \mathbf{N}_1$. Similarly E belongs to $\mathbf{N}_2$ and hence E belongs to $\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$. We have proved that $Z_{mn_1} \cup Z_{mn_2}$ has the property $p_{m, n_1 \cap n_2}$.

Now, we shall prove $(\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2, \mathbf{M})$. By Theorem 1,9 follows that it suffices to prove

$$(Z_{mn_1} \cup Z_{mn_2})^c \cap (Z_{n_1m} \cap Z_{n_2m})^c \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$$

From equality

$$(Z_{mn_1} \cup Z_{mn_2})^c \cap (Z_{n_1m} \cap Z_{n_2m})^c = (Z^c_{mn_1} \cap Z^c_{mn_2} \cap Z^c_{n_1m}) \cup (Z^c_{mn_1} \cap \\ \cap Z^c_{mn_2} \cup Z^c_{n_2m})$$

we have, the first term on the right belongs to $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}_1$ since it is a subset of $Z^c_{mn_1} \cap Z^c_{n_1m} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}_1$ and $(\mathbf{N}_1, \mathbf{M})$ holds (see Theorem 1,9). The first term on the right belongs to $\mathbf{N}_2$ too, that follows from property p_{mn_2} for Z_{mn_2}. The second term on the right similarly belongs to $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$. Hence we have that both terms on the right belong to $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$ and therefore $(\mathbf{N}_1 \cap \cap \mathbf{N}_2, \mathbf{M})$.

Definition 1,5. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. Let $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ be two classes of null sets. We shall say that $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ are mutually singular, in symbols $\mathbf{M} \perp \mathbf{N}$ if there exists a measurable set A such that for every measurable set E $A \cap E \in \mathbf{M}$, and $A^c \cap E \in \mathbf{N}$.*

Lemma 1,9. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. Let $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ be two classes of null sets and let $\mathbf{M} \perp \mathbf{N}$, then $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$.*

Proof. If $\mathbf{M} \perp \mathbf{N}$, then there exists sets A, A^c such that for every $E \in \mathbf{S}$, $E \cap A \in \mathbf{M}$, and $E \cap A^c \in \mathbf{N}$. Let $\mathbf{L}$ be an arbitrary class of null sets such that $\mathbf{L} \ll \mathbf{M}$, $\mathbf{L} \ll \mathbf{N}$. Let E be any measurable set, then $E \cap A \in \mathbf{L}$, $E \cap A^c \in \mathbf{L}$ and from equality

$$E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$$

follows $E \in \mathbf{L}$ and hence $\mathbf{L} = \mathbf{S}$. This completes the proof.

Lemma 1,10. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. Let $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ be two classes of null* *sets. Let the condition* $\boldsymbol{C}$ *be fulfilled by* $\mathbf{S}-\mathbf{M}$ *and* $\mathbf{S}-\mathbf{N}$. *Let* $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$, *then* $\mathbf{M} \perp \mathbf{N}$.

Proof. Let $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ or equivalently $Z^c_{mn} \cap Z^c_{nm} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ (see Theorem 1,9). Put $A = Z^c_{nm} \cap Z_{mn}$ and $A^c = Z_{nm} \cup Z^c_{mn}$. Let E be any measurable set. From $A \cap E \subset A \subset Z_{mn} \in \mathbf{M}$ follows $E \cap A \in \mathbf{M}$. From equalities

$$\begin{aligned} E \cap A^c &= E \cap (Z_{nm} \cup Z^c_{mn}) \\ &= (E \cap Z_{nm}) \cup (E \cap Z^c_{mn}) \\ &= (E \cap Z_{nm}) \cup (E \cap Z^c_{mn} \cap Z_{nm}) \cup (E \cap Z^c_{mn} \cap Z^c_{nm}) \end{aligned}$$

follows that $E \cap A^c \in \mathbf{N}$, since the first two terms on the right of the last equality belong to $\mathbf{N}$, they are subsets of $Z_{mn} \in \mathbf{N}$. The third term on the right belongs to $\mathbf{N}$ because $Z^c_{mn} \cap Z^c_{nm} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N} \subset \mathbf{N}$.

Theorem 1,10. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space. Let* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *be two classes of null sets. Let the condition* $\boldsymbol{C}$ *be fulfilled by* $\mathbf{S}-\mathbf{M}$ *and* $\mathbf{S}-\mathbf{N}$. *Then* $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ *if and only if* $\mathbf{M} \perp \mathbf{N}$.

Proof. The proof follows from Lemmas 1,9 and 1,10.

Theorem 1,11. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space. Let* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *be two classes of null sets. Let the condition* $\boldsymbol{C}$ *be fulfilled by* $\mathbf{S}-\mathbf{N}$. *Then there exist two uniquely determined classes of null sets* $\mathbf{N}_0$ *and* $\mathbf{N}_1$ *such that* $\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 \cap \mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_0 \ll \mathbf{M}$ *and* $(\mathbf{N}_1, \mathbf{M})$.

Proof. Let us form Z_{mn} with property p_{mn}. We denote by

$$\mathbf{N}_0 = \{E : E \in \mathbf{S},\ \ E \cap Z^c_{mn} \in \mathbf{N}\} \quad \text{and}$$
$$\mathbf{N}_1 = \{E : E \in \mathbf{S},\ \ E \cap Z_{mn} \in \mathbf{N}\}.$$

Then evidently $\mathbf{N}_0$ and $\mathbf{N}_1$ are classes of null sets of the measurable space $(X, \mathbf{S})$. We shall prove $\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 \cap \mathbf{N}_1$. Let $E \in \mathbf{N}$, hence $E \cap Z^c_{mn}$, $E \cap Z_{mn} \in \mathbf{N}$ and further $E \in \mathbf{N}_0$ and $E \in \mathbf{N}_1$. Then we have $E \in \mathbf{N}_0 \cap \mathbf{N}_1$. We have showed $\mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0 \cap \mathbf{N}_1$.

Now, let $E \in \mathbf{N}_0 \cap \mathbf{N}_1$, then $E \cap Z^c_{mn} \in \mathbf{N}$ and $E \cap Z_{mn} \in \mathbf{N}$. From equality

$$\text{(a)} \quad E = (E \cap Z_{mn}) \cup (E \cap Z^c_{mn})$$

follows $E \in \mathbf{N}$. We have proved $\mathbf{N}_0 \cap \mathbf{N}_1 \subset \mathbf{N}$ and hence $\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 \cap \mathbf{N}_1$.

Now, we shall prove $\mathbf{N}_0 \ll \mathbf{M}$. Let $E \in \mathbf{M}$, since $E \cap Z^c_{mn} \subset Z^c_{mn}$, then from the property p_{mn} for Z_{mn} follows $E \cap Z^c_{mn} \in \mathbf{N}$ and hence $E \in \mathbf{N}_0$.

Further, we shall prove $(\mathbf{N}_1, \mathbf{M})$. Let $\mathbf{L}$ be any class of null sets such that $\mathbf{L} \ll \mathbf{M}$, $\mathbf{L} \ll \mathbf{N}_1$. It is necessary to prove $\mathbf{L} = \mathbf{S}$. It is evidently $\mathbf{L} \subset \mathbf{S}$. Conversely, let $E \in \mathbf{S}$, E is an arbitrary set. Since $Z_{mn} \in \mathbf{M}$ it follows $E \cap Z_{mn} \in \mathbf{M}$ and $\mathbf{L} \ll \mathbf{M}$ implies $E \cap Z_{mn} \in \mathbf{L}$. The set $E \cap Z^c_{mn}$ is a subset of Z^c_{mn} which belongs to $\mathbf{N}_1$, then $E \cap Z^c_{mn} \in \mathbf{N}_1$ and from $\mathbf{L} \ll \mathbf{N}_1$ follows $E \cap Z^c_{mn} \in \mathbf{L}$. From equality (a) follows $E \in \mathbf{L}$, therefore $\mathbf{L} = \mathbf{S}$.

Finally to prove the uniqueness, suppose that $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{N}_1$ and $\overline{\mathbf{N}}_0$, $\overline{\mathbf{N}}_1$ are two representations of the same class $\mathbf{N}$ which satisfy the preceding conclusions. We shall prove $\mathbf{N}_0 = \overline{\mathbf{N}}_0$ and $\mathbf{N}_1 = \overline{\mathbf{N}}_1$.

At first we shall prove that $E \cap Z_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_0$ and $E \cap Z^c_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_1$ for an arbitrary measurable set E. Z_{mn} belongs to $\mathbf{M}$ and from $\overline{\mathbf{N}}_0 \ll \mathbf{M}$ follows $Z_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_0$. $\overline{\mathbf{N}}_0$ is a class of null sets, hence we obtain for any $E \in \mathbf{S}$, that $E \cap Z_{mn}$ belongs to $\overline{\mathbf{N}}_0$.

We denote by $\mathbf{L}$ a class of sets

$$\mathbf{L} = \{E : E \in \mathbf{S}, \quad E \cap Z^c_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_1\}.$$

It is clear that $\mathbf{L}$ is a class of null sets. Now, we shall prove $\mathbf{L} \ll \mathbf{M}$, $\mathbf{L} \ll \overline{\mathbf{N}}_1$, then from $(\overline{\mathbf{N}}_1, \mathbf{M})$ follows $\mathbf{L} = \mathbf{S}$ and we obtain $E \cap Z^c_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_1$ for every $E \in \mathbf{S}$.

We prove $\mathbf{L} \ll \mathbf{M}$. Let $E \in \mathbf{M}$, then $\mathbf{N}_0 \ll \mathbf{M}$ implies $E \in \mathbf{N}_0$ and also $E \cap Z^c_{mn} \in \mathbf{N}$, since $\mathbf{N} = \overline{\mathbf{N}}_0 \cap \overline{\mathbf{N}}_1 \subset \overline{\mathbf{N}}_1$ we have $E \cap Z^c_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_1$ and hence $E \in \mathbf{L}$.

To prove $\mathbf{L} \ll \overline{\mathbf{N}}_1$, suppose $E \in \overline{\mathbf{N}}_1$, then $E \cap Z^c_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_1$ and hence $E \in \mathbf{L}$.

Now, we prove $\mathbf{N}_0 = \overline{\mathbf{N}}_1$. Let $E \in \mathbf{N}_0$ i.e. $E \cap Z^c_{mn} \in \mathbf{N}$, since $\mathbf{N} = \overline{\mathbf{N}}_0 \cap \overline{\mathbf{N}}_1 \subset \overline{\mathbf{N}}_0$ we obtain $E \cap Z^c_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_0$ because it always holds $E \cap Z_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_0$. Then from equality (a) follows that $E \in \overline{\mathbf{N}}_0$. We have proved $\mathbf{N}_0 \subset \overline{\mathbf{N}}_0$. Conversely, let $E \in \overline{\mathbf{N}}_0$, then $E \cap Z^c_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_0$ too. Since $E \cap Z^c_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_1$ for every $E \in \mathbf{S}$ it follows that $E \cap Z^c_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_0 \cap \overline{\mathbf{N}}_1 = \mathbf{N}$ and hence $E \in \mathbf{N}_0$. We have proved $\overline{\mathbf{N}}_0 \subset \mathbf{N}_0$ and summarizing we obtain $\mathbf{N}_0 = \overline{\mathbf{N}}_0$.

We prove $\mathbf{N}_1 = \overline{\mathbf{N}}_1$. Let $E \in \mathbf{N}_1$, then $E \cap Z_{mn} \in \mathbf{N}$ since $\mathbf{N} = \overline{\mathbf{N}}_0 \cap \overline{\mathbf{N}}_1 \subset \overline{\mathbf{N}}_1$, we have $E \cap Z_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_1$. We note $E \cap Z^c_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_1$ for every $E \in \mathbf{S}$, then from equality (a) follows $E \in \overline{\mathbf{N}}_1$. We have showed $\mathbf{N}_1 \subset \overline{\mathbf{N}}_1$. Conversely, let $E \in \overline{\mathbf{N}}_1$, also $E \cap Z_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_1$. Since $E \cap Z_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_0$, for every $E \in \mathbf{S}$, it follows $E \cap Z_{mn} \in \overline{\mathbf{N}}_0 \cap \overline{\mathbf{N}}_1 = \mathbf{N}$ and hence $E \in \mathbf{N}$. We have proved $\mathbf{N}_1 = \overline{\mathbf{N}}_1$, and the proof of the theorem is complete.

Theorem 1,12. *Let* $(X, \mathbf{S})$ *be a measurable space. Let* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *be two classes of null sets. Let the condition* $\mathbf{C}$ *be fulfilled by* $\mathbf{S} - \mathbf{M}$ *and* $\mathbf{S} - \mathbf{N}$. *Then, there exist two uniquely determined classes of null sets* $\mathbf{N}_0$ *and* $\mathbf{N}_1$ *such that* $\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 \cap \mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_0 \ll \mathbf{M}$ *and* $\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{M}$.

Proof. The proof follows from Theorems 1,10 and 1,11.

II

The considerations of the preceding section can be applied to the formulations of results concerning sets of measures defined on a measurable space $(X, \mathbf{S})$. We note that for every measure μ defined on $\mathbf{S}$ we can correspond a class of null sets $\mathbf{M}$, where $\mathbf{M}$ is the class of all those measurable sets E whose measure $\mu(E) = 0$. It is easily seen that $\mu \ll \mu^*$ if and only if $\mathbf{M} \ll \mathbf{M}^*$.

In this way, we can study the dominated sets of measures by means of dominated collections of classes of null sets.

Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. Let $\mathfrak{M}$ be a set of measures on $\mathbf{S}$. *A set E is $\mathfrak{M}$ — null* if it is measurable and of μ-measure zero for each $\mu \in \mathfrak{M}$.

Let $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ be two sets of measures on $\mathbf{S}$. We say *$\mathfrak{M}$ is absolutely continuous with respect to $\mathfrak{N}$ in the first sense*, in symbols $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ if any E is $\mathfrak{M}$-null implies E is also $\mathfrak{N}$-null.

We say *$\mathfrak{M}$ is absolutely continuous with respect to $\mathfrak{N}$ in the second sense*, in symbols $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$ if for each pair μ, ν is $\mu \ll \nu$, where $\mu \in \mathfrak{M}$, $\nu \in \mathfrak{N}$.

Suppose that $(X, \mathbf{S})$ is a measurable space and μ is a σ-finite measure (we note once more $X \in \mathbf{S}$, see Introduction). It is well known that there does not exist an uncountable disjoint class of positive measure sets and so we have a measurable space $(X, \mathbf{S})$ with such a class of null sets $\mathbf{M}$ that $\mathbf{S} - \mathbf{M}$ fulfils condition $\boldsymbol{C}$.

Further, we show that there exists a weaker condition than σ-finiteness of measure μ for the fulfilment of the condition $\boldsymbol{C}$.

Definition 2,1. *Let $(X, \mathbf{S}, \mu)$ be a measure space. Let $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of finite measures on $\mathbf{S}$. We shall say μ has the property σ if*

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E)$$

for every measurable set E.

We note that σ-finite measure μ has the property σ.

The next example shows, there exists a measure μ with property σ which is not σ-finite.

Example. Let $(X, \mathbf{S}, \mu)$ be a measure space. Let X be the set of all natural numbers and $\mathbf{S}$ be the class of all subsets of X. The measure μ is defined as

$\mu(E)$ is the number of elements in E, if $1 \notin E$ and

$\mu(E) = +\infty$, if $1 \in E$.

It is clear μ is not a σ-finite measure. Further, we define finite measures

$$\mu_1(E) = 1, \text{ if } 1 \in E$$
$$= 0, \text{ if } 1 \notin E.$$

Let n be an arbitrary natural number $n > 1$ then we define

$$\mu_n(E) = 0, \text{ if } 1 \notin E \text{ and } n \notin E$$
$$= 1, \text{ if } 1 \notin E \text{ and } n \in E$$
$$= 1, \text{ if } 1 \in E \text{ and } n \notin E$$
$$= 2, \text{ if } 1 \in E \text{ and } n \in E.$$

Then $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E)$, μ has the property σ.

It can be showed that the next Theorem is valid.

Theorem 2,1. Let $(X, \mathbf{S}, \mu)$ be a measure space. Then, μ has the property σ if and only if $\mathbf{S} - \mathbf{M}$ fulfils condition $\boldsymbol{C}$, where $\mathbf{M}$ is the class of all μ-measure zero sets.

If we apply the preceding considerations and results we can give assertions concerning measures which are immediate consequences of theorems of the preceding section. In that sense, we can formulate without difficulties all Theorems and Lemmas in part I.

Definition 2,2. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. Let μ and ν be signed measures on $\mathbf{S}$. We shall say that μ and ν are mutually independent, in symbols (μ, ν) if for any signed measure λ such that $\lambda \ll \mu$, $\lambda \ll \nu$ implies $\lambda \equiv 0$.*

Definition 2,3. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. Let μ and ν be signed measures on $\mathbf{S}$. We shall say that μ and ν are mutually singular, in symbols $\mu \perp \nu$, if there exists a measurable set A, such that for any measurable set E is $|\mu|(A \cap E) = |\nu|(A^c \cap E) = 0$.*

Now, we give a measure theoretic formulation of Theorems 1,10—1,12.

Theorem 2,2. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. Let μ and ν be measures on $\mathbf{S}$ and both have the property σ. Then (μ, ν) if and only if $\mu \perp \nu$.*

We note that a generalization in a certain sense, of Theorem 2,2 is valid, if μ and ν are σ-finite signed measures on $\mathbf{S}$. It suffices to remark that equivalent assertions concerning absolute continuity, independence and singularity between σ-finite signed measures μ ν and their total variations $|\mu|$ and $|\nu|$ (which are σ-finite measures evidently) are valid.

Theorem 2,3. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. Let μ and ν be measures on $\mathbf{S}$. Let ν have the property σ. Then, there exist two uniquely determined measures ν_0 and ν_1 whose sum is ν such that $\nu_0 \ll \mu$ and (ν_1, μ).*

Proof. Let us consider the set Z_{mn} belonging to the class

$\mathbf{M} = \{E : E \in \mathbf{S},\ \mu(E) = 0\}$ and to the class

$\mathbf{N} = \{E : E \in \mathbf{S},\ \nu(E) = 0\}$ which are two classes of null sets.

Put $\nu_0(E) = \nu(E \cap Z_{mn}^c)$ and $\nu_1(E) = \nu(E \cap Z_{mn})$ for every measurable set E.

It is clear that $\nu = \nu_0 + \nu_1$, $\nu_0 \ll \mu$ and (ν_1, μ). It suffices to prove the uniqueness of this decomposition. We denote

$$\mathbf{N}_0 = \{E : E \in \mathbf{S},\ \nu_0(E) = 0\} \text{ and}$$
$$\mathbf{N}_1 = \{E : E \in \mathbf{S},\ \nu_1(E) = 0\}\,.$$

It is easily seen that $\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 \cap \mathbf{N}_1$. If $\nu = \nu_0 + \nu_1$ and $\nu = \bar{\nu}_0 + \bar{\nu}_1$ are two decompositions of ν then by Theorem 1,11 $\mathbf{N}_0 = \bar{\mathbf{N}}_0$ and $\mathbf{N}_1 = \bar{\mathbf{N}}_1$. Further, we have

$\nu_1(Z^c_{mn}) = 0$ and also $\bar{\nu}_1(Z^c_{mn}) = 0$ equally as

$\nu_0(Z_{mn}) = 0$ and also $\bar{\nu}_0(Z_{mn}) = 0$.

Let E be an arbitrary measurable set, then $\nu_1(E) = \nu_1(E \cap Z^c_{mn}) + \nu_1(E \cap Z_{mn})$ and hence $\nu_1(E) = \nu_1(E \cap Z_{mn})$. We have also $\bar{\nu}_1(E) = \bar{\nu}_1(E \cap Z_{mn})$.

Further,

$$\nu(E \cap Z_{mn}) = \nu_0(E \cap Z_{mn}) + \nu_1(E \cap Z_{mn}) = \nu_1(E \cap Z_{mn})$$
$$\nu(E \cap Z_{mn}) = \bar{\nu}_0(E \cap Z_{mn}) + \bar{\nu}_1(E \cap Z_{mn}) = \bar{\nu}_1(E \cap Z_{mn})$$

and hence $\nu_1(E) = \bar{\nu}_1(E)$ for every measurable set E.

Since $\nu_1(E \cap Z^c_{mn}) = \bar{\nu}_1(E \cap Z^c_{mn}) = 0$ and also

$\nu_0(E \cap Z_{mn}) = \bar{\nu}_0(E \cap Z_{mn}) = 0$ for every measurable set E. Then,

$\nu_0(E) = \nu_0(E \cap Z_{mn}) + \nu_0(E \cap Z^c_{mn}) = \nu_0(E \cap Z^c_{mn})$

and also $\bar{\nu}_0(E) = \bar{\nu}_0(E \cap Z^c_{mn})$.

Our final result concerning the equality $\nu_0(E) = \bar{\nu}_0(E)$ for every $E \in \mathbf{S}$ follows from equalities

$$\nu(E \cap Z^c_{mn}) = \nu_0(E \cap Z^c_{mn}) + \nu_1(E \cap Z^c_{mn}) = \nu_0(E \cap Z^c_{mn}),$$
$$\nu(E \cap Z^c_{mn}) = \bar{\nu}_0(E \cap Z^c_{mn}) + \bar{\nu}_1(E \cap Z^c_{mn}) = \bar{\nu}_0(E \cap Z^c_{mn}).$$

Theorem 2,4. *Let $(X, \mathbf{S})$ be a measurable space. Let μ and ν be measures on $\mathbf{S}$ and both have the property σ. Then there exist two uniquely determined measures ν_0 and ν_1 whose sum is ν such that $\nu_0 \ll \mu$ and $\nu_1 \perp \mu$.*

Proof. The proof follows from Theorms 2,2 and 2,3.

We note that Theorem 2,4 treats the Lebesgue decomposition for measures and can be extended also for σ-finite signed measures.

References

[1] Р. Х. ДИВЕЕВ, Некоторые свойства доминированных пространств, Докл. акад. наук Уз. ССР (1961) — 3, стр. 3—6.

[2] T. NEUBRUNN, Замечание об абсолютной непрерывности мер, Mat. Fyz. Čas. SAV, 1 (1966), стр. 21—30.

[3] P. R. HALMOS, Measure theory, New York (1950).

Adresa autora: Katedra numerickej matematiky a matematickej štatistiky PFUK, Šmeralova 2, Bratislava.

Do redakcie došlo 30. júna 1965.

Dominované triedy a príbuzné problémy

V. FICKER

Zhrnutie

V práci je podané zovšeobecnenie niektorých výsledkov týkajúcich sa dominovaných systémov mier, vzťahu medzi pojmami nezávislé a singulárne miery a rozkladu miery ν na absolútne spojitú a nezávislú resp. absolútne spojitú a singulárnu mieru vzhľadom k danej miere μ. Pričom sa o mierach predpokladá menej ako σ-konečnosť mier. Zovšeobecnenie sa dosahuje tým, že pojmy, ktoré spočívajú na pojme absolútnej spojitosti mier, sa formulujú iba pomocou pojmov teórie množín. Tu sa nepracuje s pojmom miery ani s Radon-Nikodymovou vetou.

Доминированные классы и родственные проблемы

В. ФИККЕР

Резюме

В статье находится обобщение касающееся некоторых результатов доминированных пространств мер, отношения между понятиями независимых и сингулярных мер и разложения меры ν на части, одна из которых абсолютно непрерывна а другая независима или разложения меры на части одна из которых абсолютно непрерывна а другая сингулярна относительно некоторой данной меры μ. О мерах предполагается более слабое условие чем σ-конечность мер. Обобщение достигается тем что понятия зависящие на абсолютной непрерывности мер формулируются только посредством понятий теории множеств. Здесь не имеется в виду понятие меры и теорема Радона—Никодима.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM X., FASC. VII. MATHEMATICA XIV. 1966

Zovšeobecnenie Steinerovho stredu oválu

M. HEJNÝ

Práca vznikla z popudu prof. Urbana, ktorému autor vďačí za mnohé impulzy. Prof. Metelkovi a doc. Palajovi ďakuje autor za cennú konzultáciu.

1. Buď v euklidovej rovine daná ortonormálna báza $\langle \mathsf{P}, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2 \rangle$ kde bod P je počiatok. Označme

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{J}_1 \cos t + \mathbf{J}_2 \sin t. \tag{1}$$

Potom

$$\mathbf{N}'(t) = -\mathbf{J}_1 \sin t + \mathbf{J}_2 \cos t, \tag{2}$$

kde čiarkou značíme deriváciu podľa parametru t.

Nech je daná funkcia $p(t)$ s týmito vlastnosťami:

I. funkcia $p(t)$ je definovaná pre všetky reálne čísla t;

II. pre všetky t platí $p(t + 2\pi) = p(t)$;

III. funkcia $p(t)$ má druhú deriváciu spojitú;

IV. existujú kladné čísla m, M tak, že pre všetky t je

$$m \leqq p(t) \leqq M;$$

V. pre všetky t je $p(t) + p''(t) > 0$.

Buď vektor

$$\mathbf{R}(t) = p(t)\mathbf{N}(t) + p'(t)\mathbf{N}'(t) \tag{3}$$

sprievodič — vektorom krivky $\mathsf{R}(t) = \mathsf{P} + \mathbf{R}(t)$. Podľa podmienky II. je $\mathbf{R}(t + 2\pi) = \mathbf{R}(t)$. Podľa IV. je krivka $\mathsf{R}(t)$ ohraničená, a preto aj uzavretá. Nakoľko je $\mathbf{N}''(t) = -\mathbf{N}(t)$, je aj

$$\mathbf{R}'(t) = [p(t) + p''(t)]\mathbf{N}'(t). \tag{4}$$

Z rovníc (2) a (4) vidieť, že ku každému nenulovému vektoru $\mathbf{A}$ existujú práve dve čísla z intervalu $[0; 2\pi)$, pre ktoré sú vektory $\mathbf{N}'(t_1)$, $\mathbf{N}'(t_2)$ kolineárne s vektorom $\mathbf{A}$.

Uzavretá krivka $R(t)$ daná sprievodič-vektorom $\mathbf{R}(t)$ má v každom svojom bode dotyčnicu a pritom neexistujú tri rovnobežné dotyčnice. Krivka je jednoduchá. Krivku danú sprievodič-vektorom (3), kde funkcia $p(t)$ má vlastnosti I.—V., budeme nazývať oválom a značiť symbolom $\mathfrak{o}$. Funkciou $p(t)$ budeme nazývať tvoriacou funkciou oválu $\mathfrak{o}$. Kružnica, ako najjednoduchší ovál, bude často vystupovať ako singulárny prípad našich úvah. Aby sme nemuseli všade tento, inak triviálny prípad vylučovať, vypustíme kružnicu z našich úvah úplne.

2. Jednoduchý výpočet dá takéto výsledky. Vektory $\mathbf{N}'(t)$ a $\mathbf{N}(t)$ sú po rade jednotkové vektory dotyčnice a normály oválu v bode $R(t)$. Polomer krivosti oválu $\mathfrak{o}$ v bode $R(t)$ je číslo

$$r(t) = p(t) + p''(t). \tag{5}$$

Podľa vlastnosti V. funkcie $p(t)$, je polomer $r(t)$ číslo kladné. Odkiaľ plynie, že vnútro oválu $\mathfrak{o}$ je oblasť konvexná. Nakoniec ešte oblúkový parameter je daný integrálom

$$s(t) = \int_0^t r(t)\, dt. \tag{6}$$

3. Buď h pevné číslo a $p(t)$ tvoriaca funkcia oválu $\mathfrak{o}$. Funkcia

$$p(t, h) = p(t) + h \tag{7}$$

má zrejme vlastnosti I., II., III. Aby funkcia $p(t, h)$ splňovala aj ostatné dve podmienky, musí byť konštanta h „dostatočne veľká", čo presne značí $h > h_0$, kde h_0 je väčšie z čísiel,

$$-\min p(t) \quad \text{a} \quad -\min r(t),$$

pričom extrémy sa berú cez všetky reálne t. Keď je potom podmienka $h > h_0$ splnená, je aj funkcia $p(t, h)$ — ako funkcia jedinej premennej t — tvoriacou funkciou istého oválu. Tento budeme značiť $\mathfrak{o}(h)$. Symbol $\mathfrak{o}(h)$ je definovaný pre reálne h väčšie ako h_0; pritom je $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}(0)$.

Sprievodič vektor oválu $\mathfrak{o}(h)$ je podľa (3) a (7)

$$\mathbf{R}(t, h) = \mathbf{R}(t) + h\mathbf{N}(t).$$

Oblúk $s(t, h)$ a polomer krivosti $r(t, h)$ v bode $R(t)$ oválu $\mathfrak{o}(h)$ sú dané vzťahmi, ktoré plynú bezprostredne zo vzťahov (5), (6) a (7):

$$s(t, h) = s(t) + t \,.\, h; \quad r(t, h) = r(t) + h. \tag{9}$$

Množinu všetkých oválov $\mathfrak{o}(h)$, kde $h > h_0$ nazveme vrstvou oválov, tvorenou oválom $\mathfrak{o}$ a značíme $\mathfrak{r}(\mathfrak{o})$, či jednoduchšie iba $\mathfrak{r}$. Každý z oválov vrstvy $\mathfrak{r}$ môže byť vzatý ako jej tvoriaci ovál. Zmenou tvoriaceho oválu zmení sa iba číslo h_0. Vhodnou voľbou môžeme docieliť, aby číslo h_0 bolo ľubovoľne blízke nule. (Číslo h_0 je vždy záporné.)

4. Buď daná spojitá nezáporná funkcia $m(t)$, definovaná pre všetky reálne čísla t. Nech pre všetky t platí $m(t + 2\pi) = m(t)$. Uvažujme ovál ako množinu hmotných bodov, pričom hmota bodu $\mathsf{R}(t)$ je udaná hodnotou $m(t)$. Budeme hovoriť o ovále zaťaženom hmotou $m(t)$; funkciu $m(t)$ budeme nazývať funkciou hmoty. Ak je funkcia hmoty $m(t)$ konštantná, alebo ak je priamo vyjadriteľná iba z tvaru oválu $\mathfrak{o}$, potom zrejme ťažisko zaťaženého oválu je geometrickým invariantom oválu $\mathfrak{o}$. Dva takéto prípady boli v literatúre podrobne rozobrané. Prvý prípad: $m(t) = \text{konšt.}$ — ťažiskom zaťaženého oválu je (obyčajné) ťažisko oválu. Druhý prípad: $m(t) = k(t)$, kde $k(t)$ je krivosť oválu $\mathfrak{o}$ v bode $\mathsf{R}(t)$. Ťažisko takto zaťaženého oválu je známy Steinerov stred krivosti oválu.

Už Steinerovi bolo známe, že všetky ovály vrstvy $\mathfrak{r}$ majú jediný spoločný Steinerov stred krivosti. Tento budeme nazývať Steinerovým stredom vrstvy $\mathfrak{r}$. Prof. Kubota dokázal (Tohoku Math. Journal, rok 1918, str. 20 a nasl.), že množina (obyčajných ťažísk jednotlivých oválov $\mathfrak{o}(h)$ vrstvy $\mathfrak{r}$ vyplní časť priamky, na ktorej leží Steinerov stred vrstvy. Prof. Kubota našiel ďalej podmienku pre to, aby daná priamka degenerovala na bod.

V práci rozoberieme obecnejší prípad, keď totiž je

$$m(t) = r(t, h)^{n-1},$$

kde n je prirodzené číslo, alebo $n = 0$.

5. Ťažisko oválu $\mathfrak{o}(h)$ zaťaženého hmotou $r(t, h)^{n-1}$ označíme $\mathbf{S}_n{}^{(h)}$ a nazveme ho n-mocný Steinerov stred oválu $\mathfrak{o}(h)$. Podľa známeho vzorca je sprievodič-vektor tohto bodu

$$\mathbf{S}_n(h) = \frac{1}{\int_0^{L(h)} [r(t, h)]^{n-1}\, ds} \cdot \int_0^{L(h)} \mathbf{R}(t, h)[r(t, h)]^{n-1}\, ds,$$

kde $L(h)$ je dĺžka oválu $\mathfrak{o}(h)$ a ds je diferenciál oblúku daný vzťahom (9). Pretože je $ds = r(t, h)dt$, možno písať

$$\mathbf{S}_n(h) = \frac{1}{\int_0^{2\pi} [r(t) + h]^n dt} \cdot \int_0^{2\pi} [\mathbf{R}(t) + h \,.\, \mathbf{N}(t)]\, [r(t) + h]^n dt. \tag{10}$$

Množinu všetkých bodov $\mathbf{S}_n(h)$ pre $h > h_0$ označíme $\mathfrak{S}_n$. Podľa faktov uvedených v odseku 4. vieme, že $\mathfrak{S}_0$ je jediný bod S_0 — je to Steinerov stred vrstvy. Ďalej množina $\mathfrak{S}_1$ je časťou priamky. Zaveďme nasledujúce označenie

$$q_n^k = \binom{k}{n}\int_0^{2\pi}[r(t)]^k\,dt \qquad \mathbf{U}_k = \int_0^{2\pi}\mathbf{N}(t)[r(t)]^k\,dt$$

$$\mathbf{V}_k = \int_0^{2\pi}\mathbf{R}(t)[r(t)]^k dt \qquad \mathbf{W}_n^k = \binom{k}{n}\mathbf{V}_k + \binom{k+1}{n}\mathbf{U}_k, \tag{11}$$

kde pokladáme $\binom{k}{n} = 0$, ak je $k > n$.

Potrebujeme ešte niekoľko pomocných výsledkov. Je predovšetkým podľa (11)

$$q_n^0 = 2\pi; \qquad q_n^1 = nL, \tag{11'}$$

kde $L = L(0)$ je dĺžka oválu $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}(0)$.

Ďalej použijeme rovnicu $\mathbf{N}(t) = -\mathbf{N}''(t)$ a integráciu per partes. Obdržíme

$$\int_0^{2\pi}\mathbf{N}(t)p(t)\,dt = -\,[\mathbf{N}'(t)p(t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\mathbf{N}'(t)p'(t)\,dt$$

$$\int_0^{2\pi}\mathbf{N}(t)p''(t)\,dt = [\mathbf{N}(t)p'(t)] - \int_0^{2\pi}\mathbf{N}'(t)p'(t)\,dt.$$

Rovnice spočítame a použijeme vzťahy (11), (5), (1), (2) a podmienku II. Dostaneme postupne

$$\mathbf{U}_1 = \int_0^{2\pi}\mathbf{N}(t)\,r(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\mathbf{N}(t)[p(t) + p''(t)]\,dt = [\mathbf{N}(t)p'(t) - \mathbf{N}'(t)p(t)]_0^{2\pi}$$

teda

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{O}$$

a tiež

$$\mathbf{U}_0 = \int_0^{2\pi}\mathbf{N}(t)\,dt = -\int_0^{2\pi}\mathbf{N}''(t)\,dt = -[\mathbf{N}'(t)]_0^{2\pi} = \mathbf{O}.$$

Bez ujmy na obecnosti môžeme voliť počiatok sústavy súradnej v bode S_0. Bude potom vektor $\mathbf{S}_0$ nulový a podľa (10) a (11) bude aj

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{O} \quad \text{aj} \quad \mathbf{W}_n^0 = \mathbf{O} \quad \text{pre všetky prirodzené } n.$$

Zhrňme výsledky! Platí

$$q_n^0 = 2\pi, \qquad q_n^1 = nL$$

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_0 = \mathbf{W}_n^0 = \mathbf{O} \tag{12}$$

pre všetky prirodzené n.

Na pravej strane vo vzťahu (10) preveďme naznačené mocnenie a použime označenie zavedené v (11) spolu so vzťahmi (12). Bude

$$\mathsf{S}_n(h) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{W}_n^k \cdot h^{n-k}}{\sum\limits_{k=0}^{n} q_n^k \cdot h^{n-k}}. \tag{13}$$

6. Prejdime k homogénnym súradniciam. Voľme bázu

$$\mathsf{O}(1, 0, 0), \quad \mathsf{I}_1(0, 1, 0), \quad \mathsf{I}_2(0, 0, 1).$$

Podľa (13) sú homogénne súradnice n-mocného Steinerovho stredu

$$\mathsf{S}_n^*(h) \equiv (2\pi h^n + \sum_{k=1}^{n} q_n^k h^{n-k};\ \sum_{k=1}^{n} y_n^k h^{n-k};\ \sum_{k=1}^{n} z_n^k h^{n-k}), \tag{14}$$

pričom čísla y_n^k a z_n^k sú udané rovnicou

$$\mathbf{W}_n^k = y_n^k \mathbf{J}_1 + z_n^k \mathbf{J}_2.$$

K tomu, aby formálny bod $\mathsf{S}_n^*(h)$ bol aritmetickým bodom, je nutné (a stačí), aby aspoň jedna jeho súradnica bola rôzna od nuly. Nech $h_1, \ldots, h_q$ sú všetky také komplexné čísla, ktoré dosadené do $\mathsf{S}_n^*(h)$ anulujú všetky tri jeho súradnice. Je istotne $q \leqq n$. Potom všetky tri súradnice, uvažované ako polynomy, sú deliteľné polynomom $(h - h_1) \ldots (h - h_q)$. Po vydelení obdržíme aritmetického zástupcu

$$\mathsf{S}_{np}(h) \equiv (2\pi h^p + \sum_{k=1}^{p} r_n^k h^{p-k};\ \sum_{k=1}^{p} s_n^k h^{p-k};\ \sum_{k=1}^{p} t_n^k h^{p-k}) \tag{15}$$

pričom $p = n - q$. Platí $0 \leqq p \leqq n$ a v prípade $p = 0$ je

$$\mathsf{S}_{no}(h) \equiv (2\pi; 0; 0)$$

aritmetický zástupca Steinerovho stredu S_0. Formálny bod $\mathsf{S}_{np}(h)$ je aritmetickým bodom už pre všetky komplexné čísla h. Je to všeobecný bod istej algebraickej krivky stupňa p. Pritom bod považujeme za algebraickú krivku stupňa 0.

Veta 1. Množina $\mathfrak{S}_n$ je časťou algebraickej krivky $\mathfrak{R}_{np}$ stupňa $p \leqq n$: krivka $\mathfrak{R}_{np}$ je nerozložiteľná a je incidentná so Steinerovým stredom S_0. Bod S_0 je bodom uzáveru množiny $\mathfrak{S}_n$. Je $\mathsf{S}_0 \equiv \mathfrak{R}_{no}$.

Dôkaz. Algebraická varieta so všeobecným bodom je nerozložiteľná (napr.: Hodge—Pedoe: Methods of algebraic geometry II, §3, veta 1). Ďalej je

$$\lim_{h \to +\infty} h^{-p}\, \mathsf{S}_{np}(h) = \lim_{h \to -\infty} h^{-p}\, \mathsf{S}_{np}(h) = \mathsf{S}_0.$$

Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Algebraická varieta je rozložiteľná, ak existujú jej dve vlastné podvariety, ktorých je zjednotením. Tak napr. dvojnásobne prebiehanú priamku považujeme za varietu nerozložiteľnú.

Veta 2. Výroky

a) platí $\mathbf{W}_n^1 = \ldots = \mathbf{W}_n^n = \mathbf{O}$ (16)

b) pre krivku $\mathfrak{R}_{np}$ je $p = \mathbf{O}$

c) množina $\mathfrak{S}_n$ je jednobodová

sú ekvivalentné.

Dôkaz. Nech je výrok a) pravdivý. Podľa (13) je vektor $\mathbf{S}_n(h)$ nulový pre všetky komplexné čísla h, pre ktoré má výraz na pravej strane (13) zmysel. Preto je pravdivý aj výrok b) a preto aj c). Nech je pravdivý výrok c). Potom rovnica $\mathbf{S}_n(h) = 0$ platí pre nekonečne mnoho čísiel h, čo implikuje platnosť rovníc (16). Tým je dôkaz urobený.

7. Prípad $p = 0$ bol úplne vyčerpaný vetou 2. V ďalšom, pokiaľ nebude výslovne povedaný opak, predpokladáme stále $1 \leq p \leq n$. Vyšetrime teraz násobnosť bodu S_0 na krivke $\mathfrak{R}_{np}$.

Priamka

$$\mathsf{m} : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0 \tag{17}$$

má p spoločných bodov s krivkou $\mathfrak{R}_{np}$. Nech priamka m prechádza Steinerovým stredom $S_0(1, 0, 0)$. Potom v rovnici (17) bude $a = 0$. Priesečníky priamky m a krivky $\mathfrak{R}_{np}$ obdržíme, keď do rovnice priamky (17) dosadíme parametrické vyjadrenie súradníc x_1 a x_2 krivky $\mathfrak{R}_{np}$ zo (15). Získame tak rovnicu stupňa $p - 1$ pre parameter h:

$$(bs_n^1 + ct_n^1)h^{p-1} + \ldots + (bs_n^p + ct_n^p) = 0. \tag{18}$$

Komplexným koreňom $h_1, \ldots, h_{p-1}$ tejto rovnice odpovedá $p - 1$ komplexných priesečníkov

$$\mathsf{S}_n(h_1), \ldots, \mathsf{S}_n(h_{p-1})$$

priamky m a krivky $\mathfrak{R}_{np}$. p-tym spoločným bodom priamky m a krivky $\mathfrak{R}_{np}$ je Steinerov stred S_0, ktorý odpovedá parametru $h = \infty$.

Veta 3. **Ak sú splnené rovnice**

$$\mathbf{W}_n^1 = \mathbf{W}_n^2 = \ldots = \mathbf{W}_n^{r-1} = \mathbf{O}, \quad 1 \leq r \leq p, \tag{19}$$

potom je bod S_0 aspoň r-násobným bodom krivky $\mathfrak{R}_{np}$.

Dôkaz. Nech sú splnené rovnice (19). Súradnice x_1 a x_2 vo vzťahu (14) sú polynómy stupňa $n - r$; tie isté súradnice vo vzťahu (15) sú polynómy stupňa $n - r - q = p - r$. Rovnica (18) je teda tiež stupňa $p - r$. Každá priamka m idúca bodom S_0 má s krivkou $\mathfrak{R}_{np}$ spoločných najviac $p - r$ bodov rôznych od bodu S_0. Bod S_0 je preto r násobným priesečníkom, a preto aj r násobným bodom krivky $\mathfrak{R}_{np}$. To sme mali dokázať.

Nech je vektor $\mathbf{W}_n^1$ nenulový. V tomto prípade sa dajú voliť reálne čísla b, c tak, aby koeficient pri h^{p-1} v rovnici (18) bol nulový. Dostaneme tak špeciálnu priamku, ktorá bude dotyčnicou tej vetvy krivky $\mathfrak{R}_{np}$ v bode S_0, ktorá odpovedá reálnym parametrom h z okolia hodnoty $h = \infty$.

Veta 4. Nech sú splnené rovnice (19) a nech naviac vektory

$$\mathbf{W}_n^r, \mathbf{W}_n^{r+1}, \ldots, \mathbf{W}_n^s \qquad r \leqq s \leqq p \tag{20}$$

sú kolineárne. Potom dotyčnica v bode S_0 tej vetvy krivky $\mathfrak{R}_{np}$, ktorá prislúcha parametru h v okolí hodnoty $h = \infty$ má bod S_0 za aspoň $s + 1$ násobný spoločný bod s krivkou $\mathfrak{R}_{np}$.

Dôkaz. Vzhľadom k predpokladu kolineárnosti vektorov (20) môžeme voliť reálne čísla b, c tak, že rovnica (18) bude stupňa maximálne $p - s - 1$. Bod S_0 musí nahradiť aspoň $s + 1$ priesečníkov priamky m a krivky $\mathfrak{R}_{np}$. Je teda ich spoločným aspoň $s + 1$ násobným bodom.

Dôsledok. K tomu, aby krivka $\mathfrak{R}_{np}$ bola p-násobne prebiehanou priamkou, je nutné a stačí, aby vektory $\mathbf{W}_n^1, \ldots, \mathbf{W}_n^p$ boli kolineárne, nie všetky nulové. Nutnosť plynie zo vzťahu (13).

8. Tento odsek je venovaný nevlastným bodom krivky $\mathfrak{R}_{np}$.

Veta 5. Krivka $\mathfrak{R}_{np}$ má p (nie nutne rôznych a nie nutne reálnych) nevlastných bodov $\mathsf{S}_n(h_1), \ldots, \mathsf{S}_n(h_p)$, kde čísla $h_1, \ldots, h_p$ sú korene rovnice

$$2\pi h^p + r_n^1 h^{p-1} + \ldots + r_n^p = 0$$

a rovnice

$$\int_0^{2\pi} [r(t) + h]^n \, dt = 0. \tag{21}$$

Dôkaz. Do rovnice nevlastnej priamky $x_0 = 0$ dosaďme zo vzťahu (15). Každý koreň tejto rovnice je podľa (14) aj koreňom rovnice

$$2\pi h^n + q_n^1 h^{n-1} + \ldots + q_n^n = 0,$$

ktorá podľa (11), (12) a (13) je ekvivalentná s rovnicou (21).

Veta 6. Množina $\mathfrak{S}_n$ je ohraničená.

Dôkaz. Množina $\mathfrak{S}_n$ sa skladá z bodov $\mathsf{S}_n(h)$ pre reálne $h \in (h_0, \infty)$. Ak vnútro oblasti, obmedzenej oválom $\mathbf{o}(h)$ označíme $\operatorname{int} \mathbf{o}(h)$, potom zrejme $\mathsf{S}_n(h) \in \operatorname{int} \mathbf{o}(h)$. Odtiaľ predovšetkým plynie, že množina $\mathfrak{S}_n$ neobsahuje nevlastné body, a teda vektorová funkcia (13) je v intervale (h_0, ∞) spojitá. Nakoľko podľa vety 1 bod $\mathsf{S}_n(h)$ limituje (pre h idúce do plus nekonečna) k bodu S_0, existuje číslo $H > h_0$ tak, že pre všetky $h > H$ leží bod $\mathsf{S}_n(h)$ vnútri kruhu K so stredom v bode S_0 a polomerom rovným 1. Ďalej je pre $h \leqq H$: $\mathsf{S}_n(h) \in \operatorname{int} \mathbf{o}(h) \subseteq \operatorname{int} \mathbf{o}(H)$. Pre všetky $h \in (h_0, \infty)$ je

$$\mathsf{S}_n(h) \in \mathsf{K} \cup \operatorname{int} \mathbf{o}(H).$$

Pretože aj množina K, aj množina $\operatorname{int}\mathfrak{o}(H)$ sú ohraničené, je aj množina $\mathfrak{S}_n$ ohraničená.

Dôsledok. Bod $\mathsf{S}_n(h_0)$ je vždy vlastným bodom.

9. Obráťme sa na vyšetrovanie konkrétnych kriviek $\mathfrak{R}_{1p}$ a $\mathfrak{R}_{2p}$ a množín $\mathfrak{S}_1$ a $\mathfrak{S}_2$. Pre $\mathfrak{R}_{1p}$ môže byť $p = 0$ a $p = 1$. Podľa vety 2 a vzťahov (11) je $p = 0$ vtedy a iba vtedy, keď je $\mathfrak{S}_1$ jednobodová, čo je rovnocenné s tvrdením $\mathbf{W}_1^1 = \mathbf{O}$, čiže $\mathbf{V}_1 = \mathbf{O}$ a toto podľa (11) zasa s tvrdením

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{R}(t)\, r(t)\, dt = \mathbf{O}. \tag{*}$$

Integrál na ľavej strane tejto rovnice udáva sprievodič-vektor ťažiska oválu ϑ rovnica je ekvivalentná s výrokom: ťažisko a Steinerov stred oválu splynú. Konečné zhrnutie dáva

Veta 7. Buď $\mathfrak{o}(h) \equiv \mathfrak{v}$, $h > h_0$ vrstva oválov. Nasledujúce výroky sú ekvivalentné:

a) existuje ovál $\mathfrak{o}(\bar{h}) \in \mathfrak{v}$, v ktorom splynie Steinerov stred a ťažisko;
b) v každom ovále $\mathfrak{o}(h) \in \mathfrak{v}$ splynie Steinerov stred a ťažisko;
c) pre krivku $\mathfrak{R}_{1p}$ je $p = 0$;
d) množina $\mathfrak{S}_1$ je jednobodová;
e) platí rovnica (*).

Prejdime k prípadu $p = 1$. Podľa (11), (12) a (13) možno rovnicu priamky $\mathfrak{R}_{11}$ zapísať v tvare

$$\mathsf{S}_1(h) = \frac{\mathbf{V}_1}{2\pi h + \mathrm{L}}, \tag{22}$$

kde L je dĺžka základného oválu $\mathfrak{o}$. Parametru $h = -\dfrac{\mathrm{L}}{2\pi}$ odpovedá nevlastný bod priamky $\mathfrak{R}_{11}$.

Veta 8. Nech je krivka $\mathfrak{R}_{1p}$ priamkou. Potom jej vektorová rovnica je daná vzťahom (22). Množina $\mathfrak{S}_1$ je otvorená úsečka s koncovými bodmi S_0 a $\mathsf{S}_1(h_0)$.

Dôkaz. Podľa vety 1 a vety 6 je $\mathfrak{S}_1$ úsečkou. Z monotónnosti funkcie (22) v intervale (h_0, ∞) plynie, že body $\mathsf{S}_1(h_0)$ a $\mathsf{S}_0 = \lim\limits_{\to +\infty} h^{-1}\, \mathsf{S}_1(h)$ sú koncové body úsečky $\mathfrak{S}_1$.

10. Prejdime k vyšetrovaniu krivky $\mathfrak{R}_{2p}$. Podľa (11), (12) a (13) je

$$\mathsf{S}_2(h) = \frac{\mathbf{W}_2^1 h + \mathbf{W}_2^2}{q_2^0 h^2 + q_2^1 h + q_2^2} = \frac{\mathbf{V}_1 h + \mathbf{V}_2}{2\pi h^2 + 2Lh + Q}, \tag{23}$$

kde $Q = q_2^2$.

Veta 9. Buď $\mathfrak{o}(h)$, $h > h_0$ vrstva oválov. Nasledujúce výroky sú rovnocenné: vektory $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ sú nulové; pre krivku $\mathfrak{R}_{2p}$ je $p = 0$; množina $\mathfrak{S}_2$ je jednobodová,

ďalej sú rovnocenné tieto výroky:

vektory $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ sú kolineárne, nie oba nulové; pre krivku $\mathfrak{R}_{2p}$ je $p = 1$; množina $\mathfrak{S}_2$ je úsečkou,

konečne sú rovnocenné tieto výroky:

vektory $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ sú lineárne nezávislé; krivka $\mathfrak{R}_{2p}$ je elipsou a $p = 2$; množina $\mathfrak{S}_2$ je eliptickým oblúkom.

Dôkaz. Prvá skupina výrokov je v podstate veta 2 pre $n = 2$. Druhá časť tvrdenia plynie z vety 3 a vety 4. Podľa horeuvedeného a vzťahu (23) je zrejmé, že lineárna nezávislosť vektorov $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ je rovnocenná s podmienkou $p = 2$, a táto s tvrdením, že $\mathfrak{S}_2$ je časťou regulárnej kužeľosečky. Ukážeme, že táto kužeľosečka je elipsou. Nech $\mathsf{S}_2(h_1)$ je nevlastný bod kužeľosečky $\mathfrak{R}_{22}$. Podľa vety 5 musí číslo h_1 vyhovovať rovnici

$$\int_0^{2\pi} [r(t) + h]^2 \, dt = 0 .$$

Funkcia $r(t)$ je nekonštantná (pozri poslednú vetu odseku 1) a spojitá. Preto pre reálne h bude horný integrál vždy kladné číslo.

Môžeme preto písať $h_1 = a + ib$, kde $a, b \neq 0$ sú reálne. Po dosadení čísla h_1 do (14) obdržíme

$$\mathsf{S}_2^*(h_1) = (0; y_2{}_2^1 a + y_2^2 + iby_2^1;\ z_2^1 a + z_2^2 + ibz_2^1) .$$

Bod $\mathsf{S}_2^*(h_1)$ je reálny práve vtedy, keď existuje komplexné číslo $c + id$ tak, že obe súradnice bodu $(c + id)\ \mathsf{S}_2^*(h_1)$ sú reálne. Posledná podmienka vedie na sústavu dvoch homogénnych rovníc pre dve neznáme c, d:

$$c\, by_2^1 + d(ay_2^1 + y_2^2) = 0$$
$$c\, bz_2^1 + d(az_2^1 + z_2^2) = 0 .$$

Nutná podmienka pre riešiteľnosť tejto sústavy je anulovanie determinantu sústavy; ak uvážime $b \neq 0$, dostávame odtiaľ ihneď lineárnu závislosť vektorov $\mathbf{V}_1$ a $\mathbf{V}_2$, čo je spor s predpokladom. Nevlastné body kužeľosečky $\mathfrak{R}_{22}$ sú preto nereálne, a kužeľosečka je preto elipsou.

Dôsledok. Ak sú vektory $\mathbf{V}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{V}_2$ lineárne závislé, potom sú priamky $\mathfrak{R}_{21}$ a $\mathfrak{R}_{11}$ totožné. Ak pre krivku $\mathfrak{R}_{2p}$ je $p = 0$, potom aj pre krivku $\mathfrak{R}_{1p}$ je $p = 0$.

Pokúsme sa trochu bližšie charakterizovať elipsu $\mathfrak{R}_{22}$. Nech h, k sú reálne čísla pre ktoré body $\mathsf{S}_2(h)$, $\mathsf{S}_2(k)$ sú diametrálne body elipsy $\mathfrak{R}_{22}$. Potom, ak čiarkou značíme deriváciu podľa parametru h, platí: vektory $\mathbf{S}_2'(h)$ a $\mathbf{S}_2'(k)$

sú kolineárne. Jednoduchým výpočtom prevedieme poslednú podmienku na požiadavku lineárnej závislosti vektorov

$$\mathbf{V}_1(2h^2 - Q) + \mathbf{V}_2(4h + 2L)$$

a

$$\mathbf{V}_1(2k^2 - Q) + \mathbf{V}_2(4k + 2L).$$

Vzhľadom na lineárnu nezávislosť vektorov $\mathbf{V}_1$ a $\mathbf{V}_2$ plynie z uvedeného

$$\begin{vmatrix} 2\pi h^2 - Q & 4\pi h + 2L \\ 2\pi k^2 - Q & 4\pi k + 2L \end{vmatrix} = 0,$$

t. j.

$$4\pi(h - k)(2\pi hk + Lh + Lk + Q) = 0.$$

Pretože $h = k$ je triviálny prípad, je hľadaná podmienka

$$2\pi hk + L(h + k) + Q = 0. \tag{24}$$

Veta 10. Nech je $\mathfrak{R}_{22}$ elipsou. Body $S_2(h)$, $S_2(k)$ sú diametrálne práve, keď parametre h, k vyhovujú podmienke (24), pričom pre parameter $h = \infty$ (resp. $k = \infty$) má táto podmienka tvar

$$k = -\frac{L}{2\pi}, \quad \left(\text{resp. } h = -\frac{L}{2\pi}\right). \tag{24'}$$

Dôkaz. Vzťah (24) — nutnosť aj postačujúcosť — bol dokázaný vyššie. Stačí však prejsť vo (24) k limite pre $h \to \infty$ (resp. $k \to \infty$), a máme dokázaný aj dodatok (24').

Veta 11. Nech je $\mathfrak{R}_{22}$ elipsou. Sprievodič — vektor $\mathbf{M}$ jej stredu M je daný vzťahom

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{V}_1 L - 2\mathbf{V}_2}{2L^2 - 4\pi Q}. \tag{25}$$

Dôkaz. Podľa predošlej vety je k bodu $S_0 \equiv S_2(\infty)$ diametrálne protiľahlý bod $S_2\left(-\frac{L}{2\pi}\right)$. Je preto

$$2\mathbf{M} = \mathbf{S}_2\left(-\frac{L}{2\pi}\right).$$

Po dosadení posledného do (23) a úprave, obdržíme vzťah (25).

Adresa autora: Katedra geometrie PFUK, Bratislava, Šmeralova 2.

Do redakcie prišlo 15. apríla 1965.

Обобщение понятия центр кривизны овала штайнера

М. ГЕЙНЫ

Резюме

Овалом $\mathfrak{o}$ будем называть замкнутую плоскую кривую, внутренняя часть которой выпукла и всякая точка которой овладает соприкасающейся окружностью. Если нагрузить каждую точку овала $\mathfrak{o}$ весом ровным n—1 ой степени радиуса кривизны, то центр тяжести полученной кривой обозначим S_n и назовем n-степенный центр кривизны овала штайнера. Однопараметрическое семейство овалов, паралеллных овалу $\mathfrak{o}$ обозначим $\mathfrak{v}$. Множество всех центров S_n семейства $\mathfrak{v}$ обозначим $\mathfrak{S}_n$.

Я. Штайнер показал что множество $\mathfrak{S}_0$ состоится с одной лиш точки — это (простой) центр овала штайнера. Кубота, продолжая эти мысли доказал, что множество $\mathfrak{S}_1$ принадлежит одной прямой. В статье доказано что $\mathfrak{S}_n$ является частью алгабраической кривой $\mathfrak{R}_{pn}$ степени $p \leqq n$. Кривая $\mathfrak{R}_{pn}$ неприводима и содержит точку S_0. Конечно доказывается, что $\mathfrak{R}_{22}$ является эллипсом и найдены координаты его центра.

Generalisation of the Steiner's centrum of curvature of the oval

M. HEJNÝ

Resume

By oval $\mathfrak{o}$ we mean the plane closed curve with convex interior, which has the osculating circle in each of its points. A centre of gravity of the oval $\mathfrak{o}$, whose every point is weighed upon by a mass equal to $n - 1$ power of the radius of curvature of the oval $\mathfrak{o}$ in this point, we shall call n-power Steiner's centrum S_n of $\mathfrak{o}$. By $\mathfrak{v}$ we denote a one-parametric family of ovals $\mathfrak{o}(h)$ parallel with the oval $\mathfrak{o}$. The set of all centrums S_n of ovals from $\mathfrak{v}$ we denote by $\mathfrak{S}_n$.

J. Steiner showed that the set $\mathfrak{S}_0$ consists only of one point — the Steiner's centrum of curvature of $\mathfrak{o}$. Kubota showed that the $\mathfrak{S}_1$ is part of a straight line. We prooved that $\mathfrak{S}_n$ is part of the algebraic curve $\mathfrak{R}_{np}$ of $p \leqq n$ degree. This curve is irreducible and contains the Steiner's centrum S_0. The set $\mathfrak{S}_n$ is bounded. Than we give some analytic conditions for number p in $\mathfrak{R}_{np}$. At least it is shown, that $\mathfrak{R}_{22}$ is an ellipse and its centrum is found.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. X., FASC. VII. MATHEMATICA XIV. 1966

O asociatívnych operáciach na určitých triedach sväzov

J. BADIDA

V tejto práci, ako v prácach [2] a [3], zaoberáme sa problémom o existencii asociatívnych a komutatívnych operácií na určitých triedach sväzov, pričom tieto operácie sú rôzne v porovnaní s operáciami priameho a voľného súčinu. Tento problém pre grupy bol položený A. G. Kurošom v [4] a pre sväzy sformulovaný v [2].

Pojmy a označenia používame ako v prácach [2], [3] a čiastočne ako v knihe [1]. Pripomeňme hlavne nasledujúcu definíciu:

Nech $\{C_\nu\}$ $(\nu \in M)$ je množina sväzov. Nech každý zo sväzov C_ν obsahuje najmenší prvok O_ν. Diskrétnym priamym súčinom sväzov C_ν budeme rozumieť množinu C všetkých zobrazení f množiny M do $\cup C_\nu$, pre ktoré platí:

a) pre každé $\nu \in M$ je $f(\nu) \in C_\nu$,

b) ak $f[O]$ je množina všetkých $\nu \in M$, pre ktoré $f(\nu) = O_\nu$, potom množina $M - f[O]$ je konečná.

V množine C sú definované sväzové operácie po zložkách. ak $f, g \in C$ potom $f \cap g$ je ten prvok $h \in C$, ktorý pre každé $\nu \in M$ spĺňa rovnicu $f(\nu) \cap g(\nu) = h(\nu)$; podobne sa definuje $f \cup g$.

V ďalšom texte diskrétny priamy súčin (sväzov $C_\nu(\nu \in M)$) budeme označovať $\Pi C_\nu(\nu \in M)$, voľný súčin $\Pi^* C_\nu(\nu \in M)$.

§ 1. Operácia $\tilde{\zeta}$ na triede $\tilde{\Omega}$

Nech $\overline{\Omega}$ je trieda všetkých sväzov, ktoré obsahujú najväčší prvok. Tento prvok budeme označovať symbolom 1, prípadne indexami vyjadrujúcimi, do ktorého sväzu príslušný prvok patrí.

Symbolom $\bar{\boldsymbol{\zeta}}$ budeme označovať operáciu na triede $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$, ktorá je definovaná duálne k operácii $\boldsymbol{\zeta}$, o ktorej sme hovorili v práci [2]. Ak $\bar{\boldsymbol{\Gamma}} = \{\bar{A}_\nu\}$ ($\nu \in M$), pričom $\bar{A}_\nu$ sú navzájom disjunktné sväzy z triedy $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$, potom sväz, ktorý je priradený operáciou $\bar{\boldsymbol{\zeta}}$ množine $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}$, budeme označovať symbolom $\bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}})$.

Z toho, že operácie $\boldsymbol{\zeta}$, $\bar{\boldsymbol{\zeta}}$ sú navzájom duálne, vyplýva, že pre operáciu $\bar{\boldsymbol{\zeta}}$ sú splnené vlastnosti *a*), *b*), *c*), ktoré sú vyslovené v úvode už spomenutej práce [2].

V tomto paragrafe ďalej budeme definovať určitú triedu sväzov $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$, potom na tejto triede zavedieme operáciu, ktorú označíme $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ a dokážeme, že pre operáciu $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ sú splnené vlastnosti *a*), *b*), *c*), ktoré sú definované v úvode [2].

Definícia 1,1. Budeme hovoriť, že sväz L patrí do triedy $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$, keď platí: sväz L sa dá práve jedným spôsobom vyjadriť vo tvare $L = X \cup Y$, kde X, Y sú neprázdne podsväzy v L tak, že

1) ak $x \in X$, $y \in Y$, potom $x \leq y$ v L,

2) sväz X obsahuje najväčší a sväz Y obsahuje najmenší prvok,

3) množinový prienik sväzov X, Y je jednoprvková množina.

Poznámka 1. Reťazec, obsahujúci viac ako jeden prvok, nepatrí do triedy $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$, lebo takýto reťazec sa dá viacerými spôsobmi rozložiť na dva podsväzy, splňujúce podmienky 1), 2), 3.)

Definícia 1,2. Nech sväz L patrí do triedy $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$. Nech X, Y majú rovnaký význam ako v definícii 1,1. Potom sväz L budeme označovať symbolom

$$X \circ Y. \tag{1}$$

Sväzu X budeme hovoriť dolná a sväzu Y horná časť sväzu L. Prvok, ktorý súčasne patrí do X aj do Y, budeme označovať symbolom e (prípadne indexami, vyjadrujúcimi, do ktorého sväzu príslušný prvok patrí).

Poznámka 2. Veľmi ľahko sa môžeme presvedčiť, že ak vo vyjadrení (1) je dolná (horná) časť sväzu L jednoprvková množina, potom sväz L patrí do triedy $\bar{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{\Omega})$. Pritom $\boldsymbol{\Omega}$ je trieda všetkých sväzov, ktoré obsahujú najmenší prvok (porov. [2], § 3).

Definícia 1,3. Nech $L_\nu = X_\nu \circ Y_\nu (\nu \in M)$ sú ľubovoľné, navzájom disjunktné sväzy z triedy $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$. Nech $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} = \{L_\nu\}$. Symbolom $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}})$ budeme označovať sväz, ktorého prvky tvoria množinu

$$\bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}}) \cup \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma}),$$

pričom najväčší prvok sväzu $\bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}})$ a najmenší prvok sväzu $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$ považujeme za totožný; pre každé $x \in \overline{\zeta}(\overline{\Gamma})$, $y \in \zeta(\Gamma)$ (kde $\overline{\Gamma} = \{X_\nu\}$, $\Gamma = \{Y_\nu\}$ $(\nu \in M)$) kladieme $x \leqq y$ a čiastočné usporiadanie v $\overline{\zeta}(\overline{\Gamma})$, $\zeta(\Gamma)$ sa zachováva. (Pre sväz $\zeta(\Gamma)$ pozri [2], § 3.)

Ľahko sa môžeme presvedčiť o tom, že pre vyjadrenie

$$\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma}) = \overline{\zeta}(\overline{\Gamma}) \cup \zeta(\Gamma) \tag{2}$$

sväzu $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma})$, pričom $\overline{\zeta}(\overline{\Gamma})$, $\zeta(\Gamma)$ majú rovnaký význam ako v predchádzajúcom, sú splnené podmienky 1), 2) a 3), ktoré sú vyslovené v definícii 1,1.

Lemma 1,1. *Nech $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma}) = X \cup Y$, pričom X, Y sú podsväzy sväzu $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma})$ tak, že sú tiež splnené podmienky 1), 2), 3) definície 1,1. Ak $X \subset \overline{\zeta}(\overline{\Gamma})$, $X \neq \overline{\zeta}(\overline{\Gamma})$, potom platí $Y \supset \zeta(\Gamma)$, $Y \neq \zeta(\Gamma)$ a obrátene.*

Dôkaz. Podľa predpokladu vyjadrenia sväzu $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma})$ v tvare (2) a $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma}) = X \cup Y$, pričom $\overline{\zeta}(\overline{\Gamma})$, $\zeta(\Gamma)$, X a Y sú podsväzy sväzu $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma})$, splňujú podmienky 1), 2), 3) definície 1,1. Nech $X \subset \overline{\zeta}(\overline{\Gamma})$, $X \neq \overline{\zeta}(\overline{\Gamma})$. Označme $\overline{\zeta}(\overline{\Gamma}) \cap \zeta(\Gamma) = \{e\}$, $X \cap Y = \{e'\}$. Je zrejmé, že $X = \{z \mid z \leqq e'\}$, $Y = \{z \mid z \geqslant e'\}$ $(\overline{\zeta}(\overline{\Gamma}) = \{z \mid z \leqq e\}$, $\zeta(\Gamma) = \{z \mid z \geqslant e\})$. Keďže $X \subset \overline{\zeta}(\overline{\Gamma})$, $X \neq \overline{\zeta}(\overline{\Gamma})$ a $e' \in X$, potom $e' \in \overline{\zeta}(\overline{\Gamma})$, pričom $e' < e$. Nech $z \in \zeta(\Gamma)$, potom $z \geqslant e$ a teda $z > e'$, z čoho vyplýva, že $z \in Y$, takže $Y \supset \zeta(\Gamma)$. Keďže $e' \neq e$, potom zrejme $Y \neq \zeta(\Gamma)$, čím je prvé tvrdenie dokázané.

Druhé tvrdenie, t. j. obrátené k predchádzajúcemu, sa dokáže analogicky.

Lemma 1,2. *Nech $\tilde{\Gamma} = \{L_\nu\}$ $(\nu \in M)$, $L_\nu = X_\nu \cup Y_\nu$, je systém navzájom disjunktných sväzov z triedy $\tilde{\Omega}$. Nech $\Gamma = \{Y_\nu\}$ $(\nu \in M)$, $\overline{\Gamma} = \{X_\nu\}$ $(\nu \in M)$. Nech aspoň jeden zo sväzov $Y_\nu(X_\nu)$ neobsahuje najväčší (najmenší) prvok. Potom sväz $\zeta(\Gamma)$ $(\overline{\zeta}(\overline{\Gamma}))$ neobsahuje najväčší (najmenší) prvok.*

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady vyslovené v lemme. Potom z vlastnosti 2) definície 1,1 vyplýva, že sväzy Y_ν obsahujú najmenší prvok. Utvorme sväzy $\zeta(\Gamma)$, ΠY_ν $(\nu \in M)$, pričom ΠY_ν $(\nu \in M)$ je diskrétny priamy súčin sväzov Y_ν. Keďže podľa predpokladu aspoň jeden zo sväzov Y_ν neobsahuje najväčší prvok, potom z lemmy 6,1 v [2] vyplýva, že sväz ΠY_ν $(\nu \in M)$ tiež neobsahuje najväčší prvok. Nech S má význam ako v definícii 3,2 v [2]. Keďže sväz ΠY_ν $(\nu \in M)$ je homomorfným obrazom sväzu $\xi(\Gamma) = \Pi^* Y_\nu(\nu \in M)$, potom $\Pi Y_\nu(\nu \in M)$ je tiež homomorfným obrazom voľného sväzu S. Homo morfizmus sväzu S na sväz $\Pi Y_\nu(\nu \in M)$ určuje istú kongruenciu, ktorú označme K. Nech Ψ_ζ má rovnaký význam ako v definícii 3,1 b) v [2]. Podľa konštrukcie sväzu $\zeta(\Gamma)$ je $\dot{\Psi}_\zeta$ (pozri definíciu 1,4 v [2]) najmenšia kongruencia na sväze S, v ktorej sú všetky prvky O_α, O_β navzájom kongruentné (pre každé $\alpha, \beta \in M$). Z definície diskrétneho priameho súčinu (pozri úvod) vyplýva, že v kongruencii K sú všetky prvky O_α, O_β tiež navzájom kongruentné. Takže $\dot{\Psi}_\zeta \leqq K$, z čoho vyplýva, že sväz $\Pi Y_\nu (\nu \in M)$ je homomorfným obrazom sväzu $\zeta(\mathbf{\Gamma})$. Keďže sväz $\Pi Y_\nu (\nu \in M)$ neobsahuje najväčší prvok, potom z predchádzajúceho vyplýva, že ani sväz $\zeta(\mathbf{\Gamma})$ neobsahuje najväčší prvok.

Druhá časť tvrdenia lemmy 1,2 sa dokáže obdobným spôsobom. (Pri dôkaze treba si uvedomiť, že operácia $\bar{\zeta}$ je duálna k operácii ζ a tiež, že v diskrétnom priamom súčine $\Pi X_\nu (\nu \in M)$ na miesto najmenších prvkov berieme najväčšie prvky sväzov X_ν.)

Lemma 1,3. *Nech* $\tilde{\zeta}(\tilde{\mathbf{\Gamma}}) = \bar{\zeta}(\bar{\mathbf{\Gamma}}) \cup \zeta(\mathbf{\Gamma})$, $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$, $\bar{\mathbf{\Gamma}}$ *a* $\mathbf{\Gamma}$ *majú význam ako v predchádzajúcom. Nech* $\zeta(\mathbf{\Gamma})$, $\bar{\zeta}(\bar{\mathbf{\Gamma}})$ *obsahujú viac ako jeden prvok. Potom podsväz* $\zeta(\mathbf{\Gamma})$, *respektíve podsväz* $\bar{\zeta}(\bar{\mathbf{\Gamma}})$, *svazu* $\tilde{\zeta}(\tilde{\mathbf{\Gamma}})$ *sa nedá vyjadriť v tvare množinového súčtu dvoch svojich podsväzov tak, že sú splnené podmienky 1), 2), 3) definície 1,1, pričom dolná časť sväzu* $\zeta(\mathbf{\Gamma})$, *respektíve horná časť sväzu* $\bar{\zeta}(\bar{\mathbf{\Gamma}})$, *má viac ako jeden prvok.*

D ô k a z. Nech sú splnené predpoklady vyslovené v lemme. Vyberme vo sväze $\zeta(\mathbf{\Gamma})$ tie prvky $\bar{x}$ (prvky sväzu $\zeta(\mathbf{\Gamma})$ sú zrejme triedy), ktoré obsahujú (ako svoj prvok) prvok $x \in; Y_\nu$, pričom x prebieha celú množinu Y_ν. Množinu takto vybratých prvkov $\bar{x}$ označme Y'_ν. Je známe (pozri [2]), že Y'_ν je podsväzom v $\zeta(\mathbf{\Gamma})$, pričom $\cup\, Y'_\nu\ (\nu \in M)$ je množina generátorov pre sväz $\zeta(\mathbf{\Gamma})$ a pre každé $\nu \in M$ je

$$(2') \qquad Y'_\nu \cong Y_\nu .$$

Predpokladajme teraz, že sväz $\zeta(\mathbf{\Gamma})$ sa dá vyjadriť v tvare $\zeta(\mathbf{\Gamma}) = A \cup B$, pričom A, B sú podsväzy v $\zeta(\mathbf{\Gamma})$ tak, že sú splnené podmienky 1), 2), 3) definície 1,1 a množina A obsahuje viac ako jeden prvok. Potom $A \cap B$ je jednoprvková množina, ktorej prvok označme e'. Je zrejmé, že $e' > e$ (e je najmenší prvok v $\zeta(\mathbf{\Gamma})$), lebo A podľa predpokladu obsahuje viac ako jeden prvok. Tiež je zrejmé, že s prvkom $e' \in \zeta(\mathbf{\Gamma})$ neexistujú neporovnateľné prvky.

Predpokladajme, že e' je najväčším prvkom v $\zeta(\mathbf{\Gamma})$. Potom vyjadrenie $\zeta(\mathbf{\Gamma}) = A \cup B$ je také, že B je jednoprvková množina, t. j. $B = \{e'\}$ (zrejme tiež $e' \in A$). Keďže podľa predpokladu $\zeta(\mathbf{\Gamma})$ obsahuje viac ako jeden prvok, potom z konštrukcie sväzu $\zeta(\mathbf{\Gamma})$ (pozri [2], § 3) vyplýva, že aspoň pre jedno $\nu \in M$ existuje sväz Y_ν taký, že obsahuje viac ako jeden prvok. Keďže Y_ν je hornou časťou sväzu L_ν, patriaceho do triedy $\tilde{\mathbf{\Omega}}$, potom Y_ν nemôže obsahovať najväčší prvok. Potom podľa lemmy 1,2 aj sväz $\zeta(\mathbf{\Gamma})$ neobsahuje najväčší prvok, čo je spor s predpokladom. Teda e' nie je najväčším prvkom sväzu $\zeta(\mathbf{\Gamma})$.

Keďže e' nie je najväčším prvkom v $\zeta(\Gamma)$, potom v $\zeta(\Gamma)$ musia existovať prvky väčšie ako e'. Z konštrukcie sväzu $\zeta(\Gamma)$ je zrejmé, že najmenšie prvky sväzov Y_ν sú navzájom kongruentné a sú obsiahnuté v najmenšom prvku $e \in \zeta(\Gamma)$. Podľa predpokladu dolná časť A sväzu $\zeta(\Gamma)$ obsahuje viac ako jeden prvok, pričom e' je najväčší a e najmenší prvok sväzu A, $e' > e$. Ďalej $\cup Y'_\nu (\nu \in M)$ je množina generátorov pre sväz $\zeta(\Gamma)$. Z toho potom vyplýva, že musí existovať aspoň jedno $\nu_0 \in M$ tak, že $Y'_{\nu_0} \subset \zeta(\Gamma)$ obsahuje viac ako jeden prvok a popri tom obsahuje aj také prvky, ktoré sú väčšie ako e' a spolu s prvkom e' (zrejme aj s niektorými prvkami ostatných sväzov Y'_ν) vytvárajú hornú časť sväzu $\zeta(\Gamma)$, t. j. podsväz B. Pretože prvok e' nie je najmenším a ani najväčším prvkom sväzu $\zeta(\Gamma)$ a ďalej vo sväze $\zeta(\Gamma)$ neexistujú s e' neporovnateľné prvky, potom z toho a z predchádzajúceho vyplýva, že sväz Y_{ν_0} by sa dal vyjadriť v tvare $Y'_{\nu_0} = C \cup D$, kde C, D sú podsväzy (nie však jednoprvkové) v Y'_{ν_0} také, že sú splnené podmienky z definície 1,1; pričom prvky sväzu $C(D)$ sú zložky prvkov sväzu $A(B)$. Potom odpovedajúci sväz Y_{ν_0} k sväzu Y'_{ν_0}, pri izomorfizme (2'), by sa dal vyjadriť ako množinový súčet dvoch (nie jednoprvkových) svojich podsväzov tak, že by boli splnené podmienky definície 1,1, čo je spor, lebo sväz L_{ν_0}, ktorého Y_{ν_0} je hornou časťou, je z triedy $\tilde{\Omega}$. Z toho potom vyplýva aj spor s predpokladom vysloveným na začiatku dôkazu lemmy 1,3.

Druhé tvrdenie lemmy 1,3 sa dokáže obdobným spôsobom.

Veta 1,1. *Nech* $\tilde{\Gamma} = \{L_\nu\}$ $(\nu \in M)$ *je systém navzájom disjunktných sväzov, z ktorých každý patrí do triedy* $\tilde{\Omega}$. *Potom sväz* $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma})$ *patrí tiež do triedy* $\tilde{\Omega}$, *pričom* $\bar{\zeta}(\bar{\Gamma})$ *je dolná a* $\zeta(\Gamma)$ *horná časť sväzu* $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma})$.

Dôkaz. Nech $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma})$, $\bar{\zeta}(\bar{\Gamma})$, $\zeta(\Gamma)$, $\tilde{\Gamma}$, $\bar{\Gamma}$ a Γ majú význam ako v predošlom. Ak sväzy $\bar{\zeta}(\bar{\Gamma})$, $\zeta(\Gamma)$ obsahujú iba po jednom prvku, potom tvrdenie vety je zrejmé. Ak $\bar{\zeta}(\bar{\Gamma})$ obsahuje iba jeden prvok a $\zeta(\Gamma)$ viac ako jeden prvok, alebo obrátene, potom tvrdenie vety vyplýva z lemmy 1,3. V ďalšom teda predpokladajme, že podsväzy $\bar{\zeta}(\bar{\Gamma})$, $\zeta(\Gamma)$ sväzu $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma})$ obsahujú viac ako jeden prvok. Ďalej predpokladajme, že sväz $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma})$ za týchto podmienok nepatrí do triedy $\tilde{\Omega}$. Teda existuje vyjadrenie $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma}) = X \cup Y$, rôzne od vyjadrenia (2), pričom X, Y sú podsväzy v $\tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma})$ také, že sú splnené podmienky 1), 2), 3) definície 1 1. V tomto prípade môžu nastať tri možnosti.

1. Predpokladajme najprv že $Y \subset \zeta(\Gamma)$ $Y \neq \zeta(\Gamma)$. Podľa lemmy 1,1 je potom $X \supset \bar{\zeta}(\bar{\Gamma})$ $X \neq \bar{\zeta}(\bar{\Gamma})$. Označme $\zeta(\Gamma) - Y = E$. Keďže $X \cup Y = \tilde{\zeta}(\tilde{\Gamma})$

$\bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}}) \cup \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma}) = \tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}})$ a obe tieto vyjadrenia splňujú podmienky definície 1,1, potom z toho vyplýva, že $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma}) \cap X = E$ a teda E je podsväzom v $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$ (zrejme tiež podsväzom v $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}})$). Z toho ďalej vyplýva, že sväz $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$ sa dá vyjadriť v tvare $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma}) = E \cup Y$, pričom sú splnené podmienky 1), 2), 3) definície 1,1, čo je spor s prvým tvrdením lemmy 1,3 a teda aj s predpokladom, že $Y \subset \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$, $Y \neq \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$. Teda musí byť $Y = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$ (zrejme tiež $X = \bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}})$).

2. Teraz predpokladajme, že $Y \supset \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$, $Y \neq \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$. Potom podľa lemmy 1,1 stačí urobiť analogickú úvahu, ako v predchádzajúcom, pre $X \subset \bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}})$, $X \neq \bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}})$ a použiť druhé tvrdenie lemmy 1,3.

3. Nakoniec predpokladajme, že $Y \parallel \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$. Potom zrejme $e' \parallel e$ (kde e', e majú význam ako v dôkaze lemmy 1,1) a teda $e' \notin \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$, $e' \notin \bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}})$, z čoho vyplýva, že $e' \notin \tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}})$, čo je spor.

Tým sme teda dokázali, že sväz $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}})$ sa dá práve jedným spôsobom vyjadriť v tvare (2), kde $\bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}})$, $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$ sú podsväzy v $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}})$ tak, že sú splnené podmienky definície 1,1 a teda patrí do triedy $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$. Podľa definície 1,2 teda

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}) = \bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}}) \circ \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma}),$$

pričom $\bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}})$ je dolná a $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$ je horná časť sväzu $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}})$.

Veta 1,2. *Pre operáciu $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$, definovanú na triede $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$, sú splnené vlastnosti a) a b), ktoré sú vyslovené v úvode* [2].

Dôkaz. Nech sväz L_ν (pre každé $\nu \in M$) je z triedy $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$, $L_\nu = X_\nu \bigcirc Y_\nu$. Nech X'_ν, respektíve Y'_ν, sú podsväzy sväzu $\bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}})$, respektíve sväzu $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$, také, že každý prvok $\bar{x} \in X'_\nu$, respektíve každý prvok $\bar{y} \in Y'_\nu$, obsahuje prvok $x \in X_\nu$, respektíve prvok $y \in Y_\nu$, pričom x, respektíve y prebieha celú množinu X_ν, respektíve Y_ν. Je známe, že $\cup X'_\nu$, respektíve $\cup Y'_\nu$, je množina generátorov pre sväz $\bar{\boldsymbol{\zeta}}(\bar{\boldsymbol{\Gamma}})$, respektíve pre sväz $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$, pričom pre každé $\nu \in M$ je

$$X'_\nu \cong X_\nu, \quad Y' \cong Y_\nu.$$

Nech L'_ν je množinový súčet sväzov X'_ν, Y'_ν. Je zrejmé, že $X'_\nu\, Y'_\nu$ je sväz, ktorý je izomorfný so sväzom $L_\nu = X_\nu \circ Y_\nu$. Podľa predchádzajúceho a konštrukcie sväzu $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}})$ je teda $\cup L'_\nu$ množina generátorov pre sväz $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}})$, čím je tvrdenie dokázané.

Veta 1,3. *Nech množina indexov $M = \cup M_i$, kde $i \in N$ a pre ľubovolné $j, k \in N$ nech je $M_j \cap M_k = \emptyset$; $\boldsymbol{\Gamma}_i = \{L_\nu\}$ $(\nu \in M_i)$. Operácia $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ je asociatívna, t. j.*

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}) \cong \tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_i)\}) \quad (i \in N).$$

D ô k a z. Keďže

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}) = \overline{\boldsymbol{\zeta}}(\overline{\boldsymbol{\Gamma}}) \circ \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_i)\}) = \overline{\boldsymbol{\zeta}}(\{\overline{\boldsymbol{\zeta}}(\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_i)\}) \circ \boldsymbol{\zeta}(\{\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\Gamma}_i)\}) \quad (i \in N),$$

potom dôkaz tejto vety vyplýva z vety 1,1 a z asociatívnosti operácie $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ a $\boldsymbol{\zeta}$.

2. O p e r á c i a δ_β na t r i e d e Θ_β

V tomto odseku symbolom Θ budeme označovať triedu všetkých sväzov.

Definícia 2,1. Nech $\{C_\nu\}$, kde ν prebieha nejakú (neprázdnu) množinu indexov M, je množina navzájom disjunktných sväzov. Nech C je množina všetkých takých funkcií f, ktoré zobrazujú množinu M do množiny $\cup C_\nu$, pričom pre každé $\nu \in M$ je $f(\nu) \in C_\nu$. Ak $f, g \in C$, položme $f \cup g = h$, kde $h \in C$, keď pre každé $\nu \in M$ je splnená rovnica $f(\nu) \cup g(\nu) = h(\nu)$; podobne sa definuje $f \cap g$. Budeme hovoriť, že C je priamym súčinom sväzov C_ν, čo budeme zapisovať $C = \boldsymbol{\Pi}^{\times} C_\nu$. Ak $M = \{1, 2, ..., n\}$, potom píšeme tiež $C = C_1 \times C_2 \times ... \times C_n$.

Je známe, že množina C, v ktorej sú vyššie popísaným spôsobom definované sväzové operácie, je sväz.

Definícia 2,2. Nech C je ľubovoľný sväz. Nech $x, y \in C$, pričom $x \leqq y$. Symbolom $r(x, y)$ budeme označovať ľubovoľný reťazec, v ktorom x je najmenším a y najväčším prvkom.

Definícia 2,3. Nech β je nekonečné kardinálne číslo. Nech S je ľubovoľný sväz, nech

$$S = A \oplus B, \tag{a}$$

kde A, B sú podsväzy sväzu S. Budeme hovoriť, že ordinálny rozklad (a) má vlastnosť (β), keď platí:

ak $x, y \in A$, $x \leqq y$, potom každý reťazec $r(x, y)$ má dĺžku menšiu ako β.

P o z n á m k a 3. V rozklade (a) v ďalšom budeme pripúšťať, že množina B môže byť aj prázdna.

Veľmi ľahko sa dá presvedčiť, že v danom prípade platia analogické lemmy k lemmám 2,1, 2,2, ktoré sú vyslovené a dokázané v [3], odsek 2.

Definícia 2,4. Symbolom Θ_β označme triedu všetkých sväzov S, ktoré sa dajú vyjadriť v tvare ordinálneho súčtu (a), majúceho vlastnosť (β).

Podľa lemmy 2,2 v [3] môžeme každému sväzu S z triedy Θ_β priradiť sväzy, ktoré označme $S(\beta)$ $\overline{S(\beta)}$, tak, že

$$S = S(\beta) \oplus \overline{S(\beta)}. \tag{b}$$

Rozklad (b) sväzu S chápeme v tom zmysle, že je „najväčším" rozkladom typu (β) a že pre každý iný rozklad $S = A \oplus B$ typu (β) je

$$A \subset S(\beta), \quad B \supset \overline{S(\beta)}.$$

Definícia 2,5. Nech $\{S_\nu\}$ $(\nu \in M)$, kde $S_\nu = S_\nu(\beta) \oplus \overline{S_\nu(\beta)}$ sú ľubovoľné navzájom disjunktné sväzy z triedy Θ_β Nech $\mathbf{\Gamma} = \{S_\nu\}$. Potom symbolom $\boldsymbol{\delta}_\beta(\mathbf{\Gamma})$ budeme označovať sväz

$$\Pi^\times S_\nu(\beta) \oplus \Pi^* \overline{S_\nu(\beta)}$$

(* znamená voľný súčin).

Voľný súčin $\Pi^* \overline{S\nu(\beta)}$ v definícii 2,5 chápeme v tom zmysle, že ak pre niektoré $\nu \in \overline{M}$ sú $\overline{S_\nu(\beta)} = \emptyset$, potom $\Pi^* \overline{S_\nu(\beta)} = \Pi^* \overline{S_\mu(\beta)}$, pričom $\nu \in M$, $\mu \in M \setminus \overline{M}$, kde $\overline{M}$ je množina všetkých tých $\nu \in M$, pre ktoré $\overline{S_\nu(\beta)} = \emptyset$.

Lemma 2,1. *Nech β je nekonečné kardinálne číslo. Nech $\{C_\nu\}$, kde ν prebieha konečnú množinu indexov M, je systém navzájom disjunktných sväzov. Nech každý zo sväzov C_ν splňuje podmienku:*

(A) *každý reťazec spojujúci dva ľubovoľné prvky $x, y \in C_\nu$ $(x \leqq y)$ má dĺžku menšiu ako β.*

Potom sväz $C = \Pi^\times C_\nu$ tiež splňuje podmienku (A).

Dôkaz. Nech $f, g \in C$ sú dva ľubovoľné prvky, pričom $f \leqq g$. Podľa definície 2,1 pre každé $\nu \in M$ je $f(\nu) = x_\nu$, $g(\nu) = y_\nu$, kde x_ν, $y_\nu \in C_\nu$. Nech $p(f, g)$ je ľubovoľný reťazec spojujúci prvky f, g. Pre pevné $\nu \in M$ nech R_ν je množina všetkých prvkov tvaru $h(\nu)$, kde h prebieha všetky prvky reťazca $r(f, g)$. Je zrejmé, že R_ν je reťazec spojujúci prvky x_ν, y_ν. Podľa predpokladu dĺžka každého z reťazcov R_ν je menšia ako nekonečné kardinálne číslo β. Nech E je množina všetkých $h' \in C$, pre ktoré platí:

$$f \leqq h' \leqq g;$$

$h'(\nu) \in R_\nu$ pre $\nu \in M$. Keďže pre každé $\nu \in M$ je kard $R_\nu < \beta$ a množina indexov M je mohutnosti menšej ako $\aleph_0$, z toho potom vyplýva, že množina E je tiež mohutnosti menšej ako nekonečné kardinálne číslo β, t. j. kard $E < \beta$. Keďže každý prvok $h \in r(f, g)$, potom je tiež $h \in E$ a teda kard $r(f, g) < \beta$, čím je tvrdenie lemmy dokázané.

Lemma 2,2. *Nech β je nekonečné kardinálne číslo. Nech $\mathbf{\Gamma} = \{S_\nu\}$ $(\nu \in M$, kard $M < \aleph_0)$. Potom rozklad sväzu $\boldsymbol{\delta}_\beta(\mathbf{\Gamma})$ v ordinálny súčet*

$$\boldsymbol{\delta}_\beta(\mathbf{\Gamma}) = \Pi^\times S_\nu(\beta) \oplus \Pi^* \overline{S_\nu(\beta)}$$

má vlastnosť (β).

Dôkaz vyplýva z lemmy 2,1 a z definície 2,3.

Lemma 2,3. *Rozklad sväzu $\boldsymbol{\delta}_\beta(\mathbf{\Gamma})$ v ordinálny súčet*

$$\boldsymbol{\delta}_\beta(\boldsymbol{\Gamma}) = \mathbf{\Pi}^{\times} S_\nu(\beta) \oplus \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)}$$

($\nu \in M$, *kard* $M < \aleph_0$) *je najväčším rozkladom typu* (β).

Dôkaz. Z lemmy 2,2 vyplýva, že sväz $\boldsymbol{\delta}_\beta(\boldsymbol{\Gamma}) = \mathbf{\Pi}^{\times} S_\nu(\beta) \oplus \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)}$ patrí do triedy $\boldsymbol{\Theta}_\beta$,teda $\mathbf{\Pi}^{\times} S_\nu(\beta) \neq \emptyset$. Predpokladajme teraz, že existuje rozklad sväzu $\boldsymbol{\delta}_\beta(\boldsymbol{\Gamma})$ v ordinálny súčet

$$(c) \qquad \boldsymbol{\delta}_\beta(\boldsymbol{\Gamma}) = A \oplus B$$

majúci vlastnosť (β), pričom $A \supset \mathbf{\Pi}^{\times} S_\nu(\beta)$, $A \neq \mathbf{\Pi}^{\times} S_\nu(\beta)$. Potom $B \subset \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)}$.

1. Nech najprv $B = \emptyset$. Ak $\mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)} = \emptyset$, potom $A = \mathbf{\Pi}^{\times} S_\nu(\beta)$. Nech $\mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)} \neq \emptyset$. Potom $A = \mathbf{\Pi}^{\times} S_\nu(\beta) \cup \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)}$. Z predchádzajúcich úvah je zrejmé, že pre každé $\nu \in M$ je $S_\nu = S_\nu(\beta) \oplus \overline{S_\nu(\beta)}$ najväčším rozkladom sväzu S_ν typu (β). Pre ľubovoľné $x \in S_\nu(\beta)$, $y \in \overline{S_\nu(\beta)}$ existuje aspoň jeden taký reťazec $r(x, y)$, že $d(r(x, y)) \geqq \beta$. Keďže sväz $\mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)}$ je voľným súčinom sväzov $\overline{S_\nu(\beta)}$, potom pre prvky $\bar{x}, \bar{y} \in \boldsymbol{\delta}_\beta(\boldsymbol{\Gamma})$ ($\bar{x} \leqq \bar{y}$), ktoré zodpovedajú prvkom x, y (t. j. $x \in \bar{x}$, $y \in \bar{y}$; porov. začiatok dôkazu vety 1,2 v § 1), existuje tým skôr aspoň jeden reťazec $r(\bar{x}, \bar{y})$ (ktorý sa dá obdobne skonštruovať, ako sme to urobili v [2], lemma 5,2), spojujúci prvky $\bar{x}, \bar{y} \in \boldsymbol{\delta}_\beta(\boldsymbol{\Gamma})$ tak, že $d(r(\bar{x}, \bar{y})) \geqq \beta$. (Je zrejmé, že ak $\bar{y} \in \mathbf{\Pi}^{\times} S_\nu(\beta)$, potom $d(r(\bar{x}, \bar{y})) < \beta$ podľa lemmy 2,1.) Keďže $\bar{x}, \bar{y} \in A$ a $d(r(\bar{x}, \bar{y})) \geqq \beta$, potom z toho vyplýva, že musí byť $\mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)} = \emptyset$, a teda $A = \mathbf{\Pi}^{\times} S_\nu(\beta)$.

2. Predpokladajme teraz, že $B \neq \emptyset$. Potom $\mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)} \neq \emptyset$, lebo $B \subset \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)}$. Pre sväz $\mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)}$ za týchto predpokladov (pozri [3], lemma 2,4) je splnený vzťah:

$$\mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)} = (A \cap \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)} \oplus (B \cap \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)})).$$

Podľa lemmy 2,5 v [3] je $A \cap \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)} = \emptyset$ alebo $B \cap \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)} = \emptyset$. Ak $B \cap \cap \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)} = \emptyset$, potom $B = \emptyset$, čo je spor. Keďže $B \neq \emptyset$, potom tiež $B \cap \cap \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)} \neq \emptyset$ a teda podľa lemmy 2,5 v [3], musí byť $A \cap \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)} = \emptyset$. Z toho vyplýva, že $\mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)} \subset B$. Keďže $B \supset \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)}$ a podľa predpokladu $B \subset \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)}$, potom musí byť $B = \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)}$, z čoho ďalej vyplýva, že $A = = \mathbf{\Pi}^{\times} S_\nu(\beta)$. Tým sme teda dokázali, že rozklad (c) sväzu $\boldsymbol{\delta}_\beta(\boldsymbol{\Gamma})$ je totožný s rozkladom $\boldsymbol{\delta}_\beta(\boldsymbol{\Gamma}) = \mathbf{\Pi}^{\times} S_\nu(\beta) \oplus \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)}$, čím je tvrdenie lemmy 2,3 dokázané.

Lemma 2,4. *Nech* $S = \boldsymbol{\delta}_\beta(\boldsymbol{\Gamma})$. *Potom* $S(\beta) = \mathbf{\Pi}^{\times} S_\nu(\beta)$, $\overline{S(\beta)} = \mathbf{\Pi}^{*} \overline{S_\nu(\beta)}$ ($\nu \in M$, *kard* $M < \aleph_0$).

Dôkaz vyplýva z lemmy 2,2 a z lemmy 2,3.

Veta 2,1. *Pre operáciu $\mathfrak{S}_\beta$, definovanú na konečnom systéme sväzov z triedy Θ_β, sú splnené vlastnosti a), b) a c), vyslovené v úvode práce* [2].

Dôkaz. Vlastnosť *a*) a *b*) (pri vlastnosti *b*) treba brať do úvahy, že kard $M < \aleph_0$) vyplýva bezprostredne z konštrukcie sväzu $\mathfrak{S}_\beta(\Gamma)$ a vlastnosť *c*) z asociatívnosti operácie priameho a voľného súčinu.

Literatúra

[1] G. Birkhoff: Teorija struktur, Moskva 1952.

[2] J. Badida: Asociatívne operácie na niektorých triedach sväzov, Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae 7 (1963), 609—621.

[3] J. Badida: O asociatívnej operácii na určitej triede sväzov, Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae 9 (1964), 71—74.

[4] A. G. Kuroš: Teorija grupp, 1944 r.

Adresa autora: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie BF VŠT, Košice, Švermova 3.

Do redakcie došlo 25. februára 1965.

Об ассоциативных операциях на определённых классах структур

Я. БАДИДА

Резюме

Настоящая работа заниматся проблемой существования ассоциативных и коммутативных операций на определённых классах структур, причём эти опреации являются не одинаковыми в сравнении с операциями прямого и свободного произведения (см. тоже [2], [3]).

В § 1 (§ 2) описывается операция $\tilde{\zeta}(\mathfrak{S}_\beta$, где β — любое бесконечное кардинальное число), которая определяется на классе $\tilde{\Omega}$ (Θ_β), причём $\tilde{\Omega}$ (Θ_β) является классом всех стврyктур выполняющих определённые условия (см. опред. 1,1, респ. опред. 2,4). В дальнейшем доказывается, что для операции $\tilde{\zeta}$ ($\mathfrak{S}_\beta$) выполнены свойства *а*), *б*) и *ц*), высказанные в ведении в работу [2].

Über assoziative Operationen an gewissen Verbandklassen

J. BADIDA

Zusammenfassung

In der vorgelegten Arbeit befassen wir uns mit dem Problem des Vorhandenseins assoziativer und kommutativer Operationen an gewissen Verbandklassen, wobei diese Operationen sich von den Operationen des direkten und freien Produktes unterscheiden (siehe auch [2], [3]).

Im § 1 (§ 2) wird eine Operation $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ beschrieben, ($\boldsymbol{\delta}_\beta$, wo β eine beliebige unendliche Kardinalzahl ist), die an der Klasse $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ ($\boldsymbol{\Theta}_\beta$) definiert wird, wobei $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ ($\boldsymbol{\Theta}_\beta$) die Klasse aller Verbände vorstellt, die gewisse Bedingungen erfüllen (s. Def. 1,1, bzw. Def. 2,4). Ferner wird bewissen, dass die Operation $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ ($\boldsymbol{\delta}_\beta$) die im Vorwort dieser Arbeit ausgesprochene Bedingungen *a*), *b*) und *c*) erfüllt.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. X., FASC. VII. MATHEMATICA XIV. 1966

O struktuře prostoru $L^{(p)}$.

J. SMÍTAL

V práci [1] je kromě jiného zkoumána struktura prostoru $l^{(p)}$ použitím metody kategorií. V tomto článku podobně prozkoumáme strukturu prostoru $L^{(p)}$ a ukážeme, že v $L^{(p)}$ platí analogický výsledek k větě 3.1 z práce [1].

Nechť $L^{(p)}$, $p > 1$, značí, jako obvykle, Hilbertův prostor funkcí, definovaných na intervale $\langle a, b\rangle$ a Lebesgueovsky integrovatelných s p-tou mocninou. Nechť $p' > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Je znám tento výsledek (viz [2], str. 20): Když $f(x) \notin L^{(p')}$, potom existuje $g(x) \in L^{(p)}$ tak, že integrál $\int_a^b f(x)g(x)dx$ neexistuje. Pro některé $g(x) \in L^{(p)}$ zřejmě ten integrál existuje, např. pro $g(x) \equiv 0$. Vzniká otázka, jak vypadá z hlediska Baireových kategorií množina všech těch funkcí, pro které integrál existuje. Odpověď na tuto otázku dává následující věta:

Věta: *Budiž $f(x)$ měřitelná, skoro všude konečná reálná funkce, definovaná na intervale $\langle a, b\rangle$, $f(x) \notin L^{(p')}$. Označme*

$$A_n = [x : x \in \langle a, b\rangle, \ |f(x)| \leqq n], \quad \sigma_n(g) = \int_{A_n} f(x)g(x)dx$$

pro $n = 1, 2, \dots$.

Tvrzení: *Pro všechny $g(x) \in L^{(p)}$ s výjimkou bodů množiny první kategorie (v $L^{(p)}$) platí:*

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n(g) = +\infty, \quad \liminf_{n\to\infty} \sigma_n(g) = -\infty. \tag{1}$$

Abychom mohli dokázat uvedenou větu, dokážeme napřed 3 pomocné věty.

Lemma 1. *Existuje* $g_0(x) \in L^{(p)}$ *tak, že platí*

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n(g_0) = +\infty, \quad \liminf_{n\to\infty} \sigma_n(g_0) = -\infty. \tag{2}$$

Důkaz: Budiž $g(x) \in L^{(p)}$ zvolené tak, že $\int_a^b f(x)g(x)dx$ neexistuje. Takové $g(x)$ existuje na základě vzpomínaného výsledku z [2], str. 20. Označíme-li $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$, a podobně definujeme $g^+(x)$, $g^-(x)$, potom aspoň jeden z integrálů

$$\int_a^b f^+(x)g^+(x)dx, \quad \int_a^b f^+(x)g^-(x)dx, \quad \int_a^b f^-(x)g^+(x)dx, \quad \int_a^b f^-(x)g^-(x)dx$$

má nevlastní hodnotu. Nechť například $\int_a^b f^+(x)g^+(x)dx = +\infty$ (v ostatních případech bychom postupovali analogicky). Označme

$$A'_n = [x : x \in \langle a, b\rangle, \ 0 \leqq f(x) \leqq n],$$

kde n je přirozené číslo. Zřejmě platí $A'_1 \subset A'_2 \subset \ldots \subset A'_n \subset \ldots$. Položme ještě

$$g'(x) = g^+(x) \quad \text{pro} \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$$

$$g'(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in \langle a, b) - \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n.$$

Zřejmě $g'(x) \in L^{(p)}$. Definujme funkcie $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ takto:

$$g_1(x) = g'(x) \quad \text{pro} \quad x \in A'_1,$$

$$g_1(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in \langle a, b)\rangle - A'_1.$$

Je-li $n > 1$, potom

$$g_n(x) = g'(x) \quad \text{pro} \quad x \in A'_n - A'_{n-1},$$

$$g_n(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in \langle a, b\rangle - (A'_n - A'_{n-1}).$$

Zřejmě $g_n(x) \in L^{(p)}$ pro $n = 1, 2, \ldots$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = g'(x)$. Potom

$$\sigma_n(g') = \int_{A_n} f(x)g'(x)dx = \int_{A'_n} f(x)g(x)dx = \int_a^b f^+(x)\sum_{i=1}^{n} g_i(x)dx < +\infty$$

a $\{\sigma_n(g')\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupností reálných čísel, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$.

Definujme indukcí posloupnost přirozených čísel $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ a funkci $g_0(x)$ takto:

$$g_0(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in \langle a, b\rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n.$$

Když n_1 je první přirozené číslo takové, že $\sigma_{n_1}(g') > 1$, klademe

$$g_0(x) = g'(x) \quad \text{pro} \quad x \in A'_{n_1}.$$

Tedy $\sigma_{n_1}(g_0) = \sigma_{n_1}(g')$. Budiž n_2 první přirozené číslo, $n_2 > n_1$ takové, že

$$\sigma_{n_2}(g') > 2\sigma_{n_1}(g') + 2, \tag{3}$$

potom klademe

$$g_0(x) = -g'(x) \quad \text{pro} \quad x \in (A'_{n_2} - A'_{n_1}).$$

Máme

$$\sigma_{n_2}(g_0) = \int_{A_{n_2}} f(x)g_0(x)dx = -\int_{(A_{n_2}-A_{n_1})} f(x)g'(x)dx + \int_{A_{n_1}} f(x)g'(x)dx =$$

$$= -(\sigma_{n_2}(g') - \sigma_{n_1}(g')) + \sigma_{n_1}(g') = -\sigma_{n_2}(g') + 2\sigma_{n_1}(g')$$

a odtud použitím vztahu (3) $\sigma_{n_2}(g_0) < -2$.

Předpokládejme, že jsme už definovali čísla $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ a že funkce $g_0(x)$ je už definována pro $x \in \langle a, b\rangle - \bigcup_{i=n_{k-1}}^{\infty} A'_{i+1}$. Je-li k liché číslo, najděme nejmenší n_k ($n_k > n_{k-1}$) tak, aby

$$\sigma_{n_k}(g') > \sigma_{n_{k-1}}(g') - \sigma_{n_{k-1}}(g_0) + k \tag{4}$$

a položíme

$$g_0(x) = g'(x) \quad \text{pro} \quad x \in A'_{n_k}.$$

Potom zřejmě

$$\sigma_{n_k}(g_0) = (\sigma_{n_k}(g_0) - \sigma_{n_{k-1}}(g_0)) + \sigma_{n_{k-1}}(g_0) = \sigma_{n_k}(g') - \sigma_{n_{k-1}}(g') + \sigma_{n_{k-1}}(g_0) > k$$

podle (4).

Je-li k sudé číslo, najděme nejmenší n_k ($n_k > n_{k-1}$) tak, aby

$$\sigma_{n_k}(g') > \sigma_{n_{k-1}}(g') + \sigma_{n_{k-1}}(g_0) + k \tag{5}$$

a položme

$$g_0(x) = -g'(x) \quad \text{pro} \quad x \in A'_{n_k}.$$

Zřejmě

$$\sigma_{n_k}(g_0) = (\sigma_{n_k}(g_0) - \sigma_{n_{k-1}}(g_0)) + \sigma_{n_{k-1}}(g_0) = -(\sigma_{n_k}(g') - \sigma_{n_{k-1}}(g')) +$$
$$+ \sigma_{n_{k-1}}(g^0) > -k$$

podle vztahu (5).

Tak jsme sestrojili funkci $g_0(x)$, definovanou na intervale $\langle a, b\rangle$, která je integrovatelná s p-tou mocninou. Zřejmě totiž $\int_a^b |g_0(x)|^p\, dx = \int_a^b |g'(x)|^p\, dx \leqslant \leqslant \int_a^b |g^+(x)|^p dx < +\infty$. Dále pro každé přirozené číslo K existují indexy m, n

tak, že $\sigma_n(g_0) > K$ a $\sigma_m(g_0) < -K$. Posloupnost $\{\sigma_n(g_0)\}_{n=1}^{\infty}$ tedy osciluje mezi $-\infty$ a $+\infty$. Tím je důkaz lemmy skončen.

Lemma 2: Označme
$$C = [g(x) : g(x) \in L^{(p)}, \ \limsup_{n \to \infty} \sigma_n(g) = +\infty]$$
$$C' = [g(x) : g(x) \in L^{(p)}, \ \liminf_{n \to \infty} \sigma_n(g) = -\infty].$$

Tvrzení: *Množiny C, C' jsou množinami typu G_δ v $L^{(p)}$.*

Důkaz: Označme pro K přirozené $C(K)$ množinu všech těch $g(x) \in L^{(p)}$, pro které existuje přirozené n takové, že $\sigma_n(g) > K$. Zřejmě $C = \bigcap_{K=1}^{\infty} C(K)$. Stačí tedy ukázat, že $C(K)$ jsou otevřené pro $K = 1, 2, \ldots$.

Budiž $h_0(x) \in C(K)$. Existuje takové n_0, $\varepsilon > 0$, že $\sigma_{n_0}(h_0) > K + \varepsilon$. Najděme $\delta > 0$ tak, aby $\delta\left(\int\limits_{A_{n_0}} |f(x)|^{p'}\, dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \varepsilon$. (Takové δ zřejmě existuje.) Budiž nyní $h(x) \in S(h_0(x), \delta)$, tedy $\left(\int\limits_a^b |h_0(x) - h(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \delta$. Potom platí (s použitím Hölderovy nerovnosti) $\sigma_{n_0}(h) = \sigma_{n_0}(h_0) - \sigma_{n_0}(h_0) + \sigma_{n_0}(h) = \sigma_{n_0}(h_0) - \sigma_{n_0}(h_0 - h) \geqq \sigma_{n_0}(h_0) - \left(\int\limits_{A_{n_0}} |f(x)|^{p'}\, dx\right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int\limits_{A_{n_0}} |h_0(x) - h(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} > \sigma_{n_0}(h_0) - \varepsilon > K$, tedy $S(h_0(x), \delta) \subset C(K)$, $C(K)$ je otevřená. Tím je tvrzení lemmy dokázáno pro C, pro C' je důkaz podobný.

Lemma 3: *Množina $C \cap C'$ je hustá v $L^{(p)}$.*

Důkaz: Budiž $h(x) \in L^{(p)}$ a $\delta > 0$. Podle lemmy 1 existuje $g_0(x) \in L^{(p)}$ tak, že $\sigma_n(g_0)$ osciluje mezi $-\infty$ a $+\infty$. Protože $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ a množina $\langle a, b\rangle - \lim\limits_{n \to \infty} A_n$ má míru 0, existuje vzhledem na absolutní spojitost integrálů $\int\limits_a^b |g_0(x)|^p\, dx$, $\int\limits_a^b |h(x)|^p\, dx$, N tak, že

$$\left(\int\limits_{[a,b]-A_N} |g_0(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\delta}{2}, \quad \left(\int\limits_{[a,b]-A_N} |h(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\delta}{2}. \tag{6}$$

Definujme nyní funkci $g(x)$ takto:

$$g(x) = h(x) \quad \text{pro} \quad x \in A_N;$$
$$g(x) = g_0(x) \quad \text{pro} \quad x \in \langle a, b\rangle - A_N.$$

Funkce $g(x)$ patří do δ-okolí bodu $h(x)$, protože platí (s použitím Minkovského nerovnosti a vztahu (6))

$$\left(\int\limits_a^b |h(x) - g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_{A_N} |h(x) - g(x)|^p\, dx + \int\limits_{[a,b]-A_N} |h(x) - g_0(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_{[a,b]-A_N} |h(x) - g_0(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{[a,b]-A_N} |h(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_{[a,b]-A_N} |g_0(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$ a současně posloupnost $\{\sigma_n(g)\}_{n=}^{\infty}$ zřejmě osciluje mezi $-\infty$ a $+\infty$. Tím je lemma 3 dokázána.

Důkaz věty: Označme

$$L_1 = [g(x) : g(x)_\in L^{(p)}, \ \limsup_{n\to\infty} \sigma_n(g) = +\infty, \ \liminf_{n\to\infty} \sigma_n(g) = -\infty].$$

Jak bylo ukázáno výše, L_1 je množina typu G_σ, hustá v $L^{(p)}$. Položme $L_2 = L^{(p)} - L_1$. L_2 je množina typu F_σ v $L^{(p)}$, tedy $L_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$, F_m jsou uzavřené množiny, $m = 1, 2, \ldots$ (v $L^{(p)}$). Máme $L_1 = L^{(p)} - L_2 = L^{(p)} - \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} (L^{(p)} - F_m)$. L_1 je hustá v $L^{(p)}$, tedy i každá z množin $L^{(p)} - F_m = L^{(p)} - F_m$ je hustá v $L^{(p)}$, to ale znamená, že F_m je řídká v $L^{(p)}$, tedy $L_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$ je množina první kategorie. Tím je věta dokázána.

Literatura

[1] A. Legéň – T Šalát: O někotorych primeněnijach metoda kategorij v teorii prostranstv posledovatěľnostěj. Mat. fyz. čas. SAV 14 (1964), 217–233.

[2] S. Kaczmarz – H. Steinhaus: Teorie der Ortogonalzeihen. (Ruský překlad), Moskva 1958.

Adresa autora: Katedra algebry a teórie čísiel PFUK, Bratislava, Šmeralova 2.

Do redakcie prišlo 31. mája 1965.

О структуре пространства $L^{(p)}$.

Я. СМИТАЛ

Выводы

Главным достижением в этой статье является следующая теорема: Пусть $f(x)$ измеримая вещественная функция, определенная на отрезке $\langle a, b\rangle$. Пусть $f(x)$ почти

всюду конечна на $\langle a, b\rangle$, $f(x) \notin L^{(p')}$) $L^{(p)}$ обозначает, как всегда, пространство Гильберта). Обозначим

$$A_n = [x : x \in \langle a, b\rangle, |f(x)| \leq n], \qquad \sigma_n(g) = \int_{A_n} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

для $n = 1, 2, \ldots$.

Тогда для всех $g(x) \in L^{(p)}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ за исключением множества первой категории Бера (в $L^{(p)}$) справедливо:

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n(g) = +\infty, \qquad \liminf_{n\to\infty} \sigma_n(g) = -\infty.$$

On structure of space $L^{(p)}$.

J. SMÍTAL

Summary

The main result of this paper is this theorem:

Let $f(x)$ be measurable real-valued function, defined throughout interval $\langle a, b\rangle$ and assume $f(x)$ to be finit in $\langle a, b\rangle$ with possible exception of a set of measure zero. Let $(x) \notin L^{(p')}$ ($L^{(p')}$ denotes Hilbert space in usual sense).

Let us denote

$$A_n = [x : x \in \langle a, b\rangle, |f(x)| \leq n], \qquad \sigma_n(g) = \int_{A_n} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

for $n = 1, 2, \ldots$.

Then

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n(g) = +\infty, \qquad \liminf_{n\to\infty} \sigma_n(g) = -\infty$$

for every $g(x) \in L^{(p)}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ with possible exception of a set of a first category (in sense of Baire) in $L^{(p)}$.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

sú fakultný sborník určený na publikovanie vedeckých prác inertných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých ašpirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracovávajú materiál získaný počas pobytu na našej fakulte. Redakčná rada si vyhradzuje právo z tohto pravidla urobiť výnimku.

Práce musí odporúčať katedra. Práce študentov musí odporúčať študentská vedecká spoločnosť a príslušná katedra

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom alebo anglickom, francúzskom alebo nemeckom. Práce dodané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, s riadkovou medzerou tak, aby v jednom riadku bolo 60 úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na autorov účet.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšte názov práce, pod to meno autora. Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, sa uvádzajú všetky pracoviská. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba obidve uviesť.

Fotografie treba dať na čiernom lesklom papieri a uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba urobiť tušom na priehľadnom papieri (pauzák) alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať resumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam, publikovaným v cudzom jazyku, treba pripojiť resumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom v prípade publikácie v ruskom jazyku, alebo v ruskom jazyku v prípade publikácie v jazyku západnom. *Nezabudnite pri resumé uviesť vždy názov práce a meno autora v rovnakom poradí ako v základnom texte.* Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a stránkové korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny počas korektúry idú na ťarchu autorského honorára. Každý autor dostane popri príslušnom honorári aj 50 separátov.

Redakčná rada