(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IX., 2. — MATHEMATICA, 1964)

ACTA

FACULTATIS RERUM NATURALIUM

UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IX. FASC. II.

MATHEMATICA

PUBL. XI.

1964

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

Просим обмена публикаций
Austauch von Publikationen erbeten
Prière d'échanger des publications
We respectfully solicit the exchange of publications
Se suplica el canje de publicaciónes

Sborník Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Vydává Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasínkova 5, čís. tel. 458-51. Povolilo Povereníctvo kultúry číslom 2265/56-IV/1. Tlač: Tisk, knižní výroba, n. p., Brno, provoz 1

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IX., 2. — MATHEMATICA, 1964]
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. IX., FASC. II. MATHEMATICA 1964

Über das Randwertproblem der n-ten Ordnung in m-Punkten

M. GREGUŠ

Einleitung. Es ist bekannt [1], daβ wenn die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$L(y) = 0$$

und n Randbedingungen

$$Ui(y) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

in zwei Punkten $a < b$ gegeben sind, dann kann man unter gewissen Voraussetzungen zu dem beliebigen Punkt $\xi \in (a, b)$ die sogenannte Greensche Funktion $G(x, \xi)$ konstruieren, mit deren Hilfe die Lösung y des nichthomogenen Problems

$$L(y) = r(x)$$

$$Ui(y) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

in der Form

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

geschrieben werden kann.

Weiter wird dieses Ergebnis zur Lösung bestimmter Randwertprobleme mit Parameter verwendet, und zwar so, daβ das Problem auf eine bestimmte Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art überführt wird.

In dieser Arbeit wird das angeführte Problem verallgemeinert, und zwar so, daβ die Randbedingungen in m-Punkten $a_1 < a_1 < \dots < a_m$ vorgeschrieben werden. Es werden sogenannte partikuläre Greensche Funktionen konstruiert mit deren Hilfe das unhomogene Randwertproblem in m-Punkten gelöst wird.

Ähnlich wird das Randwertproblem in m-Punkten mit einem Parameter auf eine gewisse Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art überführt.

Die in dieser Arbeit angeführten Ergebnisse sind ein spezialer Fall der Ergebnisse der Arbeit [2], jedoch ist die Metode der partikulären Greenschen Funktionen vorteilhaft für praktische Anwendungen.

1. Es sei das Randwertproblem

$$L(y) = p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n y = 0 \quad (n \geqq 2),$$

$$\begin{aligned} U_i(y) = \alpha_{i1} y(a_1) + \alpha_{i_1}^{(1)} y'(a_1) + \dots + \alpha_{i_1}^{(n-1)} y^{(n-1)}(a_1) + \\ + \alpha_{i2} y(a_2) + \alpha_{i_2}^{(1)} y'(a_2) + \dots + \alpha_{i_2}^{(n-1)} y^{(n-1)}(a_2) + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \alpha_{im} y(a_m) + \alpha_{i_m}^{(1)} y'(a_m) + \dots + \alpha_{i_m}^{(n-1)} y^{(n-1)}(a_m) = 0, \\ (a_1 < a_2 < \dots < a_m, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad m \geqq 2) \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben, wo die Funktionen $p_0 \neq 0, p_1, \dots, p_n$ im Intervall $\langle a_1, a_m \rangle$ stetig sind und $U_1, U_2, \dots, U_n$ sind linear unabhängige Formen von $y(a_1), \dots, y^{(n-1)}(a_1), \dots, y(a_m), \dots, y^{(n-1)}(a_m)$.

Setzen wir voraus, dass das Problem (1) unlösbar ist, d. h. seine einzige Lösung ist die Funktion, welche identisch gleich Null ist. Dann gilt folgender Satz.

Satz 1. Für einen beliebigen Punkt $\xi \in (a_k, a_{k+1})$ kann man die Funktion $y = G_k(x, \xi)$ konstruieren, welche folgende Eigenschaften hat:

1. $G_k(x, \xi)$, $\quad \frac{\partial}{\partial x} G_k(x, \xi) = G_{kx}(x, \xi), \dots, \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} G_k(x, \xi) = G_{kx^{n-2}}(x, \xi)$ *sind stetige Funktionen von $x \in \langle a_1, a_m \rangle$.*

I. Die Funktion $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G_k(x, \xi) = G_{kx^{n-1}}(x, \xi)$ ist in $\langle a_1, a_m \rangle$ überall außer dem Punkte ξ stetig, wo sie eine Unstetigkeit erster Art mit dem Sprung der Unstetigkeit $\frac{1}{p_0(\xi)}$ hat, d. h.

$$G_{kx^{n-1}}(\xi + 0, \xi) - G_{kx^{n-1}}(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{p_0(\xi)} \,. \tag{2}$$

3. *Die Funktion $G_k(x, \xi)$ ist die Lösung der Differentialgleichung $L(y) = 0$ in den Intervallen $\langle a_1, \xi), (\xi, a_m \rangle$ und sie erfüllt die Randbedingungen $U_i(y) = 0, i = 1, \dots, n$.*

4. *Die Funktion $G_k(x, \xi)$ ist mit den Eigenschaften* 1., 2., 3. *eindeutig bestimmt.*

Beweis. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ sei ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $L(y) = 0$. Dann muß die Funktion $G_k(x, \xi)$, welche wir konstruieren wollen, in den Intervallen $\langle a_1, \xi), (\xi, a_m \rangle$ die Form

$$G_k(x, \xi) = \bar{a}_1 y_1(x) + \bar{a}_2 y_2(x) + \dots + \bar{a}_n y_n(x) \qquad (a_1 \leqq x < \xi)$$

$$G_k(x, \xi) = \bar{b}_1 y_1(x) + \bar{b}_2 y_2(x) + \dots + \bar{b}_n y_n(x) \qquad (\xi < x \leqq a_m)$$

haben, wo $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ Konstanten sind. Aus der Stetigkeit der Funktion G_k

und aus ihren ersten $n-2$ Ableitungen nach x im Punkte ξ und aus der Bedingung (2) folgen für die Differenz $c_i = \bar{b}_i - \bar{a}_i$ n Bedingungen

$$c_1 y_1(\xi) + c_2 y_2(\xi) + \dots + c_n y_n(\xi) = 0$$
$$c_1 y_1'(\xi) + c_2 y_2'(\xi) + \dots + c_n y_n'(\xi) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-2)}(\xi) + \dots + c_n y_n^{(n-2)}(\xi) = 0$$
$$c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-1)}(\xi) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(\xi) = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Die Determinante dieses Systems ist die Wronskische Determinante des Fundamentalsystems der Lösungen im Punkte ξ und daher sind die Zahlen c_i eindeutig bestimmt.

Wenn wir

$$U_i(y) = A_{i1}(y) + A_{i2}(y) + \dots + A_{im}(y),$$

setzen, wo

$$A_{ij} = \alpha_{ij} y(a_j) + \alpha_{ij}^{(1)} y'(a_j) + \dots + \alpha_{ij}^{(n-1)} y^{(n-1)}(a_j), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

ist und wenn wir einschreiben, daß $G_k(x, \xi)$ n Bedingungen $U_i(y) = 0$, $i = 1, \dots, n$ erfüllt, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\bar{a}_1 A_{i1}(y_1) + \bar{a}_1 A_{i2}(y_2) + \dots + \bar{a}_n A_{i1}(y_n) + \\ &+ \bar{a}_1 A_{i2}(y_1) + \bar{a}_2 A_{i2}(y_2) + \dots + \bar{a}_n A_{i2}(y_n) + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \bar{a}_1 A_{ik}(y_1) + \bar{a}_2 A_{ik}(y_2) + \dots + \bar{a}_n A_{ik}(y_n) + \\ &+ \bar{b}_1 A_{ik+1}(y_1) + \bar{b}_2 A_{ik+1}(y_2) + \dots + \bar{b}_n A_{ik+1}(y_n) + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \bar{b}_1 A_{im}(y_1) + \bar{b}_2 A_{im}(y_2) + \dots + \bar{b}_n A_{im}(y_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Das angeführte System von Differentialgleichungen kann auch in folgender Form geschrieben werden

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 U_i(y_1) + \bar{b}_2 U_i(y_2) + \dots + \bar{b}_n U_i(y_n) &= \\ = c_1 A_{i1}(y_1) + c_2 A_{i1}(y_2) + \dots + c_n A_{i1}(y_n) &+ \\ + c_1 A_{i2}(y_1) + c_2 A_{i2}(y_2) + \dots + c_n A_{i2}(y_n) &+ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ + c_1 A_{ik}(y_1) + c_2 A_{ik}(y_2) + \dots + c_n A_{ik}(y_n). & \end{aligned}$$

Die Determinante dieses Systems von Gleichungen ist verschieden von Null, weil $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $L(y) = 0$ bilden und das Problem (1) ist unlösbar. Also aus diesem System kann $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n$ eindeutig bestimmt werden und dann ist $\bar{a}_i = \bar{b}_i - c_i$. (Wenn die rechte Seite dieses Systems gleich Null ist, dann ist $\bar{b}_i \equiv 0$ und $\bar{a}_i = -c_i$.) Damit ist der Satz bewiesen.

2. Die Lösung eines unhomogenen Problems in der Form eines Integrals.

Es sei

$$L(y) = r(x) \tag{3}$$

$$U_i(y) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ein unhomogenes Problem. $r(x)$ sei eine stetige Funktion im Intervall $\langle a_1, a_m \rangle$. Setzen wir voraus, daß das dem Problem (3) entsprechende Problem (1) unlösbar ist. Dann gilt folgender Satz:

Satz 2. $G_k(x, \xi)$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$ seien zum Problem (1) *gehörige Greensche Funktionen. Dann ist die Lösung $y(x)$ des unhomogenen Problems* (3) *mit der Formel*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} G_k(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{4}$$

gegeben.

Beweis. Aus der Stetigkeit der Ableitungen nach x der Funktionen $G_k(x, \xi)$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$ bis in die Ordnung $n-2$ eingerechnet im Intervall $\langle a_1, a_m \rangle$ folgt

$$y^{(l)}(x) = \int_{a_1}^{a_2} G_{1x^l}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \ldots + \int_{a_{m-1}}^{a_m} G_{m-1x^l}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \qquad l = 1, 2, \ldots, n-2.$$

$y^{(n-1)}(x)$ und $y^{(n)}(x)$ werden wir im beliebigen Punkt $x \in (a_k, a_{k+1})$ besonders rechnen und besonders in den Punkten a_k, $k = 1, 2, \ldots, m$. Es ist

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{a_1}^{a_2} G_{1x^{n-1}}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \ldots + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\int_{a_k}^{x} G_k(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \int_{x}^{a_{k+1}} G_k(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi\Big] +$$

$$+ \int_{a_{k+1}}^{a_{k+2}} G_{k+1x^{n-1}}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \ldots + \int_{a_{m-1}}^{a_m} G_{m-1x^{n-1}}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} G_{1x^{n-1}}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \ldots + \int_{a_k}^{x} G_{kx^{n-1}}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi + G_{kx^{n-1}}(x, x)\, r(x) +$$

$$+ \int_{x}^{a_{k+1}} G_{kx^{n-1}}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi - G_{kx^{n-2}}(x, x)\, r(x) + \int_{a_{k+1}}^{a_{k+2}} G_{k+1x^{n-1}}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi +$$

$$+ \ldots + \int_{a_{m-1}}^{a_m} G_{m-1}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \int_{a_1}^{a_2} G_{1x^{n-1}}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \ldots + \int_{a_k}^{a_{k+1}} G_{kx^{n-1}}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi +$$

$$+ \ldots + \int_{a_{m-1}}^{a_m} G_{m-1x^{n-1}}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Ähnlich

$$y^{(n)}(x) = \int_{a_1}^{a_2} G_{1x^n}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \ldots + \int_{a_k}^{a_{k+1}} G_{kx^n}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi +$$

$$+ r(x)\,[G_{kx^{n-1}}(x, x-0) - G_{kx^{n-1}}(x, x+0)] + \int\limits_{a_{k+1}}^{a_{k+2}} G_{k+1x^n}(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \dots + \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} G_{n-1x^n}(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi = \int\limits_{a_1}^{a_2} G_{1x^n}(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi + \dots +$$

$$+ \int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} G_{kx^n}(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi + \frac{r(x)}{p_0(x)} + \int\limits_{a_{k+1}}^{a_{k+2}} G_{k+1x^n}(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi + \dots +$$

$$+ \int\limits_{a_{m-1}}^{a_m} G_{m-1x^n}(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi,$$

weil

$$G_{kx^{n-1}}(x, x-0) - G_{kx^{n-1}}(x, x+0) = G_{kx^{n-1}}(x+0, x) - G_{kx^{n-1}}(x-0, x) = \frac{1}{p_0(x)}.$$

Aus den Formeln für $y^{(n-1)}(x)$ und $y^{(n)}(x)$ stellen wir leicht fest, daß $\lim\limits_{x \to a_k+} y^{(n-1)}_{(x)}(x)$ und $\lim\limits_{x \to a_k+} y^{(n)}(x)$ für $k < m$ existiert. Ähnlich können wir leicht feststellen, daß insoweit $k > 1$ ist, $\lim\limits_{x \to a_k-} y^{(n-1)}(x)$ und $\lim\limits_{x \to a_k-} y^{(n)}(x)$ existiert und daß $\lim\limits_{x \to a_k-} y^{(n-1)}(x) = \lim\limits_{x \to a_k+} y^{(n-1)}(x) = y^{(n-1)}(a_k)$, $\lim\limits_{x \to a_k-} y^{(n)}(x) = \lim\limits_{x \to a_k+} y^{(n)}(x) = y^{(n)}(a_k)$ gilt. Aus den so errechneten Ableitungen folgt

$$L(y) = \int\limits_{a_1}^{a_2} L[G_1(x, \xi)]\, r(\xi)\, d\xi + \dots + \int\limits_{a_{j-2}}^{a_{j-1}} L[G_{j-2}(x, \xi)]\, r(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{a_{j-1}}^{a_j} L[G_{j-1}(x, \xi)]\, r(\xi)\, d\xi + r(x) + \int\limits_{a_j}^{a_{j+1}} L[G_j(x, \xi)]\, r(\xi)\, d\xi + \dots +$$

$$+ \int\limits_{a_{m-1}}^{a_m} L[G_{n-1}(x, \xi)]\, r(\xi)\, d\xi = r(x).$$

Endlich

$$U_i(y) = \int\limits_{a_1}^{a_2} U_i(G_1)\, r(\xi)\, d\xi + \dots + \int\limits_{a_{m-1}}^{a_m} U_i(G_{m-1})\, r(\xi)\, d\xi = 0.$$

Damit ist gezeigt worden, daß die Funktion (4) das Problem (3) löst.

3. Das homogene Randwertproblem (1) sei unlösbar.

$G_k(x, \xi)$ seien Greensche Funktionen des Problems (1). Weiter sei $G_i(x)$ die Lösung des Problems

$$L[G_i(x)] = 0,$$

$$U_1[G_i(x)] = \dots = U_{i-1}[G_i(x)] = U_{i+1}[G_i(x)] = \dots = U_n[G_i(x)] = 0,$$

$$U_i[G_i(x)] = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Es ist bekannt, daß solche Lösungen existieren. Dann kann ganz ähnlich wie im Abschnitt 2 bewiesen werden, daß die Funktion

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} G_k(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi + \gamma_1 G_1(x) + \gamma_2 G_2(x) + \dots + \gamma_n G_n(x)$$

die Lösung des Problems

$$L(y) = r(x) \tag{5}$$
$$U_i(y) = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ist.

4. Lösungen von Randwertproblemen als Lösungen von Integralgleichungen. Es sei das Randwertproblem

$$L(y) = g(x)\, y + r(x) \tag{6}$$
$$U_i(y) = \gamma_i, \quad i = 4, 2, \ldots, n$$

gegeben.

$L(y)$, $U_i(y)$, $r(x)$, α_i, β_i, γ_i sollen dieselben Eigenschaften wie in den vorhergehenden Abschnitten haben. Weiter sei $g(x)$ eine stetige Funktion im Intervall $\langle a_1, a_m \rangle$ nicht identisch Null. Das zum Problem (6) gehörige homogene Problem d. h. das Problem (1) sei unlösbar und $G_k(x, \xi)$, $k = 1, \ldots, m - 1$ seien Greensche Funktionen des Problems (1). Dann folgt aus dem vorhergehenden Abschnitt, daß die Lösung y des Problems (6) der Integralgleichung

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} G_k(x, \xi)\, [g(\xi)\, y(\xi) + r(\xi)]\, d\xi + \gamma_1 G_1(x) + \ldots + \gamma_n G_n(x) \tag{7}$$

entspricht. Wenn wir

$$K_k(x, \xi) = G_k(x, \xi)\, g(\xi)$$

$$f(x) = \gamma_1 G_1(x) + \ldots + \gamma_n G_n(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} G_k(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

bezeichnen, dann können wir die Integralgleichung (7) in der Form

$$y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} K_k(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

schreiben.

5. Vom Parameter abhängige Randwertprobleme.

Gegeben sei das Randwertproblem

$$L(y) = \lambda g(x)\, y \tag{8}$$
$$U_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$g(x)$ habe die Eigenschaften, wie im vorhergehenden Absatz. Das Problem (1) sei unlösbar und $G_k(x, \xi)$, $k = 1, \ldots, m - 1$ seien Greensche Funktionen des Problems(1). Dann ist wie aus dem Vorhergehenden folgt, das Problem (8) ekvivalent mit der Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^{m-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} G_k(x, \xi)\, g(\xi)\, y(\xi)\, d\xi.$$

LITERATUR

[1] G. Sansone: Equazioni differenziali nel Campo Reale, Vol. I. Bologna 1948.
[2] M. Greguš: Über das verallgemeinerte Randwertproblem n-ter Ordnung, Čas. pro pěst., 1964, (89), 85—89.

Adresa autora: Katedra matematickej analýzy PFUR, Bratislava, Šmeralova 2/a.

Do redakcie došlo 1. VII. 1963.

O okrajovom probléme n-tého rádu v m bodoch

SÚHRN

M. Greguš

V práci je rozriešený nehomogénny okrajový problém n-tého rádu v m bodoch pomocou tzv. partikulárnych Greenovych funkcií.

Pomocou týchto výsledkov sa v práci dokazuje, že okrajový problém n-tého rádu v m bodoch závislý od parametra je ekvivalentný s riešením Fredholmovej integrálnej rovnice druhého druhu.

О краевой задачи n-ого порядка в m точках

М. Грегуш

Резюме

В работе разрешена неоднородная краевая задача n-ого порядка в m точках с помощью т. н. частичных функций Грина.

С помощью этого результата в работе указано, что краевая задача n-ого порядка с параметром в m точках эквивалентна с решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IX., 2. — MATHEMATICA, 1964]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IX., FASC. II. MATHEMATICA 1964

Eine Bemerkung zur Zerlegung der natürlichen Zahlen

A. HUŤA

1.

Bezeichnen wir mit $R_n(x)$ die Anzahl aller verschiedenen Zerlegungen einer natürlichen Zahl x in n Glieder (Summanden) unter folgenden Voraussetzungen:

1° die Glieder sind natürliche Zahlen

2° die Zerlegungen mit zwar gleichen Gliedern, jedoch in anderer Reihenfolge, werden als gleiche angesehen. Werden also Glieder einer Zerlegung mit x_j, $j = 1, 2, \dots, n$ bezeichnet, so kann man im weiteren voraussetzen, daß $x_i \leqq x_j$ für $i < j$.

Dann gilt die Relation

$$R_n(x + n) - R_n(x) = R_{n-1}(x + n - 1). \tag{1}$$

Die Relation (1) läßt sich folgendermaßen beweisen:

Alle Zerlegungen einer Zahl y, deren Anzahl $R_n(y)$ ist, zerteilen wir in zwei Gruppen. Die erste Gruppe wird diejenige Zerlegungen enthalten, deren erstes Glied 1 ist. Die Anzahl dieser ist offenbar $R_{n-1}(y - 1)$ denn nach dem ersten Gliede folgen alle Zerlegungen der Zahl $y - 1$ in $n - 1$ Summanden.

Die zweite Gruppe wird alle übrige Zerlegungen erhalten, deren Anzahl $R_n(y - n)$ ist. Es ist nämlich jedes Glied, einer Zerlegung, dieser Gruppe wenigstens gleich 2. Durch Verkleinerung jedes Gliedes einer solchen Zerlegung um 1 bekommen wir alle Zerlegungen der Zahl $y - n$ in n Summanden. Wir haben also die Gleichung

$$R_n(y) = R_{n-1}(y - 1) + R_n(y - n),$$

aus welcher durch die Substitution $y - n = x$ die Relation (1) folgt.

Da es unmöglich ist eine natürliche Zahl kleiner als n in n natürliche Summanden zu zerlegen, gilt

$$R_n(x) = 0 \text{ für } x = 1, 2, \dots, (n - 1), \tag{2}$$

und offenbar

$$R_n(n) = 1. \tag{3}$$

Wir haben also das folgende Ergebnis: Die Anzahl der Zerlegungen $R_n(x)$ einer natürlichen Zahl x in n natürliche Summanden, in welchen es nicht auf die Reihenfolge der Summanden ankommt, ist eine Lösung der Gleichung (1) mit den Anfangsbedingungen (2) und (3).

2

Die Gleichung (1) ist eigentlich eine Lineare unhomogene Differenzengleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die zugehörige homogene Gleichung ist

$$R_n(x+n) - R_n(x) = 0. \tag{4}$$

Die charakteristische Gleichung

$$r^n - 1 = 0,$$

hat die Wurzeln

$$\varepsilon_{j,n} = \cos\frac{2j\pi}{n} + i\sin\frac{2j\pi}{n}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n),$$

so daß die allgemeine Lösung der Gleichung (4)

$$R_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{j,n}\varepsilon_{j,n}^{x} \tag{5}$$

ist, wo die $c_{j,n}$ Summationskonstanten sind.

Die Lösung der Gleichung (1) finden wir mittels der Methode der Variation der Konstanten.

Diese Methode besteht darin, daß man die Konstanten $c_{j,n}$ in (5) für eine Funktion der x haltet und die Lösung der Gleichung (1) in der Form

$$R_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{j,n}(x)\,\varepsilon_{j,n}^{x} \tag{6}$$

sucht, wo $c_{j,n}(x)$ unbekannte Funktionen sind.

Die Anzahl dieser Funktionen ist n, jedoch nach Einsetzen der Ausdrücke (6) in die Gleichung (1) bekommt man für sie eine Bedingung. Man kann also diesen Funktionen weitere $(n-1)$ Bedingungen beliebig vorschreiben. Dies geschieht auf folgende Art und Weise: Wegen

$$\Delta c_{j,n}(x) = c_{j,n}(x+1) - c_{j,n}(x)$$

ist

$$R_n(x+1) = \sum_{j=1}^{n} c_{j,n}(x)\,\varepsilon_{j,n}^{x+1} + \sum_{j=1}^{n} \Delta c_{j,n}(x)\,\varepsilon_{j,n}^{x+1}.$$

Durch das Festsetzen

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta c_{j,n}(x)\,\varepsilon_{j,n}^{x+1} = 0$$

wird

$$R_n(x+1) = \sum_{j=1}^{n} c_{j,n}(x)\, \varepsilon_{j,n}^{x}.$$

Aus dieser Gleichung, durch ähnliche Fortsetzung, bekommt man für die Differenzen der unbekannten Funktionen die folgenden n Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta c_{j,n}(x)\, \varepsilon_{j,n}^{x+l} = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta c_{j,n}(x)\, \varepsilon_{j,n}^{x+n} = R_{n-1}(x+n-1). \tag{7}$$

Bezeichnet man die Determinante dieses Systems mit D_n und die Determinante, die aus D_n entsteht durch Ersetzen der Elemente der j-ten Spalte mit den Werten der rechten Seiten der Gleichungen, mit $D_{j,n}$ so bekommt man

$$\Delta c_{j,n}(x) = \frac{D_{j,n}}{D_n} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

und davon

$$c_{j,n}(x) = \sum_{x} \frac{D_{j,n}}{D_n} + k_{j,n}$$

wo die $k_{j,n}$ Konstanten sind.

Endlich durch das Einsetzen dieser Relationen in die Gleichung (6) bekommt man die allgemeine Lösung der Gleichung (1)

$$R_n(x) = \sum_{j=1}^{n} k_{j,n} \varepsilon_{j,n}^{x} + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{x} \frac{D_{j,n}}{D_n} \right) \varepsilon_{j,n}^{x} \tag{8}$$

Die Konstanten $k_{j,n}$ werden aus den Bedingungen (2) und (3) bestimmt.

3

Zum Abschluß sollen noch die Ausdrücke $R_n(x)$ als Beispiele für $n = 2, 3, 4$ ausgerechnet werden.

a) Vorerst, da jede natürliche Zahl als Summe eines Gliedes nur auf eine Weise ausdrückbar ist, gilt offenbar $R_1(x) = 1$.

Für $n = 2$ haben wir also die Gleichung

$$R_2(x+2) - R_2(x) = R_1(x+1),$$

oder

$$R_2(x+2) - R_2(x) = 1.$$

Die charakteristische Gleichung hat die Lösungen

$$\varepsilon_{12} = -1, \quad \varepsilon_{22} = +1.$$

Das System für die Variation der Konstanten lautet

$$(-1)^{x+1}\Delta c_{12}(x) + 1^{x+1}\Delta c_{22}(x) = 0,$$
$$(-1)^{x+2}\Delta c_{12}(x) + 1^{x+2}\Delta c_{22}(x) = 1,$$

mit den Wurzeln

$$\Delta c_{12}(x) = -\frac{1}{2}(-1)^{x+1} \qquad \Delta c_{22}(x) = \frac{1}{2}\,.\,1^{x+1}$$

wovon

$$c_{12}(x) = \frac{1}{4}(-1)^{x+1} + k_1, \qquad c_{22}(x) = \frac{x}{2} + k_2$$

und wenn wir die Bedingungen

$$R_2(1) = 0, \qquad R_2(2) = 1,$$

berücksichtigen, bekommen wir

$$R_2(x) = \frac{1}{4}\,[(-1)^x - 1^x\rfloor + \frac{x}{2}$$

b) Für $n = 3$ haben wir

$$R_3(x + 3) - R_3(x) = R_2(x + 2),$$

oder

$$R_3(x + 3) - R_3(x) = \frac{1}{4}(-1)^{x+2} - \frac{1}{4}\,.\,1^{x+2} + \frac{x}{2} + 1$$

Die charakteristische Gleichung hat die Wurzeln

$$\varepsilon_{13} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \varepsilon_{23} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \varepsilon_{33} = 1$$

Das System für die Variation der Konstanten ist

$$\sum_{j=1}^{3} \Delta c_{j3}(x)\,.\,\varepsilon_{j3}^{x+l} = 0 \qquad \text{für} \qquad l = 1, 2,$$
$$\sum_{j=1}^{3} \Delta c_{j3}(x)\,.\,\varepsilon_{j3}^{x+3} = R_2(x + 2),$$

seine Lösung

$$c_{j3}(x) = \frac{1}{3}\,\varepsilon_{j3}^{x} R_2(x + 2) \qquad \text{für} \qquad j = 1, 2, 3$$

und wieder unter Berücksichtigung der Bedingungen (2) und (3) haben wir

$$R_3(x) = \frac{1}{9}\,\varepsilon_{13}^{x} + \frac{1}{9}\,\varepsilon_{23}^{x} - \frac{7}{72} + \frac{x^2}{12} - \frac{1}{8}(-1)^x$$

c) Für $n = 4$ ist

$$R_4(x + 4) - R_4(x) = R_3(x + 3),$$

oder

$$R_4(x + 4) - R_4(x) = \frac{1}{9}\varepsilon_{13}^{x+3} + \frac{1}{9}\varepsilon_{23}^{x+3} - \frac{7}{72} + \frac{(x + 3)^2}{12} - \frac{1}{8}(-1)^{x+3}$$

Die charakteristische Gleichung hat die Wurzeln

$$\varepsilon_{14} = i, \quad \varepsilon_{24} = -1, \quad \varepsilon_{34} = -i, \quad \varepsilon_{44} = 1.$$

Das System für die Variation der Konstanten ist

$$\sum_{j=1}^{4} \Delta c_{j4}(x) \, . \, \varepsilon_{j4}^{x+l} = 0, \quad \text{für} \quad l = 1, 2, 3$$

$$\sum_{j=1}^{4} \Delta c_{j4}(x) \, . \, \varepsilon_{j4}^{x+4} = R_3(x + 3).$$

Das Endresultat unter Berücksichtigung der Bedingungen (2) und (3) für $n = 4$ ist

$$R_4(x) = \frac{1}{288}(18\varepsilon_{14}^x + 9\varepsilon_{24}^x + 18\varepsilon_{34}^x + 2x^3 + 6x^2 - 9x - 13) -$$

$$- \frac{1}{27}(2\varepsilon_{13}^x + 2\varepsilon_{23}^x + \varepsilon_{13}^{x+1} + \varepsilon_{23}^{x+1}) + \frac{x}{32}(-1)^x.$$

Die numerischen Werte von $R_n(x)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und $x = 1, 2, 3, \ldots 15$ enthält die am Ende angefügte Tafel

x \ n	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	1	1	1	0
4	1	2	1	1
5	1	2	2	1
6	1	3	3	2
7	1	3	4	3
8	1	4	5	5
9	1	4	7	6
10	1	5	8	9
11	1	5	10	11
12	1	6	12	15
13	1	6	14	18
14	1	7	16	23
15	1	7	19	27

Poznámka k rozkladu prirodzených čísiel

A. Huťa

Označme s $R_n(x)$ počet všetkých rôznych rozkladov prirodzeného čísla x v n členov za týchto predpokladov.

1° členy sú prirodzené čísla

2° rozklady s rovnakými členmi ale v inom poradí sa pokladajú za rovnaké.

Ak teda označíme členy nejakého rozkladu $x_j, j = 1, 2, \ldots, n$ môžeme predpokladať, že $x_i \leqq x_j$ pre $i < j$.

Potom platí vzťah

$$R_n(x + n) - R_n(x) = R_{n-1}(x + n - 1) \tag{1}$$

Riešenie rovnice (1) je dané výrazom (8).

V poslednej časti článku sú uvedené špeciálne prípady vzťahu (8) pre $n = 2, 3, 4$ a na konci je tabuľka numerických hodnôt pre $n = 1, 2, 3, 4$ a $x = 1, 2, \ldots 15$.

Примечание к разложению натуральных чисел

А. Гутя

Обозначим через $R_n(x)$ количество всех разных разложений натурального числа x в n членов при следующих предположениях:

1° все члены натуральные числа,

2° разложения с равными членами, но в ином порядке, полагаются равными.

Итак если мы обозначим члены некоторого разложения через $x_j, j = 1, 2, \ldots, n$ мы можем предполагать, что $x_i \leqq x_j$ для $i < j$.

Потом имеет место следующее соотношение

$$R_n(x + n) — R_n(x) = R_{n-1}(x + n — 1) \tag{1}$$

Решение уравнения (1) дано выражением (8).

В последней части статьи приведены частные случаи соотношения (8) для $n = 2, 3, 4$ и в заключении таблица численных значений для $n = 1, 2, 3, 4$ и $x = 1, 2, \ldots, 15$.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IX., 2. — MATHEMATICA, 1964]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IX., FASC. II. MATHEMATICA 1964

O jednej postačujúcej podmienke neoscilatoričnosti riešení lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu

J. ČERVEŇ

Uvažujme lineárnu diferenciálnu rovnicu 3. rádu

$$y''' + p(x) \,.\, y' + q(x) \,.\, y = 0, \tag{A}$$

kde koeficienty $p(x)$ a $q(x)$ sú spojité funkcie v intervale $(-\infty, \infty)$.

Na vyšetrovanie podmienok pre neoscilačný charakter riešení d. r. (A) som použil metódy obdobné tým, ktoré použil vo svojich prácach M. Greguš a vo veľkej miere aj jeho osobnú pomoc.

Definícia: Riešenie dif. rovnice (A) spĺňajúce podmienku $y(a) = 0$, resp. $y'(a) = 0$, resp. $y''(a) = 0$, kde $a \in (-\infty, \infty)$, nazveme riešeniami zväzku prvého, resp. druhého, resp. tretieho druhu v bode a dif. rovnice (A). (Pojem pochádza od M. Greguša.)

Veta 1: Nech pre $x \leqq a$ je $p(x) \leqq 0$ a $q(x) \geqq 0$ a nech $y(x)$ je riešenie dif. rovnice (A) s vlastnosťou $y(a) = 0$. Potom platí: a) Ak $y'(a) \neq 0$ a $y''(a) = 0$, tak $y(x) \neq 0$ aj $y'(x) \neq 0$ pre $x < a$. b) Ak $y'(a) = 0$ a $y''(a) \neq 0$, tak $y(x) \neq 0$ aj $y'(x) \neq 0$ aj $y''(x) \neq 0$ pre $x < a$.

Dôkaz urobíme nepriamo: a) Nech $y'(a) > 0$ a nech ξ je prvý nulový bod funkcie $y'(x)$ naľavo od bodu a. Potom pre $x \in (\xi, a)$ je $y'(x) > 0$, preto $y(x)$ rastie po záporných hodnotách k nule v bode a, teda $y(x) < 0$. Pre $x \in (\xi, a)$ platí potom $y'(x) > 0$ a $y(x) < 0$. Potom pre $x \in \langle \xi, a \rangle$ je $-p \,.\, y' - q \,.\, y \geqq 0$, teda $y'''(x) \geqq 0$. Integrujme poslednú nerovnosť v intervale $\langle x, a \rangle$, kde $x \in \langle \xi, a \rangle$, bude $y''(a) - y''(x) \geqq 0$, teda $y''(x) \leqq y''(a) = 0$, t. j. $y''(x) \leqq 0$. Poslednú nerovnosť opäť integrujme, a to v intervale $\langle \xi, a \rangle$, bude $y'(a) - y'(\xi) \leqq 0$, teda $y'(\xi) \geqq y'(a) > 0$, čo je spor s predpokladom, že $y'(\xi) = 0$. Preto $y'(x) > 0$ pre všetky $x < a$, a teda $y(x)$ stále rastie po záporných hodnotách k nule, t. j. je $y(x) < 0$ pre všetky $x < a$. V prípade $y'(a) < 0$ sa dokáže podobne, že $y'(x) < 0$ a $y(x) > 0$ pre $x < a$. b) Najprv dokážeme že $y''(x) \neq 0$ pre $x < a$. Nech $y''(a) > 0$ a nech ξ je prvý nulový bod funkcie $y''(x)$ naľavo od bodu a. Potom pre $x \in (\xi, a)$ je $y''(x) > 0$; preto $y'(x)$ rastie po záporných hodnotách k nule v bode a, teda $y'(x) < 0$; preto $y(x)$ klesá po kladných hodnotách k nule v bode a, teda $y(x) > 0$. Pre $x \in (\xi, a)$ platí teda $y''(x) > 0, y'(x) < 0, y(x) > 0$. Potom pre $x \in \langle \xi, a \rangle$ platí $-p \cdot y' - q \cdot y \leqq 0$, teda $y'''(x) \leqq 0$. Poslednú nerovnosť integrujme v intervale $\langle \xi, a \rangle$, bude $y''(a) - a''(\xi) \leqq 0$, t. j. $y''(\xi) \geqq y''(a) > 0$, čo je spor s predpokladom, že $y''(\xi) = 0$. Preto $y''(x) > 0$ pre všetky $x < a$. Preto $y'(x) < 0$ (rastie po záporných hodnotách k nule v bode a) a $y(x) > 0$ (klesá po kladných hodnotách k nule v bode a) pre všetky $x < a$. V prípade $y''(a) < 0$ sa dokáže podobne, že $y''(x) < 0$, $y'(x) > 0$, $y(x) < 0$ pre $x < a$. Tým je veta dokázaná.

Veta 2: Nech pre $x \geqq a$ je $p(x) \leqq 0$ a $q(x) \leqq 0$ a nech $y(x)$ je riešenie dif. rovnice (A) s vlastnosťou $y(a) = 0$. Potom platí: a) Ak $y'(a) \neq 0$ a $y''(a) = 0$, tak $y(x) \neq 0$ aj $y'(x) \neq 0$ pre $x > a$. b) Ak $y'(a) = 0$ a $y''(a) \neq 0$, tak $y(x) \neq 0$ aj $y'(x) \neq 0$ aj $y''(x) \neq 0$ pre $x > a$.

Dôkaz sa prevedie podobne ako dôkaz vety 1.

Dôsledok: Nech pre $x \in (-\infty, \infty)$ je $p(x) \leqq 0$ a alebo $q(x) \geqq 0$ alebo $q(x) \leqq 0$. Potom každé netriviálne riešenie d. r. (A) má najviac jeden dvojnásobný nulový bod.

Dokážeme nepriamo: Nech $x_1 < x_2$, $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y(x_2) = y'(x_2) = 0$. Potom v prípade $q(x) \leqq 0$ je x_1 dvojnásobný nulový bod a teda podľa vety 2 muselo by byť $y(x) \neq 0$ pre $x > x_1$, teda aj $y(x_2) \neq 0$, čo je spor. V prípade $q(x) \geqq 0$ je x_2 dvojnásobný nulový bod a teda podľa vety 1 bolo by $y(x) \neq 0$ pre $x < x_2$, teda aj $y(x_1) \neq 0$, čo je opäť spor s predpokladom. Tým je dôkaz prevedený.

Nech $y_1(x)$ a $y_2(x)$ sú diferencovateľné funkcie do tretieho rádu. Označme

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_1'(x) \\ y_2(x), & y_1'(x) \end{vmatrix} \tag{1}$$

potom je

$$w'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2''(x) \\ y_2(x), & y_2''(x) \end{vmatrix} \tag{1'}$$

Veta 3: Nech pre $x \in (-\infty, \infty)$ je $p(x) \leqq 0$ a $q(x) \geqq 0$, Nech $y_1(x)$ a $y_2(x)$ sú riešenia dif. rovnice (A) s vlastnosťou $y(a) = y_1'(a) = 0, y_1''(a) \neq 0, y_2(a) = y_2''(a) = 0$, $y_2'(a) \neq 0$ a nech je funkcia $w(x)$ určená rovnosťou (1). Potom pre $x > a$ je $w(x) \neq 0$ aj $w'(x) \neq 0$.

Dôkaz: Najprv dokážeme nepriamo, že pre $x > a$ platí $w'(x) \neq 0$. Nech existuje $\xi > a$ tak, že $w'(\xi) = 0$. Potom homogenna sústava lineárnych rovníc o neznámych c_1 a c_2

$$\begin{aligned} c_1 \cdot y_1(\xi) + c_2 \cdot y_2(\xi) &= 0 \\ c_1 \cdot y_1''(\xi) + c_2 \cdot y_2''(\xi) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

má aj netriviálne riešenie, lebo determinant tej sústavy $w'(\xi) = 0$; d. r. (A) má teda netriviálny integrál

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x), \tag{3}$$

ktorý v bode ξ má inflexný nulový bod a v bode a má nulový bod, lebo $y_1(a) = 0 = y_2(a)$. To je spor s vetou 1. Teda pre $x > a$ musí byť $w'(x) \neq 0$. Ďalej je $w(a) = 0$, preto pre $x > a$ je aj $w(x) \neq 0$. Tým je veta dokázaná.

Veta 4: Nech pre $x \in (-\infty, \infty)$ je $p(x) \leqq 0$ a $q(x) \leqq 0$. Nech $y_1(x)$ a $y_2(x)$ sú rišenia dif. rovnice (A) s vlastnosťou $y_1(a) = y_1'(a) = 0, y_1''(a) \neq 0, y_2(a) = y_2''(a) = 0$, $y_2'(a) \neq 0$ a nech funkcia $w(x)$ je určená rovnosťou (1). Potom platí $w(x) \neq 0$ aj $w'(x) \neq 0$ pre $x < a$.

Dôkaz sa urobí podobne ako dôkaz vety 3.

M. Greguš dokázal vo svojej práci [1] túto vetu: Všetky riešenia $y(x)$ zväzku prvého, resp. druhého, resp. tretieho druhu v bode a dif. rovnice (A) vyhovujú lin. dif. rovnici druhého rádu

$$w(x) \cdot y'' - w'(x) \cdot y' + \big(w''(x) + p(x) \cdot w(x)\big) \cdot y = 0, \tag{B}$$

kde funkcia $w(x)$ je určená rovnosťou (1) a $y_1(x)$ a $y_2(x)$ sú riešenia zväzku prvého, resp. druhého, resp. tretieho druhu d. r. (A) v bode a.

Na základe tejto vety a vety 3, resp. vety 4 dokáže sa nasledujúca veta.

Veta 5: Nech pre $x \in (-\infty, \infty)$ je $p(x) \leqq 0$ a $q(x) \geqq 0$ resp. $q(x) \leqq 0$. Potom nulové body riešení zväzku prvého druhu v bode a dif. rovnice (A), ak existujú, oddeľujú sa napravo, resp. naľavo od bodu a. Ak ξ je prvý nulový bod riešenia $y_1(x)$ dif. rovnice (A) s vlastnosťou $y_1(a) = y_1'(a) = 0$ napravo, resp. naľavo od bodu a, potom každé iné riešenie zväzku prvého druhu v bode a má medzi bodmi a, ξ práve jeden nulový bod.

Dôkaz podal vo svojej práci [1] M. Greguš pre d. r. $y''' + 2A(x)\,y' + \big(A'(x) + b(x)\big) \cdot y = 0$. Pre d. r. (A) sa veta dokáže podobne.

Lemma 1: Nech I je interval, nech $a \in I$, $c \in I$ a nech pre každé $x \in I$ je

$$p(x) \leqq \int_c^x q(t)\,\mathrm{d}t \leqq 0. \tag{4}$$

Nech $y(x)$ je riešenie dif. rovnice (A) s vlastnosťou $y(a) = 0$ a okrem toho alebo $y'(a) = 0$ a $y''(a) \neq 0$ alebo $y'(a) \neq 0$ a $y''(a) = 0$. Potom pre $x \in I$, $x \neq a$ platí $y(x) \neq 0$ aj $y'(x) \neq 0$.

Dokážeme nepriamo najprv, že $y'(x) \neq 0$ pre $x > a$, $x \in I$, a to v prípade, keď $y'(a) = 0$ a $y''(a) \neq 0$. Nech $\xi \in I$ je prvý nulový bod funkcie $y'(x)$ napravo od bodu a. Integrujme d. r. (A) v intervale $\langle a, x\rangle$, kde $x \in \langle a, \xi\rangle$, bude

$$y''(x) - y''(a) + \int_a^x p(u) \cdot y'(u) \,.\, \mathrm{d}u + \int_a^x q(u) \cdot y(u) \,.\, \mathrm{d}u = 0.$$

Ak na posledný integrál ľavej strany tejto rovnosti aplikujeme metódu integrácie per partes, dostaneme

$$y''(x) - y''(a) + y(x) \, . \int_\gamma^x q(t) \, \mathrm{d}t + \int_a^x y'(u) \, . \left(p(u) - \int_\gamma^u q(t) \, \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}u = 0, \tag{5}$$

lebo $y(a) = 0$, pričom γ je ľubovoľné číslo z intervalu I. Ak rovnosť (5) vynásobíme funkciou $2 \, . \, y'(x)$ a použijeme identitu

$$2 \, . \, y'(x) \, . \, y''(x) = (y'^2(x))'$$

a potom integrujeme v intervale $\langle a, \xi \rangle$, dostaneme

$$y'^2(\xi) - y'^2(a) - 2y''(a) \int_a^\xi y'(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^\xi \left(2y(x) \, y'(x) \int_\gamma^x q(t) \, \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_a^\xi 2y'(x) \int_a^x y'(u) \, . \left(p(u) - \int_\gamma^u q(t) \, \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}u \, . \, \mathrm{d}x = 0. \tag{6}$$

Ak $y''(a) > 0$, je pre $x \in (a, \xi)$ $y'(x) > 0$ aj $y(x) > 0$, $y'(\xi) = 0$ a pretože pre $\gamma = c$ a pre $u \in I$ platí (4), je lavá strana rovnosti (6) záporná, čo dáva spor. Ak $y''(a) < 0$, pre $x \in (a, \xi)$ je $y'(x) < 0$ aj $y(x) < 0$ a $y'(\xi) = 0$, potom pre $\gamma = c$ ľavá strana vzťahu (6) je opäť záporná, čo dáva spor. Preto $y'(x) \neq 0$ pre všetky $x > a$, $x \in I$. Potom aj $y(x) \neq 0$ pre $x > a$, $x \in I$.

Teraz dokážeme, že $y'(x) \neq 0$ pre $x < a$, $x \in I$. Keby to neplatilo, tak bude naľavo od bodu a existovať prvý nulový bod ξ funkcie $y'(x)$. Potom však vzťah (6) pri $y''(a) \neq 0$ a pre $\gamma = c$ vedie k sporu (ľavá jeho strana je záporná). Preto pre $x < a$, $x \in I$ je $y'(x) \neq 0$, a teda aj $y(x) \neq 0$. V prípade, že $y'(a) \neq 0$ a $y''(a) = 0$, keby ξ bol prvý nulový bod funkcie $y'(x)$ napravo alebo naľavo od bodu a, potom vzťah (6) dáva pre $\gamma = c$ spor. Preto $y'(x) \neq 0$ aj $y(x) \neq 0$ pre $x \in I$, $x \neq a$. Tým je lemma dokázaná.

Poznámka: Ak a je dvojnásobný nulový bod netriviálneho riešenia $y(x)$ d. r. (A), pričom platí (4), potom pre $x \in I$, $x \neq a$ platí $y(x) \neq 0$ aj $y'(x) \neq 0$ aj $y''(x) \neq 0$. Predpoklad existencie nulového bodu funkcie $y''(x)$ vedie totiž k sporu so vzťahom (5).

Lemma 2: Nech a je vnútorný bod intervalu I. Nech pre pevné $c \in I$ a pre každé $x \in I$ platí (4). Nech $w(x)$ je funkcia určená rovnosťou (1), pričom $y_1(x)$ a $y_2(x)$ sú riešenia dif. rovnice (A) s vlastnosťou $y_1(a) = y_1'(a) = 0$, $y_1''(a) \neq 0$, $y_2(a) = y_2''(a) = 0$, $y_2'(a) \neq 0$. Potom pre $x \in I$, $x \neq a$ platí $w(x) \neq 0$ aj $w'(x) \neq 0$.

Dokážeme najprv nepriamo, že $w'(x) \neq 0$. Keby existovalo číslo ξ tak, že $w'(\xi) = 0$, potom sústava rovníc (2) má aj netriviálne riešenie (c_1, c_2), pretože $w'(\xi) = 0$ je jej determinant, a teda existuje netriviálne riešenie (3) d. r. (A), ktoré má v bode ξ inflexný nulový bod, lebo $y(\xi) = y''(\xi) = 0$, a v bode a má nulový bod $y(a) = 0$, čo je spor s lemmou 1. Preto pre $x \in I$, $x \neq a$ je $w'(x) \neq 0$ a teda s ohľadom na $w(a) = 0$ aj $w(x) \neq 0$. Tým je lemma 2 dokázaná.

Veta 6: Nech pre pevné $c \in I$ a pre každé $x \in I$ platí

$$p(x) \leqq \int_c^x q(t)\,\mathrm{d}t \leqq 0. \tag{4}$$

Potom každé netriviálne riešenie dif. rovnice (A) má v otvorenom intervale I najviac dva nulové body alebo jeden dvojnásobný nulový bod.

Dôkaz: Keby $y(x)$ malo v I tri nulové body $x_1 < x_2 < x_3$ a $\bar{y}(x)$ by bolo riešenie s dvojnásobným nulovým bodom v x_1, tak $y(x)$ a $\bar{y}(x)$ sú riešenia zväzku prvého druhu v bode a a vyhovujú teda d. r. (B) a ich nulové body by sa oddeľovali, t. j. $\bar{y}(x)$ by muselo mať nulový bod v intervale (x_2, x_3), čo je spor s lemmou 1. Prípad, že neexistuje nulový bod okrem dvojnásobného nulového bodu je z lemmy 1 zrejmý. Tým je veta dokázaná.

Poznámka: V lemme 1 a 2 a vo vete 6 môže, pravda, byť aj $I = (-\infty, \infty)$.

Uvažujme dve rôzne lin. dif. rovnice tretieho rádu

$$y''' + p(x) \,.\, y' + q(x) \,.\, y = 0, \tag{A}$$

$$z''' + P(x) \,.\, z' + Q(x) \,.\, z = 0, \tag{C}$$

kde $p(x)$, $q(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ sú v otvorenom intervale I spojité funkcie.

Lemma 3: Nech $y(x)$ je ľubovoľné riešenie dif. rovnice (A). Potom ho možno napísať v tvare

$$y(x) = Y(x) + \int_a^x (-q(t) \,.\, y(t)) \,.\, V(x, t) \,.\, \mathrm{d}t, \tag{7}$$

kde $Y(x)$ je riešením dif. rovnice

$$Y''' + p(x) \,.\, Y' = 0, \tag{D}$$

ktoré má v čísle a tie isté počiatočné podmienky ako riešenie $y(x)$,

$$V(x, t) = \begin{vmatrix} Y_1(x), & Y(_1t), & Y_1'(t) \\ Y_2(x), & Y_2(t), & Y_2'(t) \\ Y_3(x), & Y_3(t), & Y_3'(t) \end{vmatrix} \tag{8}$$

pričom $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_3(x)$ je fundamentálny systém riešení dif. rovnice (D), ktorých wronskián je rovný jednej.

Dôkaz lemmy podal M. Greguš metódou variácie konštánt aplikovanou na dif. rovnicu s pravou stranou v tvare $y''' + p \,.\, y' = -q \,.\, y$.

Veta 7: Nech $a < b$ a nech pre $x \in (a, b) \subset I$ je $p(x) \leqq 0$, $p(x) \leqq P(x)$, $O \leqq q(x) \leqq$ $\leqq Q(x)$. Nech $y(x)$ je riešenie dif. rovnice (A) a $z(x)$ riešenie dif. rovnice (C), ktoré majú v bode a rovnaké počiatočné podmienky $y^{(i)}(a) = z^{(i)}(a)$ pre $i = 0, 1, 2$. Potom platí: a) Ak $z(a) \geqq 0$ a $z'(x) > 0$ pre $x \in (a, b)$, tak pre $x \in (a, b)$ je $y(x) > z(x) > 0$. b) Ak $z(a) \leqq 0$ a $z'(x) < 0$ pre $x \in (a, b)$, tak pre $x \in (a, b)$ je $y(x) < z(x) < 0$.

Dokážeme len tvrdenie a); tvrdenie b) dokáže sa podobne. Rovnice (A) a (C) upravíme na tvar

$$y''' + p \,.\, y' = -q \,.\, y$$

$$z''' + p \,.\, z' = (p - P) \,.\, z' - Q \,.\, z$$

a aplikujeme na ne lemmu 3. Potom je

$$y(x) = Y(x) + \int_a^x \big(-q(t)\, y(t)\big) \,.\, V(x, t) \,.\, \mathrm{d}t$$

$$z(x) = Y(x) + \int_a^x \big([p(t) - P(t)]\, z'(t) - Q(t)\, z(t)\big) \,.\, V(x, t) \,.\, \mathrm{d}t,$$

pričom $y(x)$ a $z(x)$ spĺňajú v čísle a rovnaké počiatočné podmienky a $V(x, t)$ je určené rovnosťou (8). Teda je

$$y(x) - z(x) = \int_a^x \big([P(t) - p(t)]\, z'(t) + [Q(t)\, z(t) - q(t)\, y(t)]\big) \,.\, V(x, t)\, \mathrm{d}t. \qquad (9)$$

Pri pevnom t je $V(x, t) = v(x)$ riešením d. r. (D) s vlastnosťou

$$v(t) = V(t, t) = 0, \qquad (v(x))'_{x=t} = 0, \qquad (v(x))''_{x=t} =$$
$$= |\,(Y_i(x))''_{x=t}, \qquad Y_i(t), \qquad Y'_i(t)\,| = W(t) = 1 > 0.$$

Pretože d. r. (D) je špeciálnym prípadom d. r. (A), pričom $q(x) = 0$, a teda $p \leqq \int_c^x q \,.\, \mathrm{d}t = 0$, spĺňa $v(x)$ predpoklady lemmy 1, a preto je $v(x) \neq 0$ pre $x \neq t$; pretože $(v(x))''_{x=t} = 1 > 0$, je $v(x) > 0$, t. j. $V(x, t) > 0$ pre $x \neq t$, a teda pre $t \in (a, x)$ je $V(x, t) > 0$.

Je $z'(x) > 0$ v intervale (a, b) a $z(a) \geqq 0$, teda $z(x) > 0$ v (a, b). Že $y(x) > z(x)$, to dokážeme nepriamo. Nech $y(x) \leqq z(x)$, potom $q \,.\, y \leqq q \,.\, z \leqq Q \,.\, z$, t. j. $Q \,.\, z - q \,.\, y \geqq 0$ v (a, b). Potom pravá strana vzťahu (9) bola by kladná, čo je spor. Teda $y(x) > z(x) > 0$ v (a, b). Tým je tvrdenie a) vety 7 dokázané.

Veta 7': Nech $a < b$, $c \in \langle a, b \rangle$ a nech pre každé $x \in (a, b) \subset I$ platí $O \leqq q(x) \leqq Q(x)$ a

$$p(x) \leqq P(x) \leqq \int_c^x Q(t)\, \mathrm{d}t \leqq 0. \qquad (10)$$

Nech $y(x)$ je riešenie dif. rovnice (A) a $z(x)$ riešenie dif. rovnice (C) s vlastnosťou $y(a) = z(a) = 0$. Potom platí:

a) Ak alebo $y'(a) = z'(a) = 0$ a $y''(a) = z''(a) > 0$ alebo $y'(a) = z'(a) > 0$ a $y''(a) = z''(a) = 0$, tak pre $x \in (a, b)$ je $y(x) > z(x) > 0$. b) Ak alebo $y'(a) = z'(a) = 0$

a $y''(a) = z''(a) < 0$ alebo $y'(a) = z'(a) < 0$ a $y''(a) = z''(a) = 0$, tak pre $x \in (a, b)$ je $y(x) < z(x) < 0$.

Dôkaz: Tvrdenia vety 7' vyplývajú z vety 7 v dôsledku platnosti lemmy 1. Koeficienty d. r. (C) a jej riešenie $z(x)$ spĺňajú totiž predpoklady lemmy 1, a teda musí byť $z'(x) \neq 0$ v (a, b). Pretože v prípade a) je $z''(a) > 0$ a $z'(a) = 0$ alebo $z'(a) > 0$ a $z''(a) = 0$, musí byť $z'(x) > 0$ v (a, b); sú teda splnené predpoklady vety 7a), a preto $y(x) > z(x) > 0$ v (a, b). V prípade b) je $z''(a) < 0$ a $z'(a) = 0$ alebo $z'(a) < 0$ a $z''(a) = 0$, a preto $z'(x) < 0$ v (a, b); sú teda splnené predpoklady vety 7b), a preto $y(x) < z(x) < 0$. Tým je veta dokázaná.

Veta 8: Nech $b < a$ a nech pre $x \in (b, a) \subset I$ je $p(x) \leqq 0$, $p(x) \leqq P(x)$, $Q(x) \leqq \leqq q(x) \leqq 0$. Nech je $y(x)$ riešenie dif. rovnice (A) a $z(x)$ riešenie dif. rovnice (C) ktoré riešenia majú v bode a rovnaké počiatočné podmienky $y^{(i)}(a) = z^{(i)}(a)$ pre $i = 0, 1, 2$. Potom platí: a) Ak $z(a) \geqq 0$ a $z'(x) < 0$ pre $x \in (b, a)$, tak pre $x \in (b, a)$ je $y(x) > z(x) > 0$. b) Ak $z(a) \leqq 0$ a $z'(x) > 0$ pre $x \in (b, a)$, tak $y(x) < z(x) < 0$ pre $x \in (b, a)$.

Dôkaz sa urobí podobne ako dôkaz vety 7.

Veta 8': Nech $b < a$, $c \in \langle b, a \rangle$ a nech pre každé $x \in (b, a) \subset I$ platí (10) a $Q(x) \leqq \leqq q(x) \leqq 0$. Nech je $y(x)$ riešenie dif. rovnice (A) a $z(x)$ riešenie dif. rovnice (C) s vlastnosťou $y(a) = z(a) = 0$. Potom platí: a) Ak alebo $y'(a) = z'(a) = 0$ a $y''(a) = = z''(a) > 0$ alebo $y'(a) = z'(a) < 0$ a $y''(a) = z''(a) = 0$, tak pre $x \in (b, a)$ je $y(x) > > z(x) > 0$. b) Ak alebo $y'(a) = z'(a) = 0$ a $y''(a) = z''(a) < 0$ alebo $y'(a) = z'(a) > 0$ a $y''(a) = z''(a) = 0$, tak pre $x \in (b, a)$ je $y(x) < z(x) < 0$.

Dôkaz sa urobí podobne ako dôkaz vety 7'.

LITERATÚRA

[1] Greguš M.: O niektorých vlastnostiach riešení lin. dif. rovnice homogénnej tretieho rádu. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, 2, 1955, str. 73—85.

[2] Greguš M.: Ueber einige Eigenschaften der Büschel von Lösungen der linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung. Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha, str. 311—319.

Adresa autora: Bratislava, Mýtna 49.

Do redakcie došlo 27. V. 1963.

Об одной достаточной условии неколеблемости решенпй линеиного диф. уравнения третьего пориядка

Ю. Червень

Резюме

В работе рассматривается лин. диф. уравнение 3-го пориадка (А), коэффизиенты которого непрерывные функции. Работа может быть в основном разделена на три части. В первой части рассматриваются неколеблющие свойства связи решений при некоторых специальных условиях. Во второй частьи показано, что условие (4) представляет собой достаточное условие неколеблемости решений диф. уравнения (А). В третьей части приведены теоремы сравнения решений двух лин. диф. уравнений 3-го порядка.

Über eine hinreichende Bedingung für die Oszillationsunfähigkeit der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

J. Červeň

Zusammenfassung

In der Arbeit wird die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung (A), deren Koeffizienten stetige Funktionen sind, untersucht. Die Arbeit kann man in drei Teile teilen. Im ersten Teil werden nichtoszillatorische Eigenschaften der Bündel von Lösungen bei einigen Spezialbedingungen untersucht. Im zweiten Teil wird gezeigt, daß die Bedingung (4) eine hinreichende Bedingung für einen nichtoscillatorischen Charakter der Lösungen der Differentialgleichung (A) ist. Im dritten Teil sind Vergleichungssätze der Lösungen von zwei linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung angeführt.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IX., 2. — MATHEMATICA, 1964)
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. IX., FASC. II. MATHEMATICA 1964

O asociatívnej operácii na určitej triede sväzov

J. BADIDA

V práci [3] bol riešený problém o existencii asociatívnych a komutatívnych operácií na niektorých triedach sväzov, pričom tieto operácie sú rôzne od priameho a voľného súčinu. Podrobnejšia formulácia tohto problému pre triedu všetkých grúp je formulovaná A. G. Kurošom v jeho knihe [2] a pre sväzy v úvode už spomenutej práci [3]. V tejto poznámke ukážeme existenciu ďalšej takejto operácie na určitej triede sväzov.

1. Pojmy a označenia

Terminológiu budeme používať ako v práci [3] a čiastočne ako v [1]. Pripomeňme hlavne nasledujúce pojmy:

Nech X, Y sú ľubovoľné disjunktné usporiadané množiny. Ordinálnym súčtom $X \oplus Y$ budeme rozumieť množinový súčet všetkých prvkov $x \in X$ a $y \in Y$, kde binárna relácia $\leqq$ je definovaná takto:

Ak $x \leqq x_1$ v X, respektíve $y \leqq y_1$ v Y, potom $x \leqq x_1$, respektíve $y \leqq y_1$ v $X \oplus Y$. Ak $x \in X$ a $y \in Y$, potom $x \leqq y$ v $X \oplus Y$.

Poznámka. Ak X, Y sú sväzy, potom aj ordinálny súčet $X \oplus Y$ je sväz (pozri [1], kap. II, § 7, str. 48).

Nech S je ľubovoľný sväz, $R \subset S$. R nazývame reťazcom, ak je R usporiadaná množina. Hovoríme, že reťazec R spojuje prvky a, b, ak a je najmenší a b najväčší prvok množiny R. Dĺžkou $d(R)$ reťazca R nazývame mohutnosť množiny R (v [1] je pojem dĺžky reťazca definovaný inakšie).

V ďalšom texte ľubovoľný reťazec spojujúci najmenší prvok sväzu S s ľubovoľným prvkom $x \in S$ budeme označovať symbolom $r(x)$.

Nech $\{C_v\}$ ($v \in M$) je množina sväzov. Nech každý zo sväzov C_v obsahuje najmenší prvok O_v. Diskrétnym priamym súčinom sväzov C_v budeme rozumieť množinu C všetkých zobrazení f množiny M do $\cup C_v$, pre ktoré platí:

a) pre každé $v \in M$ je $f(v) \in C_v$,

b) ak $f[0]$ je množina všetkých $v \in M$, pre ktoré $f(v) = O_v$, potom množina $M - f[0]$ je konečná.

V množine C sú definované sväzové operácie po zložkách: ak f, $g \in C$, potom $f \cap g$ je ten prvok $h \in C$, ktorý pre každé $v \in M$ spĺňa rovnicu $f(v) \cap g(v) = h(v)$; podobne sa definuje $f \cup g$.

Nech $S_v(v \in M)$ je systém navzájom disjunktných sväzov. Symbolom ΠS_v budeme označovať diskrétny priamy súčin sväzov S_v a symbolom $\Pi^* S_v$ voľný súčin sväzov S_v.

2. Operácia δ_α na triede sväzov Ω'_α

Nech Ω je trieda všetkých sväzov, ktoré obsahujú najmenší prvok.

Definícia 2,1. Nech α je nekonečné kardinálne číslo, nech S je ľubovoľný sväz z triedy Ω, $S = A \oplus B$ (1), pričom A, B sú podsväzy svazu S. Budeme hovoriť, že ordinálny rozklad (1) má vlastnosť (α), keď platí:

Ak $x \in A$, potom každý reťazec $r(x) \subset S$, v ktorom x je najväčší prvok, má dĺžku menšiu ako α.

Lemma 2,1. *Nech $S = A \oplus B$, $S = C \oplus D$. Nech $C \not\subset A$. Potom $A \subset C$.*

Dôkaz. Keďže $C \subset A$, potom existuje prvok $c \in C$, $c \notin A$. Potom musí byť $c \in B$, takže pre všetky $a \in A$ platí $a < c$. Potom je ale pre všetky $a \in A$ splnený vzťah $a \in C$.

Lemma 2,2. *Predpokladajme, že sväz S (z triedy Ω) má aspoň jeden ordinálny rozklad typu* (α). *Uvažujme všetky možné ordinálne rozklady typu* (α) *sväzu S : $S = A^i \oplus B^i$, kde i prebieha nejakú neprázdnu množinu indexov N. Označme $A = \cup A^i$, $B = \cap B^i$. Platí $S = A \oplus B$ a tento rozklad je typu* (α).

Dôkaz. Z lemmy 2,1 vyplýva, že množina podsväzov $\{A^i\}$ sväzu S je usporiadaná (pomocou množinovej inklúzie), teda $A = \cup A^i$ je tiež podsväz v S. Nech $x \in S$. Pre každé $i \in N$ je $x \in A^i \cup B^i$. Ak je pre každé $i \in N$ $x \in B^i$, potom $x \in B$. Ak existuje i, takže $x \in B^i$, potom $x \in A^i$, teda $x \in A$.

Nech $a \in A$, $b \in B$. Existuje i tak, že $a \in A^i$. Keďže $b \in B$, je $b \in B^i$, teda $a < b$. Tým je dokázané, že $S = A \oplus B$.

Nech $x \in A$, potom $x \in A^i$ pre vhodné i. Teda každý reťazec $r(x)$ je dĺžky menšej ako α.

Definícia 2,2. Nech Ω'_α je trieda všetkých sväzov S, ktoré obsahujú najmenší prvok a dajú sa vyjadriť v tvare ordinálneho súčtu (1), majúceho vlastnosť (α).

Podľa lemmy 2,2 každému sväzu S z triedy Ω'_α môžeme priradiť sväzy, ktoré označme $S(X_\alpha)$, $S(Y_\alpha)$ tak, že

$$S = S(X_\alpha) \oplus S(Y_\alpha)$$

a tento rozklad je „najmenším“ rozkladom typu (α) v tomto zmysle, že pre každý rozklad $S = A \oplus B$ typu (α) platí:

$$A \subset S(X_\alpha), \qquad B \supset S(Y_\alpha).$$

Definícia 2,3. Nech $S_\nu(\nu \in M)$ sú ľubovoľné sväzy z triedy Ω'_α. Nech $\Gamma = \{S_\nu\}$. Symbolom $\delta_\alpha(\Gamma)$ budeme označovať sväz

$$\Pi S_\nu(X_\alpha) \oplus \Pi^* S_\nu(Y_\alpha).$$

Lemma 2,3. *Nech α je nekonečné kardinálne číslo. Nech $\Gamma = \{S_\nu\}$ $(\nu \in M)$ je množina sväzov z triedy Ω'_α. Potom rozklad sväzu $\delta_\alpha(\Gamma)$ v ordinálny súčet*

$$\delta_\alpha(\Gamma) = \Pi S_\nu(X_\alpha) \oplus \Pi^* S_\nu(Y_\alpha) \tag{1'}$$

má vlastnosť (α).

Dôkaz. Nech $f \in \Pi S_\nu(X_\alpha)$. Podľa lemmy 5,1, § 5 v práci [3] každý reťazec $r(f)$ v $\Pi S_\nu(X_\alpha)$ má dĺžku menšiu ako α, a teda podľa definície 2,1 rozklad sväzu $\delta_\alpha(\Gamma)$ v ordinálny súčet (1') má vlastnosť (α).

Lemma 2,4. *Nech S je sväz, A, B a D sú podsväzy sväzu S, $S = A \oplus B$. Potom $D = (A \cap D) \oplus (B \cap D)$ (niektorá z množín $A \cap D$, $B \cap D$ može byť prázdná).*

Tvrdenie je zrejmé.

Lemma 2,5. *Nech S_1 a S_2 sú sväzy, $S_3 = S_1 * S_2$ (* znamená voľný súčin). Potom sa S_3 nedá rozložiť v ordinálny súčet svojich podsväzov (t. j. neexistujú podsväzy A, B sväzu S_3 tak, aby bolo $S_3 = A \oplus B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$).*

Dôkaz. Nech $S_3 = S_1 * S_2$, $S_3 = A \oplus B$, kde A, B sú podsväzy sväzu S_3. Z definície voľného súčinu dvoch sväzov vyplýva, že každý prvok $x \in S_1$ je neporovnateľný s každým prvkom $y \in S_2$. Ak teda $A \cap S_1 \neq \emptyset$, potom $S_2 \subset A$, a teda tiež $S_1 \subset A$, takže sväz S_3 (vytvorený sväzmi S_1, S_2) je podmnožinou sväzu A, čo je spor. Analogicky dochádzame ku sporu, keď $B \cap S_1 \neq \emptyset$.

Lemma 2,6. *Nech $S = \delta_\alpha(\Gamma)$, $S = C \oplus D$, $D \neq \emptyset$, $\Pi S_\nu(X_\alpha) \subset C$. Potom $\Pi S_\nu(X_\alpha) = C$.*

Dôkaz. Podľa lemme 2,3 sväz $\delta_\alpha(\Gamma) = C \oplus D$ patrí do triedy Ω'_α, teda $C \neq \emptyset$. Nech $P = \Pi^* S_\nu(Y_\alpha)$. Ak $P = \emptyset$, potom zrejme $D = \emptyset$. Nech aspoň pre jedno $\nu \in M$ je $S_\nu(Y_\alpha) \neq \emptyset$, potom zrejme $D \neq \emptyset$. Podľa lemmy 2,4 pre sväz $P = \Pi^* S_\nu(Y_\alpha)$ je splnený vzťah $P = (C \cap P) \oplus (D \cap P)$. Podľa lemmy 2,5 je alebo $C \cap P = \emptyset$ alebo $D \cap P = \emptyset$. Ak $D \cap P = \emptyset$, je $D = \emptyset$, čo je proti predpokladu. Teda $C \cap P = \emptyset$, $P \subset D$. Z toho vyplýva $\Pi S_\nu(X_\alpha) = C$.

Lemma 2,7. *Nech $S = \delta_\alpha(\Gamma)$. Potom $S(X_\alpha) = \Pi S_\nu(X_\alpha)$, $S(Y_\alpha) = \Pi^* S_\nu(Y_\alpha)$.*

Dôkaz vyplýva z lemmy 2,3 a z lemmy 2,6.

Veta 2,1. *Operácia δ_α definovaná na triede Ω'_α je asociatívna.*

Dôkaz vyplýva bezprostredne z asociatívnosti operácií priameho a voľného súčinu.

LITERATÚRA

[1] G. Birkhoff: Teorija struktur, Moskva 1952.
[2] A. G. Kuroš: Teorija grupp (1944 r.).
[3] J. Badida: Asociatívne operácie na niektorých triedach svázov, Acta Fac. Mat. Univ. Comenian, VII., 11., Mathematica 1963, 609–621.

Adresa autora: Košice, Pasteurovo nám. 15.

Do redakcie došlo 1. VII. 1963.

Об ассоциативной операции на определенном классе структур

Я. Бадида

Резюме

В настоящей заметке доказывается, что ответ на поставленный вопрос в работе [3] (вопрос о существовании ассоциативных и комутативных операций на классе всех структур, эвент. для определенных классов структур, причем эти операции должны быть неодинаковыми с прямым и свободным произведением) является положительным и для определенного класса структур Ω'_α (— кардинальное число). Класс Ω'_α определяется при помощи определенного условия и его подробное определенпе приводится в абзаце 2.

Über assoziative Operationen auf gewisser Klasse von Verbänden

J. Badida

Zusammenfassung

In der Arbeit [3] wurde die Frage über die Existenz assoziativer und kommutativer Operationen auf der Klasse aller Verbände, bzw. auf gewissen Verbandklassen gestellt, wobei diese Operationen verschieden vom direkten und freien Produkt sein sollen.

In der vorgelegten Bemerkung wird bewiesen, daß die Antwort an diese Frage auch für eine gewisse Verbandklasse Ω'_α bejahend wird, wobei α eine Kardinalzahl ist. Die Klasse Ω'_α ist mit Hilfe einer gewissen Bedingung (s. Abschn. 2) definiert.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IX., 2. — MATHEMATICA, 1964)
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. IX., FASC. II. MATHEMATICA 1964

Poznámka ku stabilite riešení lineárnych diferenciálnych rovníc

R. KODNÁR

V knihe [1] sú uvedené vety o ohraničenosti riešení vektorovej diferenciálnej rovnice

$$z' = [A(x) + B(x)]\, z$$

za predpokladu ohraničenosti riešení rovnice

$$y' = A(x) \,.\, y$$

$A(x)$, $B(x)$ sú matice, z, y vektory.

Ukážeme, že pomocou tzv. rozšíreného systému možno tieto výsledky zovšeobecniť aj na nehomogénne systémy.

Majme systém

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, z_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

v krátkosti

$$z' = A(x)\, z \tag{1}$$

Tento systém možno rozšíriť na systém

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, z_j + 0 \,.\, z_{n+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{dz_{n+1}}{dx} = 0$$

v krátkosti

$$z^{*\prime} = A^*(x)\, z^* \tag{2}$$

Medzi systémami (1), (2) platí vzťah:

Ak $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ je riešením systému (1) potom $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ c \end{pmatrix}$ je riešením systému (2) a naopak.

(c je ľub. konštanta.)

Uvažujme teraz o nehomogénnom systéme

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, z_j + h_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

označme ho

$$z' = A(x)\, z + h(x) \tag{3}$$

Rozšírený bude

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, z_j + h_i(x)\, z_{n+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{dz_{n+1}}{dx} = 0$$

v krátkosti

$$z^{*\prime} = A^*(x)\, z^* \tag{4}$$

Medzi riešeniami systémov (3), (4) platí pre $c = 1$ ten istý vzťah, ako medzi riešeniami systémov (1), (2). Opierajúc sa o tento vzťah, dokážeme vety.

Veta 1: Nech A je konštantná matica, diferenciálna rovnica (5) $y' = Ay$ má všetky riešenia ohraničené a nech pre maticu $B(x)$ a vektor $h(x)$ platí

$$\int^{\infty} \| B(x) \| \, dx < +\infty, \qquad \int^{\infty} \| h(x) \| \, dx < +\infty \tag{6}$$

Potom sú ohraničené aj riešenia rovnice

$$z' = [A + B(x)]\, z + h(x) \tag{7}$$

Poznámka: $\| B(x) \|$, $\| h(x) \|$ značia normy definované tým istým spôsobom ako v [1].

Veta 2: Nech matica $A(x)$ v rovnici (5) je periodická, všetky riešenia rovnice (5), sú ohraničené a nech platia podmienky (6). Potom aj riešenia rovnice (7) sú ohraničené.

Veta 3: Nech $A(x)$ v rovnici (5) je ľubovoľná integrovateľná matica, riešenia rovnice (5) sú ohraničené a nech platia podmienky (6).

Nech ďalej

$$\liminf_{x \to \infty} \int^{x} \operatorname{tr}\, [A(x_1)]\, dx_1 > -\infty$$

Potom sú ohraničené aj všetky riešenia rovnice (7).

Veta 4: Majme diferenciálnu rovnicu

$$z' = [A + B(x) + C(x)]\, z + h(x) \tag{8}$$

Nech platí:

1. A je konštantná matica, ktorej všetky charakteristické čísla majú nekladnú reálnu časť, sú nenulové a s nulovou reálnou časťou sú prosté.

2.

$$\lim_{x\to\infty} B(x) = 0, \qquad \int^{\infty} \left\| \frac{dB(x)}{dx} \right\| dx < +\infty$$

3.

$$\int^{\infty} \| C(x) \| \, dx < +\infty$$

4. Charakteristické čísla matice $A + B(x)$ majú nekladnú reálnu časť pre $x \geqq x_0$.

5.

$$\int^{\infty} \| h(x) \| \, dx < +\infty$$

Za týchto podmienok sú riešenia diferenciálnej rovnice (8) ohraničené.

Dôkaz: Rovnicu (5) rozšírme do rovnice

$$y' = A^*(x)\, y \tag{5'}$$

v ktorej

$$A^*(x) = \begin{pmatrix} A(x) & 0 \\ & \vdots \\ 00 \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

rovnice (7), (8) rozšírime do tvaru (7′), (8′)

$$z' = [A^*(x) + B^*(x)]\, z \tag{7'}$$

$$z' = [A^*(x) + B_1^*(x) + C^*(x)]\, z \tag{8'}$$

kde

$$B^*(x) = \begin{pmatrix} B(x) & h_1(x) \\ & h_2(x) \\ & \vdots \\ & h_n(x) \\ 00 \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1^*(x) = \begin{pmatrix} B(x) & 0 \\ & \vdots \\ 00 \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad c^*(x) = \begin{pmatrix} C(x) & h_1(x) \\ & \vdots \\ & h_n(x) \\ 00 \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Takto rozšírené rovnice splňujú predpoklady vety 1, 4, 6 a 3 v [1], 2. kapitola. Z týchto viet plynie ohraničenosť riešení rovníc (7′), resp. (8′), a teda aj rovníc (7), (8), č. b. t. d.

Vetu 4 možno dokázať za trocha všeobecnejších predpokladov pomocou lemmy, ktorú odvodili Doležal a Kurzweil v práci [2], str. 165.

Lemma: Nech $u(x)$, $v(x) \geqq 0$ sú integrovateľné funkcie v $\langle 0, \infty)$. $\varphi(x)$ nech je neklesajúca funkcia v $\langle 0, \infty)$. Ak pre každé $x \in \langle 0, \infty)$ je

$$u(x) \leqq \varphi(x) + \int_0^x u(x_1)\, v(x_1)\, dx_1$$

platí

$$u(x) \leqq \varphi(x) \exp \int_0^x v(x_1)\, dx_1$$

Veta 4a: Nech platí:

1. A je konštantná matica, ktorej všetky charakteristické čísla majú nekladnú reálnu časť, s nulovou reálnou časťou sú prosté.

2. Nech sú splnené podmienky 2, 3, 4, 5 vety 4.

Potom sú všetky riešenia rovnice (8) ohraničené.

Dôkaz: Postupujeme podobne ako v [1] str. 48, odkiaľ berieme aj označenie. Transformáciou

$$z = T(x) \,.\, w$$

dostaneme

$$w = T^{-1}(x)\,[A + B(x)]\, T(x)\, w(x) + \\ + \left[T^{-1}(x)\, C(x)\, T(x) - T^{-1}(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right] w(x) + T^{-1}(x)\, h(x) \tag{9}$$

Označíme

$$T^{-1}(x)\, C(x)\, T(x) - T^{-1}(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = R(x)$$

Podľa [1] str. 49 platí

$$\int^{\infty} \| R(x) \|\, \mathrm{d}x < +\infty$$

Rozpíšeme (9) na komponenty

$$\frac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}x} = \lambda_i(x)\, w_i + \sum_{j=k+1}^{n} d_{ij}(x)\, w_j + \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(x)\, w_j + \sum_{j=1}^{n} \vartheta_{ij}(x)\, h_j(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}x} = \lambda_i(x)\, w_i + \sum_{j=i+1}^{n} d_{ij}(x)\, w_j + \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(x)\, w_j + \sum_{j=1}^{n} \vartheta_{ij}(x)\, h_j(x) \tag{11}$$

$$i = k + 1, \ldots, n.$$

d_{ij}, r_{ij} majú ten istý význam ako v [1] a ϑ_{ij} sú prvky matice $T^{-1}(x)$. Budeme riešiť (11) pre $i = n$

$$w_n = c_n \exp\left[\int_0^x \lambda_n(x_1)\, \mathrm{d}x_1\right] + \int_0^x \exp\left[\int_{x_1}^x \lambda_n(s)\, \mathrm{d}s\right] \left[\sum_{j=1}^{n} r_{nj}(x_1)\, w_j(x_1) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{n} \vartheta_{nj}(x_1)\, h_j(x_1)\right] \mathrm{d}x_1$$

Pretože reálne časti $\lambda_i(x)$ pre $i = k + 1, \ldots, n$ sú pre dostatočne veľké x menšie ako nejaká záporná konštanta, existujú kladné konštanty a, b_1, b_2 tak, že platí pre $x \geqq x_0$

$$| w_n | \leqq b_1\, \mathrm{e}^{-ax} + b_2 \int_0^x \mathrm{e}^{-a(x-x_1)}\, \| R \|\; \| w \|\, \mathrm{d}x_1 + \\ + b_2 \int_0^x \mathrm{e}^{-a(x-x_1)}\, \| T^{-1} \|\, \| h \|\, \mathrm{d}x_1 \tag{12}$$

V prípade $i = n - 1$ dostaneme podobne ako v [1] integrálnu rovnicu

$$w_{n-1} = c_{n-1} \exp \left[\int_0^x \lambda_{n-1}(x_1)\, dx_1 \right] + \int_0^x \exp \left[\int_{x_1}^x \lambda_{n-1}(s)\, ds \right] d_{n-1,n}(x_1)\, w_n(x_1)\, dx_1 +$$

$$+ \int_0^x \exp \left[\int_{x_1}^x \lambda_{n-1}(s)\, ds \right] \left(\sum_{j=1}^n r_{n-1,j}(x_1)\, w_j(x_1) \right) dx_1 + \tag{13}$$

$$+ \int_0^x \exp \left[\int_{x_1}^x \lambda_{n-1}(s)\, ds \right] \left(\sum_{j=1}^n \vartheta_{n-1,j}(x_1)\, h_j(x_1) \right) dx_1$$

Z (13) použitím nerovnosti (12) dostaneme nerovnosť

$$| w_{n-1} | \leqq b_3\, e^{-ax} + b_4 \int_0^x e^{-a(x-x_1)} \| R \| \, \| w \| \, dx_1 +$$

$$+ b_4 \int_0^x e^{-a(x-x_1)} \| T^{-1} \| \, \| h \| \, dx_1 +$$

$$+ c_{n+1} b_4 \int_0^x e^{-a(x-x_1)} [b_1\, e^{-ax_1} + b_2 \int_0^{x_1} e^{-a(x_1-s)} \| R \| \, \| w \| \, ds +$$

$$+ b_2 \int_0^{x_1} e^{-a(x_1-s)} \| T^{-1} \| \, \| h \| \, ds]\, dx_1 \tag{14}$$

Úpravou (14) a použitím vzťahu $x \,.\, e^{-ax} \leqq N e^{-a_1 x}$ pre $x \geqq 0$, $0 < a_1 < a$, $N > 0$ dostaneme

$$| w_{n-1} | \leqq b_5\, e^{-a_1 x} + b_6 \int_0^x e^{-a_1(x-x_1)} \| R \| \, \| w \| \, dx_1 +$$

$$+ b_7 \int_0^x e^{-a_1(x-x_1)} \| T^{-1} \| \, \| h \| \, dx_1 \tag{15}$$

Týmto istým spôsobom by sme mohli pokračovať pre všetky $i (k + 1 \leqq i \leqq n)$.

Z rovnice (10) prechodom k integrálnej rovnici ako v (13), dostaneme pre všetky $1 \leqq i \leqq k$ nerovnosť

$$| w_i | \leqq | c_i | + c_1' \int_0^x \left(\sum_{j=k+1}^n | w_j | \right) dx_1 + \int_0^x \| R \| \, \| w \| \, dx_1 +$$

$$+ \int_0^x \| T^{-1} \| \, \| h \| \, dx_1 . \tag{16}$$

Sčítanie nerovností typu (15) dáva

$$\sum_{j=k+1}^n | w_j | \leqq c_2'\, e^{-a^* x} + c_3' \int_0^x e^{-a^*(x-x_1)} \| R \| \, \| w \| \, dx_1 +$$

$$+ c_4' \int_0^x e^{-a^*(x-x_1)} \| T^{-1} \| \, \| h \| \, dx_1$$

$$(0 <)\ a^* = \min (a_1, a_2, \ldots, a_{n-k-1})$$

Platí

$$\int_0^x \left(\int_0^{x_1} e^{-a^*(x_1 - s)} \| R \| \| w \| ds \right) dx_1 + \int_0^x \left(\int_0^{x_1} e^{-a^*(x_1 - s)} \| T^{-1} \| i \| h \| ds \right) dx_1 =$$

$$= -\frac{1}{a^*} \int_0^x e^{-a^*(x - x_1)} \| R \| \| w \| dx_1 + \frac{1}{a^*} \int_0^x \| R \| \| w \| dx_1 -$$

$$- \frac{1}{a^*} \int_0^x e^{-a^*(x - x_1)} \| T^{-1} \| \| h \| dx_1 + \frac{1}{a^*} \int_0^x \| T^{-1} \| \| h \| dx_1$$

Teda nerovnosť (16) možno prepísať

$$| w_i | = c'_5 + c'_6 \int_0^x \| R \| \| w \| dx_1 + c'_7 \int_0^x \| T^{-1} \| \| h \| dx_1, \quad (1 \leqq i \leqq k)$$

Ak túto nerovnosť kombínujeme s nerovnosťami podobnými (15) pre $k + 1 \leqq i \leqq n$, dostaneme

$$\| w \| \leqq c'_8 + c'_9 \int_0^x \| R \| \| w \| dx_1 + c'_{10} \int_0^x \| h \| dx_1 \tag{17}$$

Tu sme použili, že $\| T^{-1}(x) \| \leqq M$, pre $x \to \infty$, $M > 0$ ([1], str. 49).

Označme

$$c'_8 + c'_{10} \int_0^x \| h \| dx_1 = \varphi(x)$$

Funkcie $\varphi(x)$, $\| R \|$ splňujú předpoklady lemmy. Z nej dostaneme, že $\| w \|$ je ohraničená, a teda je ohraničená aj $\| z \|$.

Poznámka: Vety 1, 2, 3 sa dajú dokázať pomocou lemmy za rovnakých predpokladov ako použitím rozšírených systémov.

LITERATÚRA

Беллман Р.: Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, перевод с английского. Москва 1954.

Doležal, Kurzweil: O některých vlastnostech lineárních diferenciálních rovnic. Aplikace matematiky 3, 1959, str. 163–176.

Adresa autora: Ústav stavebníctva a architektúry SAV, Sládkovičova 11.

Do redakcie došlo: 20. V. 1963.

Заметка об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений

Р. Коднар

Резюме

В труде [1] приводятся результаты исследований по ограниченности решения возмущенного линейного дифференциального уравнения к уравнению $dy/dx = Ay$ (A — матрица, y — вектор).

Автор статьи доказывает, что с помощью так называемой расширенной системы эти результаты возможно расширить на неоднородные системы. Эти оббощения приводятся в теоремах 1, 2, 3, 4.

Теорему 4 возможно доказать принимая немножко более общие предположения с помощью леммы В. Долежела и Й. Курцвайла [2]. Результат приведен в качестве теоремы 4а.

Eine Bemerkung zur Stabilitätofrage der Lösungen der linearen Differentialgleichungen

R. Kodnár

Zusammenfassung

In der Arbeit [1] werden die Ergebnisse der Untersuchung der Begrenztheit der Lösungen einer perturbierter, linearer differentialer Gleichung zur Gleichung $dy/dx = Ay$ angegeben. (A — Matrix, y — Vektor.)

Der Verfasser weist darauf hin, daß an Hand eines erweiterten Systems diese Ergebnisse auch für nicht homogene Systeme verallgemeinert werden können. Diese Verallgemeinerungen werden in den Sätzen 1, 2, 3, 4 angeführt.

Der Satz 4 kann unter etwas allgemeinern Voraussetzungen mit Hilfe des Lemma vom Doležal und Kurzweil bewiesen werden [2]. Das Ergebnis wird als Satz 4a angeführt.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IX., 2. — MATHEMATICA, 1964)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IX., FASC. II. MATHEMATICA 1964

Nomogram pre funkcie prvej nomografickej triedy v obore komplexnej premennej

P. GALAJDA

V práci [16] som sa zaoberal normálnymi tvarmi

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma}(w - w_0)^2$$

a

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} C[N(w - w_0)]$$

kde C znamená funkcie sin, cos, sh, ch. Tieto normálne tvary boli prevedené na kanonické tvary a skonštruované aj príslušné nomogramy.

V tejto práci prevediem ďalší normálny tvar na kanonický a zobrazím nomogram funkcie S majúce význam sin, cos, sec, csc, sh, ch, sch, csch.

1. J. A. Viľner v [12] stanovil všetky analytické funkcie prvej triedy

$$F(w, z) = 0 \tag{1.1}$$

vyhovujúce podmienkam

$$\bar{j}_b = 0; \quad \bar{i}_a = 0; \quad \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial p\, \partial q} = 0 \tag{1.2}$$

vo tvare explicitnom vzhľadom na w

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \sqrt{-\varepsilon}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{\int \bar{j}\,\mathrm{d}a - \bar{i}\,\mathrm{d}b}}{y - i}}; \qquad w = \sqrt{-\varepsilon}\int\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{\int \bar{j}\,\mathrm{d}a - \bar{i}\,\mathrm{d}b}}{y - i}}\,\mathrm{d}z \tag{1.3}$$

kde

$$\bar{j} = \frac{2\tau_b + \tau_a - \frac{\tau_a}{\tau}}{1 + \tau^2}; \qquad \bar{i} = \frac{2_a\tau + \frac{\tau_b}{\tau} - \tau\tau_b}{1 + \tau^2} \tag{1.4}$$

Predpokladajme, že

$$C_1 \neq 0; \quad \bar{j} \neq \text{konšt.}; \quad \bar{i} \neq \text{konšt.} \tag{1.5}$$

Nech C_1 je kladné a a_0, b_0, a'_0, b'_0, sú ľubovoľné reálne konštanty. Zo vzťahu

$$\bar{j}_a = \bar{j}^2 + \bar{C}_1; \qquad \bar{i}_b = \bar{C}_1 - \bar{i}^2$$

a za predpokladu (1.5) dostaneme:

$$\bar{j} = \sqrt{C_1}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{C_1}(a - a_0) = -\sqrt{C_1}\,\mathrm{cotg}\,\sqrt{C_1}(a - a_0) \tag{1.7}$$

V súvise s predpokladom (1.5) v rovniciach (1.6) určíme $\bar{i}$ a $\bar{j}$ nasledovne:

1. $$|\bar{i}| < \sqrt{C_1}; \quad \bar{i}_b > 0 \Rightarrow \bar{i} = \sqrt{C_1}\,\mathrm{tgh}\,\sqrt{C_1}(b - b_0) \tag{1.8}$$
2. $$|\bar{i}| > \sqrt{C_1}; \quad \bar{i}_b < 0 \Rightarrow \bar{i} = \sqrt{C_1}\,\mathrm{cotgh}\,\sqrt{C_1}(b - b_0) \tag{1.9}$$

Za predpokladu (1.5) ak C_1 je záporné, potom

$$\bar{i} = -\sqrt{-C_1}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{-C_1}(b - b_0) = \mathrm{cotg}\,\sqrt{-C_1}(b - b'_0) \tag{1.10}$$

Tak isto z rovníc (1.6) pre

1. $$|\bar{j}| < \sqrt{-C_1}; \quad \bar{j}_a < 0 \Rightarrow \bar{j} = -\sqrt{-C_1}\,\mathrm{tgh}\,\sqrt{-C_1}(a - a_0) \tag{1.11}$$
2. $$|\bar{j}| > \sqrt{-C_1}; \quad \bar{j}_a > 0 \Rightarrow \bar{j} = -\sqrt{-C_1}\,\mathrm{cotgh}\,\sqrt{-C_1}(a - a_0) \tag{1.12}$$

Ďalej z predpokladov

1. $$c_1 > 0 \Rightarrow \bar{j} = \sqrt{C_1}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{C_1}(a - a_0) = -\sqrt{C_1}\,\mathrm{cotg}\,\sqrt{C_1}(a - a'_0);$$
$$\bar{i} = \varepsilon\sqrt{C_1} \tag{1.13}$$
$$c_1 < 0 \Rightarrow \bar{i} = -\sqrt{C_1}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{-C_1}(b - b_0) = \sqrt{-C_1}\,\mathrm{cotg}\,\sqrt{C_1}(b - b'_0);$$
$$\bar{j} = \varepsilon_1\sqrt{-C_1} \tag{1.14}$$

kde $\varepsilon_1 \neq \pm 1$

2. $$c_1 = 0 \Rightarrow \bar{j} = -\frac{1}{a - a_0}; \qquad \bar{i} = \frac{1}{b - b_0} \tag{1.15}$$
3. $$c_1 = 0 \Rightarrow \bar{j} = -\frac{1}{a - a_0}; \qquad \bar{i} = 0 \tag{1.16}$$
$$c_1 = 0 \Rightarrow \bar{j} = 0; \qquad \bar{i} = \frac{1}{b - b_0} \tag{1.17}$$
4. $$c_1 = 0 \Rightarrow \bar{j} = 0; \qquad \bar{i} = 0 \tag{1.18}$$

Z uvedených predpokladov a dôsledkov J. A. Viľner stanovil všetky nomografické funkcie tvaru (1.1) prvej triedy v jednoduchšom explicitnom tvare vzhľadom na w alebo z. Tieto jednoduchšie explicitné tvary všetkých nomografických funkcií prvej triedy

$$w = f(z); \qquad z = \varphi(w) \tag{1.19}$$

nazval normálne tvary nomografických funkcií.

2. V ďalšom urobím aplikáciu predošlých úvah na zobrazenie normálneho tvaru:

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} \ln S[N(w - w_0)] \tag{2.1}$$

kde S sú funkcie sin, cos, sec, csc, sh, cosh, sch, csch, ďalej N a γ ľubovoľné reálne alebo imaginárne čísla, $z_0 = a_0 + b_0 i$, $w_0 = p_0 + q_0 i$ ľubovoľné komplexné čísla Zobrazíme normálny tvar (2.1) pre funkciu sinus:

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} \ln \sin [N(w - w_0)] \tag{2.2}$$

ktorý prevedieme na kanonický a z neho určíme zodpovedajúce zobrazovacie rovnice. V práci [12] (pozri taktiež prácu [16]) za predpokladov, ak $C_1 \neq 0$; $\bar{j}_a = 0$; $\bar{i}_b \neq 0$, sa dokázalo, že platí:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\tau \bar{j}\, e^{\bar{j}_a}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right)(e^{-\bar{j}_a}) + \left(\frac{\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right) + \left(-\frac{\tau \bar{j} + \bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right) = 0 \\ &\left(\frac{\bar{j}\, e^{\bar{j}_a}}{\tau\sqrt{\bar{i}_b}}\right)(e^{-\bar{j}_a}) + \left(\frac{\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right) + \left(\frac{\frac{\bar{j}}{\tau} - \bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &S = \frac{\tau \bar{j}\, e^{\bar{j}_a}}{\sqrt{\bar{i}_b}}; \quad H = -\frac{\tau \bar{j} + \bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}; \quad X = e^{-\bar{j}_a} \\ &Y = \frac{\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}; \quad T = -\frac{\bar{j}\, e^{\bar{j}_a}}{\tau\sqrt{\bar{i}_b}}; \quad R = \frac{\frac{\bar{j}}{\tau} - \bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}} \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Z kanonického tvaru (2.3) a z rovníc (2.4) určíme S, H, X, Y, T, R, ktoré pre vzťah (2.2) sú:

$$\begin{aligned} &S = \frac{\tau \bar{j}\, e^{\bar{j}_a}}{\sqrt{\bar{i}_b}} = -\frac{\sin^2 2P}{2} e^{2R_e\gamma z_0}; \quad H = -\frac{\tau \bar{j} + \bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}} = \cos 2P \\ &X = e^{-\bar{j}_a} = e^{-2R_e\gamma z}; \quad Y = \frac{\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}} = \cos 2B \\ &T = -\frac{\bar{j}\, e^{\bar{j}_a}}{\tau\sqrt{\bar{i}_b}} = \frac{\sinh^2 2Q}{2} e^{2R_e\gamma z_0}; \quad R = \frac{\frac{\bar{j}}{\tau} - \bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}} = -\cosh 2Q \end{aligned} \tag{2.5}$$

kde $P = R_e[N(w - w_0)]$, $Q = I_m[N(w - w_0)]$, $A = R_e[\gamma(z - z_0)] = R_e[\gamma z] - R_e[\gamma z_0]$, $B = I_m[\gamma(z - z_0)] = I_m[\gamma z] - I_m[\gamma z_0]$, pričom $C_1 = -4\gamma^2$.

Teda kanonický tvar pre prípad (2.2) podľa (2.5) bude

$$\left.\begin{aligned} \left(-\frac{\sin^2 2P}{2}\,\mathrm{e}^{2R_e\gamma z_0}\right)(\mathrm{e}^{-2R_e\gamma z}) + (\cos 2B) + (\cos 2P) = 0 \\ \left(\frac{\sinh^2 2Q}{2}\,\mathrm{e}^{2R_e\gamma z_0}\right)(\mathrm{e}^{-2R_e\gamma z}) + (\cos 2B) + (-\cosh 2Q) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Porovnaním (2.6) zo základným kanonickým tvarom

$$\left.\begin{aligned} S(p)\,X(a) + Y(b) + H(p) = 0 \\ T(q)\,X(a) + Y(b) + R(q) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

pre ktorý platia zobrazovacie rovnice

$$\left.\begin{aligned} X_a &= \frac{1}{X(a)} & Y_a &= 0 \\ X_b &= 0 & Y_b &= \frac{1}{Y(b)} \\ X_p &= -\frac{S(p)}{H(p)} & Y_p &= -\frac{1}{H(p)} \\ X_q &= -\frac{T(q)}{R(q)} & Y_q &= -\frac{1}{R(q)} \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

dostaneme zobrazovacie rovnice pre prípad (2.2), ktoré sú

$$\left.\begin{aligned} X_A &= \mathrm{e}^{2R_e[\gamma z]} & Y_A &= 0 \\ X_B &= 0 & Y_B &= \frac{1}{\cos 2B} \\ X_P &= \frac{\sin^2 2P}{2\cos 2P}\,\mathrm{e}^{2R_e[\gamma z_0]} & Y_P &= -\frac{1}{\cos 2P} \\ X_Q &= \frac{\sinh^2 2Q}{2\cosh 2Q}\,\mathrm{e}^{2R_e[\gamma z_0]} & Y_Q &= \frac{1}{\cosh 2Q} \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Z rovníc pre X_P a Y_P vylúčením P dostaneme

$$Y_P^2 + 2\,\mathrm{e}^{-2R_e[\gamma z_0]}X_P Y_P - 1 = 0$$

Z rovníc pre X_Q a Y_Q vylúčením Q dostaneme

$$Y_Q^2 + 2\,\mathrm{e}^{-2R_e[\gamma z_0]}X_Q Y_Q - 1 = 0$$

Z posledných dvoch rovníc vyplýva, že premenné P a Q sa zobrazia hyperbolami, ktoré pre obidva prípady označíme

$$Y_{(P,Q)}^2 + 2\,\mathrm{e}^{-2R_e[\gamma z_0]}X_{(P,Q)}Y_{(P,Q)} - 1 = 0 \tag{210}$$

Pri zostrojení nomogramu treba rozlišovať v rovniciach (2.9), či γ je reálne alebo rýdzo imaginárne číslo.

Ak γ je reálne číslo a rozdielne od nuly, potom pre stupnicu premennej a z prvého páru rovníc (2.9) bude

$$R_e(\gamma z) = \gamma R_e z = \gamma a$$

$$X_A = e^{2\gamma a}, \quad Y_A = 0$$

Pre $\gamma > 0$, premenná a zobrazí sa na stupnici s nositeľkou na osi X od bodu $X_A = 1$ až $X_A = +\infty$. Ak γ je parametrom, potom pre $z_0\gamma = 0$ (t. j. pri $z_0 = 0$) stupnice premenných P a Q sa nemenia a stupnica a sa len prekótuje nepriamym spôsobom, ak γ nemení znamienko a ak mení, potom kladné a záporné kóty prechádzajú jedna v druhú.

Uvažujme druhý pár rovníc (2.9), kde $B = I_m[\gamma(z - z_0)]$. Keďže $z_0 = 0$ v danom prípade ($\gamma z_0 = 0$) $B = I_m[\gamma z] = \gamma b$. Dosadením za $B = \gamma b$ do rovníc pre X_B a Y_B v (2.9) dostaneme

$$X_B = 0 \qquad Y_B = \frac{1}{\cos 2\gamma b}$$

Z poslednej rovnice pre $b = \dfrac{\pi}{4\gamma} \Rightarrow Y_B = \pm\infty$

Pre

$$b \in \left\langle \frac{\pi}{4\gamma}; \frac{\pi}{2\gamma} \right\rangle \text{ je } Y_B \in (-\infty; -1\rangle$$

Uvažujme, že

$$0 \leqq |b| \leqq \frac{\pi}{4|\gamma|} \tag{2.11}$$

potom stupnica b leží na kladnej polopriamke osi y.

Ak

$$\frac{\pi}{4|\gamma|} \leqq |b| \leqq \frac{\pi}{2|\gamma|} \tag{2.12}$$

stupnica b leží na zápornej polopriamke osi y, čo je zrejmé, ak od $\pi/2\,|\gamma|$ odčítame jednotlivé členy nerovnosti (2.12) čím dostaneme

$$\frac{\pi}{2|\gamma|} \geqq \frac{\pi}{2|\gamma|} - |b| \geqq \frac{\pi}{4|\gamma|} \tag{2.13}$$

Porovnaním (2.12) s (2.13) je

$$|b'| = \frac{\pi}{2|\gamma|} - |b|$$

teda b' sa zobrazí na zápornej polopriamke osi y. Následkom toho premenná b vyhovujúca nerovnosti (2.11) sa zobrazí pomocou zobrazovacích rovníc

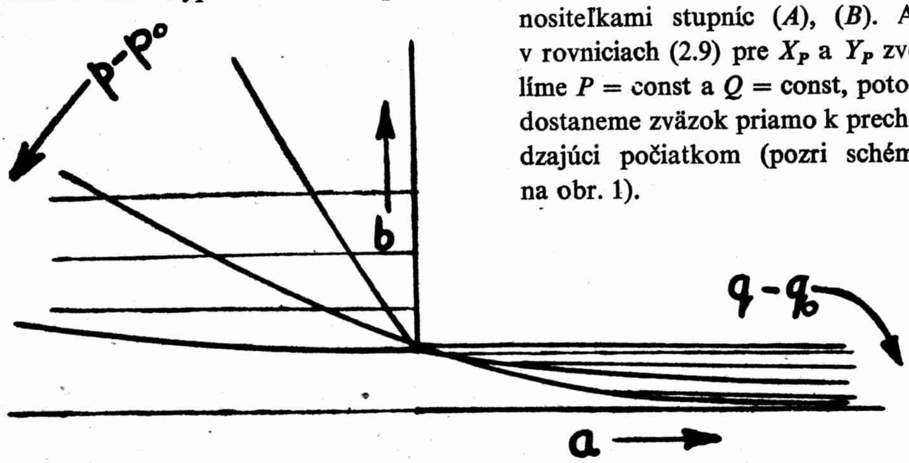
$$X_B = 0 \qquad Y_B = \frac{1}{\cos 2\gamma b} \tag{2.14}$$

a premenná b' podľa zobrazovacích rovníc

$$X_B = 0 \qquad Y_B = -\frac{1}{\cos 2\gamma\,|\,b\,|}$$

čo vyplýva z rovnice (2.14).

Ako je vidieť z rovníc (2.9) funkcia (2.2) pri γ konštantnom a pri konštantnom $I_m[\gamma z_0] = \gamma I_m z_0 = \gamma b_0$ sa zobrazí nomogramom, ktorý sa skladá z dvoch priamočiarych stupníc pre (A), (B) a z jednoparametrického zväzku (parameter $R_e[\gamma z_0] = \gamma a_0$) hyperbol (2.10), ktoré sú nositeľkami stupníc (P), (Q) a prechádzajú cez tri reálne body, majúce spoločnú dotyčnicu v jednom z nich; spoločná dotyčnica ku krivkám zväzku hyperbol a tetiva prechádzajúca cez dva druhé stredy zväzku sú nositeľkami stupníc (A), (B). Ak v rovniciach (2.9) pre X_P a Y_P zvolíme $P = \text{const}$ a $Q = \text{const}$, potom dostaneme zväzok priamo k prechádzajúci počiatkom (pozri schému na obr. 1).



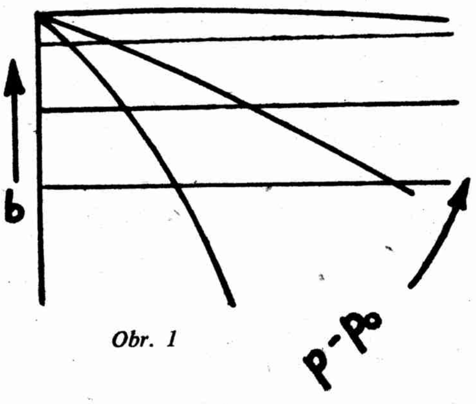
Keďže sme zvolili γ za pevné číslo, parametrom je a_0.

Pritom

$$X_A = e^{2\gamma a}\, Y_A = 0$$

$$X_B = 0 \qquad Y_B = \frac{1}{\cos 2[\gamma b - \gamma b_0]}$$

dostávame tie isté stupnice a i b pri parametrii a_0.



Obr. 1

Rovnice stupníc $P = R_e[N(w - w_0)]$ a $Q = I_m[N(w - w_0)]$ (pri γ reálnom), pretože parameter je a_0, porovnajúc s prípadom $z_0 = a_0 + b_0 i$, t. j. keď $b_0 = 0$ a $a_0 = 0$ vidíme, že ostatné hyperbolické stupnice dostaneme z prípadu $z_0 = 0$ afinnou transformáciou posunutia tohto (normálneho) prípadu pozdĺž osi x. Pri tomto všetky kóty P a Q sa pohybujú rovnobežne s osou x, a tým dostávame hyperbolickú krivku, ktorá je nositeľkou stupníc P a Q v karteziánskych súradniciach o rovnici (2.10). Analogickým spôsobom sa urobí rozbor stupníc aj pre prípad, ak γ je imaginárne číslo.

3. Zobrazenie normálneho tvaru (2.2) podľa zobrazovacích rovníc (2.9), ako ukazuje schéma nomogramu na obr. 1, je pre čítanie nevhodný. Pre zvýšenie čitateľnosti upravme determinanty odpovedajúce rovniciam (2.9)

$$\begin{vmatrix} e^{2R_e[\gamma z]} & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{\cos 2B} & 1 \\ \dfrac{\sin^2 2P}{2\cos 2P} e^{2Re[\gamma z_0]} & -\dfrac{1}{\cos 2P} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} e^{2R_e[\gamma z]} & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{\cos 2B} & 1 \\ \dfrac{\sinh^2 2Q}{2\cosh 2Q} e^{2R_e[\gamma z_0]} & \dfrac{1}{\cosh 2Q} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.1}$$

takto: Prvý stĺpec vynásobíme s $e^{-2\gamma z_0}$ druhý s $1/2$ a pripočítame druhý stĺpec k prvému. V takto vzniknutých determinantoch vynásobíme v prvom determinante tretí riadok s $(-2\cos 2P)$ a v druhom tretí riadok s $(2\cosh 2Q)$ a pripočítame druhý stĺpec k prvému. Delením obidvoch determinantov s takto upraveným prvým stĺpcom dostaneme

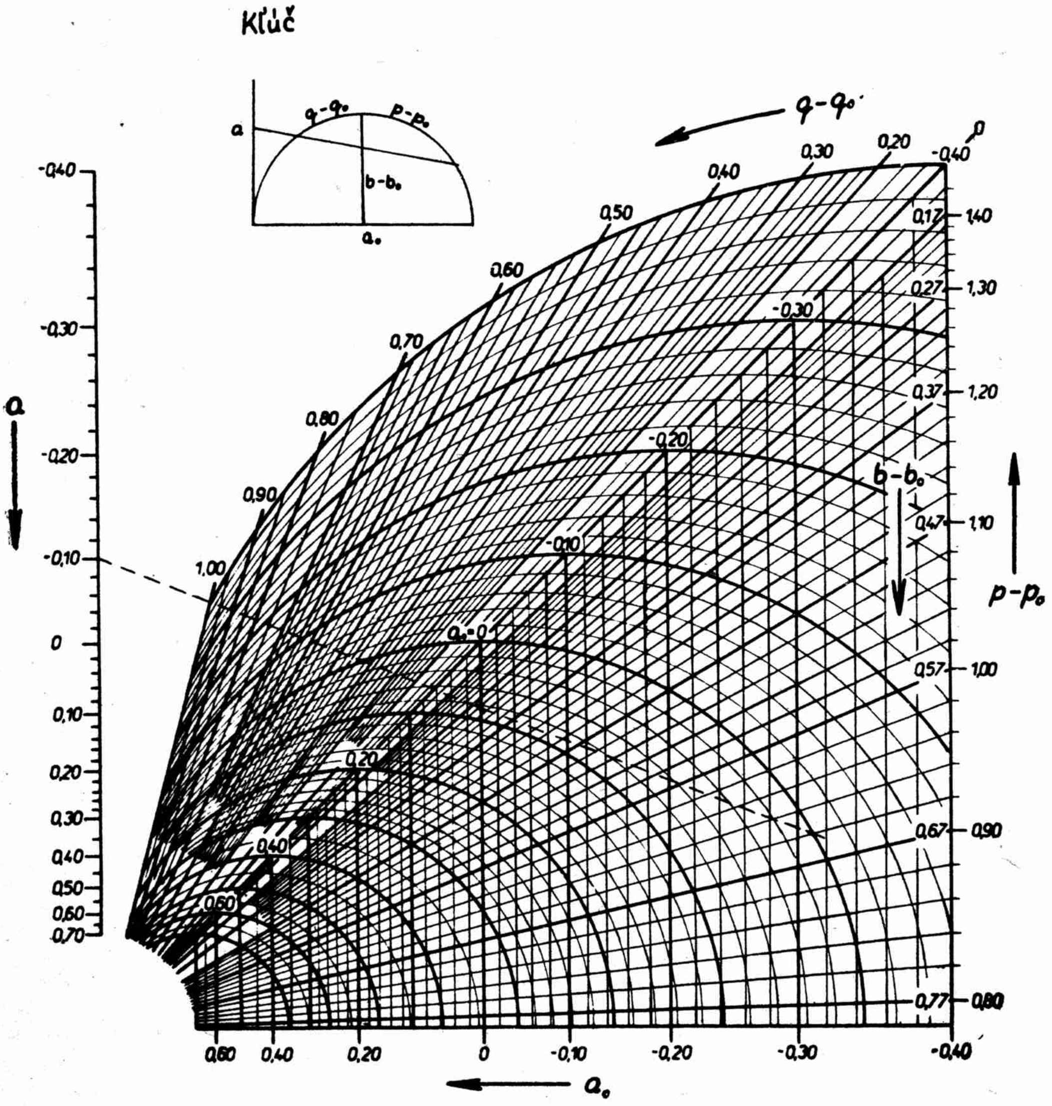
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{2}e^{-2A} \\ 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\cos 2B \\ 1 & \dfrac{1}{1+\cos^2 2P} & -\dfrac{\cos 2P}{1+\cos^2 2P} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{2}e^{-2A} \\ 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\cos 2B \\ 1 & \dfrac{1}{1+\cosh^2 2Q} & \dfrac{\cosh 2Q}{1+\cosh^2 2Q} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

Pre konečnú úpravu determinanty (3.2) násobme ešte takto: Prvé stĺpce s $m\, e^{-2R_e[\gamma z_0]}$ a druhé s $2n\, e^{-2R_e[\gamma z_0]}$, čím dostaneme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & n\, e^{-2R_e[\gamma z]} \\ 1 & \dfrac{m}{2} e^{-2R_e[\gamma z_0]} & n\, e^{-2R_e[z_0]} \cos 2B \\ 1 & \dfrac{m\, e^{-2R_e[\gamma z_0]}}{1+\cos^2 2P} & -\dfrac{2n\, e^{-2R_e[\gamma z_0]}\cos 2P}{1+\cos^2 2P} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & n\, e^{-2R_e[\gamma z]} \\ 1 & \dfrac{m}{2} e^{-2R_e[\gamma z_0]} & n\, e^{-2R_e[\gamma z_0]} \cos 2B \\ 1 & \dfrac{m\, e^{-2R_e[\gamma z_0]}}{1+\cosh^2 2Q} & \dfrac{2n\, e^{-2R_e[\gamma z_0]}\cosh 2Q}{1+\cosh^2 2Q} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.3}$$

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} \ln \sin\left[N(w - w_0)\right]$$



Obr. 2

kde m, n sú moduly, ktoré volíme $m = 20$, $n = 10$. Ak γ je reálne číslo, zobrazovacie rovnice pre normálny tvar (2.2) sú:

$$\left.\begin{aligned} X_a &= 0 & Y_a &= 10\,e^{-2\gamma a} \\ X_b &= 10\,e^{-2\gamma a_0} & Y_b &= 10\,e^{-2\gamma a_0} \cos \gamma(b - b_0) \\ X_p &= \frac{20\,e^{-2\gamma a_0}}{1 + \cos^2 2\gamma(p - p_0)} & Y_p &= -\frac{20\,e^{-2\gamma a_0} \cos 2\gamma(b - b_0)}{1 + \cos^2 2\gamma(p - p_0)} \\ X_q &= \frac{20\,e^{-2\gamma a_0}}{1 + \cosh^2 2\gamma(q - q_0)} & Y_q &= \frac{20\,e^{-2\gamma a_0} \cosh 2\gamma(q - q_0)}{1 + \cosh^2 2\gamma(q - q_0)} \end{aligned}\right\} \quad (3.4)$$

Z posledných dvoch rovníc elimináciou dostaneme

$$(X_{(P,Q)} - 10\,e^{-2\gamma a_0})^2 + Y^2_{(P,Q)} = (10\,e^{-2\gamma a_0})^2 \quad (3.5)$$

Teda nositeľka pre stupnice P a Q budú kružnice o strede $S[10\,e^{-2\gamma a_0}, 0]$ a polomere $r = 10\,e^{-2\gamma a_0}$. Touto úpravou sme rovnice hyperbol (2.10) pre nositeľku P a Q pretransformovali v rovnicu (3.5), t. j. v kružnice.

Z posledných dvoch rovníc (3.4) vyplýva, že P a Q zobrazia sa taktiež zväzkom lúčov o rovniciach $y_P = -x_P \cos 2\gamma(p - p_0)$ a $y_Q = x_Q \cosh 2\gamma\,(q - q_0)$.

Zobrazenie normálneho tvaru (2.2) podľa zobrazovacích rovníc (2.18) je na obr. 2, pričom bolo volené $N = \gamma = 1$.

Príklad. Pre dané $a = -0{,}10$, $a_0 = 0$, $b - b_0 = 0{,}273$ čítame na obr. 2 podľa kľúča $p - p_0 \approx 0{,}92$, $q - q_0 \approx 0{,}42$.

Analogickým spôsobom sa dá skonštruovať nomogram pre prípad, ak γ je volené imaginárne číslo.

LITERATÚRA

[1] Viľner J. A.: Nomogramma dľa opredelenija hiperboličeskoho sinusa i kosinusa ot komplexnoho argumenta. Žurnal „Električestvo", № 12 (1934), № 17 (1935).

[2] Viľner, J. A.: Nomogramma dľa vyčislenija eliptičeskich integralov, Žurnal „Električestvo", № 6 (1935).

[3] Viľner, J. A.: Nomogramma dľa vyčislenija hyperboličeskoho i kruhovoho tangensov i kotangensov ot komplexnoho argumenta. Prikl. mat. i mech., t. IV, v. 1 (1940).

[4] Viľner, J. A.: O nomografirovanii sistem uravnenij i analitičeskich funkcij. Prikl. mat. i mech., t. IV, v. 2. (1940).

[5] Viľner, J. A.: Analytical functions of a complex variable of the first nomographic class and their nomograms. DAN SSSR, 53 (1946).

[6] Viľner, J. A.: O nomografirovanii eliptičeskich funkcij i integralov v komplexnej oblasti. DAN SSSR, 55, № 9 (1947).

[7] Viľner, J. A.: Nomogramy sistem uravnenij i analitičeskich funkcij. DAN SSSR, 58, № 5 (1947).

[8] Viľner, J. A.: Pučok sovmestnych koničeskich nomogramm iz vyravnenych točok dľa izobraženija eliptičeskoho integrala pervoho roda. UMN, 2 : 6 (22), (1947).

[9] Viľner, J. A.: Nomografirovanije analitičeskich funkcij. DAN SSSR, 63, № 2 (1948).

[10] Vilner, J. A.: Privedenie nomografirujemoj analitičeskoj zavisimosti k normalnoj forme. DAN SSSR, 69, № 1, (1949).

[11] Vilner, J. A.: Analitičeskaja teorija nomografirovanija funkcij komplexnoh operemennoho pervoho klassa. Matematičeskij sbornik, 27, (69) : 1, (1950).

[12] Vilner, J. A.: Nomografirovanije sistem uravnenij i analitičeskich funkcij. Nomografičeskij sbornik (1951).

[13] Vilner, J. A.: Nomogramy dla vyčislenija eliptičeskich funkcij i integralov. UMN, 9 : 2 (60), (1954).

[14] Vilner, J. A.: O nomografičeskoj aproximacii elliptičeskich funkcij i nomogrammy v komplexnych projektivnych ploskostiach. Sbornik Vyčisliteľnaja matematika AN SSSR, № 7, (1961).

[15] Jurga, Fr.: Zobrazovanie funkcií komplexnej premennej nomogramami s viacnásobnými poľami. Sborník vedeckých prác VŠT v Košiciach, 1957, zv. 2.

[16] Galajda, P.: Niektoré nomogramy pre výpočet analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografického rodu v obore komplexnej premennej. Práca zaslaná do redakcie „Aplikace matematiky". (Rukopis odoslaný 13. 3. 1963.)

Adresa autora: Katedra matematiky stroj. fak. VŠT, Komenského 40, Košice.

Do redakcie došlo 5. V. 1963.

Номограмма для функций первого номографического класса от комплексного аргумента

П. Галайда

Резюме

В этой статье применением теории И. А. Вильнера было разработано каноническое представление для основной нормальной формулы

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} \ln S[N(w - w_0)],$$

где S значит функции sin, cos, sec, csc, sh, cosh, sch, csch, а $z = a + bi$, $z_0 = a_0 + b_0 i$, $w = p + qi$, $w_0 = p_0 + q_0 i$ N и γ произвольные действительные либо чисто мнимые числа.

Уравнения шкал (2.9) для канонической формулы (2.6) были переобразованы в уравнения (3.4), на основании чего гиперболы для переменного P и Q переобразовались в окружность. На основании переобразованных уравнений была тоже построена номограмма для нормальной формулы (2.1).

Ein Nomogramm für die Funktionen der ersten nomographischen Klasse im Gebiet der komplexen Veränderlichen

P. Galajda

Zusammenfassung

Unter Benutzung der Teorie von J. A. Vilner wurde in dieser Arbeit die kanonische Form für die normale Form

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} \ln S[N(w - w_0)]$$

verarbeitet, wo S die Funktionen mit der Bedeutung sin, cos, sec, csc, sh, coh, sch, csch, sind und $z = a + bi$, $z_0 = a_0 + b_0 i$, $w = p + qi$, $w_0 = p_0 + q_0 i$, weiter N und γ beliebige reale oder imaginäre Zahlin sind. Die abbildenden Gleichungen (2.9) für die kanonische Form (2.6) wurden auf die Gleichung (3.4) transformiert, wodurch die Hyperbeln für die Veränderlichen P und Q in die Kreislinie transformiert wurden. Auf Grund der derart transformierten Gleichungen wurde auch das Nomogramm für die normale Form (2.1) konstruiert.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IX., 2. — MATHEMATICA, 1964)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IX., FASC. II. MATHEMATICA 1964

Konštrukcia relatívnej normály v P_2

M. HEJNÝ

Používame následovnú symboliku. Aritmetické body označujeme veľkými latinskými tlačenými písmenami. Geometrické body označujeme svorkovými zátvorkami. Aritmetické priamky označujeme veľkými latinskými písanými písmenami. Geometrické priamky označujeme opäť svorkovými zátvorkami.

V projektívnej rovine P_2 nech je daná krivka

$$R(t), \quad -T \leqq t \leqq T, \tag{1}$$

kde $T > 0$. Krivka (1) nech je triedy aspoň C_3. O parametrizácii krivky $R(t)$ predpokladáme, že determinant

$$[R(t), \quad R'(t), \quad R''(t)] = c \neq 0$$

je konštantný pre všetky uvažované t. Pritom čiarkou označujeme deriváciu podľa parametru t. Základná rovnica

$$R'''(t) = 2a(t)\, R'(t) + \mathrm{d}(t)\, R(t)$$

krivky (1) udáva funkcie $a(t)$, $\mathrm{d}(t)$, pomocou ktorých je definovaný relatívny invariant váhy 3

$$b(t) = \mathrm{d}(t) - a'(t)$$

a sprievodný repér

$$R(t), \quad T(t) = R'(t), \quad N(t) = R''(t) - a(t)\, R(t)$$

krivky (1) v bode $R(t)$.

Dualizáciou dostaneme priamkovú rovnicu

$$\mathcal{R}(t) = c^{-1}[R(t), \quad R'(t)]$$

krivky $R(t)$. Duálny tvar uvedených vzťahov je

$$[\mathcal{R}(t), \mathcal{R}'(t), \mathcal{R}''(t)] = c^{-1}$$

$$\mathcal{R}'''(t) = 2a(t)\, \mathcal{R}'(t) + \tilde{\mathrm{d}}(t)\, \mathcal{R}(t)$$

$$b(t) = a'(t) - \tilde{\mathrm{d}}(t).$$

Duálny repér je tvorený priamkami

$$\mathscr{R}(t), \quad \mathscr{T}(t) = \mathscr{R}'(t), \quad \mathscr{N}(t) = R''(t) - a(t)\,R(t).$$

Konečne platí

$$\mathrm{d}(t) + \tilde{\mathrm{d}}(t) = 2a'(t)$$

a

$$\mathscr{R}(t) = c^{-1}[R(t),\ T(t)], \quad \mathscr{T}(t) = c^{-1}[R(t),\ N(t)],$$
$$\mathscr{N}(t) = c^{-1}[T(t),\ N(t)].$$

V ďalšom budeme vyšetrovať krivku v okolí bodu $R(O)$. Budeme označovať $R(O) = R$, $T(O) = T$, $a(O) = a$ a pod.

Relatívna normála $\{\mathscr{T}\}$ krivky (1) v bode $\{R\}$ je udaná analyticky. Ak krivku $R(t)$ vztiahneme ku projektívnemu oblúku

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt[3]{b(t)}\,\mathrm{d}t,$$

dostaneme privilegovaný repér, ktorého normála (relatívna) je projektívnou normálou krivky (1) v bode R. Jej geometrická konštrukcia je známa. Napr.: projektívna normála je dotyčnicou oskulačnej kubiky (v nesextatickom bode). V ďalšom podávame geometrickú konštrukciu relatívnej normály $\{\mathscr{T}\}$ a zároveň i konštrukciu bodu T. Naša konštrukcia je samozrejme závislá od parametrizácie.

Nech $t \in (O, T)$. Priamka $\{\mathscr{S}(t)\}$, určená bodmi $\{R(t)\}$ a $\{R(-t)\}$ obalí krivku $\{S(t)\}$. Bod $\{U(t)\}$, ktorý spolu s $\{S(t)\}$ oddeľuje harmonicky body $\{\mathscr{R}(t)\}$ a $\{\mathscr{R}(-t)\}$ opíše krivku, ktorej dotyčnica pre $t \to 0$ sa blíži ku relatívnej normále. Pritom bod $\{S(t)\}$ sa blíži k bodu $\{T\}$. Dualizujme. Priesečník $\{V(t)\}$ priamok $\{\mathscr{R}(t)\}$ a $\{\mathscr{R}(-t)\}$ opíše krivku, ktorej dotyčnica $\{\mathscr{V}(t)\}$ sa blíži ku relatívnej normále. Konečne priamka $\{\mathscr{W}(t)\}$, oddeľujúca harmonicky spolu s priamkou $\{\mathscr{V}(t)\}$ priamky $\{\mathscr{R}(t)\}$ a $\{\mathscr{R}(-t)\}$ obalí krivku $\{W(t)\}$ a bod $\{W(t)\}$ sa blíži ku bodu $\{T\}$. Tak máme dokonca dva spôsoby konštrukcie aj relatívnej normály aj bodu $\{T\}$. Dokážeme tvrdenia presne.

V lokálnej bázi $\langle R, T, N\rangle$ rozvinieme krivku $R(t)$ do Taylorovho rozvoja

$$R(t) = R\left(1 + \frac{a}{2}t^2 + \frac{d}{6}t^3 + (4)\right) + T\left(t + \frac{a}{3}t^3 + \frac{2a' + d}{4!}t^4 + (5)\right) +$$

Podľa definície krivky $U(t)$ platí ďalej podľa (2)

$$U(t) = \lambda(t)\,R(t) - \mu(t)\,R(-t)$$

odkiaľ po vyčíslení je

$$U(t) = R\left(1 + \frac{7a}{6}t^2 + (4)\right) + T((4)) + N\left(\frac{1}{2}t^2 + (4)\right).$$

Veta 1. Platia tieto dva vzťahy

$$\lim_{t\to 0}\{S(t)\} = \{T\} \text{ a } \lim_{t\to 0}\{\mathscr{S}(t)\} = \{\mathscr{R}\}.$$

Dôkaz. Prvý vzťah dokážeme, keď za aritmetického zástupcu bodu $\{S(t)\}$ vezmeme bod $t^{-1}S(t)$, kde $S(t)$ je daný horným rozvedením do Taylorového radu. Ďalej voľme aritmetického zástupcu priamky $\{\mathscr{S}(t)\}$ takto:

$$\mathscr{S}(t) = (2ct)^{-1}\,[R(t),\ R(-t)] = \mathscr{R}(1 + (2)) + \mathscr{T}((4)) + \mathscr{N}((6)),$$

naznačenou limitou dokážeme i druhú časť tvrdenia.

Veta 2. Platia tieto dva vzťahy.

$$+N\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{a}{12}t^4 + \frac{4a' + d}{5!}t^5 + (6)\right).$$

Symbolom $\boxed{N}$ označujeme zvyšok Taylorového rozvoja od člena $a_n t^n$ včítane. Bod $S(t)$, ako aj $S'(t)$ je lineárnou kombináciou bodov $R(t)$ a $R(-t)$. Je preto

$$S(t) = \lambda(t)\,R(t) + \mu(t)\,R(-t) \tag{2}$$

a tiež

$$0 = \lambda(t)\,R'(t)\,\mathscr{S}(t) - \mu(t)\,R'(-t)\,\mathscr{S}(t).$$

Odtiaľ

$$\lambda(t) = \rho_1(t)\,R'(-t)\,\mathscr{S}(t) = \rho(t)\,[R'(-t),\ R(t),\ R(-t)]$$
$$\mu(t) = \rho_1(t)\,R'(t)\,\mathscr{S}(t) = \rho(t)\,[R'(t),\ R(t),\ R(-t)],$$

kde $\rho_1(t)$ a $\rho(t)$ sú nenulové faktory. Jednoduchý výpočet dá

$$\lambda(t) = \frac{1}{2} + \frac{a}{3}t^2 + \frac{b}{15}t^3 + (4)$$

$$\mu(t) = -\frac{1}{2} - \frac{a}{3}t^2 + \frac{b}{15}t^3 + (4).$$

Pre jednoduchosť sme položili $\rho(t) = (2t)^{-2}$. Po dosadení do (2) je

$$S(t) = R\left(\frac{5d + 4b}{30}t^3 + (5)\right) + T(t + at^3 + (5)) + N((5)).$$

$$\lim_{t\to 0}\{U(t)\} = \{R\} \text{ a } \lim_{t\to 0}\{U(t)\} = \{\tau\}.$$

Dôkaz. Opäť musíme voliť vhodných aritmetických zástupcov. Za aritmetického zástupcu bodu $\{U(t)\}$ volíme priamo bod $U(t)$. Ďalej je

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}U'(t) = \frac{7a}{3}R + N.$$

Priamka $\lim_{t\to 0}\{\mathscr{U}(t)\}$ je určená bodmi $\lim_{t\to 0}\{U(t)\}$ a $\lim_{t\to 0}\{U'(t)\}$, t. j. bodmi $\{R\}$ a $\left\{\frac{7a}{3}R + N\right\}$ a je preto totožná s relatívnou normálou $\{\mathscr{T}\}$.

Dolná tabuľka priraďuje vzájomne duálne objekty.

$$\begin{array}{llll} \{R(t)\} \leftrightarrow \{\mathscr{R}(t)\} & & \{U(t)\} \leftrightarrow \{\mathscr{W}(t)\} \\ \{T\} \leftrightarrow \{\mathscr{T}\} & & \{V(t)\} \leftrightarrow \{\mathscr{S}(t)\} \\ \{N\} \leftrightarrow \{\mathscr{N}\} & & \{W(t)\} \leftrightarrow \{\mathscr{U}(t)\} \\ \{S(t)\} \leftrightarrow \{\mathscr{V}(t)\} & & \mathrm{d}(t) \leftrightarrow d(t). \end{array}$$

Dualizáciou dostávame z viet 1 a 2 tvrdenie zhrnuté vo

vete 3. Platia následovné vzťahy

$$\lim_{t\to 0} \{\mathscr{V}(t)\} = \{\mathscr{T}\}, \quad \lim_{t\to 0} \{V(t)\} = \{R\},$$

$$\lim_{t\to 0} \{\mathscr{W}(t)\} = \{\mathscr{R}\} \text{ a } \lim_{t\to 0} \{W(t)\} = \{T\}.$$

Adresa autora: Žilina, Hliny, blok 30.

Do redakcie došlo 20. V. 1963.

Построение относительной нормали в проективной плоскости

М. Гейный

Выводы

Пусть C: $R(t)$ проективная плоская кривая. Ее касательную и относительную нормаль в точке R обозначим RT и RN. Параметр t может быть проективной дугой. Относительная нормаль станет проективной нормалью, построение которой известно. В статье дано построение относительной нормали в таком случае, когда параметр t не является обязательно дугой. Ясно, что построение зависит от параметризации кривой C.

Construction of the relative normal in the projective plane

M. Hejný

Resume

Let $C : R(t)$ be a projective plane curve. Its tangent and the relative normal in the point R we denote by RT and RN. It is possible that the t is a projective arc. In this case the realtive normal is changed into a projective normal whose construction is known. In the article we give the construction of the relative normal in the case when t is not necessary an arc. It is clear that this construction depends on a parametrisation of the curve C.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IX., 2. — MATHEMATICA, 1964]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IX., FASC. II. MATHEMATICA 1964

Poznámka k transformácii riešení lineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu*)

K. DUDAŠKOVÁ

V práci [1] uvažoval M. Laitoch o transformácii riešení lineárnych homogénnych diferenciálnych rovníc 1. rádu. Uvažovanou transformáciou sa však riešenia netransformovali v celých definičných intervaloch týchto rovníc, ale len v definičnom intervale riešení istej nelineárnej rovnice. Tento nedostatok je tu odstránený. Okrem toho je tu uvedená transformácia nehomogénnych lineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu a niektoré jej dôsledky.

1. Uvažujme o diferenciálnych rovniciach

$$(q) \quad y' + q(t)\, y = 0$$

$$(Q) \quad Y' + Q(T)\, Y = 0,$$

v ktorých funkcie $q(t)$, $Q(T)$ sú spojité v intervale j, resp. J. Podľa teórie transformácie lineárnych diferenciálnych rovníc ([2]) je rovnica (Q) v intervale $I \subset J$ ekvivalentná s rovnicou (q) v intervale $i \subset j$, ak existuje dvojica funkcií $X(t)$, $Z(t)$ s vlastnosťami:

1. $X(t),\ Z(t) \in C_1(i),\ X(i) = I,$
2. $X'(t) \neq 0,\ Z(t) \neq 0,\ t \in i$ a platí:

Ak $U(X)$ je ľubovoľné riešenie rovnice (Q) v intervale I, zložená funkcia

$$u(t) = Z(t)\, U[X(t)] \tag{1}$$

je riešením rovnice (q) v intervale i. Dvojicu funkcií $X(t)$, $Z(t)$ nazývame nositeľom ekvivalencie rovníc (Q), (q).

Vyjdúc z tejto definície, možno jednoducho úvahou dokázať pomocnú vetu 1.

Pomocná veta 1. *Nutná a postačujúca podmienka, aby diferenciálna roonica (Q) bola v intervale I ekvivalentná s rovnicou (q) v intervale i a $X(t)$, $Z(t)$ bol nositeľom tejto ekvivalencie, je, aby $X(t)$, $Z(t)$ spĺňali v i vzťah*

$$(Q, q) \quad Z'(t) + \{-Q[X(t)]\, X'(t) + q(t)\}\, Z(t) = 0$$

*) Napísané v rámci Š. V. K.

a platilo

$$X'(t) \neq 0, \qquad t \in i, \qquad X(i) = I. \tag{2}$$

Vzťah (Q, q) znamená jednu podmienku pre dve funkcie, preto, jednu z nich možno voliť ľubovoľne. Ak položíme $Z'(t) = \dfrac{1}{X'(t)}$, dostaneme pre $X(t)$ nelineárnu diferenciálnu rovnicu, uvedenú v práci [1]:

$$-\frac{X''}{X'} - QX' + q = 0.$$

Riešenia daných rovníc (Q), (q) sa transformujú len v definičnom intervale riešení tejto rovnice. Aby sa transformovali v celých definičných intervaloch rovníc (Q), (q), namiesto $Z(t)$ zvolíme $X(t)$, a to tak, aby $X(j) = J, X'(t) \neq 0, t \in j$, napríklad pomocou jednej z troch funkcií $X(t) = kt + q$, $X(t) = \operatorname{tg}(kt + q)$, $X(t) = \operatorname{arctg}(kt + q)$.

Platí potom

Veta 1. Nech $X(t)$ je zobrazenie intervalu j na J také, že $X'(t) \neq 0$, $t \in j$. Nech $Z(t)$ je netriviálne riešenie rovnice

$$Z' + \{-Q[X(t)]\, X't + q(t)\}\, Z = 0.$$

Potom platí: Ak $U(X)$ je ľubovoľné riešenie rovnice (Q), funkcia (1) je riešením rovnice (q).

2. Uvažujme o nehomogénnych diferenciálnych rovniciach

$$(\bar{q}) \quad y' + q(t)\, y = q_1(t)$$
$$(\bar{Q}) \quad \dot{Y} + Q(T)\, Y = Q_1(T),$$

v ktorých funkcie $q(t)$, $q_1(t)$ sú spojité v intervale j, funkcie $Q(T)$, $Q_1(T)$ spojité v intervale J.

Metódou variácie konštánt dostaneme, že ak $U(X)$ je netriviálne riešenie diferenciálnej rovnice (Q), potom

$$\bar{U}(X) = C(X)\, U(X)$$

je riešením $(\bar{Q})$ práve vtedy, ak $C(X)$ je riešením diferenciálnej rovnice

$$C'(X)\, U(X) = Q_1(X).$$

Z teórie transformácie [2] je ďalej známe, že ak je diferenciálna rovnica $(\bar{Q})$ v intervale I ekvivalentná s diferenciálnou rovnicou $(\bar{q})$ v i a $X(t)$, $Z(t)$ je nositeľ tejto ekvivalencie, potom $X(t)$, $Z(t)$ je aj nositeľom ekvivalencie zodpovedajúcich homogenných rovníc, a teda medzi $X(t)$, $Z(t)$ platí v I vzťah (Q, q). Využitím týchto dvoch skutočností možno dokázať vetu 2.

Veta 2. *Ak diferenciálna rovnica $(\bar{Q})$ je v I ekvivalentná s diferenciálnou rovinou*

$(\bar{q})$ v i a $X(t)$, $Z(t)$ je nositeľ tejto ekvivalencie, potom

$$q_1(t) = Q_1[X(t)]\, Z(t)\, X'(t), \qquad t \in i. \tag{3}$$

Obrátene, ak $X(t)$, $Z(t)$ je nositeľ ekvivalencie rovnice (Q) v I s rovnicou (q) v i a medzi pravými stranami rovníc $(\bar{q})$, $(\bar{Q})$, platí v i vzťah (3), potom sú rovnice $(\bar{q})$, $(\bar{Q})$ ekvivalentné v tých istých intervaloch s tým istým nositeľom ekvivalencie.

3. Uvažujme o diferenciálnych rovniciach $(\bar{q})$, $(\bar{Q})$ v prípade, že $J = j$, $Q(T) \equiv \equiv 0$, $T \in J$

$$y' + q(t)\, y = q_1(t), \tag{4}$$

$$Y' = Q_1(T). \tag{5}$$

Možno položiť $X(t) = t$, $t \in j$ a funkcia $Z(t)$, daná vzťahom (Q, q) bude $Z(t) = = \mathrm{e}^{-\int q(t)\,\mathrm{d}t}$. (Volili sme $c = 1$.)

Medzi riešeniami $u(t)$, $U(t)$ rovníc (4) a (5) platí vzťah

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\int q(t)\,\mathrm{d}t}\, U(t), \qquad t \in j,$$

podľa vety 2 práve vtedy, ak

$$q_1(t) = Q_1(t)\, \mathrm{e}^{-\int q(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Nulové body funkcií $u(t)$, $U(t)$, ako aj funkcií $q_1(t)$, $Q_1(t)$ sú totožné. Z toho a z vlastností nulových bodov riešení rovnice (5) plynú tieto tvrdenia:

a) Ak má funkcia $q_1(t)$ konečný počet nulových bodov, potom každé riešenie rovnice (4) má konečný počet nulových bodov.

b) Ak je funkcia $q_1(t)$ v j oscilatorická a primitívna funkcia k funkcii $q_1(t)\, \mathrm{e}^{\int q(t)\,\mathrm{d}t}$ je ohraničená, potom existujú riešenia rovnice (4) bez nulových bodov.

c) Ak je funkcia $q_1(t)$, $t \in j$, oscilatorická a primitívna funkcia k funkcii $q_1(t)\, \mathrm{e}^{\int q(t)\,\mathrm{d}t}$ je zhora aj zdola neohraničená, potom všetky riešenia rovnice (4) sú oscilatorické.

Vzťah medzi riešeniami rovníc (4) a (5) možno použiť aj na charakterizáciu riešení diferenciálnej nerovnosti

$$y' + q(t)\, y \geqq 0, \tag{6}$$

resp. diferenciálnej nerovnosti

$$y' + q(t)\, y \leqq 0. \tag{6'}$$

Veta 3. *Funkcia $y(t) \in C_1(j)$ je v intervale j riešením diferenciálnej nerovnpsti (6), [diferenciálnej nerovnosti (6')] práve vtedy, ak sa dá písať v tvare*

$$y(t) = \bar{\mathrm{e}}^{\int q(t)\,\mathrm{d}t}\, U(t), \qquad t \in j,$$

kde $U(t)$ je neklesajúca (nerastúca) funkcia z triedy $C_1(j)$.

LITERATÚRA

[1] M. Лантох: О преобразованиях решений линейных дифференциальных уравнений, Czech. Math. Journ., 10 (85), 1960, 258–270

[2] V. Šeda: O transformácii lineárnych diferenciálnych rovníc n-tého rádu. Čas. pro pěst. mat.

Adresa autora: Bratislava, Trnávka, ul. Na križovatkách 38.

Do redakcie došlo 1. VII. 1963.

ACTA FACULTATIS
RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATEMATICA

Vydalo Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave — Schv. vým. SNR-OŠK č. 2058/I/63 — Náklad 720 — Rukopis zadaný 9. januára 1964 — Vytlačené v septembri 1964 — Papier 5153-01, 70×100, 70 g — Vytlačil Tisk, knižní výroba, n. p., Brno, provoz 1 — Tlačené zo sadzby monotypovej — Typ písma garmond a petit Times — K-04*41143

Celý náklad prevzala Ústredná knižnica PFUK, Šmeralova č. 2

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

sú fakultný sborník určený na publikovanie vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých ašpirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracúvajú materiál získaný za pobytu na našej fakulte. Redakčná rada si vyhradzuje právo z tohto pravidla urobiť výnimku.

Práce musí odporučiť katedra. Práce študentov musí odporučiť študentská vedecká spoločnosť a príslušná katedra.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom alebo anglickom, francúzskom alebo nemeckom. Práce podané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, ob riadok, tak aby jeden riadok tvorilo 60 úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na účet autora.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšete názov práce, pod to meno autora. Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, uvádzajú sa všetky pracoviská. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba ich obidve uviesť.

Fotografie treba podať na čiernom lesklom papieri a uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba previesť tušom na priehladnom papieri (pauzák) alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať resumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam, publikovaným v cudzom jazyku, načim pripojiť resumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom v prípade publikácie v ruskom jazyku, alebo v ruskom jazyku v prípade publikácie v západnom jazyku. *Nezabudnite pri resumé uviesť vždy názov práce a meno autora v rovnakom poradí ako v základnom texte.* Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a zalomené korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny v priebehu korektúry idú na ťarchu autorského honoráru. Každý autor dostane okrem príslušného honoráru i 50 separátov.

Redakčná rada.