[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. V, 8–10, MATHEM., 1961]

ACTA

FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. V. FASC. VIII–X

MATHEMATICA

PUBL. VII.

1961

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. V, 8–10 MATEMATICA, 1961]
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. V., FASC. VIII-X. MATHEMATICA 1961

К общей теории частично упорядоченных множеств*)

М. Бенадо, Бухарест

§ 1. Введение

В настоящем докладе я преследую цель представить очерк о моих исследованиях по общей теории частично упорядоченных множеств, над которыми я работал с осени 1957 г., вкратце наметить направления, в которых, по моему мнению, развитие этой теории было бы желательным и наконец поставить несколько неразрешенных проблем, решение которых в будущем, без сомнения, представит новые указания для дальнейшего развития теории.

Я должен заметить, что не смотря на относительное богатство материала, о котором будет речь, этот мой доклад содержит только общие ссылки на мою теорию о мультирешетках (= multistructures [3]) и на ее приложения, которые будут объектом самостоятельного доклада.

Моя точка зрения в этом докладе та же, что и в моих примечаниях в Comptes Rendus [4, 5], то есть точка зрения *алгебраическая* или скорее *алгебраизующая,* это значит, что я понимаю *общую теорию частично упорядоченных множеств только как продолжение теории мультирешеток* [3, 8, 11], *точно также как теория мультирешеток является продолжением теории решеток* [17] *с помощью подходящего расширения метода Дедекинда.* Я думаю, в самом деле, что это самые простые и одновременно самые действенные методы, позволяющие *существенное* исследование „внутренней структуры"[1]) самых общих частично упорядоченных множеств.

С одной стороны некоторые трудности, с которыми я встретился в класси-

---

*) Доклад для Международного коллоквиума в Обервольфахе по теории упорядоченных множеств, 26—30 октября 1959 г.

[1]) Под этим я подразумеваю взаимные отношения между парами *сравнимых элементов* (в смысле частичного упорядочения) и парами *несравнимых* элементов (в том же самом смысле).

фикации мультирешеток (при мультирешеточно упорядоченных группах [7]) а с другой стороны мои исследования о функции Мёбиуса [8, 12], наконец, привели меня к принципам теории, которую я здесь излагаю (§ 3 и следующие).[1a])*)

§ 2. Исторические заметки

Первую попытку сконструировать общую теорию частично упорядоченных множеств сделал, насколко я знаю, Э. *Форадори* [28]. Его целью были, кажется, абстрактные исследования (в выражениях частичного упорядочения) некоторых геометрических континуум. Хотя его методы не дедекиндовские в смысле предлагаемого доклада, они не менее совершенны (см. главным образом его работы [28, III] по теории меры); но не кажется, все же, чтобы их можно было применить за пределами классификации частично упорядоченных множеств, которыми он занимается в своих Gefüge, Gerüste и т. д.

С точки зрения, которой в этом докладе я придерживаюсь, можно дать теории *Форадори* следующую очень простую интерпретацию (правда, мы делаем абстракцию из „недедекиндовского" характера его методов): Теория *Форадори* является частью теории частично упорядоченных множеств, *наделенных своей дедекиндовской геометрической структурой.*[2, 2a, 3])

[1a]) После окончания моих докладов я получил от *Яна Якубика* и *Милана Колибиара* несколько интересных заметок, которые я отмечу на принадлежащих местах звездочкой и которые я разработаю в иной работе. Обоим выражаю свою дружескую благодарность.

Благодарю тоже *М. Колибиара* и *Г. Мамриллу* за работу по переводу, а также и *А. Кедера* за ценное сотрудничество при переводе.

*) В письме с 25 апреля 1960 г. М. Колибиар обратил мое внимание на недавные исследования Б. Риечана и З. Риечановой о теореме Гливенко (ср. мою заметку [11], I и дальше § 7), где авторы пришли, независимо от меня, к гойже мысли. Ср. также мою работу [4], 2.2, Пример 5. Однако в упомянутых исследованиях авторы явно не развивают свои мысли в дедекиндовском смысле.

[2]) Все с чем связываются определения и обозначения, смотри § 3 настоящего доклада, главным образом 3.2, пример 1 и 3.4 для понятия дедекиндовской геометрической структуры.

[2a]) Русское слово „структура" употребляется с одной стороны в смысле французского слова „structure", с другой стороны в смысле французского слова „treillis". Я употребляю оба значения этого слова и во избежание недоразумений, оставляю слову „структура" тот же смысл как французскому

Впрочем, тоже самое можно сказать об исследованиях *Г. Макнила*[40] посвященных главным образом проблемам включения и исследованиях *Р. Бюхи*[21], относительно некоторых обобщений булевых алгебр, которые он изучает под названием „булевого частичного упорядочения" (= Booléšche Partialordnung) особенно с точки зрения их монотонных связей [9] („funktionelle Paarungen" в терминологии *Р. Бюхи*, там же).[3])

Однако, кажется, что первым был *Ф. Хаусдорф*[3, 4]), который пришел к мысли применить иные геометрические структуры при исследованиях общих свойств частично упорядоченных множеств. Дело идет, именно, о геометрической структуре, образующейся отношениями Δ_H и M_H определенными в моей заметке [4] (2.2, пример 2); см. тоже и дальше 3.2, пример 2. Я не знаю однако, как применил в последствии Хаусдорф свои мыслы, которым *Душник* [25] дал очень интересное приложение в теории порядковых типов (совершенно) упорядоченных множеств. В моей работе [3] я развил общую теорию хаусдорфовской

слову „structure". Французское „treillis" называю „решетка". В следствие этого для французского „multitreillis" употребляю слово „мультирешетка". Эти термины я употребляю и в своем втором докладе [61]. Эта терминология совпадает с терминологией, которой воспользовались в недавно вышедшем переводе книги Бурбаки по общей топологии (смотри Бурбаки, Общая топология, Москва 1958 г.).

[3]) Притом, это не значит — и я хочу это здесь ясно отметить — что *понятие геометрической структуры частично упорядоченного множества явно выступает в любой форме любой работы из тех, которые мне известны и которые занимаются теорией частично упорядоченных множеств* (см. дальше). Только после моих исследований о мультирешетках[3] и особенно моих исследований о функции Мёбиуса ([8], § 3) мне удалось последовательно дойти к раскрытию этого важного понятия. Проблемы, к которым это понятие приводит и роль, которую оно играет в теории частично упорядоченных множеств, которую я здесь предлагаю, является в некотором направлении сравнима с ролью, какую играет понятие топологической структуры в теории абстрактных пространств.

[4]) Это я узнал из письма Б. Душника (июнь 1956 г.), но без того, чтобы он мог, как он, и впрочем, это замечает сам, доставить мне точные сведения по этому поводу. В 1951 до 1952 гг., у меня, независимо от Хаусдорфа, появилась та же мысль, которую я систематически преследовал в своих исследованиях о теореме уплотнения Шрейера [10] и именно, из этого анализа возникла теория о мультирешетках. Однако, мне было невозможно найти что-либо в работах Хаусдорфа, что могло бы быть хоть немного похожее на тонятие мультирешетки; см. по этому поводу мои заметки [11] — „Zusätze bei der Korrektur".

геометрической структуры, при *предложении уплотненности*, т. е., именно, теорию мультирешеток.

Я еще упомяну исследования *Р. Фрайсе* [29], в которых он изучает частично упорядоченные множества с точки зрения прекрасной теории мультиотношений (multirelations) [30] и исследования *Ф. Риса* [44] о частично упорядоченных группах. С точки зрения настоящего доклада эти исследования *Риса* значительны именно потому, что здесь впервые[3]) (не упоминая об иной работе того же автора в Comptes Rendus de l'Académie Hongroise des Sciences) появляется новая по существу геометрическая структура при исследовании частично упорядоченных множеств, а именно данная отношениями Δ_R и M_R, определенными в моей заметке [4] (2.2, пример 3).

Дедекиндовская геометрическая структура не что иное, как соединение рисовской геометрической структуры с хаусдорфовской геометрической структурой ([4], 2.3; см. по этому поводу мою работу [3], теорему 1.4.1). Хотя рисовская геометрическая структура у *Риса* совпадает с дискретной геометрической структурой ([4], 2.2, пример 6 и 2.5.1); см. тоже [17], стр. 52, определение и стр. 221, упражнение 6.

Мне остается еще упомянуть исследования *М. М. Дэй* [23], посвященные некоторым кардинальным и ординальным „арифметическим" операциям, которые можно осуществлять на частично упорядоченных множествах, идею которых впервые находим в работах *Хаусдорфа* [33] и *Биркгофа* [18, 19]. Это приводит, как бывает в подобных случаях, к классификации частично упорядоченных множеств посредством некоторых разложений или даже теоремы[5]) о разложении, которым дают повод эти операции. Такие классификации, хотя и большой важности, могли бы по моему мнению дать нам только частичный образ внутренней структуры[1]) частично упорядоченных множеств и именно потому, что рассматриваемые арифметические операции подобны операциям теории *Г. Кантора* о трансфинитных кардинальных и ординальных числах, где рассматриваются только следующие два класса частично упорядоченных множеств P: класс таких P, где из отношений $a,\ b \in P$ и $a \geqq b$ *вытекает* $a = b$ и класс таких P, *где из отношений* $a,b \in P$ *вытекает или* $a \geqq b$, *или* $b \geqq a$. Что касается *первого* класса, отношение $\geqq$ (частичного упорядочения) не играет здесь никакой роли; во втором же классе, наоборот, несравнимые элементы (в смысле частичного упорядочения), не играют никакой роли. Хотя настоящие значение методов *Дэя* (там же) для теории частичного упорядочения, по моему, не в „арифметических" тождествах, которые он получил при этих операциях,

---

[5]) Такими являются хорошо известные результаты *Р. П. Дилуорса* [24], *Душника* и *Э. В. Миллера* [26], *Биркгофа* и *Т. Накаяма* ([17], гл. *II*, § 8) и т. д.

но в „геометрических" свойствах, например теорема 6 и аналогичные свойства формулированные в упражнениях 2 и 3 в книге [17], гл. II, § 7 и [19]. Это значит, применить канторовские операции и их обобщения ([19], [23], [33]) к теории геометрических структур частично упорядоченных множеств. Ср. § 11, Проблема 11.

Что касается „арифметической" точки зрения в общей теории *частичного* упорядочения, то, по моему, скорее точка зрения „упорядочения по делимости" *(Дедекинд)* чем точка зрения „упорядочения по величине" *(Кантор)* покажет, как и в прошлом, свою плодотворность. В этом отношении характеристичны недавные исследования Бруно Босбах [63], [64] (и соответствующие ссылки) как и исследования Леонса Лесиэ и Роберта Круазо [65] (особенно I и III).

С другой стороны, если дело идет о множестве ординальных чисел, мы всегда имеем здесь, как хорошо известно, частичное упорядочение, по существу отличающееся от обыкновенного упорядочения ординальных чисел по величине, а именно то, которое определено делимостью ординальных чисел „слева" (ср., напр., [17], гл. III § 3 или [46], гл. X, где делимость „справа" обозначает то, что делимость слева в [17], из-за немного иного определения ординального умножения). Как мне известно, свойства этого частичного упорядочения не были до сих пор более подробно исследованы. Мне кажется, что именно, это частичное упорядочение содержит „дедекиндовскую", т. е. „истинную" арифметику ординальных чисел.

Я буду теперь формулировать общие принципы предлагаемой теории частично упорядоченных множеств, таким образом, чтобы все вышеуказанные теории заключались в них если не во всех подробностях, то по крайней мере в их основах.

Но раньше чем это сделать, я укажу на изменения в терминологии ради кратчайшего объяснения и которые, я думаю, смогу достаточно оправдать последующими рассуждениями (§§ 3–10). Я предлагаю называть (ср. мои заметки [5]) *абстрактной конфигурацией* или просто *конфигурацией* каждое частично упорядоченное множество ([17], гл. I, § 1). Делая это, я придаю самое широкое значение понятию абстрактной конфигурации *в смысле Биркгофа* ([17], гл. I, § 10), которую можно подчинить теории мультирешеток, как я упоминал об этом раньше [3].

Что касается понятия цепи, оно имеет во всем этом докладе привычное значение ([17] гл. I § 9).

§ 3. Общие принципы

В дальнейшем буквой P буду обозначать любую конфигурацию (относительно частичного упорядочения $\geqq$ или $\leqq$) данную для всех случаев. Пусть X любая часть (подмножество) конфигурации P. Я обозначу знаками $\bigvee X$, $\bigwedge X$ (см. мою работу [4]) множества всех *мажорант* и всех *минорант* подмножества X, соответственно ([20], § 6, абзац 7), тогда специально получим $\bigvee \varnothing = \bigwedge \varnothing = P$, где $\varnothing$ — пустое подмножество конфигурации P. Впрочем это привычные обозначения из общей теории множеств [20].

3.1. Определение. Под *отношением делимости (кратности)* я понимаю каждое бинарное отношение Υ (Σ) связывающее некоторые *элементы* $d \in P$ ($m \in P$) с некоторыми *подмножествами* $A \subseteq P$ ($B \subseteq P$) так, что $d \Upsilon A$ ($m \Sigma B$) влечет за собой $\bigvee A \neq \varnothing$ и $d \in \bigvee A$ ($\bigwedge B \neq \varnothing$ и $m \in \bigwedge B$).

Если $d \Upsilon A (d \in P, A \subseteq P)$, я буду говорить, что d является Υ — *делителем* A, равным образом я скажу, что m является Σ — *кратным* $B (m \in P, B \subseteq P)$, лишь бы $m \Sigma B$. Аналогичную форму отношений $d \Upsilon \{a, a', a'', \ldots\}$ ($m \Sigma \{b, b', b'', \ldots\}$) читаем „$d$ является *общим* Υ — *делителем* элементов $a, a', a'', \ldots$“ (m является *общим* Σ — *кратным* элементов $b, b', b'', \ldots$). С другой стороны, если положить $\bigvee \varnothing = \bigwedge \varnothing = P$ (см. выше), то отношения $d \Upsilon \varnothing$, $m \Sigma \varnothing$ не лишены смысла.

3.1.1. Множество всех отношений делимости (кратности) даных в P обозначим $\mathfrak{D}(P)$ ($\mathfrak{M}(P)$). Эти множества можно упорядочить как полные булевые алгебры, согласно моей работе [4]. Я думаю, что эти булевые алгебры $\mathfrak{D}(P)$, $\mathfrak{M}(P)$ имеют кое-какое отношение к внутренней структуре конфигурации P.

3.1.2. Я буду говорить, что отношения Υ, $\Sigma (\Upsilon \in \mathfrak{D}(P), \Sigma \in \mathfrak{M}(P))$ являются *взаимно двойственными*, если $d \Upsilon A (d \in P, A \subseteq P)$ равносильно $\tilde{d} \Sigma \tilde{A}$ в двойственном множестве $\tilde{P}$ конфигурации P ([17], гл. I, § 3) и если $m \Sigma B$ ($m \in P$, $B \subseteq P$) равносильно $\tilde{m} \Upsilon \tilde{B}$ в двойственном множестве $\tilde{P}$ конфигурации P; ср. [4], 2.4.

3.2. Примеры. 1. Отношения Δ_E, M_E определены следующим образом: $d \Delta_E A$ ($d \in P$ *дедекиндовский делитель* подмножества $A \subseteq P$) значит, что $d \in \bigvee A$ и $d \leqq u$ для любого $u \in \bigvee A$; $m M_E B$ ($m \in P$ *дедекиндовское кратное* подмножества $B \subseteq P$) значит, что $m \in \bigwedge B$ и $m \geqq v$ для *любого* $v \in \bigwedge B$. (ср. [4], 2.2. пример 1).

Пример 2. Отношения Δ_H, M_H определены следующим образом: $d \Delta_H A$ ($d \in P$ *хаусдорфовский делитель*[4]) подмножества $A \subseteq P$) значит, что $d \in \bigvee A$ и $d = x_1$ для *любого* $x_1 \in \bigvee A$ такого, что $x_1 \leqq d$; $m M_H B$(m *хаусдорфовское кратное*[4]) подмножества $B \subseteq P$) значит, что $m \in \bigwedge B$ и $m = x'$ для *любого* $x' \in \bigwedge B$ *такого, что* $x' \geqq m$ (ср. [4], 2.2, пример 2).

Пример 3. Отношения Δ_R, M_R определены следующим образом: $d \Delta_R A$ ($d \in P$ *рисовский делитель* подмножества $A \subseteq P$) значит, что $d \in \bigvee A$ и для *любого* $u \in \bigvee A$ существует $x_1 \in \bigvee A$ такое, что $x_1 \leqq d$ и $x_1 \leqq u$; $m M_R B$ ($m \in P$ *рисовское кратное* подмножества $B \subseteq P$) значит, что $m \in \bigwedge B$ и для *любого* $v \in \bigwedge B$ существует $x' \in \bigwedge B$ такое, что $x' \geqq m$ и $x' \geqq v$ (ср. [4], 2.2, пример 3).

Пример 4. Отношения Δ, M определены следующим образом: $d \Delta A$ ($d \in P$

делитель подмножества $A \subseteq P$) значит, что $d \in \bigvee A$; mMB ($m \in P$ *кратное* подмножества $B \subseteq P$) значит, что $m \in \bigwedge B$ (ср. [4], 2.2, пример 6).

Впрочем ясно, что Δ_E и M_E взаимно двойственны (3.1.2) и соответственно Δ_H и M_H, Δ_R и M_R, Δ и M тоже взаимно двойственны. Кроме того имеем например $\Delta_H \cap \Delta_R = \Delta_E$ и $M_H \cap M_R = M_E$ а также $\Upsilon \leqq \Delta$ для любого $\Upsilon \in \mathfrak{D}(P)$ и $\Sigma \leqq M$ для любого $\Sigma \in \mathfrak{M}(P)$ и т. д.; ср. [4], 2.3 и немного выше 3.1.1.

Я показал также (все еще в [4], 2.2 пример 5) простую характеристику отношений $\Upsilon \in \mathfrak{D}(P)$, $\Sigma \in \mathfrak{M}(P)$ посредством функций „*делимости*" $\mathfrak{d}(x) \subseteq \bigvee X$ (для любого $X \subseteq P$) и функций „*кратности*" $\mathfrak{m}(x) \subseteq \bigwedge X$ (для любого $X \subseteq P$). Отныне сосредоточим свое внимание на паре Υ, Σ, где Υ произвольный элемент $\mathfrak{D}(P)$ и Σ элемент $\mathfrak{M}(P)$.[6])

3.3. Определение. Я называю (Υ, Σ) — *четырехугольником* всякое множество из четырех элементов a, b, d, $m \in P$, таких что $d\Upsilon\{a, b\}$ и $m\Sigma\{a, b\}$. Обозначение: $(d, m; a, b)$. Очевидно, что всякий четырехугольник в смысле [10], 1.3 является по крайней мере (Δ, M) — четырехугольником.

3.4. Определение. Я буду говорить, что конфигурация P *наделена геометрической* (Υ, Σ) — *структурой*, если существует по крайней мере один (Υ, Σ) — четырехугольник в P (3.3). Это определение более общее чем то, которое я предлагал в работе [4], 2.5, аксиома $SD1$.

Символом $G(\Upsilon, \Sigma)$ я обозначу геометрическую (Υ, Σ) — структуру в P.

Таким образом, например, P может быть наделена геометрической (Δ_E, M_E) — структурой, которую я опять назову *дедекиндовской* геометрической структурой конфигурации P; геометрической (Δ_H, M_H) — структурой или *хаусдорфовской* геометрической структурой; геометрической (Δ_R, M_R) — структурой или *рисовской* геометрической структурой; и наконец геометрической (Δ, M) — структурой или *дискретной* геометрической структурой (см. 3.2, примеры 1–4 и [4], 2.5.1). Это, по существу, потому что в каждом из *этих* случаев выполнено свойство натуральности отношений $\Upsilon \in \mathfrak{D}(P)$, $\Sigma \in \mathfrak{M}(P)$. См. дальше 4.1.1, свойство A.

3.4.1. Понятие геометрической структуры абстрактной конфигурации, которое я ввожу в эту теорию, играет в какой то мере роль подобную той, которую понятие топологической структуры играет в теории абстрактных пространств. См. на счет этой темы мою работу [10], § 2.

В связи с этим я хочу упомянуть, что как топологические структуры так и геометрические структуры можно частично упорядочить следующим образом:

Я буду говорить, именно, что геометрическая (Υ, Σ) — структура конфигура-

---

[6]) В частности, *не необходимо, чтобы* Υ *и* Σ *были взаимно двойственн ы*

ции P *более мелкая* чем геометрическая (Υ', Σ') — структура конфигурации P и буду записывать

$$(*) \qquad G(\Upsilon', \Sigma') \leqq G(\Upsilon, \Sigma)$$

если *любой* (Υ', Σ') — *четырехугольник конфигурации* P *является одновременно* (Υ, Σ) — *четырехугольником*. Бинарное отношение (*) является, что легко заметить, отношением частичного упорядочения. Таким образом, например, *дискретная геометрическая структура* $G(\Delta, M)$ *конфигурации* P *является более мелкой, чем все остальные:* $G(\Upsilon, \Sigma) \leqq G(\Delta, M)$.

По отношению (*) множество всех геометрических структур конфигурации P является полной булевой алгеброй.

Я еще замечу, что условия $\Upsilon' \leqq \Upsilon$, $\Sigma' \leqq \Sigma$ ([4], 2.3) влекут условие (*), но обратное не верно.

3.4.2. На ряду с геометрическими структурами полезно также ввести и геометрические *полуструктуры* и я буду говорить, что именно, конфигурация P *наделена геометрической* Υ — *полуструктурой* (Σ — *полуструктурой*), если имеются хотя бы три элемента $a, b, d \in P (a, b, m \in P)$ такие, что $d\Upsilon\{a, b\}$ $(m\Sigma\{a, b\})$.

3.4.3. Определение понятия геометрической структуры (полуструктуры) абстрактной конфигурации содержит требование существования, т. е., что некоторые подмножества конфигурации P (образованные из двух элементов не обязательно разных) обладают Υ — делителями или Σ — кратными. Это требование может быть целесообразно усилено несколькими способами, из которых привожу следующие.

3.4.3а. Определение. Я называю *универсальной* всякую геометрическую структуру конфигурации P, если для *любой* пары элементов $a, b \in P$ существуют элементы (не обязательно единственные), удовлетворяющие отношениям $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$. Согласно этому решетка будет не что иное как конфигурация, относящаяся к своей дедекиндовской структуре, предположив, что она *универсальна!*

3.4.3б. Определение. Я называю *полной* всякую геометрическую структуру конфигурации P, если *каждое* подмножество (даже пустое!) имеет Υ — делитель и Σ — кратное.

Отсюда следует существование первого элемента $0 \in P$ и последнего элемента $1 \in P$ и *очевидно* $1\Upsilon P, 0\Sigma P$.

Когда, например, $\Upsilon = \Delta_H$ и $\Sigma = M_H$ (3.2, пример 2), мы получаем полные хаусдорфовские геометрические структуры, которые естественно объявляются по поводу проблем ассоциативности операций мультирешеток (см. мои работы [3], [8]) и на значение которых в абстрактной теории функции *Мёбиуса* я показал в другом месте (см. тоже по этому поводу мои замечания в Comptes Rendus [12]).

3.5. Геометрические структуры или полуструктуры конфигураций можно трансформировать одни в другие с помощью геометрических гомоморфизмов (и их частичных случаев) и эти трансформации играют здесь ту же роль, что и гомоморфизмы решетки в теории решеток ([17] и [36]). Ср. также мою заметку [11], I.

3.5.1. Определение. Пусть P, P' две конфигурации *(не обязательно различные)* из которых каждая наделена некоторой геометрической (Υ, Σ) — структурой (например, своей дедекиндовской геометрической структурой или тоже хаусдорфовской геометрической структурой, и т. д.; 3.2). Я называю любое отображение ϕ конфигурации P в (на) конфигурацию P' *геометрическим гомоморфизмом,* если отношения $a, b, d, m \in P$, $d\Upsilon\{a, b\}$ и $m\Sigma\{a, b\}$ влекут за собой отношения $d\phi\,\Upsilon\{a\phi, b\phi\}$, $m\phi\Sigma\{a\phi, b\phi\}$ (в P'). Если положим $P = P'$, тогда мы имеем дело с *геометрическим эндоморфизмом.*

3.5.2. Определение. При предположениях и обозначениях как в 3.5.1 я буду называть *геометрическим изоморфизмом* любое *взаимно однозначное* отображение ϕ конфигурации P на P' такое, что отношения $a, b, d, m \in P$, $d\Upsilon\{a, b\}$ и $m\Sigma\{a, b\}$ влекут за собой отношения $d\phi\Upsilon\{a\phi, b\phi\}$, $m\phi\Sigma\{a\phi, b\phi\}$ в P' *и тоже самое для обратного отображения* ϕ^{-1}. Геометрические (Υ, Σ) — структуры конфигураций P, P' будем в том случае называть *изоморфными.* Когда $P = P'$, дело идет о *геометрическом автоморфизме.*

3.6. Замечания. 1. Когда геометрические структуры из 3.5.1 и 3.5.2 являются дискретными структурами (3.2, пример 4), получаем очевидно *обыкновенные* понятия гомоморфизма (эндоморфизма) и изоморфизма (автоморфизма) в смысле частичного упорядочения ([17], гл. I, § 3 и гл. II, § 5) и обратно.

Однако можно думать, что это не так во всех остальных геометрических структурах, *хотя дело идет о геометрических изоморфизмах.* Иными словами, мы можем ожидать, что геометрический изоморфизм между P и P' не всегда является изоморфизмом в смысле частичного упорядочения, и обратно — такой изоморфизм не всегда будет геометрическим изоморфизмом.

2. Действительно, любой геометрический гомомовфизм ϕ, отображающий геометрическую (Υ, Σ) — структуру конфигурации P в (на) геометрическую (Υ, Σ) — структуру конфигурации P, является гомоморфизмом *в смысле частичного упорядочения, лишь бы геометрическая* (Υ, Σ) — *структура* конфигурации P *была натуральной* (сверху или снизу) *в смысле* 4.1.1, свойство A (см. тоже 8.2.2).

3. С другой стороны существует класс геометрических структур абстрактной конфигурации, которые (структуры) являются инвариантными при всяком изоморфизме в смысле частичного упорядочения, который (изоморфизм), таким образом, является геометрическим изоморфизмом. Впрочем, этот класс содержит рисовскую геометрическую структуру 3.2.

3а. Приведу теперь конструкцию этого класса; интерес этой конструкции происходит, разумеется, из её чисто алгебраического характера (см. по этому поводу немного дальше § 10) и свойственного всякой конфигурации. Потому я здесь это опишу в некоторых деталях. Я рассматриваю любое формальное выражение „веса" ω написанное помощью знаков $\vee$, $\wedge$, определенных в начале этого параграфа; выражения веса 0 *являются элементами конфигурации P*, в то время как выражения E веса ω (= любое натуральное число) имеют форму:

$$E_1 \vee E_2 = \bigcup_{\substack{a_1 \in E_1 \\ a_2 \in E_2}} (a_1 \vee a_2), \qquad a_1 \vee a_2 = \bigvee \{a_1, a_2\}, \qquad (a_1, a_2 \in P)$$

или форму

$$E_1 \wedge E_2 = \bigcup_{\substack{a_1 \in E_1 \\ a_2 \in E_2}} (a_1 \wedge a_2), \qquad a_1 \wedge a_2 = \bigwedge \{a_1, a_2\}, \qquad (a_1, a_2 \in P)$$

где E_1, E_2 выражения, сумма весов которых равна $\omega - 1$. Эта конструкция напоминает многие аналогичные конструкции, каковой, например, является конструкция из [17], Foreword on Algebra p. VIII или почти такая же конструкция *П. М. Уитмена* ([17], гл. II, § 11) свободных решеток (в случае где P наделена своей *дедекиндовской* геометрической структурой); она напоминает тоже мою работу [3], 2.1, формулы (2), (2′); *разница только в том*, что здесь дело идет о *хаусдорфовской* геометрической структуре конфигурации P, в то время как в моих выше упомянутых формулах это *дискретная* геометрическая структура конфигурации P. Впрочем, выражения E являются всегда *подмножествами* конфигурации P; эти подмножества могут быть бесконечные, но могут быть и *пустые*. В последнем случае удобно для применимости вышеуказанных формул положить (по определению)

$$E \vee \varnothing = \varnothing = E \wedge \varnothing \quad (\varnothing \subseteq E \subseteq P)$$

Впрочем, здесь несколько простых примеров разъясняющих то, о чем мы только что говорили.

Пример 1. Выражения $x_1 \vee x_2$, $x_1 \wedge x_2$, где $x_1, x_2 \in P$, являются согласно предшествующему, выражениями веса 1. Итак, $x_1 \vee x_2$ является просто множеством всех общих мажорант элементов x_1, x_2, тогда как $x_1 \wedge x_2$ является множеством всех общих минорант.

Пример 2. Выражение $(x_1 \vee x_2) \vee x_3$, где $x_1, x_2, x_3 \in P$, веса 2. Оно представляет множество всех общих мажорант элементов x_1, x_2 и x_3!

Пример 3. Выражение $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_4)$, где $x_1, x_2, x_3, x_4 \in P$, веса 3.

Формальные выражения E обладают следующим фундаментальным свойством, доказательство которого (индукция относительно веса!) не представляет никаких затруднений:

Для всякого гомоморфизма ϕ в смысле частичного упорядочения и всякого выражения $E = E(x_1, x_2, \ldots, x_{\omega+1};\ \vee, \wedge)$ веса ω имеем:

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_{\omega+1};\ \vee, \wedge)\,\phi \subseteq E(x_1\phi, x_2\phi, \ldots, x_{\omega+1}\phi;\ \vee, \wedge).$$

4. На основании этого пусть $A \subseteq P$ — такое, что $\bigvee A \neq \varnothing$ и E какое-нибудь формальное выражение веса ω. Я буду говорить, что элемент $\mathrm{d} \in \bigvee \mathrm{A}$ является $\Upsilon(E)$ — *делителем* множества A, когда выполнено следующее условие: если элементу d назначим установленное, заранее выбранное, место между элементами $x \in E$ и оставим остальные ω элементов x пробегать всеми возможными способами множество $\bigvee A$, потом всегда $E(x_1, x_2, \ldots, x_{\omega+1};\vee, \wedge) \cap (\bigvee A) \neq \varnothing$. Что касается $\Sigma(E)$,— *кратных* множества A, я их определяю двойственно к определению $\Upsilon(E)$ — делителей, т. е. всюду заменим взаимно $\bigvee$ и $\bigwedge$ (но сохраняем $\cap$!). Отношения $\Upsilon(E)$, $\Sigma(E)$ будут, таким образом, взаимно двойственными в смысле [4], 2.4.

Итак, из предшествуюшего ясно, что отношения $\Upsilon(E)$, $\Sigma(E)$, которые я только что определил, будут инвариантными при каждом гомоморфизме (изоморфизме) в смысле частичного упорядочения конфигурации P *на* конфигурацию P'. С другой стороны *мы имеем* $a\,\Upsilon(E)\{a, b\}$ *и* $b\Sigma(E)\{a, b\}$ *для всех элементов* $a, b \in P$, *таких что* $a \geqq b$. Таким образом конфигурация P обладает инвариантными геометрическими (Υ, Σ) — структурами при каждом гомоморфизме в смысле частичного упорядочения.

Впрочем, предшествующая конструкция может быть изменена и многими другими способами.

3.7. Геометрические гомоморфизмы и их частичные случаи не являются единственными трансформациями, которые можно применять к геометрическим структурам конфигурации. Рядом с этими гомоморфизмами (как *однозначными* трансформациями) удобно рассматривать также монотонные связи (вообще *многозначные!*), которые я ввел по поводу моих исследований о мультирешетках ([10], 1.4 и [3], § 3) и изучение которых является вообще необходимым в теории уплотненных геометрических структур (см. немного дальше, § 4) как впрочем и в абстрактной теории кондуктора ([15], § 3).

Монотонные связи, в случае когда они *однозначные*, были рассматрены раньше *Бюхи* [21] и независимо от этого автора мной в [9]. Совсем недавно они были также рассмотрены *В. Фельшером* [27] под названием „связи Галуа смешанного типа“ (= Galois — Korrespondenz gemischten Typus). Действительно, сложение двух связей Галуа *противоположного* вида дает всегда монотонную связь.

§ 4. Элементарные свойства инцидентности

Основной проблемой теории геометрических структур конфигураций является, естественно, классификация этих структур.

Итак, исследование этой проблемы зависит от некоторого числа предположений, большей частью обычных, которые я называю „элементарными свойствами инцидентностми", см. по этому поводу мои заметки [5,6], а также и мою работу [3], §§ 3, 4.

Вот некоторые из этих свойств:

4.1. Уплотнение. Я буду говорить, что геометрическая (Υ, Σ) – структура[6]) конфигурации P является *уплотненной*, когда для всех элементов $a, b, u, v \in P$ таких, что $u \geqq a \geqq v$ и $u \geqq b \geqq v$ существуют элементы $d, m \in P$, такие что $u \geqq \mathrm{d}\Upsilon\{a, b\}$ *(уплотнение сверху)* и $v \leqq m\Sigma\{a, b\}$ *(уплотнение снизу)*. Это определение распространяется и на геометрические полуструктуры конфигурации P (3.4.2).

Из этого определения вытекает, что универсальные*) дедекиндовские и дискретные геометрические структуры (полуструктуры) конфигурации P являются всегда уплотненными; отсюда следует дальше, что *мультирешетка* ([3], 1.1) является *конфигурацией, у которой обе хаусдорфовские геометрические полуструктуры являются уплотненными.*

4.1.1. Я упомяну следующие следствия свойства уплотнения, доказательства которых почти тривиальны:

А. Всякая уплотненная геометрическая (Υ, Σ) – структура *натуральна* в том смысле, что *для всяких элементов* $a, b \in P$, *таких что* $a \geqq b$, *имеемся* $a\Upsilon\{a, b\}$ (натуральность сверху) *и* $b\Sigma\{a, b\}$ (натуральность снизу).

В. Всякая уплотненная геометрическая (Υ, Σ) – структура является *одновременно аналитической и синтетической* ([4], 2.5) и поэтому *регулярной* (снизу **и сверху); кроме того она является структурой** *с картезианской связностью вида* 1–4; см дальше.

4.2. Замыкание. Я буду называть любую геометрическую (Υ, Σ)–структуру *замкнутой сверху (снизу)*, если для любых элементов $a, b, d, m \in P$, где $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, отношение $a_1 \in d/a (a' \in a/m)$ влечет за собой $d\Upsilon\{a_1, b\}$ $(m\Sigma\{a', b\})$[7]).

Дедекиндовские, хаусдорфовские и дискретные геометрические структуры являются всегда замкнутыми снизу и сверху.

---

*) Примечание Б. Риечана.

[7]) Для u, $v \in P$ таких, что $u \geqq v$, я обозначу символом u/v множество всех элементов $x \in P$ таких, что $u \geqq x \geqq v$ ([17], гл. I, § 1).

4.3. Насыщенность. Я говорю, что геометрическая (Υ, Σ) – структура является *насыщенной сверху (снизу)*, когда для всех элементов $a, b, d, m \in P$ таких, что $d\Upsilon\{a, b\}$ и $m\Sigma\{a, b\}$, отношения $d' \in P$, $d \geqq d'\Upsilon\{a, b\}$ $(m' \in P, m \leqq \leqq m'\Sigma\{a, b\})$ влекут за собой $d = d'(m = m')$.

Дедекиндовские и хаусдорфовские геометрические структуры являются очевидно насыщенными снизу и сверху, *но дискретная геометрическая структура не насыщена ни даже в смысле* 5.4, свойство А.

4.4. Картезианская интерполяция. Я говорю, что геометрическая (Υ, Σ) – структура является структурой с картезианской интерполяцией, если для любых элементов $a, a', a_1, b, b', b_1, d, m \in P$ таких, что[7]) $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $a_1 \in d/a$, $a' \in a/m$, $b_1 \in d/b$, $b' \in b/m$, $a_1\Upsilon\{a, b'\}$, $a'\Sigma\{a, b_1\}$, $b_1 Y\{a', b\}$ и $b'\Sigma\{a_1, b\}$, существует такой элемент $x \in P$, что $x \in (a_1/b') \cap (b_1/a')$; ср. [5, I], 2.5, [8, § 3] и [12, II].

Геометрические структуры с картезианской интерполяцией играют важную роль в теории дистрибутивных геометрических структур (см. немного дальше, § 6).

4.5. Регулярность. Я буду называть всякую геометрическую (Υ, Σ) – структуру *регулярной сверху (снизу)*, если для любых элементов $a, b, d, m \in P$, выполняющих условия $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$ и для любого $a_1 \in d/a$ $(a' \in a/m)$ существует такой элемент $b' \in b/m (b_1 \in d/b)$, что $b'\Sigma\{a_1, b\}$ $(b_1\Upsilon\{a', b\})$.

4.6. Регулярная связность. Я буду говорить, что геометрическая (Υ, Σ) – структура является *структурой с регулярной связностью сверху (снизу)*, если для любых элементов $a, b, d, m, p, p' \in P$ таких, что $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $p \in d/a$, $p' \in b/m$, $p'\Sigma\{b, p\}$ $(p\Upsilon\{a, p'\})$, существует такой элемент $p_1 \in P$ $(p_1' \in P)$, что $p \geqq p_1\Upsilon\{a, p'\}$ $(p' \leqq p_1'\Sigma\{b, p\})$.

4.7. Картезианская связность. Я буду говорить, что геометрическая (Υ, Σ) – структура является *структурой с картезианской связностью* 1*-го типа (*2*-го типа)*, если для любых элементов $a, a', b, b', d, m, x \in P$ таких, что $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $x \in d/m$, $m \leqq a'\Sigma\{a, x\}$ и $m \leqq b'\Sigma\{b, x\}$ $(a' \in a/m,\ b' \in b/m,\ d \geqq \geqq x\Upsilon\{a', b'\})$ существует такой элемент $x' \in P$, что $x \geqq x'\Upsilon\{a', b'\}$ (существуют элементы $a'', b'' \in P$ такие, что $a' \leqq a''\Sigma\{a, x\}$, $b' \leqq b''\Sigma\{b, x\}$).

Картезианские связности 3 и 4 типов получаются применением двойственности.

Очевидно, что дискретная геометрическая структура имеет все свойства 4.5, 4.6, 4.7.

4.8. Средняя связность. Я називаю *структурой с средней связностью* такую геометрическую (Υ, Σ) – структуру, что из отношений $a, a_1, b, b', d, m, x \in P$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $x \in d/m$, $d \geqq a_1\Upsilon\{a, x\}$ и $m \leqq b'\Sigma\{b, x\}$ вытекает существование таких элементов $a_2, b'' \in P$, что $a_1 \geqq a_2\Upsilon\{a, b'\}$ и $b' \leqq b''\Sigma\{a_1, b\}$.

4.9. Следующие параграфы 5–8 посвящены классификации геометрических структур согласно критериям модулярности, дистрибутивности, и т. д. Эта проблема очень сложная из-за многих отличий, которым соответствующие классические понятия дают повод. Ограничусь только некоторыми указаниями этих новых абстракций и их взаимных отношений; что же касается развития, то я отсылаю читателя к моим работам in extenso, которые я намерен опубликовать по этому поводу. Ср. [62], II, III.

§ 5. Модулярные геометрические структуры

Понятия модулярности, которые я здесь определяю, относятся по существу к идеям *С. Маклейна* [39] и *А. Куроша* [37].

Что касается модулярных геометрических структур в смысле О. *Оре*, см. мою заметку [5, I] а также и мою работу [15], 1.9.

5.1. Определение. Я буду говорить, что геометрическая (Υ, Σ) — структура *равномерно модулярна снизу в картезианском смысле* или UC' — *модулярна*, когда выполнено следующее условие: UC'. *Для всех элементов* $a, b, d, m \in P$ *таких, что* $d\Upsilon\{a, b\}$ *и* $m\Sigma\{a, b\}$, *отношения*[7]) $a' \in a/m$, $b' \in b/m$, $x \in d/m$ *и* $x\Upsilon\{a', b'\}$ *влекут за собой* $a'\Sigma\{a, x\}$ *и* $b'\Sigma\{b, x\}$.

В смысле этого определения дискретная геометрическая структура всегда UC' — модулярна.

5.2. Определение. Я буду говорить, что геометрическая (Υ, Σ) — структура *модулярна снизу в картезианском смысле* или C' — *модулярна*, когда для всех элементов $a, a', b, b', d, m \in P$ таких, что $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $a' \in a/m$ и $b' \in b/m$, существует элемент $x \in P$ такой, что $d \geqq x\Upsilon\{a', b'\}$ и такой, что $a'\Sigma\{a, x\}$, $b'\Sigma\{b, x\}$.

5.2.1. Очевидно, что модулярная геометрическая структура в смысле 5.2 необходимо является *синтетической* снизу ([4], 2.5, аксиома $SD2''$!). С другой стороны *геометрическая структура* UC' — *модулярная и синтетическая снизу всегда* C' — *модулярна*.

5.2.2. Дискретная геометрическая структура любой конфигурации очевидно C' — модулярна. С другой стороны *хаусдорфовская геометрическая структура частично упорядоченной группы* G *выполняет свойство* C' — *модулярности для всех* $a, b, d, m \in G$ *таких, что* $d\Delta_H\{a, b\}$, $mM_H\{a, b\}$ *и* $d = am^{-1}b$.

5.3. Определение. Я буду называть *модулярной в смысле Куроша* или K — *модулярной* всякую геометрическую (Υ, Σ) — структуру такую, что выполнена следующая аксиома:

К. Для всех элементов $a, b, b', d, m \in P$ *таких, что* $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $d\Upsilon\{a, b'\}$, $m\Sigma\{a, b'\}$ *и* $b \geqq b'$, *имеем* $b = b'$. Ср. [5, I, 1.4].

Важно заметить здесь, что *дискретная геометрическая структура никогда* *не является K — модулярной* (*исключая случая*, впрочем тривиального, где отношения *a, b ∈ P и a* ≧ *b* влекут за собой *a* = *b*!).*)

5.4. Что касается связей между двумя понятиями модулярности, которые я только что определил, я ограничиваюсь следующими указаниями:

A. *Всякая геометрическая UC′ — модулярная структура является K — модулярной, лишь бы она удовлетворяла следующему свойству слабой насыщенности (снизу): Для любых элементов* $a, b, m, m' \in P$ *таких, что* $a \geqq b$, $m\Sigma\{a, b\}$, $m'\Sigma\{a, b\}$ *и* $m \geqq m'$, *имеем* $m = m'$. (*Слабая насыщенность сверху: Для любых элементов* $a, b, d, d' \in P$ *таких, что* $a \geqq b$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $d'\Upsilon\{a, b\}$ *и* $d \geqq d'$, *имеем* $d = d'$).

B. *Всякая геометрическая K—модулярная структура является C′—модулярной, лишь бы она была замкнутой снизу и сверху* (4.2), *регулярной снизу* (4.5) *и структурой с регулярной связностью снизу* (4.6).

C. *Пусть P мероморфная или голоморфная конфигурация* ([10], 4.3.1) *наделенная геометрической* (Υ, Σ) — *структурой, удовлетворяющая следующему предположению: Для любых элементов* $a, b, d, m \in P$ *таких, что* $d\Upsilon\{a, b\}$ *и* $m\Sigma\{a, b\}$, *имеется изоморфизм* $d/a \leftrightarrows b/m$ (*в смысле частичного упорядочения*). *Тогда* рассматриваемая *геометрическая структура K — модулярна.* Ср. [47] и [10], 4.3.3.

§ 6. Дистрибутивные геометрические структуры

Важным свойством дистрибутивных решеток или дистрибутивных мультирешеток является то, что они модулярны. Вероятно, это не всегда так у дистрибутивных геометрических структур, которые я в дальнейшем введу, относительно к модулярным геометрическим структурам (§ 5 и моя заметка [5, I]). Можно сказать, что при настоящей степени абстракций эти два понятия кажутся дополнительными по отношению к свойствам (Υ, Σ) — четырехугольника (3.3). Именно, на это читатель может обратить внимание при исследовании нижеприведенных определений по отношению к определениям § 5 или [5, I].

---

*) Замечание добавленное автором 16 марта 1960 г.

„Modular geordnete Mengen“, введенные и изучаемые *Вальтером Фельшером* в работе [60], являются конфигурациями, хаусдорфовская геометрическая структура которых *K* — модулярна. Они представляют обобщение моего понятия модулярной мультирешетки (см. [61]). Это обобщение состоит в том, что их хаусдорфовская геометрическая структура не необходимо уплотненная (4.1). Modular geordnete Mengen, как *В. Фельшер* там же показал, играют важную роль в общей теории цепей (условие *Жордана-Дедекинда,* теоремы *Жордана-Гельдера*) и в других вопросах. См. также [61], § 4, A.

Впрочем, только при допольнительных предположениях, например некоторых элементарных свойств инцидентности § 4, мне удалось найти классическую импликацию „дистрибутивность влечет за собой модулярность“ (см. немного дальше предложения B, B''), но приведенные здесь предположения не всегда необходимы. Может быть какой-нибудь пример разрешит этот вопрос. (См. § 11, *проблема* 12).

6.1. Определение. Я буду называть всякую геометрическую (Υ, Σ) — структуру *равномерно дистрибутивной снизу* или U' — *дистрибутивной*, если следующая аксиома имеет место: $U'D$. *Для любых элементов* $a, b, d, m \in P$ *таких, что* $d\Upsilon\{a, b\}$ *и* $m\Sigma\{a, b\}$ *отношения*[7]) $a' \in a/m$, $b' \in b/m$, $x \in d/m$, $a'\Sigma\{a, x\}$ *и* $b'\Sigma\{b, x\}$ *влекут за собой отношение* $x\Upsilon\{a', b'\}$. Имеется также двойственное понятие U_1 — дистрибутивности.

6.1.1. Дискретная геометрическая структура конфигурации P всегда равномерно дистрибутивна снизу (и сверху!). *То же самое с дедекиндовской геометрической структурой частично упорядоченных групп* (как конфигураций!), но доказательство этого утверждения более сложно*) чем у теоремы 5 из [17], гл. XIV, § 4, которой, впрочем, является обобщением. См. тоже 6.3.2.

6.1.2. Определение 6.1 близко хорошо известному следующему свойству: *Решетка* S *дистрибутивна тогда и только тогда, когда для любой пары элементов* $a, b \in S$ *и любого* $x \in S$ *такого, что* $a \vee b \geqq x \geqq a \wedge b$, *имеем* $x = (a \wedge x) \vee (b \wedge x)$ (где знаками $\vee$, $\wedge$ обозначаю соответственно объединение и пересечение в смысле обычной теории решеток ([17], гл. II); отношение $\geqq$ обозначает частичное упорядочение в S).

С другой стороны определение 6.1 близко к аксиоме $(\mathfrak{D}\mathfrak{M})$ моей работы [8], теорема 3.7; я показал именно, что эта аксиома $(\mathfrak{D}\mathfrak{M})$ равносильна понятию дистрибутивности мультирешеток в том смысле, как я его раньше определил в моей работе [3], § 6.

6.2. Определение. Я буду называть всякую геометрическую (Υ, Σ) — структуру конфигурации P *дистрибутивной снизу* или A' — *дистрибутивной*, если она удовлетворяет следующей аксиоме: $A'D$. *Для любых элементов* $a, b, d, m, x \in P$ *таких, что* $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$ *и* $x \in d/m$, *существуют элементы* $a', b' \in P$ *такие, что* $m \leqq a'\Sigma\{a, x\}$, $m \leqq b'\Sigma\{b, x\}$ *и такие что* $x\Upsilon\{a', b'\}$.

6.2.1. Очевидно геометрическая A' — дистрибутивная структура является аналитической снизу ([4], 2.5, аксиома $SD2'$!). С другой стороны *всякая геометрическая* U' — *дистрибутивная структура* (6.1) *и аналитическая снизу*

---

*) Благодарю *Я. Якубика* за „алгебраическое“ доказательство этого утверждения, принципиально отличное от моего „геометрического“ доказательства и, впрочем, гораздо более краткое.

является A' — дистрибутивной структурой. Я еще замечу, что *дискретная геометрическая структура любой конфигурации P всегда A' — дистрибутивна*[8]) (она, впрочем, также *A_1 — дистрибутивна,* т. е. *дистрибутивна сверху:* это понятие двойственно[6]) понятию определенному в 6.2!).

6.3. Определение. Я называю *дистрибутивной в смысле Г. Бергмана* [16] или *G — дистрибутивной* всякую геометрическую (Υ, Σ) — структуру конфигурации P удовлетворяющую следующей аксиоме:

G. Для любых элементов a, b, b', d, $m \in P$ таких, что $d\Upsilon\{a, b\}$ $m\Sigma\{a, b\}$, $d\Upsilon\{a, b'\}$ и $m\Sigma\{a, b'\}$, получаем $b = b'$. См. тоже *Оре* [43], [3], § 6 и [8], § 3.

6.3.1. Определение. Я называю *G' — дистрибутивной* всякую геометрическую (Υ, Σ) — структуру такую, что *отношения* a, b, b', d, d', m, $m' \in P$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $d'\Upsilon\{a, b'\}$, $m'\Sigma\{a, b'\}$, $d \geqq d'$ *и* $m \geqq m'$ *влекут за собой* $b \geqq b'$.

6.3.2. Очевидно, что *дискретная геометрическая структура* конфигурации P *не является ни G — дистрибутивной, ни G' — дистрибутивной.* С другой стороны *дедекиндовская геометрическая структура частично упорядоченной группы является всегда G — дистрибутивной;* впрочем это свойство, *которое точно доказывается, как теорема* 5 *книги* [17], гл. XIV, § 4, не следует смешивать с соответствующим свойством вышеупомянутого пункта 6.1.1.

6.4. Вот теперь важнейшие взаимные отношения между понятиями, которые я только что определил и отношения между этими понятиями и понятиями модулярности параграфа 5:

А. *Всякая G' — дистрибутивная геометрическая* (Υ, Σ) — *структура является также G — дистрибутивной, и наоборот, всякая G — дистрибутивная геометрическая* (Υ, Σ) — *структура является тоже G' — дистрибутивной, лишь бы она была аналитической* ([4], 2.5) *и замкнутой (снизу и сверху)* (4.2).

Это последнее утверждение содержит, как частичный случай, хорошо известное следующее свойство дистрибутивных мультирешеток (те же самые обозначения как в 6.1.2): *Решетка S дистрибутивна тогда и только тогда, если отношения a, b, $b' \in S$, $a \vee b \geqq a \vee b'$ и $a \wedge b \geqq a \wedge b'$ влекут за собой $b \geqq b'$.* Аналогичное свойство имеют и мультирешетки.

В. *Всякая U' — дистрибутивная геометрическая* (Υ, Σ) — *структура K —*

---

[8]) Очень хорошо известно, что *Пирс* думал, что всякая решетка дистрибутивна; см., например, [17], гл. IX. Видно, что в рамках теории геометрических структур абстрактной конфигурации можно это ошибочное мнение *Пирса* сделать правдивым, но мы должны принять во внимание не дедекиндовскую геометрическую структуру решетки (как конфигурации), *а ее дискретную геометрическую структуру!*

модулярна (5.3), *лишь бы она была натуральной снизу и слабо насыщенной сверху* (5.4).

B′. *Всякая U' — дистрибутивная геометрическая* (Υ, Σ) *— структура является тоже G — дистрибутивной, лишь бы она была аналитической* ([4], 2.5), *натуральной сверху* (4.1.1, свойство A) *и слабо насыщенной сверху* (5.4).

B″. *Всякая геометрическая* (Υ, Σ) *— структура, которая A' — дистрибутивная, замкнутая* (снизу и сверху, 4.2), *с картезианской интерполяцией, слабо насыщена сберху и уплотненная снизу, является C_1 — модулярной.* (Свойство C_1 — модулярности двойственно к свойству C' — модулярности, см. 5.2).

C. *Всякая U' — дистрибутивная геометрическая* (Υ, Σ) *— структура β — модулярна* [5, I], *лишь бы она была натуральной снизу.*

D. *Всякая G — дистрибутивная геометрическая* (Υ, Σ) *— структура является структурой с картезианской интерполяцией* (4.4), *лишь бы она была замкнутой* (снизу и сверху) *и аналитической.* (Ср. мою работу [8], теорему 3.3).

E. *Всякая геометрическая* (Υ, Σ) *— структура, которая G — дистрибутивна, аналитическая* ([4], 2.5, аксиомы $SD2'$, $SD2_1$), *замкнутая* (снизу и сверху), *натуральная и с средней связностью* (4,8), *является U' — дистрибутивной* (*и даже A' — дистрибутивной.* Это условие является при подходящих предположениях, как именно аналитичности, более сильным условием).

Доказательство этого важного утверждения очень тесно связанно с развитиями § 3 моей работы [8] (именно абзацы 3.6 и 3.7).

F. При предположениях теоремы E геометрическая (Υ, Σ) — структура конфигурации P является насыщенной (4.3).

§ 7. Геометрические структуры с оценкой

Я ограничусь здесь некоторыми указаниями относительно оценок *третьего типа* (ср. мою работу [3], § 5), которые я здесь буду кратко называть оценками (совсем коротко) и „угловыми“ оценками.

7.1. Определение. Я буду говорить, что геометрическая[6]) (Υ, Σ) — структура конфигурации P является геометрической *структурой с оценкой* каждый раз, если *вещественная* функция $v[x]$ с аргументами из P *(„оценка“)* обладает следующим свойством:

V. Для любого (Υ, Σ) *— четырехугольника из P* (3.3!) (d, m, a, b) *выполняется* $v[a] + v[b] = v[d] + v[m]$.

7.1.1. Легко усмотреть из этого определения, что *отношения* $a, b, d, d', m, m' \in P$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $d'\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$ *и* $m'\Sigma\{a, b\}$ *влекут всегда* за собой $v[d] = v[d']$ *и* $v[m] = v[m']$. См. тоже [3], 5.3.1.

7.2. Определение. Я говорю, что *геометрическая* (Υ, Σ) *— структура* конфигурации P *является геометрической структурой с угловой оценкой* каждый раз, когда *вещественная* функция $v[x]$ с аргументами из P („угловая оценка") имеет следующие свойства:

$VA1$. *Для любых элементов* $a, b, d, m \in P$ *таких, что* $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, *можно найти элемент* $d_0 \in P$ *такой, что* $d_0\Upsilon\{a, b\}$ *и такой, что* $v[d_0] \leqq v[d']$ *для каждого* $d' \in P$, *удовлетворяющего отношению* $d'\Upsilon\{a, b\}$.

$VA2$. *Для любых элементов* $a, b, d, m \in P$ *таких, что* $d\Upsilon\{a, b\}$ *и* $m\Sigma\{a, b\}$, *можно найти элемент* $d_0 \in P$, *удовлетворяющий аксиоме* $VA1$ *и такой, что* $v[a] + v[b] = v[d_0] + v[m]$ *(*d_0 *в общем случае зависит от* m*)*[9]). Ср. мою заметку [11, I], § 3, где понятие угловой оценки определено с помощью выражений хаусдорфовской геометрической структуры.

7.3. Определение. Оценку (7.1, 7.2) буду называть *изотонной*, если отношение $x \geqq y$ в P влечет $v[x] \geqq v[y]$ в множестве действительных чисел; *положительной*, если отношение $x > y$ в P влечет $v[x] > v[y]$ в множестве действительных чисел. Ср. [17], гл. V, § 6.

7.4. Свойства. A. *Всякая геометрическая* (Υ, Σ) *— структура с положительной оценкой насыщенна* (снизу и сверху) (4.3).

B. *Всякая геометрическая* (Υ, Σ) *— структура с положительной оценкой модулярна в смысле Куроша.*

C. *(Теорема Гливенко.) Пусть* P *фильтрующаяся конфигурация (т. е. для любой пары элементов* $a, b \in P$ *существуют элементы* $u, v \in P$ *такие, что* $u \geqq a \geqq v$ *и* $u \geqq b \geqq v$*), наделенная уплотненной и с положительной оценкой* (Υ, Σ) *— геометрической структурой. Тогда* P *метрическое пространство.* Что касается доказательства, см. мою работу [3], теорему 5.4!

D. (*Теорема Гливенко*, иное изложение.) *Пусть* P *фильтрующаяся конфигурация, наделенная уплотненной и с положительной угловой оценкой геометрической* (Υ, Σ) *— структурой. Тогда* P *— метрическое пространство.* Что касается доказательства см. мою заметку [11, I], теорема 3.1.*)

E. *При предположениях и обозначениях предыдущего предложения* C *рассматриваемая геометрическая структура* G *— дистрибутивна, лишь бы метрическое пространство* P *было транзитивным* ([3], 6.1.2).

---

[9]) Так как, согласно $VA1$, $v[d_0]$ установленное действительное число, т. е. независимое от выбора элемента d_0 удовлетворяющего аксиоме $VA1$, видно, что в аксиоме $VA2$ элемент d_0 *не зависит* от элемента m!

*) Из результатов Б. Риечана и З. Риечановой (цитированное письмо М. Колибиара) следует здесь отметить следующее обобщение только что приводимых теорем C, D: Пусть P — конфигурация наделенна универсальной геометрической (Υ, Σ) — структурой с положнтельной оценкой (7.1), такой, что из отношений $a, b, d, m, x, y \in P$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $x \geqq a \geqq y$ и $x \geqq b \geqq y$ следуют $v[x] \geqq v[d]$ и $v[y] \leqq v[m]$. Тогда P метрическое пространство.

§ 8. Геометрические структуры с дополнениями

Понятия дополнения и относительного дополнения элемента конфигурации P совсем аналогичны соответствующим понятиям теории решеток (мульти-решеток). Я здесь буду ограничиваться следующими указаниями:

8.1.а. Определение. Пусть конфигурация P наделенна какой-нибудь[6]) геометрической (Υ, Σ) – структурой. Пусть элементы a, u, $v \in P$ такие, что $u \geqq a \geqq v$. Я называю (Υ, Σ) – *дополнением* элемента *a относительно частного*[7]) u/v всякий элемент $b \in P$ такой, что $u\Upsilon\{a, b\}$, $v\Sigma\{a, b\}$.

8.1.б. Определение. Пусть конфигурация P имеет кроме того первый элемент 0 ($0 \leqq x$ для всех $x \in P$) и последний элемент 1 ($1 \geqq x$, $x \in P$). Я буду называть (Υ, Σ) – *дополнением* элемента $a \in P$ всякий элемент $a^* \in P$, такой, что $1\Upsilon\{a, a^*\}$ и $0\Sigma\{a, a^*\}$.

8.1.в. Определение. Я буду говорить, что геометрическая (Υ, Σ) – структура конфигурации P является *структурой с относительными дополнениями* или соответственно *структурой с дополнениями* смотря по тому, существуют ли всегда относительные дополнения (8.1.а.) или дополнения (8.1.б.) элементов конфигурации P.

8.2. Нужно заметить, что *дискретная геометрическая структура любой конфигурации является всегда структурой с относительными дополнениями.* Она тем более является структурой с дополнениями, лишь бы конфигурация имела первый и последний элемент. Нужно еще заметить, что геометрическая структура с относительными дополнениями натуральна (снизу и сверху), лишь бы она была замкнутой (снизу и сверху, 4.2)*).

8.2.1. Нужно также заметить, что G – дистрибутивными геометрическими (Υ, Σ) – структурами являются точно те, в которых относительные (Υ, Σ) – дополнения эдементов конфигурации единственны, лишь бы они существовали.

8.2.2. Я наконец замечу, что для геометрических структур с относительными дополнениями всякий геометрический гомоморфизм (изоморфизм) является гомоморфизмом (изоморфизмом) в смысле частичного упорядочения.

8.3. Между геометрическими структурами с дополнениями имеются структуры, которые по несколько причинам составляют замечательный подкласс: дистрибутивные геометрические структуры (не важно какие $U'-$, $A'-$, $G-$) с (относительными) дополнениями.

8.3.1. По этому поводу я замечу, что *дискретная геометрическая структура*

---

*) Толчком к этому результату была заметка *М. Колибиара*, что относительная дополнительность влечет за собой натуральность (это утверждение в общем случае не верно).

любой конфигурации всегда дистрибутивна (снизу и сверху) (6.2) *и является структурой с относительными дополнениями* (8.2), но она не G — дистрибутивна (6.3.2)!

С другой стороны, в моей работе [8], § 3, я показал, что если хаусдорфовская геометрическая структура конфигурации уплотнена и G — дистрибутивна, то она также дистрибутивна (снизу и сверху, 6.2). Обратно, если она уплотнена и дистрибутивна (например, снизу), потом она тоже G — дистрибутивна; в том случае, если P содержит первый и последний элементы, *дело идет о булевой алгебре.*

Отныне я приниму следующие определения:

8.4. Определение. Под геометрической (Υ, Σ) — структурой *Пирса* я понимаю геометрическую структуру A' — *дистрибутивную,* A_1 — дистрибутивную (6.2) и с дополнениями (8.1.в).

8.5. Определение. Под геометрической (Υ, Σ) — структурой Буля или *булевой* геометрической структурой я понимаю геометрическую структуру *с дополнениями* и G — *дистрибутивную* (6.3).

Как видно, эти два класса геометрических структур представляют две, так сказать дополнительные, точки зрения по отношению к булевым алгебрам, *относящится к своим дедекиндовским геометрическим структурам* (3.2, пример 1). Предложения B', E из 6.4 представляют, впрочем, некоторые указания на взаимные отношения этих классов геометрических структур. С другой стороны пример из 8.3.1 показывает, что существуют геометрические структуры Пирса, которые не булевые, но я не знаю ни одного примера булевой геометрической структуры, которая бы не была структурой *Пирса,* хотя, иначе существование*) такого примера кажется возможным. Как бы то ни было, из предшествующего ясно, что эти два класса по существу различные.

Впрочем, я думаю, что геометрические структуры *Пирса* сиграют какую то роль в теории меры.

8.6. В моей работе [8], § 3 я показал (3.5 и 3.7.2), что дистрибутивные мультирешетки, точно также, как впрочем дистрибутивные *решетки,* являются картезианскими частично упорядоченными множествами; см. тоже мою заметку [12, II]. Это иной взгляд на дистрибутивность, который позволяет теория геометрических структур конфигураций уточнять и обобщать как видно дальше:

8.6.1. Определение. *Я* буду говорить, что геометрическая (Υ, Σ) — структура конфигурации *P картезианская снизу,* когда для всяких элементов *a, b, d,*

---

*) После окончания этого доклада этот вопрос положительно разрешил *М. Колибиар,* который мне сообщил пример булевой геометрической структуры, которая не является геометрической структурой *Пирса.*

$m \in P$ таких, что $d \Upsilon\{a, b\}$ и $m\Sigma\{a, b\}$, имеется изоморфизм в смысле *частичного упорядочения*

$$d/m \leftrightarrows (a/m) \times (b/m),$$

где $\times$ обозначает, как обыкновенно; кардинальное произведение.

Применением двойственности[6]) мы получим понятие геометрической структуры *картезианской сверху*.

Изучением этих геометрических структур и их отношений с геометрическими структурами *Буля* и *Пирса* (8.4, 8.5) я буду заниматься в других работах. Заметим здесь только то, что *в случае, когда P мероморфная* ([10], 4.3.1), *все ее геометрические структуры картезианские снизу являются насыщенными сверху* (4.3).

§ 9. Топологические и геометрическо-топологические структуры конфигурации

Хорошо известны тесные отношения, которые существуют между абстрактной топологией с одной стороны и теорией решеток (именно дистрибутивных решеток, [17], гл. IX) с другой стороны. Именно исследование этих отношений с точки зрения топологии „без точек" (= punktfreie Topologie) является темой прекрасной книги *Г. Нэбелинга* [41] и недавных рассуждений *К. Мейерхофера* [50]; что касается дополнительной точки зрения, т. е. изучения внутренних топологий решеток или частично упорядоченных множеств, *как* „Punktmengen" (см. например [17], гл. IV, §§ 8, 9), оно не будет рассматриваемо в дальнейшем.

Впрочем, хотя следующие соображения связываются с точкой зрения топологии без точек, дело здесь не идет о проблемах чисто топологических, но исходным пунктом, как это обыкновенно бывает, являются дистрибутивные решетки и относительные топологии *в смысле К. Куратовского* (см., например, мою работу [13], § 3). Но с точки зрения, которой я придерживаюсь в этом докладе, это характерная черта современных исследований относительно этих вопросов, *во-первых*, потому, что это всегда и единственно *дедекиндовская* структура принадлежащей конфигурации, которую мы здесь требуем и *во-вторых* потому, что для дистрибутивных решеток всегда определена *относительная* топология, именно, с помощью „формулы Куратовского" $\bar{y}^x = x \wedge \bar{y}$ $(x, y \in P$ такие, что $x \geqq y)$. Но в дальнейшем это не всегда так.

Это, действительно, проблемы теории *абстрактных* групп (именно проблемы теории регулярных произведений; см., например, мои заметки в Comptes Rendus [14]), которые меня привели к следующему понятию относительного замыкания (ср. [13], 1.5) для решеток не дистрибутивных, ни даже модулярных

([17], гл. V), но которые можно определить для более общих абстрактных конфигураций. Это значит предполагать, как это я сделал в [13], что это понятие относительного замыкания играет здесь такую роль, как относительное замыкание Куратовского в дистрибутивных решетках.

9.1. Определение. Я буду говорить, что конфигурация *P наделена топологической структурой* всякий раз, когда в P определена функция $f(x, y) = \bar{y}^x$ с аргументами $x, y \in P$ такими, что $x \geqq y$ и с значениями в P, удовлетворяющая следующим трем аксиомам:

$FR1$. $\bar{x}^x = x$ *для любого* $x \in P$.

$FR2$. $\bar{\bar{y}}^{x^x} \leqq \bar{y}^x$ *для любых элементов* $x, y \in P$ *таких, что* $x \geqq y$.

$FR3$. $\bar{y}^x \geqq \bar{z}^x \geqq \bar{z}^y$ *для любых элементов* $x, y, z \in P$ *таких, что* $x \geqq y \geqq z$.

Функцию $\bar{y}^x$, где $x, y \in P$, $x \geqq y$, я называю в [13] *оператором относительного замыкания*.

9.2. Как я показал в [15], § 2, задать *оператор* относительного замыкания, это значит задать отношение *примарной нормальности*, т. е. *бинарное* отношение $\mathbf{N}$, определенное между какими-нибудь элементами $x, y \in P$ таким образом, что $x, y \in P$ и $x\,\mathbf{N}\,y$ влекут $x \geqq y$ и удовлетворяющее следующим трем аксиомам:

$N1$. $x\mathbf{N}x$ *для каждого* $x \in P$.

$N2$. *Отношения* $x, y \in P$ *и* $x \geqq y$ *влекут за собой существование элемента* $x_0 \in P$ *такого, что* $x\mathbf{N}x_0 \geqq y$ *и такого, что для каждого* $x' \in P$, *удовлетворяющего отношению* $x\mathbf{N}x' \geqq y$, *имеем* $x' \geqq x_0$.

$N3$. *Отношения* $x, x', y, z \in P$, $x \geqq y \geqq z$ *и* $x\mathbf{N}x' \geqq z$ *влекут за собой существование элемента* $y' \in P$ *такого, что* $y\mathbf{N}y' \geqq z$ *и такого, что* $x' \geqq y'$.

9.3. Среди топологических структур, которыми можно наделять абстрактную конфигурацию P, самые важные, без сомнения, те, которые являются так сказать „совместимыми“ с какой-нибудь геометрической структурой конфигурации P в следующем смысле:

Определение. Я буду говорить, что топологическая структура конфигурации P *унитарна по отношению к геометрической* (Υ, Σ) — *структуре* конфигурации P, *когда в силе следующая аксиома:*

$FR4$. *Для всех элементов* $a, d, e, x, y, \in P$ *таких, что* $d\Upsilon\{a, x\}$, $e\Upsilon\{a, y\}$, $d \geqq e$ *и* $x \geqq y$ *имеем* $\bar{e}^d\Upsilon\{\bar{a}^d, \bar{y}^x\}$.

Я показал в моей работе [13] (§ 2), что унитарные топологические структуры по отношению к *дедекиндовской* геометрической структуре конфигурации P тесно связаны с *унитарными нормальностями*, введенными *Д. Барбилияном* [1, 2] и *В. Коржинеком* [35] и роль которых в теории регулярных произведений значительна (см. по этому поводу мои уже цитированные заметки [14] и [13], 3.2, 3.3).

9.4. Предположим, что отношение Υ из 9.3 будет *натуральным* (сверху), т. е., согласно с 4.1.1, свойство A, что $a\Upsilon\{a, b\}$ *для любой пары элементов* $a, b \in P$

таких, что $a \geqq b$. Тогда условие $FR4$ влечет за собой аксиому, которую я назвал *аксиомой Куратовского:*

FRK. Для любых элементов $a, b, d, u \in P$ *таких, что* $u \geqq d\Upsilon\{a, b\}$, *имеем* $\bar{d}^u\Upsilon\{\bar{a}^u, \bar{b}^u\}$.

Кроме своего значения, хорошо известного в общей топологии (где $\Upsilon = \Delta_E!$), эта аксиома *FRK* играет важную роль между прочим в абстрактной теории кондуктора (см. мою работу [15], § 3, 4).

Понятие топологической структуры конфигурации и сходство с абстрактной топологией внушают следующее определение непрерывности:

9.5. Определение. Пусть P, P' две конфигурации, наделенные (каждая) какой-нибудь топологической структурой и пусть ϕ гомоморфизм (в смысле частичного упорядочения) конфигурации P в (на) конфигурацию P'. Я буду говорить, что ϕ *непрерывно,* когда для любой пары $x, y \in P$ таких, что $x \geqq y$, имеем $\bar{y}^x\phi \geqq \overline{y\phi}^{x\phi}$.

В *теории групп* гомоморфизмы (в обыкновенном смысле) всегда, как известно, являются непрерывными функциями в смысле 9.5, предполагая что мы их понимаем, как гомоморфизмы конфигурации подгрупп, наделенной „нормальной“ топологической структурой, определенной оператором относительного замыкания $\bar{Y}^X$ = *нормальный делитель порожденный подгруппой* Y *в подгруппе* X.

Итак, *именно, условие* $FR4$ *из* 9.3 *обеспечивает, по существу, непрерывность в смысле* 9.5 важного класса эндоморфизмов (в смысле частичного упорядочения) конфигурации P, именно регулярных эндоморфизмов, определение которых следует:

9.6. Определение. Пусть P конфигурация наделена геометрической (Υ, Σ) – структурой и топологической структурой. Я буду говорить, что эндоморфизм α конфигурации P регулярен *по отношению к данным структурам,* когда для любых элементов $a, n, x, x', u, v \in P$ таких, что $u\Upsilon\{a, n\}$, $v\Sigma\{a, n\}$, $\bar{n}^u = n$, $x \in u/v$ *и* $u \geqq x'\Upsilon\{x, n\}$, имеем $v \leqq x\alpha\Sigma\{a, x'\}$.

В теории групп идемпотентные эндоморфизмы ($\alpha^2 = \alpha!$) всегда регулярны по отношению к дедекиндовским геометрическим структурам конфигурации подгрупп и по отношению к нормальной топологической структуре (9.5) этой конфигурации.

Доказательство непрерывности регулярных эндоморфизмов требует помимо аксиомы $FR4$ следующее условие:

FR5. Для любых элементов $x, y \in P$ *таких, что* $x \geqq y$, *элемент* $\bar{y}^x$ *полунормален в* x *по отношению к данной геометрической* (Υ, Σ) – *структуре.*

Вот то, что я хочу этим сказать: Пусть P конфигурация наделена геометрической (Υ, Σ) – структурой; я буду говорить, что элемент $a \in P$ *полунормален* в $u \in P(a \leqq u)$ *по отношению к данной геометрической структуре,* когда для всех элементов $x \in P$ таких, что $x \leqq u$ и любых элементов $d, m \in P$ таких, что

$u \geqq d\Upsilon\{a, x\}, m\Sigma\{a, x\}$ (если они существуют!) отношения[7]) $p \in d/a, p' \in x/m$ влекут за собой логическую эквивалентность отношений $p\Upsilon\{a, p'\}$, $p'\Sigma\{x, p\}$. Ср. тоже [15], 1.10–1.10.2.

В случае, когда P решетка, *относящаяся к своей дедекиндовской геометрической структуре,* понятие полунормальности, которое я только что определил, совпадает с понятием полунормальности, которое принадлежит *Оре* [42].

9.7. Я еще отмечу факт, что всегда условие $FR4$ обеспечивает то, что топологическая структура конфигурации P является *структурой Куратовского,* по отношению к геометрической структуре конфигурации в смысле следующей аксиомы[10]).

$FR6$. *Для любых элементов $x, y, z \in P$ таких, что $x \geqq y \geqq z$, имеем* $\bar{z}^y\Sigma\{y, \bar{z}^x\}$ (ср. тоже мою работу (14), 5.6–5.8.1, что касается аналогичного вопроса относительно *регулярных* топологических структур конфигурации).

§ 10. Алгебраические свойства отношений делимости (кратности)

10.1. Определение. Пусть X какая-нибудь часть конфигурации P. Я обозначу знаком $\bigvee X$ множество всех Υ – делителей X и знаком $\bigwedge X$ множество всех Σ – кратных X.

10.1.1. Мы имеем здесь *операции* не обязательно *универсальные* (это значит, может случиться, что $\bigvee X = \varnothing$ или $\bigwedge X = \varnothing$ для некоторых $X \subseteq P$), не необходимо *однозначные* (это значит, что множество $\bigvee X \neq \varnothing$ или $\bigwedge X \neq \varnothing$ имеет *по меньшей мере* два различных элемента для некоторых $X \subseteq P$) и не *финитарные* (потому что подмножества X конфигурации P могут быть бесконечными), но *всегда коммутативные,* т. е.

I. Для всех элементов $a, b \in P$ имеем $a \vee b = b \vee a$ ($a \wedge b = b \wedge a$), где $a \vee b = \bigvee\{a, b\}$ и $a \wedge b = \bigwedge\{a, b\}$. (10.1)

Когда, например, $\Upsilon = \Delta$ и $\Sigma = M$, получаем операции $\bigvee$, $\bigwedge$ определенные в начале § 3 (ср. тоже мою заметку [4], § 1). Также если $\Upsilon = \Delta_H$ и $\Sigma = M_H$, получаем мультирешеточные операции моей работы [3], 2.1; см. тоже [8], как и работу *Я. Якубика* [31].

10.2. Кроме свойства I из 10.1.1 операции $\vee, \wedge$ имеют еще свойства, которые тесно связаны с свойствами $L1 - L4$ ([17], гл. II, § 3) или с аксиомами $\mathfrak{M}\mathrm{I} - \mathfrak{M}\mathrm{V}$ из [3], § 2 и [3a]; дело идет о свойствах II–VI, которые я привел в моей заметке [4], 1.3 или о иных свойствах более слабых, чем эти последние, которые я здесь не привожу.

---

[10]) Эта аксиома всегда удовлетворяется, если дело идет о *дискретной* геометрической структуре конфигурации P!

Можно *наоборот* посредством некоторых из этих алгебраических свойств операций $\vee$, $\wedge$ определить в P отношение Υ — делимости и отношение Σ — кратности, которые обладают требуемыми соответствующими свойствами.

Я не хочу закончить этот параграф без того что бы привлечь внимание читателя на сродство, которое существует между этими, чисто алгебраическими рассмотрениями и теми, которые были объектом исследования *В. Фельшера* [27], *П. Жордана* [32], *Ф. Клейна* [34], *Ш. Мацушита* [48] и *Ю. Шмидта* [45]. Однако их методы и их результаты довольно различны от моих, хотя бы только потому, что операции, которые они рассматривают, всегда единственны, в то время как я рассматриваю операции многозначные. Впрочем „verbands-ähnlichen Algebren" *Фельшера* (там же) *как* „geregelte Mengen" (*Фельшер*, там же, § 1) не всегда являются частично упорядоченными множествами, тогда как мои алгебраические рассмотрения этого параграфа имеют всегда и единственно в виду частично упорядоченные множества. Может быть новый синтез объединит эти точки зрения посредством явного распространения понятий из 3.1 на случай непустого множества G наделенного каким нибудь *бинарным* отношением ϱ, относящимся к некоторым элементам из G : $a\varrho b$ для какихнибудь элементов $a, b \in G$. (Это то, что *Фельшер* [27] называет „geregelte Menge".)

Что касается Schrägverbände *Жордана* [32], мне кажется, что дело там идет о классе конфигураций наделенных геометрической структурой, имеющей следующее характеристическое свойство, которое некоторым способом противоположно хаусдорфовской геометрической структуре: *Для любых элементов* $a, b, d, m \in P$ *таких, что* $d\Upsilon\{a, b\}$ *и* $m\Sigma\{a, b\}$ *имеем* $d \geqq d'$ *или* $d' \geqq d$ ($m \leqq m'$ *или* $m' \geqq m$) *для всех элементов* $d', m' \in P$ *таких, что* $d'\Upsilon\{a, b\}$, $m'\Sigma\{a, b\}$.

§ 11. Некоторые проблемы и направления будущих исследований

Во всем дальнейшем P обозначает любую конфигурацию.

11.1. Проблема 1. Я называю *парой Галуа* любую пару отношений $\Upsilon \in \mathfrak{D}(P)$, $\Sigma \in \mathfrak{M}(P)$ (3.1.1) такую, что операции $\vee$, $\wedge$, которые отсюда получаются (§ 10), определяют связь Галуа ([17], гл. IV, § 6) в множестве частей конфигурации P, значит *такую пару, что имеем:*

1. *Отношения* $A \subseteq B \subseteq P$ *влекут за собой* $\vee A \supseteq \vee B$ *и* $\wedge A \supseteq \wedge B$

2. *Для каждого* $X \subseteq P$ *имеем* $\wedge(\vee X) \supseteq X$ *и* $\vee(\wedge X) \supseteq X$. Например, пара $\varDelta$, M (3.2, пример 4) является парой Галуа[11]).

[11]) Что касается пары $\varDelta_{\varnothing}$, $M_{\varnothing}$ ([4], 2.3), это всегда пара Галуа, но в смысле двойственном по отношению к тому, которое я только что определил, именно,

Вопрос: Предположим, что Υ, Σ определяют на P геометрическую (Υ, Σ) — структуру (3.4), которую я буду называть отныне *структурой Галуа. Существует ли всегда (т. е. какая бы то ни была конфигурация P) геометрическая структура Галуа менее мелкая* (*в смысле* 3.4.1 (*)!) *чем все остальные геометрические структуры Галуа конфигурации P? Существует ли среди них по крайней мере минимальная* (тоже в смысле 3.4.1 (*))?

Проблема 2. *Конструкция Макнила* ([17], гл. IV, § 7) *остается правдивой с соответствующей модификацией для пары Галуа* Υ, Σ (ввиду того, что эта пара определяет геометрическую структуру на P)?

Проблема 3. (Принцип *выбора делимости.*) Пусть для $X \subseteq P$ множество $\vee X$ (§ 10) является множеством всех Υ — делителей X (для какого-нибудь $\Upsilon \in \mathfrak{D}(P)$, не однозначного, т. е. такого, что множество $\vee X$ имеет по крайней мере два различных элемента!). Пусть A_i, $i \in I$ система подмножеств множества P такая, что $\vee A_i \neq \phi$ *для каждого* $i \in I$ и такая, что $(\vee A_{i'}) \cap (\vee A_{i''}) = \varnothing$ *для любых* $i', i'' \in I$, $i' \neq i''$.

Пусть с другой стороны $A_i \to d_i$, $i \in I$, *функция выбора* ставящая в соответствие *всякому множеству A_i некоторый Υ — делитель d_i множества $A_i : d_i \Upsilon A_i$, $i \in I$. Имеется ли всегда часть A конфигурации P такая, что $d_i \Upsilon A$ для всех $i \in I$?* Тоже самое для отношений Σ не однозначных.

Проблема 4*). *Покажите пример геометрического изоморфизма* (3.5.2), *который не будет изоморфизмом в смысле частичного упорядочения, и наоборот.* Отношение к [36]?

Проблема 5. *Существует ли структура Пирса менее мелкая* (3.4.1), *чем все остальные структуры Пирса конфигурации P? Существует ли по крайней мере минимальная?*

Проблема 6. Я называю *равномерной* всякую геометрическую структуру Пирса (8.4) аналитическую (снизу и сверху, [4], 2.5, аксиомы $SD2'$, $SD2_1$) и равномерно дистрибутивную (снизу и сверху, 6.1). *Существует ли равномерная структура Пирса менее мелкая* (3.4.1) *чем все остальные равномерные структуры Пирса конфигурации P? Существует ли по крайней мере минимальная* (3.4.1)?

Проблема 7. *Тот же вопрос как прежде* (проблема 6) *с прибавлением предположения уплотненности* (4.1) *и замыкания* (снизу и сверху, 4.2).

заменяя условие 2 на условие 2′. Для каждого $X \subseteq P$ имеем $\wedge(\vee X) \subseteq X$ и $\vee(\wedge X) \subseteq X$.

*) Эта проблема была разрешена *М. Колибиаром,* который показал на двух примерах, что существуют геометрические изоморфизмы, которые не являются изоморфизмами в смысле частичного упорядочения, и наоборот.

Проблема 8.*) *Показать пример геометрической G — дистрибутивной структуры* (6.3), *но не насыщенной* (4.3).

Проблема 9. Применить теорему Жордана относительно разложения функций с ограниченной вариацией ([17], гл. V, § 10) к геометрическим структурам с оценкой (§ 7).

Проблема 10. *Изучение геометрических полумодулярных структур* (под етим понимаю — принимая во внимание только один взгляд — геометрическую (Υ, Σ) — структуру конфигурации P такую, что для любых элементов $a, b, d, m \in P$, удовлетворяющих отношениям $d\Upsilon\{a, b\}$ *и* $m\Sigma\{a, b\}$ и для *каждого* $a' \in a/m$ имеем *один* елемент[7]) $b' \in b/m$ и *один* елемент $x \in d/m$ такие, что $x\Upsilon\{a', b'\}$, $a'\Sigma\{a, x\}$, $b'\Sigma\{b, x\}$. (Это определение полумодулярности относится к мыслям *С. Маклейна* [39], *где P решетка относящаяся к своей дедекиндовской геометрической структуре* [3.2, пример 1]; она была также рассматривана *всегда как таковая Л. Лесиэ* [38] и *Р. Круазо* [22]; последний показал на ее значение для решеток без условия цепей.)

Проблема 11. *Исследование геометрических структур конфигураций в сопоставлении с канторовскими операциями и их обобщениями* [19, 23, 33]. *Останусь-ли элементарные свойства инцидентности инвариантными по отношению к етим операциям?*

Проблема 12. *Показать пример дистрибутивной геометрической структуры, которая не будет модулярной.*

11.2. Направления исследования. Следующие пункты, по моему, достойны особого внимания:

I. *Изучение множеств* $\mathfrak{D}(P)$, $\mathfrak{M}(P)$ (3.1.1) *в случае, где P цепь или дерево* (= конфигурация *Суслина* [17], ст. 47). Связь с проблемой Суслина.

II. Углубить исследования геометрическо-топологических структур (§ 9) абстрактных конфигураций в смысле теории изложенной в книге *Нэбелинга* [41]. Роль геометрических структур *Пирса* и *Буля?* Роль дедекиндовских геометрических *не дистрибутивных* структур?

III. *Развивать теорию меры и интегрируемости для геометрических структур Пирса* (8.4). Ср. [17], гл. XI, § 8.

IV. *Углубить исследования отношений между теорией дифференциальных уравнений в частных производных и теорией геометрических структур конфигурации* (проблема *Биркгофа;* ср. [17], ст. 150—151. Ср. тоже мою работу [6]).

---

*) И на этот важный вопрос положительно ответил *М. Колибиар*. Даже можно найти булевую геометрическую структуру, которая не насыщена.

V. *Изучение пространств Римана как конфигураций по отношению к частичному упорядочению, индуцированному метрикой. Это направление исследований видимо близко к предшествующему.*

Литература

[1] Barbilian D., Metrisch-konkave Verbände, Disquis. Math. et Phys. V, 1–2 (1946), 3–63.

[2] Barbilian D., Normalités localement ou intégralement involutives, Études et recherches math. IV, 1–2 (1953), 29–67.

[3] Benado M., Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier II, (Théorie des multistructures), Czechosl. Math. Journal 5 (80), 3 (1955), 308–344.

[3a] Benado M., Rectification à mon travail „Les ensembles partiellement ordonnés etc. ...", там же 6 (81) (1956), 287.

[4] Benado M., Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés, C. R. Acad. Sci. Paris 247 (1958), 2265–2268.

[5] Benado M., Sur une caractérisation abstraite des algèbres de Boole I, II, C. R. Acad. Sci. Paris, 251 (1960), 622—623, 835—836.

[6] Benado M., Sur un problème de M. Garrett Birkhoff, Bull. Sci. Acad. R. P. R., VI, 4 (1954), 703–739.

[7] Benado M., Sur la théorie de la divisibilité, Bull. Sci. Acad. R. P. R., VI, 2 (1954), 264–270.

[8] Benado M., Bemerkungen zur Theorie der Vielverbände IV, (Über die Möbius'sche Funktion), Proc. Cambridge Philos. Soc. 56 (1960), 291–317.

[9] Benado M., La notion de normalité et les théorèmes de décomposition de l'Algèbre, Études et recherches math., I, 2 (1950), 282–317.

[10] Benado M., Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier I, Czechosl. Math. Journal 4 (79), 2 (1954), 105–127.

[11] Benado M., Bemerkungen zur Theorie der Vielverbände I–III, Mathematische Nachrichten, Bd. 20, 1/2 (1959), 1–16.

[12] Benado M., Sur la fonction de Möbius I, II, C. R. Acad. Sci. Paris 246 (1958), 2553–2558, 863–866.

[13] Benado M., Sur une interpretation topologique de la notion de normalité unitaire, Bull. Sci. Math. 81, 2 (1957), 87–112.

[14] Benado M., Sur la théorie générale des produits réguliers, I–IV, C. R. Acad. Sci. Paris 243 (1956), 1092—1093; 244 (1957), 1595—1597; 244 (1957), 1702—1704.

[15] Benado M., Zur abstrakten Begründung der Führertheorie, будет опубликовано в Mathematica Japonicae.

[16] Bergmann G., Zur Axiomatik der Elementargeometrie, Monatsh. Math. u. Phys. 36 (1929), 269–284.
[17] Birkhoff G., Lattice Theory, revised edition, New York 1948. – Перевод на русский язык: Теория структур, Москва 1952.
[18] Birkhoff G., An extended Arithmetic, Duke Journal 3 (1937), 311–316.
[19] Birkhoff G., Generalized Arithmetic, Duke Journal 9 (1942), 282–302.
[20] Bourbaki N., Théorie des ensembles (Fasc. de résultats), Paris, Hermann 1939. – Перевод на русский язык см. в книге *Бурбаки Н.*, Общая топология, Москва 1958.
[21] Büchi J. R., Die Boole'sche Partialordnung und die Paarung von Gefügen, Portugaliae Math. 7 (1948), 119–180.
[22] Croisot R., Contribution à l'étude de treillis semimodulaires de longueur infinie. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 3-ème série, 68 (1951), 203–265.
[23] Day M. M., Arithmetic of ordered systems, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 1–43.
[24] Dilworth R. P., A decomposition theorem for partially ordered sets. Ann. of Math. (2), 51 (1960), 161–166.
[25] Dushnik B., Upper and lower bounds of order types, Mich. Math. Journal II, 1 (1953), 27–31.
[26] Dushnik B. et Miller E. W. Partially ordered sets, Amer. Journ. of Math. 63 (1941), 600–610.
[27] Felscher W., Beziehungen zwischen verbands-ähnlichen Algebren und geregelten Mengen, Math. Annalen 135 (1958), 369–387.
[28] Foradori E., Zur Grundlegung einer allgemeinen Teiltheorie I, II, III, Monats. Math. u. Phys. 39, 40, 41 (1932, 1933, 1934), 439–454, 161–180, 133–173.
[29] Fraïssé R., Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 3-ème série, 71 (1954), 363–388.
[30] Fraïssé R., Sur quelques classifications des systèmes de relations, Publ. Sci. de l'Univ. d'Alger, A, I, 1 (1954), 35–182.
[31] Jakubík J., Sur les axiomes des multistructures, Czechosl. Math. Journal 6 (81) (1956), 426–430.
[32] Jordan P., Die Theorie der Schrägverbände, Abhandl. Hamburg, 21, 3/4 (1957), 127–138.
[33] Hausdorff F., Grundzüge der Mengenlehre, erste Auflage, Leipzig 1914.
[34] Klein-Barmen F., Ordoid, Halbverband und ordoide Semigruppe, Math. Annalen 135 (1958), 142–159.
[35] Kořínek V., Der Schreier'sche Satz und das Zassenhaus'sche Verfahren in Verbänden, Věstník Král. čes. spol. nauk, tř. mat.-přír., 1941, 1–29.
[36] Krishnan V. S., The theory of homomorphisms and congruence relations for partially ordered sets, Proceed. Indian Acad. Sci. 22 (1945), 1–19.

[37] Kurosch A., Durchschnittsdarstellungen mit irreduziblen Komponenten in Ringen und in den sogenannten Dualgruppen, Mat. sbornik (Recueil Mathématique) 42 (1935), 613–616.

[38] Lesieur L., Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaine, Bull. Soc. Math. Franc. 83, II (1955), 161–193.

[39] Mac Lane S., A lattice formulation for transcendence degrees and p—bases, Duke Journal 4 (1938), 455–468.

[40] Mac Neille H., Partially ordered sets, Trans. Amer. Math. Soc. 42 (1937), 416–460.

[41] Nöbeling G., Grundlagen der analytischen Topologie, Berlin, Springer, 1954.

[42] Ore Ö., On the theorem of Jordan—Hölder, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 266–275.

[43] Ore Ö., On the foundation of abstract algebra I, Annals of Math. 36 (1935), 406–437.

[44] Riesz F., Sur la théorie générale des opérations linéaires, Annals of Math. 41 (1940), 174–206.

[45] Schmidt J., Die transfiniten Operationen der Ordnungstheorie, Math. Annalen 133 (1957), 439–449.

[46] Sierpinski W., Leçons sur les nombres transfinis, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

[47] Ward M., A characterisation of Dedekind structures, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 448–451.

[48] Matsushita Shin-ichi, Zur Theorie der nicht-kommutativen Verbände I, Math. Annalen 137 (1959), 1–8.

[49] Nöbeling G., Limitentheorie in topologischen Vereinen und Verbänden, Journ. für reine u. angew. Math. 191 (1953), 125–134.

[50] Mayrhofer Karl, Begründung einer Topologie in Somenräumen, Monatshefte für Math. 62, 4 (1958), 277–296.

[51] Kurepa G., Problématique des ensembles partiellement ordonnés. (Доклад на втором конгрессе математиков и физиков Югославии, Белград 1949, т. 2 актов конгресса, 7—22).

[52] Fraïssé R., Sur certaines systèmes de relations qui généralisent les systèmes de base finie, C. R. Acad. Sci., Paris 234 (1952), 1116–1119.

[53] Fraïssé R., Sur la comparaison des types de relations, C. R. Acad. Sci., Paris 226 (1948), 987–988.

[54] Fraïssé R., Sur la comparaison des types d'ordres, C. R. Acad. Sci., Paris 226 (1948), 1330–1331.

[55] Fraïssé R., Sur l'extensions aux relations de quelques propriétés connues des ordres, C. R. Acad. Sci., Paris 237 (1953), 508–510.

[56] Fraïssé R., Sur certaines relations qui généralisent l'ordre des nombres rationnels, C. R. Acad. Sci., Paris 237 (1953), 540–542.

[57] Fraïssé R., On certain relations which generalize ordering relations of type eta, Bull. Amer. Math. Soc. 59 (1953), 341.

[58] Fraïssé R., On a decomposition of relations which generalizes the sum of ordering relations, Bull. Amer. Math. Soc. 59 (1953), 389.

[59] Fraïssé R., Some relational systems which generalize simply ordering relations, Bull. Amer. Math. Soc. 60 (1954), 396.

[60] Felscher W., Jordan—Hölder—Sätze und modular geordnete Mengen, Habilitationsschrift, Februar 1960; Math. Zeitschrift, 75 (1961), 83—114.

[61] Бенадо М., Теория мультирешеток и ее значение в алгебре и геометрии (Доклад для Международного коллоквиума по теории упорядоченных множеств в Обервольфахе 26—30 октября 1959 г.) Acta Fac. Rerum Nat. Univ. Comenianae, Mathematica, 5 (1961), 431—448.

[62] Benado M., Sur la théorie générale des ensembles partielement ordonnés, I, II, III. Будет опубликовано в Publications Scientifiques de l'Université d'Alger.

[63] Bosbach B., Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen, Math. Ann. 139 (1960), 184—196.

[64] Bosbach B., Charakterisierungen von Halbguppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen unter Berücksichtigung der Verbände und Ringe, Math. Ann. 141 (1960), 193—209.

[65] Lesieur L. et Croisot R. Théorie noethérienne des anneaux, des demigroupes et des modules dans le cas non commutatif, I, II, III. Colloque d'Algèbre supérieure, Bruxelles, décembre 1956; Math, Ann. 134 (1958), 458—476; Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique, 5e série, XLIV (1958), 75—93.

Adresa autora: Bukurešť, Str. Lt. Col. Papazoglou 10

Došlo dňa 2. 10. 1959

K všeobecnej teórii čiastočne usporiadaných množín

M. Benado, Bukurešť

Zhrnutie

Predložená práca je úvodnou prácou, obsahujúcou všeobecné princípy teórie a základné vlastnosti (bez dôkazov) niektorých tried geometrických štruktúr čiastočne usporiadanej množiny, napríklad geometrických štruktúr modulárnych, distributívnych atď. Porov. aj moje poznámky v Comptes Rendus [4], [5]. Pokiaľ ide o dôkazy, uverejním ich v osobitných prácach.

Sur la théorie générale des ensebles partiellement ordonnés

M. Benado, Bucarest

Résumé

Il s'agit d'un travail préliminaire comprenant les principes généraux de la théorie et les propriétés fondamentales (sans démonstrations) de quelques classes de structures géométriques d'un ensemble partiellement ordonné, telles les structures géométriques modulaires, distributives etc. Cf. aussi mes notes des Comptes Rendus [4], [5]. Quant aux démonstrations, je vais les publier ailleurs.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. V, 8–10 MATEMATICA, 1961]
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. V., FASC. VIII-X. MATHEMATICA 1961

Теория мультирешеток и ее значение в алгебре и геометрии*)

М. Бенадо, Бухарест

§ 1. Введение

В своей работе предполагаю окинуть общим взглядом современное состояние исследования, касающегося теории мультирешеток [2] и ее применения в алгебре и геометрии. Хотя настоящее мое исследование тесно связано с моим докладом [3] — впрочем является его иллюстрацией, познание приведенного моего доклада не является обязательным для понятия настоящего доклада; познание полезно в том случае, если читатель захочет яснее и отчетливее понять следующие рассуждения, сравнивая и согласуя их с соответствующими параграфами упомянутого доклада. Но, в общем и целом я предполагаю познание моей работы [2].

§ 2. Общие данные

2.1. Определение. *Мультирешеткой* (= мультиструктурой в [2]) я называю множество P частично упорядоченное отношением $\leqq$ или $\geqq$, имеющее следующие два свойства (ср. мою работу [2], 1.1):

$\mathfrak{M}1$. *Пусть $a, b \in P$;* если *существует такое $u \in P$, что $u \geqq a$ и $u \geqq b$, тогда существует тоже такое $d \in P$, что $d \leqq u$, $d \geqq a$ и $d \geqq b$ и такое, что условия $d' \in P$, $d' \leqq d$, $d' \geqq a$ и $d' \geqq b$ влекут $d' = d$.*

$\mathfrak{M}2$. *Пусть $a, b \in P$; если существует такое $v \in P$, что $v \leqq a$ и $v \leqq b$, тогда существует тоже такое $m \in P$, что $m \geqq v$, $m \leqq a$ и $m \leqq b$ и такое, что из $m' \in P$, $m' \geqq m$, $m' \leqq a$ и $m' \leqq b$ вытекает $m' = m$.*

Впрочем не надо, чтобы при этом определении P было фильтрующимся множеством (влево или вправо) [12].

С точки зрения представленной мною в докладе [3], это определение обозначает *во-первых,* что P наделено *хаусдорфовской* геометрической структурой ([3], 3.2,

*) Доклад для Международного коллоквиума по теории упорядоченных множеств в Обервольфахе 26—30 октября 1959 г.

пример 2), и *во-вторых*, что предполагается, что эта геометрическая структура является *уплотненной* ([3], 4.1).

2.1.1. Мультирешетки можно также определять чисто алгебраическим способом, т.е. как множества с двумя операциями $\vee$, $\wedge$ (не обязательно *универсальными*, ни обязательно *однозначными*), которые удовлетворят определенным аксиомам, напоминающим аксиомы $L1 - L4$ теории решеток [11], с той разницей, что ассоциативность является только *частичной* (из-за многозначности операций). Что касается значения, которое им надо приписывать, а также и других подробностей, касающихся этой точки зрения в теории мультирешеток, отсылаю читателя к своей работе [2], § 2 и [2а], а также к работе *Яна Якубика* [15]. В этой работе *Якубик*, между прочим, чисто алгебраически дает следующим образом характеристику решеток как мультирешеток: *Чтобы мультирешетка как алгебраическая система* ([2], 2.2, аксиомы $\mathfrak{M}I - \mathfrak{M}VI$) *была решеткой, необходимо и достаточно, чтобы ее операции* $\vee$, $\wedge$ *были универсальны и ассоциативны в смысле следующих отношений* $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ и $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ для всех $a, b, c \in P$. См. дальше, 2.2, пример 1. Добавляю, что приведенный результат Я. Якубика не зависит от поправки, которую я опубликовал в [2а] к моей системе аксиом $\mathfrak{M}I - \mathfrak{M}VI$.

2.1.2. К этой проблематике имеется еще несколько обозначений, которые применю в дальнейшем (ср. тоже мою работу [2], 1.1 и 2.1):

Для каждого $a, b, u \in P$, такого что $u \geqq a$ и $u \geqq b$, обозначаю через $(a \vee b)_u$ множество всех $d \in P$ удовлетворяющих аксиоме $\mathfrak{M}1$ абзаца 2.1; и для всех $a, b, v \in P$, таких что $v \leqq a$ и $v \leqq b$, обозначаю через $(a \wedge b)_v$ множество всех $m \in P$ удовлетворяющих аксиоме $\mathfrak{M}2$ абзаца 2.1. Кроме того я определяю для $a, b \in P$

$$a \vee b = \bigcup_{\substack{u \geqq a \\ u \geqq b}} (a \vee b)_u,$$

$$a \wedge b = \bigcup_{\substack{v \leqq a \\ v \leqq b}} (a \wedge b)_v$$

(это соответственно *мультиобъединение* и *мультипересечение* a и b [2]) и более вообще, для $A_1 \subseteq P$, $A_2 \subseteq P$

$$A_1 \vee A_2 = \bigcup_{\substack{a_1 \in A_1 \\ a_2 \in A_2}} (a_1 \vee a_2),$$

$$A_1 \wedge A_2 = \bigcup_{\substack{a_1 \in A_1 \\ a_2 \in A_2}} (a_1 \wedge a_2),$$

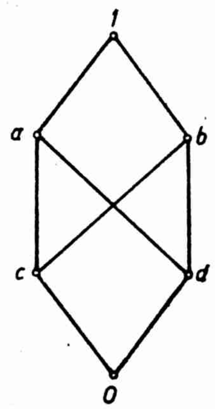
$$A \vee \varnothing = \varnothing = A \wedge \varnothing, \qquad A \subseteq P,$$

где $\varnothing$ — как обыкновенно — обозначает пустое множество.

2.1.3. Важный класс мультирешеток, среди которых есть мультирешетки примера 2. из 2.2, образуют *полные* мультирешетки, с которыми я впервые встретился при исследовании ассоциативности операций $\vee$, $\wedge$ (которая в общем является только частичной, ср. [2], 2.2, аксиома $\mathfrak{M}II$) и которые впрочем оказались очень полезными в абстрактной теории функции *Мёбиуса* [4] и [5].

Понятие полной мультирешетки является особым случаем понятия мультирешетки, именно аксиомы $\mathfrak{M}1$ и $\mathfrak{M}2$ (2.1) выполнены для *всякого* подмножества множества P мажорируемого и минорируемого [12], а не только для подмножеств, образованных *двумя* элементами из P (различными или нет).

2.2. Примеры. Аксиоматическая схема абзаца 2.1 имеет очень много реализаций, как напр.:



фиг. 1

Пример 1. Всякая решетка [11] является мультирешеткой; но обратное утверждение является не правильным как это ясно видно из фиг. 1 (см. также мою работу [2], 3.1.2). С другой стороны я в [2], 1.4 привел простую характеристику решеток как мультирешеток: *решетками являются те мультирешетки, которые являются фильтрующимися множествами* [12] *и которые обладают свойством интерполяции Ф. Риса* ([11], гл. IV, § 3, 2-ое определение).

Пример 2. Всякое частично упорядоченное множество, *конечное* или *архимедовское* (т. е. [1] удовлетворяющее условию обрыва возрастающих и убывающих цепей (ограниченных или неограниченных!), является мультирешеткой. Вообще, всякое частично упорядоченное множество, *индуктивное сверху и снизу* (= индуктивное с двойственностью [2], 1.2, пример 2) является мультирешеткой.

Пример 3. Всякая частично упорядоченная группа ([11], гл. XIV), целые элементы (т. е. $\leqq 1$ = единица группы) которой удовлетворяют условию обрыва возрастающих цепей, является мультирешеткой. Такой является напр. группа всех не нулевых главных идеалов (целых или дробных) поля алгебраических чисел по обычному умножению идеалов. Впрочем, это особые случаи более общего понятия, которое содержит решеточно упорядоченные группы (= „lattice-ordered groups“ *Гаретта Биркгофа* [11], гл. XIV), а именно понятие *мультирешеточно упорядоченной группы* [6], значение которой для теории делимости является таким образом легко понятным. См. также [2], 1.2, пример 3 и дальше, § 4.

Пример 4. Множество (частично упорядоченное по обычному включению множеств пунктов эвклидовой плоскости) всех кругов эвклидовой плоскости, радиусы которых положительны или нуль, является мультирешеткой. Здесь, также как и в [2], 1.2, пример 4, под понятием круга я понимаю внутренность круга, увеличеную его окружностью.

Пример 5. Множество всех квадратов эвклидовой плоскости (квадрат = = внутренность квадрата + его граница!), стороны которых имеют положительную или нулевую длину и параллельны двум постоянным, заранее данным взаимно перпендикулярным направлениям; частичное упорядочение тоже самое, что и в примере 4 (ср. [2], 1.2, пример 5).

Пример 6. Множество (частично упорядоченное по обычному включению) всех подмультигруппоидов мультигруппоида M (= мультипликативная система с умножением вообще многозначным) такого, что для $a, b \in M$ множество ab является *конечным*. Ср. [2], 1.2, пример 6.

Пример 7. Четырехмерное пространство-время специальной теории относительности частично упорядочено обычным образом; ср. [2], 1.2, пример 7 и [7], §§ 1, 2 для подробного изучения и дальше § 6.

Пример 8. Множество (частично упорядоченное по включению подмножеств эвклидовой плоскости) всех углов эвклидовой плоскости, рассматриваемых с точки зрения *величины* и *положения*, меры $\geqq 0$ и $< \pi$. Под понятием угла я здесь понимаю внутренность угла, увеличенную точками его границы, т. е. точками принадлежащими к его двум сторонам (удлиненным до бесконечности), и под углом нулевой величины здесь понимаю множество всех точек полупрямой (включительно с началом!) эвклидовой плоскости. Для более подробного ознакомления ср. заметку [8], I, § 4.

Пример 9. Множество всех элементов *сферической геометрии*, т. е. пустое множество, точки сферы, меридианы и сама сфера, причем частичное упорядочение определено обычным отношением *инцидентности*.

Так напр. если a и b два разных меридиана, множество $a \wedge b$ (2.1.2) имеет два элемента, т. е. точки пересечения меридианов a и b (диаметрально противоположены). Наоборот, если p, p' представляет две точки диаметрально противоположены, множество $p \vee p'$ (2.1.1) образуют все меридианы, переходящие через p и p' (бесконечное множество мощности континуума).

Во всех остальных случаях операции $\vee$ и $\wedge$ однозначно определены.

Пример 10. Всякая абстрактная конфигурация в смысле *Биркгофа* ([11], гл. I, § 10) является мультирешеткой, как это непосредственно вытекает из приведенного выше примера 2. В частности комплексы и симплициальные комплексы являются мультирешетками. Важность мультирешеток в алгебраической топологии состоит в том, что они представляют здесь чисто синтетический метод изучений: таким образом возникает именно геометрия объединения и пересечения в смысле [11], гл. VII и VIII, причем *операции* $\vee$ и $\wedge$, однако, *в общем многозначно определены* (ср. также пример 9, выше), и которая содержит проективную геометрию как особый случай.

Что касается симплициальных комплексов вообще, см. дальше § 5.

Пример 11. Пусть $\mathcal{O}$ любое, не пустое множество порядковых чисел (трансфинитных). Множество $\mathcal{O}$, как известно (ср. напр. [11], гл. III), является совершенно упорядоченным по величине. Но в $\mathcal{O}$ существует также отношение порядка по делимости: это *частичное* упорядочение, определенное делимостью слева ([11], гл. III) порядковых чисел. Именно я скажу, что число $a \in \mathcal{O}$ *делит слева* число $b \in \mathcal{O}$ и пишу $a \geqq b$, если существует порядковое число c *(принадлежащее или не принадлежащее к* $\mathcal{O}$*!)* такое, что $b = c \circ a$, где $\circ$ обозначает ординальное умножение ([11], гл. I, § 8). *Отношение* $\geqq$ *определяемое таким образом, является* — как в том можно легко убедиться — *отношением частичного упорядочения и множество* $\mathcal{O}$*, упорядоченное этим отношением, является мультирешеткой.* Это вытекает по существу из того, что множество всех делителей слева любого порядкового числа является, как известно, всегда конечным. Как таковое, множество $\mathcal{O}$ является, собственно, иерархией[2]) по отношению к делимости слева. Эта мультирешетка $\mathcal{O}$ является в общем действительной, т. е. она не редуцируется на решетку, как это можно показать на тривиальных примерах.

2.2.1. Примеры 2.2 дают нам возможность ясно понять богатство мультирешеток в математике (за исключением примера 1, во всех остальных случаях имеем действительные мультирешетки) и значение, которое они могут иметь в алгебре (примеры 2, 3, 6), в теории делимости (примеры 3, 11), геометрии (примеры 4, 5, 8, 9, 10), в алгебраической топологии (пример 10), в функциональном анализе (пример 3) и т. д. См. дальше, особенно §§ 4—7.

Однако, все частично упорядоченные множества не являются мультирешетками, о чем свидетельствует следующий пример, взятый мною из письма *Я. Якубика:* Множество P состоит из элементов a, b, c_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ таких, что $a \not\leqq b \not\leqq a$, $c_i > c_{i+1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ и таких, что $c_i > a$ и $c_i > b$ для каждого $i = 1, 2, 3, \ldots$

§ 3. Классификация мультирешеток

Основной мыслью моей работы [2] является то, что классификация и изучение общих свойств мультирешеток должны осуществляться алгебраическими методами теории решеток. Именно так я ввел и изучал до некоторых подробностей мультирешетки модулярные и полумодулярные ([2], § 4), дистрибутивные ([2], § 6) и т. д. Но есть случаи, когда классификация мультирешеток, предложенная мною в моей работе [2], не является достаточной; в качестве примера можно привести случай мультирешеточно упорядоченных групп, где выполнено определенное свойство картезианской модулярности (см. мой доклад [3], § 5), которое наверно слабее обыкновенной модулярности ([2], § 4), но не менее значительно чем первая. Впрочем началом моей общей теории частично упорядоченных множеств (см. мой доклад [3], § 1) является отчасти как раз стремление преодолеть эти затруднения в классификации мультирешеток. Что касается применений, которые я имею здесь в виду, достаточно впрочем придерживаться классификации, которую я предложил в [2].

Для удобства читателя хочу напомнить здесь несколько определений, которые применю в дальнейшем. Обозначения те же самые, что и в 2.1.1; кроме того для всех $u, v \in P$ таких, что $u \geqq v$, обозначаю через u/v (*частное* элементов u, v) множество всех $x \in P$ таких, что $u \geqq x \geqq v$.

3.1. *Модулярной* (в смысле *Александра Куроша*, см. мой доклад [3], 5.3 а также [2], 4.4.1) я называю всякую мультирешетку $\mathfrak{M}$ — такую, что для всех a, b, b', $d, m \in \mathfrak{M}$ отношения $d \in a \vee b$, $d \in a \vee b'$, $m \in a \wedge b$, $m \in a \wedge b'$ и $b \geqq b'$ влекут $b = b'$.

Из [2], § 4 вытекает, что это определение *равносильно* с следующим:

3.1.1. *Модулярной снизу в картезианском смысле* (см. мой доклад [3], 5.2) называю всякую мультирешетку $\mathfrak{M}$ — такую, что для всех $a, a', b, b', d, m, x \in \mathfrak{M}$ отношения $d \in a \vee b$, $m \in a \wedge b$, $a' \in a/m$, $b' \in b/m$, $x \in a' \vee b'$ и $x \leqq d$ влекут отношения $a' \in a \wedge x$ и $b' \in b \wedge x$.

3.2. *Дистрибутивной* (в смысле *Густава Бергмана*, см. мой доклад [3], 6. 3 и [2], 6.1) я называю всякую мультирешетку $\mathfrak{M}$ — такую, что для всех a, b, b', $d, m \in \mathfrak{M}$ отношения $d \in a \vee b$, $d \in a \vee b'$, $m \in a \wedge b$, $m \in a \wedge b'$ влекут $b = b'$.

Как было показано в моей работе [4], 3.7, это определение *равносильно* следующему:

3.2.1. *Дистрибутивной* я называю всякую мультирешетку $\mathfrak{M}$ — такую, что для всех $a, b, d, m, x \in \mathfrak{M}$ отношения $d \in a \vee b$, $m \in a \wedge b$ и $x \in d/m$ влекут существование элементов $a', b' \in \mathfrak{M}$ — таких, что $a' \in a/m$, $b' \in b/m$ и таких, что $x \in a' \vee b'$. Ср. также [3], 6.2, и мою заметку [5], II.

§ 4. Мультирешетки в алгебре

А. *Условие Жордана-Дедекинда для цепей* (ср. [11], гл. I, § 9). Исследование необходимых и достаточных условий, чтобы условие Жордана-Дедекинда (в дальнейшем „условие ЖД") имело место и было, как известно, предметом многих работ как для конечных, так и для бесконечных цепей; см. напр. [27] и соответствующую литературу.

Однако *Ойштейн Орэ* [22] первый поднял и решил вопрос для частично упорядоченных множеств, удовлетворяющих условиям обрыва цепей (ограниченных или неограниченных), и которые не являются обязательно решетками. *Орэ* (там же) вводит в этом случае понятия простого цикла, простой деформации и понятие связанных цепей, которое из них получается. См. также [20].

Но, потому что частично упорядоченные множества, рассматриваемые *Орэ* (там же), являются мультирешетками (2.2, пример 2) и так как с другой стороны критериям, которые формулировал *Орэ* (там же), можно *в случае решеток* дать другую формулировку как „условиям четырехугольника", то для меня стало естественным, начать искать аналогичную в общем формулировку критерий *Орэ* в терминах теории мультирешеток. Это то к чему я пришел при помощи своего понятия простого четырехугольника [9], причем однако, я усилил главные результаты *Орэ*.

Под *простым четырехугольником* я понимаю такой четырехугольник $(u, v; a, b)$ ([1], 1.3), чтобы для всех $a_1, b_1, a', b' \in P$ удовлетворяющих условиям $u > a_1 \geqq a$, $u > b_1 \geqq b$, $v < a' \leqq a$ и $v < b' \leqq b$ было $v \in a_1 \wedge b_1$ и $u \in a' \vee b'$. Указываю на примере ([9], 2.3), что это понятие сильнее, чем понятие простого цикла Орэ (там же); вместе с тем указываю на примере, что понятие Орэ простой деформации цепей слабее, чем следующее понятие простой деформации ([9], 2.6):

Пусть u, v такие элементы множества P, что $u \geqq v$. Обозначаю через A_v^u любую конечную цепь (максимальную или немаксимальную!) между u и v. Если имеем $u \geqq v \geqq w (u, v, w \in P)$ и если A_v^u и B_w^v являются цепями между u и v и между v и w, обозначаю $A_v^u \times B_w^v$ цепь (связывающую u и w), которую мы получили присоединением цепей A_v^u и B_w^v.

Пусть теперь u, u', v, v' такие элементы множества P, что $u \geqq u' \geqq v' \geqq v$; цепь $A_{u'}^u \times \bar{B}_{v'}^{u'} \times C_v^{v'}$ мы назовем *простой деформацией* цепи $A_{u'}^u \times B_{v'}^{u'} \times C_v^{v'}$, если существует $x \in B_{v'}^{u'}$ и $\bar{x} \in \bar{B}_{v'}^{u'}$ — такое, чтобы четырехугольник $(u', v'; x, \bar{x})$ был простой.

Сложение конечного числа простых деформаций дает *деформацию* (коротко сказано!), и о первой и последней цепи мы говорим, что они *связаны*.

Главный результат работы [9] можно теперь формулировать следующим образом: *Пусть P — частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условиям обрыва возрастающих и убывающих цепей* (ограниченных или неограниченных). *Тогда всякая максимальная (конечная) цепь связана с каждой другой максимальной цепью с теми самыми конечными элементами и множество P удовлетворяет условию ЖД тогда и только тогда, если выполнено следующее обобщенное условие четырехугольника* (ср. [9], 2.4).

CQG. *Для всех $a, b, d, m \in P$, где $d \in a \vee b$ и $m \in a \wedge b$ — таких, чтобы четырехугольник $(d, m; a, b)$ был простой, существуют максимальные цепи A_a^d, B_m^a, C_b^d, D_m^b — такие, чтобы цепи* (также максимальные!) $A_a^d \times B_m^a$ и $C_b^d \times D_m^b$ *имели одинакову длину* (2.2, пример 2).

Милан Колибиар в свою очередь заметил [18], что мои результаты в работе [9] остаются правильными — и даже в сильнейшей форме, нежели я им придавал — для более широкого класса частично упорядоченных множеств, чем класс частично упорядоченных множеств конечной длины и которые, впрочем, не должны быть всегда мультирешетками. Используя мое понятие простого четырехугольника, *которое М. Колибиар сначала формулировал для более* *общих частично упорядоченных множеств,*[1]) он именно вводит новое понятие *неприводимого цикла* ([18], 1.2), которое сильнее чем понятие простого цикла Орэ [22]. Две цепи A_v^u, B_v^u (максимальные) по Колибиару образуют неприводимый цикл, если для *каждой* пары $a, b (a \in A_v^u,\ b \in B_v^u$ и $a, b \neq u, v)$ четурехугольник $(u, v;\ a, b)$ является простым. Из результатов *Колибиара* (там же) следует здесь упомянуть этот: *Две цепи (максимальные) с общими конечными элементами являются одновременно конечной и одинаковой длины тогда и только тогда, если такими являются оба компонента (цепи) любого неприводимого цикла. В таком случае данные цепи связаны даже в сильном смысле по Колибиару.* Впрочем замечательно, что методы доказательств Колибиара (там же) являются в сущности подражанием моим, несмотря на их более общий характер.[1a])

Б. *Функция Мёбиуса* (ср. [11], гл. I, § 12). Первое исследование о поведении функции Мёбиуса в иерархиях[2]) H (термин по Вейснеру [24]) было сделано Вейснером (там же) *при предположениях, что H является решеткой,* и немного позже *Филипом Холлом* [14] для *конечных,* но впрочем произвольных иерархий.

Затруднения проблемы в общем вытекают из „внутренней структуры" H. Однако, в общем случае эту структуру можно исследовать при помощи теории мультирешеток; это как раз сделано мною в приведенной уже работе [4] и в моих заметках [5], где я достиг более общих результатов чем *Вейснер, Холл* (там же) и *Ф. Клейн* [17]. Это меня привело, между прочим, к введению *ие-*

---

[1])В смысле моего доклада [3] это приводит к мысли, что для всякой геометрической структуры конфигурации P имеется соответствующее понятие простого четырехугольника. Четырехугольник М. *Колибиара* (тамже), как и мой определен при помощи хаусдорфовской геометрической структуры конфигурации P ([3], 3.4). С другой стороны, всякий четырехугольник конфигурации P является простым в отношении к *дискретной* геометрической структуре конфигурации P ([3], 3.4).

[1a]) Замечание добавленное автором 16 марта 1960 г. Теория цепей в более общих частично упорядоченных множествах была предметом глубоких исследований Вальтера Фельшера [29], где, между прочим, замечательно усилил и расширил вышеприведенные результаты *М. Колибиара* и мои [9]. Из новых понятий, введенных по этому поводу В. Фельшером, следует здесь отметить важное понятие $\beta_n Z$-четырехугольника ($n = 1, 2, 3, \ldots$), как и $\beta_n Z$ — отношения между двумя (максимальными) цепями с общими концами ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Для $n = 1$ получается простой четырехугольник [9] и „verbundene Reihen" *М. Колибиара* [18].

[2]) Под этим я понимаю всякое частично упорядоченное множество, частные u/v которого являются *конечными* подмножествами; см. [24].

рархий Мёбиуса, это значит иерархий с первым элементом O, где *для всех* $a, b, d, m \in H$ *— таких, что* $d \in a \vee b$ *и* $m \in a \wedge b$ *имеется* $\mu(a)\,\mu(b) = \mu(d)\,\mu(m)$. В этих иерархиях функция *Мёбиуса* является непременно *мультипликативной* в том смысле, что для всех a, b, d — таких, что $d \in a \vee b$ и $O \in a \wedge b$, имеет место $\mu(a)\,\mu(b) = \mu(d)$. Это последнее свойство выполнено также для функции *Мёбиуса дистрибутивной* иерархии (как мультирешетки!); см. [4], 4.3; очень даже вероятно, что каждая дистрибутивная иерархия является иерархией *Мёбиуса* (ср. [4], 4.10, проблема 2). Уже эти свойства показывают, какое значение имеют дистрибутивные мультирешетки для алгебраической топологии (2.2, пример 10).

Из свойств дистрибутивных мультирешеток, приведенных мною в [4], хочу обратить внимание на особо важное *свойство дистрибутивных мультирешеток,* а именно на то, *что они являются картезианскими частично упорядоченными множествами,* это значит, что существуют изоморфизмы в смысле частичного упорядочения: $d/m \leftrightarrows (a/m)\times(b/m) \leftrightarrows (d/a)\times(d/b)$ для всех $a, b, d, m \in \mathfrak{M}$ — таких, что $d \in a \vee b$ и $m \in a \wedge b$; здесь $\times$ обозначает, как обычно, кардинальное произведение. Из этого между прочим вытекает, *что только дистрибутивные мультирешетки с дополнениями являются Булевыми алгебрами.* Ср. также [8, II, III] как и [16], где были приведены другие интересные свойства дистрибутивных мультирешеток конечной длины.

Эти свойства, между прочим, играют роль в доказательстве критерия, которое подал *Я. Якубик,* чтобы две фильтрующиеся дистрибутивные мультирешетки, все ограниченные цепи которых имеют конечную длину, были графически изоморфные; см. снова [16], теорема 1. Я не буду здесь касаться деталей этого вопроса, которым с новой точки зрения, а именно метрической, занимался также *М. Колибиар* в работе [28]. Именно, М. Колибиар (там же) говорит, что два метрические пространства M, M' метрически эквивалентны, если имеется такое взаимно однозначное отображение φ пространства M на M', что из $a, b, c \in M$ и $\partial(a, b) + \partial(b, c) = \partial(a, c)$ следует $\partial(a\varphi, b\varphi) + \partial(b\varphi, c\varphi) = \partial(a\varphi, c\varphi)$ в M' и наоборот.

Доказана следующая основная теорема ([28], Теорема 3.3.2):

Две метрические дистрибутивные фильтрующиеся мультирешетки M, M' ([28], 1.4) тогда и только тогда метрически эквивалентны, когда существуют такие мультирешетки A_1, A_2, что имеются изоморфизмы (в смысле частичного упорядочения) $M \leftrightarrows A_1 \times A_2$ и $M' \leftrightarrows A_1 \times \breve{A}_2$, где $\breve{A}_2$ означает мультирешетку двойственну к A_2.

Эта теорема остается в силе, если слова „метрические мультирешетки“ и „метрически эквивалентны“ заменим словами „мультирешетки, которых ограниченные цепи конечны“ и „графически изоморфны“ соответственно. Полученное таким образом утверждение является в некоторой мере более общим, чем теорема 1 Я. Якубика [16].

В. *Теория делимости* (ср. [11], гл. XIV, § 13). В своей работе [6] я доказываю, что всякая *дистрибутивная* мультирешеточно упорядоченная группа, целые элементы (это значит $\leqq 1$) которой удовлетворяют условию обрыва возрастающих цепей, является *решеточно упорядоченной* группой, из чего вытекает сила основной теоремы делимости для этого класса мультирешеточно упорядоченных групп.

Г. *Мультирешетки и теория мультигрупп.* Общеизвестно, что множество всех подмультигрупп мультигруппы, частично упорядоченное по включению, обыкновенно не является решеткой; см. [23]. Напротив того есть случаи, где это множество является мультирешеткой, напр. если мультигруппа конечная или с конечными возрастающими и убывающими цепями подмультигрупп; см. также 2.2, пример 6.

Следовательно возникает проблема более подробно исследовать свойства мультирешеток подмультигрупп, значит исследовать взаимные отношения между ними и структурой целых мультигрупп, также как в теории групп мы изучаем определенные свойства группы при помощи решеток подгрупп и наоборот. Эта проблема намного сложнее, чем в теории групп, так как вовсе не ясно, как надо *алгебраически*[3]) конструировать мультиобъединения $A \vee B$ и мультипересечения $A \wedge B$ двух подмультигрупп A, B мультигруппы M с предпосылкой, что эти мультиобъединения и мультипересечения существуют: в самом деле, даже не ясно, будто бы только хаусдорфовская геометрическая структура [3] частично упорядоченного множества подмультигрупп была достаточной ... Очевидно является необходимым начать испытанием нескольких простых примеров мультигрупп с малым числом элементов (ср. опять [23]).

§ 5. Мультирешетки в геометрии

Большинство примеров мультирешеток из 2.2 взято из геометрии. В общем и без претензий, что были исчерпаны все случаи, можно сгруппировать эти „конфигурации“ в следующие два класса, а именно в конфигурации частично упорядочены по *включению* (примеры 4, 5, 8) и в конфигурации частично упорядочены при помощи *инцидентности* (примеры 9, 10, проективные геометрии и т. д.); что касается примера 7, переведу его в первый класс из-за близкого сродства с примером 4 (см. мою работу [7]). Первый класс является, таким

[3]) В этом смысле надо понимать — mutatis mutandis — конструкции *Бен Душника* [26] для типов порядка и мои [7], 1.3.1 для пространства-времени специальной теории относительности; см. дальше § 6.

образом, классом геометрических контунуум, второй — классом геометрий пересечений и объединений. В обоих случаях проблема состоит в основательном исследовании свойств, направленных к абстрактной характеристике *в терминах теории мультирешеток с точностью до изоморфизма (частичного упорядочения),* конфигураций, о которых идет речь. К иллюстрации сказанного приведу два примера:

А. *Геометрия круга.* Речь идет о множестве, описанном в примере 4 из 2.2. Это множество – к которому здесь прибавим первый элемент 0, т. е. пустое множество, и последний элемент 1, т. е. целую эвклидовую плоскость — обозначу в дальнейшем C. Множество C является всегда мультирешеткой, при предпосылке, что положим, как обычно

$$a \vee 1 = 1 \vee a = 1, \quad a \in C$$

$$a \wedge 0 = 0 \wedge a = 0, \quad a \in C$$

$$a \wedge 1 = 1 \wedge a = a = a \vee 0 = 0 \vee a, \quad a \in C$$

Мультирешетка C обладает следующими свойствами:

1а.[4]) *Мультирешетка C атомна в том смысле, что для всякого $a \in C$ — такого, что $a > 0$, существует такой атом* (= точка; [11], гл. I, § 6) *$p \in C$, что $a \geqq p$.*

1б. *Для всякого $a \in C$ — такого, что $1 > a > 0$ и отличного от атома, существуют элементы a_1, $a' \in C$ такие, что $1 > a_1 > a > a' > 0$.*

2. *Для всех $a, b \in C$ — таких, что $1 > a \geqq b > 0$, существует $x \in a/b$* (§ 3) (в действительности их в случае $a \neq b$ бесконечное множество!) *такое, чтобы частные a/x и x/b были цепями* (совершенно упорядоченными множествами).

3а. *Мультирешеточные операции $\vee$ и $\wedge$ универсальны. Кроме того для всех $a, b \in C$ таких, что $1 > a > 0$, $1 > b > 0$ и $a \lneqq b \lneqq a$, имеет место $d < 1$ для всякого $d \in a \vee b$ и частные d/a, d/b являются цепями, каково бы ни было $d \in a \vee b$; и для всех $a, b \in C$ таких, что $1 > a > 0$, $1 > b > 0$, $a \lneqq b \lneqq a$ и $0 \notin a \wedge b$ имеется $m > 0$ для всякого $m \in a \wedge b$ и частные a/m, b/m являются цепями, каково бы ни было $m \in a \wedge b$* (См. обозначения 2.1.2). Для $a, b \in C$ таких, что $a \geqq b$, я определяю $a \vee b = a$ и $a \wedge b = b$.

3б. *Для всех $a, b, d \in C$ таких, что $1 > a > 0$, $1 > b > 0$, $1 > d \geqq a$, $1 > d \geqq b$*

---

[4]) *М. Колибиар* обратил мое внимание на то, что свойство 1б в прежной формулировке не было правильно (в том случае, когда a представляет атом). Потому я включил в текст свойство 1а и в силу того я изменил прежное соответствие свойства 1б.

и таких, чтобы d/a, d/b были цепями, имеем $d \in a \vee b$; и для всех $a, b, m \in C$ таких, что $1 > a > 0$, $1 > b > 0$, $0 < m \leqq a$, $0 < m \leqq b$ и таких, чтобы a/m и b/m были цепями, имеем $m \in a \wedge b$.

4. *Мультирешетка C полна в смысле* 2.1.3. Это свойство является последствием того, что *по* [25], каждое *фильтрующееся* подмножество множества C обладает верхней гранью (объединением) и нижней гранью (пересечением).

5а. *Каждому $a \in C$ такому, что $1 > a > 0$, однозначно соответствует неотрицательное действительное число $R(a)$ (радиус круга a) — такое, что для всех $a, b \in C$ удовлетворяющих условию $1 > a > b > 0$ имеет место $R(a) > R(b)$. Для $a = 1$ я определяю $R(1) = +\infty$; „круг" 0 не имеет радиуса (по определению).*

5б. *Для всех $a, b \in C$ таких, что $1 > a > 0$, $1 > b > 0$ и $0 \notin a \wedge b$ и для всякого $m \in a \wedge b$ имеется $d \in a \vee b$ такое, что $R(a) + R(b) = R(d) + R(m)$.* (В терминах моей работы [2], § 5, это значит, что $R(a)$ *является оценкой второго типа, снизу*.)

5в. *Для всех a, $b \in C$ таких, что $0 \notin a \wedge b$, существуют не больше двух (разных) элементов m, $m' \in a \wedge b$ таких, что $R(m) = R(m') = 0$.*

6. *Для всех u, $v \in C$ таких, что $u > v$, элемент $a \in C$ такой, что $u > a > v$, обладает относительным дополнением* (в u/v, [2], § 6) *тогда и только тогда, если частные u/a, a/v являются цепями.*

7. *Если для $a, b \in C$, таких, что $a > b$, частное a/b является цепью, тогда $a/b \leftrightarrows R^{\#}$, где $R^{\#}$ означает цепь вещественных чисел (упорядоченных по величине).*

С абстрактной точки зрения свойства мультирешетки C не являются все независимыми; напр. свойство 6 является явным следствием свойств 3а и 3б. Но остается открытым вопрос, достаточно ли множество этих свойств для определения мультирешетки C с точностью до изоморфизма (частичного упорядочения).

Б. *Симплициальные комплексы.* Из определения симплициальных комплексов ясно вытекает, что эти комплексы *как абстрактные конфигурации* ([11], гл. I, § 10) *являются конечными мультирешетками $\mathfrak{M}$, имеющими первый элемент* 0 (или пустое множество) *и последний элемент* 1 (т. е. весь симплициальный комплекс как одно целое) *и такими, чтобы для всякого $a \in \mathfrak{M}$ удовлетворяющего условию $1 > a \geqq 0$ частное $a/0$ было Булевой алгеброй.* (Такой является напр. мультирешетка приведенная на фиг. 1.) Но кажется мало-вероятным, что эти свойства достаточны для характеристики симплициальных комплексов как абстрактных конфигураций.

§ 6. Мультирешетки и уравнения в частных производных

Биркгоф (см. [11], гл. IX, § 13) первый обратил внимание на очень важное отношение между теорией частично упорядоченных множеств и теорией уравнений в частных производных. Продолжая исследования *Биркгофа* я изучал ([2], [7]) уравнение четырехмерных волн

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0$$

и я показал, что частичное упорядочение (специальной теории относительности) введенное в пространстве независимых переменных x, y, z, t при помощи характеристик уравнения (*), т. е. $(x', y', z', t') \leqq (x, y, z, t)$ *тогда и только тогда, если* $(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2-c^2(t'-t)^2 \leqq 0$ *и* $t' \leqq t$ (ср. [11], гл. I, § 2, упр. 3), определяет *модулярную и сильную* мультирешетку[5]) ([2], 3.3 и § 4), *но не дистрибутивную*, которая является одновременно фильтрующимся множеством; обозначаю её через K_4.

В другом месте определяю главные квазилинейные оценки мультирешеток (см. [7], § 6) при помощи формул

$$v(x', y', z', t') + v(x'', y'', z'', t'') = v(\check{x}_0, \check{y}_0, \check{z}_0, \check{t}_0) + v(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0, \hat{t}_0),$$

где $$\overline{p'p''}^2 = (x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2 \geqq c^2(t''-t')^2$$

и где кроме того имеются

$$2\check{x}_0 = x'+x''+(x''-x')\,\frac{c(t''-t')}{p'p''}$$

$$2\hat{x}_0 = x'+x''-(x''-x')\,\frac{c(t''-t')}{p'p''}$$

и аналогичных формул для y и z и где, наконец, имеет место

$$2c\check{t}_0 = c(t'+t'') + p'p''$$

$$2c\hat{t}_0 = c(t'+t'') - p'p''$$

---

[5]) *Октав Онически*, интересующийся усердно о мои исследования в этом предмете, показал мне первое доказательство факта, что множество K_4 является мультирешеткой (ничего больше); его доказательство — намного простее моего — имеет характер существования и основывается на хорошо известном свойстве действительных чисел, а именно, что всякое не пустое множество действительных чисел, если оно мажорируемо (минорируемо), обладает верхней (нижней) гранью. Однако, я отдал предпочтение моему конструктивному геометрическому доказательству, не только из-за его существенно элементарного характера, но главным образом потому, что формулы I и I (лемма 1.3.1 из [7] и утверждение А из [2], 1.2, пример 7) употребляющиеся в нем, позволяют синтетическое изучение свойств мультирешетки K_4 ([7], § 2).

Но существуют главные квазилинейные оценки K_4, которые не являются решениями уравнения (*); такой является напр. функция $v(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + c^2t^2$. С другой стороны есть решения уравнения (*), которые не являются главными квазилинейными оценками K_4; такой является напр. функция[6] $v(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2)^{-1}$.

Таким образом я пришел к следующей проблеме, которую я назвал *проблемой Биркгофа* ([7], § 4):

Определить все действительные функции $v(x, y, z, t)$ определенные и аналитические на всем пространстве K_4 и которые были бы одновременно решениями уравнения (*) и главными квазилинейными оценками мультирешетки K_4.

При помощи некоторых алгебраических рассуждений и разложения определенных модулей на прямые суммы я доказываю ([7], § 6), что единственными функциями, имеющими эти свойства, являются функции определенные формулой

$$v(x, y, z, t) = (ht + k) + [(lx + my + nz)\, t + (l'x + m'y + n'z)]$$

где $h, k, l, m, n, l', m', n'$ любые действительные числа.

Вопрос, касающийся геометрической интерпретации этого результата, поднятый *О. Оническу,* остается открытым.

Что касается более общих линейных уравнений в частных производных второго порядка, гиперболических, особенно с переменными коэффициентами, мы бы не могли ожидать такого простого результата. Даже я думаю, что понятие мультирешетки было бы недостаточным для анализа этих случаев и что, может быть, надо было бы применить более общие геометрические структуры соответствующей конфигурации, а именно пространство Римана частично упорядоченное при помощи характеристик исследованного уравнения (см. [11], стр. 151 и мой доклад [3], 11.2; IV и V); впрочем, как *О. Оническу* и *Ж. Вранчеану* заметили, дело идет здесь о частичном упорядочении локально определенном (т. е. в касательном пространстве, соответствующем всякой точке пространства Римана).

§ 7. Мультирешетки и функциональный анализ

Важность решеток в этой области современной математики состоит наверно в задаче, которую здесь имеют решеточно упорядоченные группы, а особенно векторные решетки (= vector lattice, см. [11], гл. XIV и XV). Но есть случаи,

[6]) Это противоречит предположению *Оническу,* по которому эта функция должна бы быть главной квазилинейной оценкой K_4.

когда исследуемые векторные частично упорядоченные пространства не являются решетками по отношению к требуемому частичному упорядочению; таким является напр. случай гомоморфизмов одной векторной решетки в другую ([11], гл. XV, § 6), или случай функций вполне монотонных (там же, § 16).

Как раз в этих вопросах понятие мультирешетки может быть полезно; я имею ввиду прежде всего значение дистрибутивности в следующем смысле (см. мой доклад [3], 6.1 и 6.2)[7]): *Для всех* a, b, d, $m \in G$ *таких, что* $d \in a \vee b$, $m \in a \wedge b$ *и* $ab = dm$ *и для каждого* $x \in d/m$ *имеются* $a' \in (a \wedge x)_m$ *и* $b' \in (b \wedge x)_m$ *такие, что* $x \in a' \vee b'$ (2.1.2) *и такие, что* $a'b' = xm$.

Обладает ли этим свойством всякая мультирешеточно упорядоченная группа?[8])

§ 8. Несколько указаний к исследованию

Мне кажется, что развитие теории мультирешеток было бы желательно в следующих отношениях:

I. а) *Углубить изучение модулярных мультирешеток с точки зрения их альтернативных определений* (ср. [2], 4.7—4.7.4.2), *их оценок* (ср. [2], § 5, [8, I] и [11], гл. V, § 6), *их метрических и топологических свойств* (ср. места уже приведенные и [11], гл. V, § 7, 9, 10).

I. б) *Развить теорию модулярных мультирешеток с дополнениями как введение к геометрии мультиодъединения и мультипересечения, принимая как образец синтетическую проективную геометрию Менгера* [21] *и непрерывномерные проективные геометрии Джона фон Неймана* [11].

II. *Развить теорию полумодулярных мультирешеток* (см. [11], гл. VII и [2]) *как введение к синтетической геометрии топологических комплексов* (см. 2.2, пример 10) *и обобщение примера 9 из* 2.2 *и афинных геометрий* (ср. напр. [19]).

---

[7]) В следующем в виду упрощения, я предполагаю, что группа G является коммутативной.

[8]) *Я. Якубик* ответил на этот вопрос отрицательно. Одновременно в связи с этим он задал следующий, очень интересный вопрос (обозначения как в теории мультирешеток, хотя рассматрываемые группы не должны всегда быть мультирешеточно упорядоченными группами): Пусть G — частично упорядоченная группа и a, b, d, m, x такие элементы группы G, что $d \in a \vee b$, $m \in a \wedge b$ и $d \geqq x \geqq m$. Существуют ли такие элементы a', $b' \in G$, что $a' \in a \wedge x$, $b' \in b \wedge x$ и $x \in a' \vee b'$? Здесь снова, как мы видим, дело идет об одном свойстве дистрибутивности хаусдорфовской геометрической структуры G.

III. *Углубить теорию дистрибутивных мультирешеток* ([2], § 6) *с точки зрения их альтернативных определений* (ср. мою работу [4], § 3 и [11], гл. IX, § 1) *и их представлений* (ср. [11], гл. IX, §§ 4, 5), *теоремы о разложении Куроша и Орэ* (ср. [11], гл. VI, § 7 и гл. IX, § 7; здесь мне кажется, что конструкция, которую я привел в [4], § 2, как и в моей заметке в Comptes Rendus [5, I], будет еще иметь какую-то роль).

IV. *Развить теорию мультирешеточно упорядоченных групп, принимая как образец* [11], гл. XIV *и особенно с точки зрения проблемы классификации (модулярность, дистрибутивность). Ср. тоже мою заметку* [6] *а также мой доклад* [3], § 1.

V. *Развить теорию мультирешеточно упорядоченных мультипликативных систем (особенно полугрупп;* ср. мою работу [10], § 5 и [11], гл. XIII).

VI. *Углубить связи между теорией частично упорядоченных множеств и теорией уравнений в частных производных с точки зрения теории мультирешеток* (ср. выше, § 6).

Литература

[1] Benado M., Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier I, Czechosl. Math. Journ., т. 4 (79), тетр. 2 (1954), стр. 105–127.

[2] Benado M., Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier II, (Théorie des multistructures), Czechosl. Math. Journ., т. 5 (80), тетр. 3 (1955), стр. 308–344.

[2a] Benado M., Rectification à mon travail „Les ensembles... II", Czechosl. Math. Journ., т. 6 (81), 1956, стр. 287.

[3] М. Бенадо, К общей теории частично упорядоченных множеств (Доклад для Международного коллоквиума по теории упорядоченных множеств в Обервольфахе, 26–30 октября 1959 г.). Acta Fac. Rerum Nat. Univ. Comenianae, Mathematica 5 (1961), стр. 397–429.

[4] Benado M., Bemerkungen zur Theorie der Vielverbände IV. (Über die Möbius'sche Funktion). Proc. Cambridge Philos. Soc. т. 56 (1960), стр. 291–317.

[5] Benado M., Sur la fonction de Möbius, I, II, C. R. Acad. Sci. Paris, т. 246 (1958), стр. 2553–2556 и 863–866 соответственно.

[6] Benado M., Sur la théorie de divisibilité, Bull. Sci. Acad. R. P. R., т. VI, тетр. 2 (1954), стр. 264–270.

[7] Benado M., Sur un problème de M. Garrett Birkhoff, Bull. Sci. Acad. R. P. R., т. VI, тетр. 4 (1954), стр. 703–739.

[8] Benado M., Bemerkungen zur Theorie der Vielverbände, I, II, III, Math. Nachr., т. 20, тетр. 1–2 (1959), стр. 1–16.

[9] Benado M., Bemerkungen zu einer Arbeit von Öystein Ore, Journ. Math. pures et appliquées, т. I, тетр. 2 (1956), стр. 5–12.

[10] Benado M., Zur abstrakten Begründung der Führertheorie, будет опубликовано в Mathematica Japonicae.

[11] Birkhoff G., Lattice Theory, revised edition, New York 1948.

[12] Bourbaki N., Théorie des ensembles (fasc. de résultats), Paris, Hermann, 1939. Перевод на русский язык см. в книге Бурбаки Н., Общая топология, Основные структуры, Москва 1958.

[13] Croisot R., Contribution à l'étude des treillis semimodulaires de longueur infinie, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 3 серия, т. 68 (1951), стр. 203–265.

[14] Hall Ph., The Eulerian functions of a group, The Quarterly Journ. of Math. Oxford series, т. 7, тетр. 26 (1936), стр. 134–151.

[15] Jakubík J., Sur les axiomes des multistructures, Czechosl. Math. Journ., т. 6 (81), 1956, стр. 426–430.

[16] Jakubík J., Sur l' isomorphisme des graphes des multistructures, Acta Fac. Rerum Nat. Univ. Comenianae, Mathematica, т. I, тетр. 4–6 (1956), стр. 255–264.

[17] Klein-Barmen F., Multiplikative Funktionen über euklidischen und Sternverbänden, Journ. f. reine u. angew. Math., т. 195, тетр. 3/4 (1956), стр. 121–126.

[18] Kolibiar M., Bemerkung über die Ketten in teilweise geordneten Mengen, Acta Fac. Rerum Nat. Univ. Comenianae, Mathematica, т. III, тетр. 1 (1958), стр. 17–22.

[19] Lesieur L., Treillis géométriques I, II, Séminaire Albert Châtelet et Paul Dubreil, 7ème année (1953–1954), Algèbre et Théorie des nombres, 2ème tirage multigraphié (1956).

[20] Mac Lane S., A conjecture of Ore on chains in partially ordered sets, Bull. of Amer. Math. Soc., т. 49 (1943), стр. 567–568.

[21] Menger K., New Foundations of affine and projective Geometry, Ann. of Math., т. 37 (1936), стр. 456–482.

[22] Ore Ö., Chains in partially ordered sets, Bull. of Amer. Math. Soc., т. 49 (1943), стр. 558–566.

[23] Ore Ö. et Dresher M., Theory of multigroups, Amer. Journ. of Math., т. 60 (1938), стр. 705–733.

[24] Weisner L., Abstract Theory of Inversion of finite Series, Trans. of Amer. Math. Soc., т. 38 (1935), стр. 474–484.

[25] Wolk E. S., Dedekind completeness and a fixed point theorem, Canadian Journ. of Math., т. 9, тетр. 3 (1957), стр. 400–410.

[26] Dushnik B., Upper and lower bounds of order types, Mich. Math. Journ., т. 2, тетр. 1 (1953), стр. 27–31.

[27] Jakubík J., Über Ketten in Booleschen Verbänden, Mat.-fyz. časopis SAV, т. 8, тетр. 4 (1958), стр. 193–202.

[28] Kolibiar M., Über metrische Vielverbände I, Acta Fac. Rerum Nat. Univ. Comenianae, Mathematica, т. 4, тетр. 3–5 (1959), стр. 187–203.

[29] Felscher W., Jordan-Hölder-Sätze und modular geordnete Mengen, Habilitationsschrift, Februar 1960; Math. Zeitschrift, т. 75 (1961), стр. 83—114.

Adresa autora: Bukurešť, Str. Lt. Col. Papazoglou 10.

Došlo dňa 2. 10. 1959

Teória multisväzov a jej význam v algebre a geometrii

M. Benado, Bukurešť

Zhrnutie

Práca podáva náčrt súčasného stavu bádania v teórii multisväzov, poukazuje na aplikácie v algebre (Jordan—Dedekindova podmienka, Möbiusova funkcia, teória deliteľnosti atď.) a v geometrii (teória geometrických kontínuí, syntetická geometria topologických komplexov, parciálne diferenciálne rovnice atď.). Znalosť predošlého referátu [3] nie je nevyhnutná k porozumeniu predloženej práce.

La théorie des multitreillis et son rôle en Algèbre et en Géométrie

M. Benado, Bucarest

Résumé

C'est un aperçu sur l'état actuel des recherches concernant la théorie des multitreillis (= multistructures dans [2]), comprenant des applications à l'Algèbre (condition Jordan—Dedekind, fonction de Möbius, théorie de la divisibilité, etc) et à la Géométrie (théorie des continus géométriques, géométrie synthétique des complexes topologiques, équations aux dérivées partielles, etc.). La connaissance du rapport précédent [3] n'est pas indispensable a l'intelligence du présent aperçu.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. V, 8–10 MATEMATICA, 1961]
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. V. FASC. VIII-X. MATHEMATICA 1961

Translationen der Verbände

G. Szász, Szeged

1. In den früheren Arbeiten [2] und [3] wurden die Translationen der Halbverbände ausführlich untersucht. Da jeder Verband V sowohl bezüglich der Vereinigung als der Durchschnittsbildung je einen Halbverband, den sogenannten Vereinigungs- bzw. Durchschnittshalbverband von V bildet, liegt der Gedanke nahe, daß man einen Translationsbegriff auch für die Verbände definiere.

Im Paragraphen 2 werden wir die Translationen der Verbände als die Translationen ihrer Vereinigungshalbverbände definieren. Im Paragraphen 3 beschäftigen wir uns mit der Menge aller Fixelemente einer Translation. Endlich, im Paragraphen 4 geben wir mit Hilfe der Translationen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ein Verband distributiv bzw. modular sei.

In dieser Arbeit setzen wir die Elemente der Verbandstheorie als bekannt voraus; für die hier angewandten Begriffe und Sätze siehe das Buch [1].

2. In diesem Paragraphen betrachten wir immer einen beliebigen Verband V; der Durchschnitts- bzw. Vereinigungshalbverband von V wird mit $V^{\cap}$ bzw. $V^{\cup}$ bezeichnet.

Will man einen Translationsbegriff für die Verbände definieren, so könnte man zuerst daran denken, daß man unter einer Translation eines Verbandes V eine eindeutige Abbildung λ von V in sich verstehe, die sowohl eine Translation von $V^{\cap}$ als auch eine von $V^{\cup}$ ist, d. h. für welche beide Identitäten

$$(1) \qquad \lambda(x) \cap y = \lambda(x \cap y) \qquad (x, y \in V)$$

$$(2) \qquad \lambda(x) \cup y = \lambda(x \cup y) \qquad (x, y \in V)$$

erfüllt sind. Das wäre aber keine brauchbare Definition, da sich aus (1) und (2) für jedes Element x von V

$$\lambda(x) = \lambda[(x \cup x) \cap x] = \lambda(x \cup x) \cap x = \{\lambda(x) \cup x\} \cap x = x$$

ergibt. Deshalb verabreden wir uns in der folgenden

Definition. *Eine eindeutige Abbildung λ eines Verbandes V in sich heißt eine Translation von V, wenn für sie die Identität* (2) *erfüllt ist.*

Mit anderen Worten, definieren wir die Translationen des Verbandes V als die Translationen von $V^{\cup}$.[1])

Ähnlich wie in [2] und [3] nennen wir eine Translation λ von V *speziell*, wenn es ein Element c in V gibt, so daß für jedes $x(\in V)$ $\lambda(x) = c \cup x$ ist; eine solche Translation wird mit c_S bezeichnet.

Aus dem in [2] gesagten folgt, daß in einem Verband mit kleinstem Element jede Translation speziell ist. Wir geben ein Beispiel für einen Verband (natürlich ohne kleinstes Element), der eine nichtspezielle Translation hat.

Es sei N die Menge aller positiven ganzen Zahlen und $a \cup b$ bzw. $a \cap b$ $(a, b \in N)$ bedeute den größten gemeinsamen Teiler bzw. das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b. Bekanntlich bildet dann N einen distributiven Verband, der kein kleinstes Element hat. Jedes Element x von N läßt sich in der Form $x = 2^{\alpha}x_0$ schreiben, wo α eine nichtnegative ganze Zahl und x_0 eine ungerade positive Zahl ist. Es ist leicht einzusehen, daß die Abbildung $\lambda(x) = x_0$ $(x \in N)$ eine nichtspezielle Translation von N ist.

Nach der obigen Definition bleiben die meisten Ergebnisse von [2] und [3] auch für die Verbände gültig. Wir fassen nur das Analogon des Satzes 3 von [2] (als Lemma) ab, denn dieses Resultat wird in dem folgenden oft angewandt sein:

Lemma. *Jede Translation λ eines Verbandes V ist eine Hüllenoperation von V, d. h. es gelten*

(3) $$\lambda(x) \geqq x,$$

(4) $$\lambda[\lambda(x)] = \lambda(x),$$

(5) $$\text{aus} \quad x \leqq y \quad \text{folgt} \quad \lambda(x) \leqq \lambda(y)$$

für jede Elemente x, y von V.

3. Ist λ eine Translation des Verbandes V, so bezeichnen wir mit K_λ die Menge aller Fixelemente von V bei λ (d. h., die Menge aller Elemente x von V, für die $\lambda(x) = x$ ist). Nach Satz 2 von [2] ist K_λ immer ein Ideal von $V^{\cup}$. Wir zeigen, daß auch die folgende, stärkere Behauptung richtig ist:

Satz 1. *Es sei V ein beliebiger Verband und λ eine Translation von V. Dann ist K_λ ein duales Ideal von V.*

Beweis. Zum Beweis brauchen wir die Identität

(6) $$\lambda(x \cap y) \cup y = \lambda(y) \qquad (x, y \in V),$$

die sich sofort aus der Definition der Translation ergibt:

$$\lambda(x \cap y) \cup y = \lambda[(x \cap y) \cup y] = \lambda(y).$$

---

[1]) Hätten wir die duale Definition gewählt, so würde auch statt des Lemmas (am Ende dieses Paragraphen) seine duale Aussage gelten.

Nach dem (oben schon erwähnten) Satz 2 von [2] genügt es zu zeigen, daß aus $a, b \in K_\lambda$ immer $a \cap b \in K_\lambda$ folgt. Dazu betrachten wir zwei beliebige Elemente a, b von K_λ. Dann gelten nach (6)

$$\lambda(a \cap b) \cup a = a, \qquad \lambda(a \cap b) \cup b = b,$$

also

$$\lambda(a \cap b) \leqq a, \qquad \lambda(a \cap b) \leqq b.$$

Daraus folgt, daß $\lambda(a \cap b) \leqq a \cap b$ ist; andererseits ist nach (3) $\lambda(a \cap b) \geqq a \cap b$. Nach diesen Ungleichungen ist $a \cap b \in K_\lambda$.

Es gilt der folgende Eindeutigkeitssatz:

Satz 2. *Zu jedem dualen Ideal D eines Verbandes V gibt es höchstens eine Translation λ von V, für die $K_\lambda = D$ ist.*

Anders gesagt, ist jede Translation von V durch die Menge ihrer Fixelemente eindeutig bestimmt.

Dieser Satz ist ein unmittelbares Korollar des allgemeineren

Satz 3. *Es seien λ und μ Translationen eines Halbverbandes H. Ist $K_\lambda = K_\mu$, so ist auch $\lambda = \mu$.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $K_\lambda = K_\mu = K$ ist. Nach (4) gilt dann $\lambda(x)$, $\mu(x) \in K$ für jedes Element x von H, so daß

$$\mu\lambda(x) = \mu[\lambda(x)] = \lambda(x) \qquad (x \in H)$$

und

$$\lambda\mu(x) = \lambda[\mu(x)] = \mu(x) \qquad (x \in H)$$

ist. Nach Satz 3 von [3] sind aber die Translationen von H paarweise vertauschbar. Folglich ergibt sich aus den obigen Gleichungen, daß für jedes x

$$\lambda(x) = \mu\lambda(x) = \lambda\mu(x) = \mu(x)$$

ist. Damit haben wir unseren Satz bewiesen.

4. Nach Satz 2 von [2] ist jede Translation eines beliebigen Verbandes V ein Vereinigungsendomorphismus von V. Für Verbände gilt auch

Satz 4. *Ein Verband V ist dann und nur dann distributiv, wenn jede Translation von V (auch) ein Durchschnittsendomorphismus ist.*

Beweis. Ist nur jede spezielle Translation von V ein Durchschnittsendomorphismus, so gilt

$$a \cup (b \cap c) = a_S(b \cap c) = a_S(b) \cap a_S(c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

für jedes Tripel a, b, c von V. Daraus folgt aber ([1], Seite 41), daß V distributiv ist.

Umgekehrt, sei V ein distributiver Verband und λ eine beliebige Translation von V. Dann ergibt sich nach (6) und (3)

$$\lambda(a) \cap \lambda(b) = \{\lambda(a \cap b) \cup a\} \cap \{\lambda(a \cap b) \cup b\} =$$
$$= \lambda(a \cap b) \cup (a \cap b) = \lambda(a \cap b).$$

Auch die modularen Verbände lassen sich mit Hilfe der Translationen leicht charakterisieren:

Satz 5. *Ein Verband V ist dann und nur dann modular, wenn für jede Translation λ von V und für jedes Fixelement u von V die Identität*

$$\lambda(u \cap x) = \lambda(u) \cap \lambda(x) \qquad (x \in V) \tag{7}$$

gültig ist.

Wie man sieht, ist die Bedingung von Satz 4 wesentlich nur insofern schärfer, daß dort die Gültigkeit von (7) für jedes u vorausgesetzt ist.

Beweis. Zuerst beweisen wir, daß die Bedingung des Satzes hinreichend ist. Wir nehmen an, daß (7) für jede spezielle Translation von V gültig ist und betrachten ein Tripel a, b, c $(a \leqq c)$ von V. Wegen $a_S(c) = a \cup c = c$ ergibt sich dann

$$a \cup (b \cap c) = a_S(b \cap c) = a_S(b) \cap a_S(c) = (a \cup b) \cap c.$$

Die Notwendigkeit der Bedingung wird auf indirektem Wege bewiesen. Es sei V ein Verband, in dem eine Translation λ definiert werden kann, so daß für ein Fixelement u und für ein (anderes) Element x von V

$$\lambda(u \cap x) \neq \lambda(u) \cap \lambda(x) \tag{8}$$

ist. Nach Satz 1 ist dann x kein Fixelement bei λ; folglich ist nach (3) $\lambda(x) > x$. Ferner kann $u \geqq x$ nicht bestehen, denn aus $u \geqq x$ würde nach (5) auch $\lambda(u) \geqq \lambda(x)$ folgen, was aber wegen (8) unmöglich ist. Deshalb ist

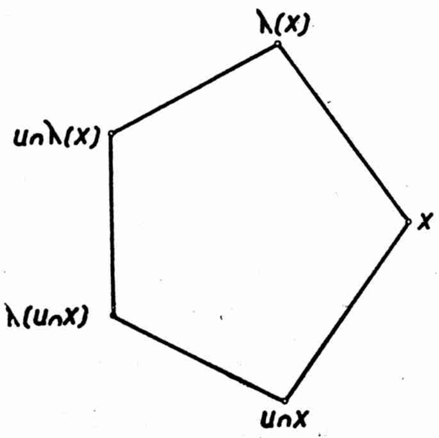


Diagramm 1.

$$u \cap x < x < \lambda(x). \tag{9}$$

Wir zeigen, daß auch die Ungleichungen

$$u \cap x < \lambda(u \cap x) < u \cap \lambda(x) < \lambda(x) \tag{10}$$

richtig sind. In der Tat ist $u \cap x \leqq \lambda(u \cap x)$ [nach (3)] und aus $u \cap x = \lambda(u \cap x)$ würde nach Satz 1 auch $x = \lambda(x)$ folgen; ferner ist, nach (5), $\lambda(u \cap x) \leqq \lambda(u) \cap \lambda(x) = u \cap \lambda(x)$ und nach (8) $\lambda(u \cap x) \neq u \cap \lambda(x)$; endlich würde aus $u \cap \lambda(x) = \lambda(x)$ sofort $u \geqq \lambda(x) \geqq x$ folgen, was nach dem oben gesagten unmöglich ist.

Jetzt ist schon nicht schwer zu zeigen, daß die Elemente in (9) und (10) einen Teilverband von V mit dem Diagramm 1 bilden. (Dazu brauchen wir nur einzusehen, daß $[u \cap \lambda(x)] \cap x = u \cap x$ und $\lambda(u \cap x) \cup x = \lambda(x)$ ist; diese Gleichungen folgen aber sofort aus (3) bzw. (2).) Nach einem wohlbekannten Satz von Dedekind ([1], Satz 9.1) ist also V nicht modular.

Literatur

[1] H. Hermes, Einführung in die Verbandstheorie (Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 73), Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
[2] G. Szász, Die Translationen der Halbverbände, Acta Sci. Math., 17 (1956), 165–169.
[3] G. Szász–J. Szendrei, Über die Translationen der Halbverbände, Acta Sci. Math., 18 (1957), 44–47.

Adresa autora: Bolyai Intézet, Szeged, Aradi vértanúk tere 1.

Do redakcie dodané 15. 12. 1959

Translácie sväzov

G. Szász, Segedín

Zhrnutie

Transláciou sväzu V rozumie sa zobrazenie λ sväzu V do seba, splňujúce identitu $\lambda(x \cup y) = \lambda(x) \cup y$. Ukazuje sa, že množina pevných bodov translácie je duálny ideál a že rôznym transláciám prislúchajú rôzne duálne ideály. Charakterizujú sa modulárne a distributívne sväzy pomocou translácií.

Трансляции решеток

Г. Сас, Сегед

Резюме

Трансляцией решетки V разумеется отображение λ решетки V в себя удовлетворяющее тождеству $\lambda(x \cup y) = \lambda(x) \cup y$. Показывается, что множество неподвижных точек трансляции является двойственным идеалом и что разным трансляциям принадлежат разные двойственные идеалы. Дана характеристика дедекиндовых и дистрибутивных решеток при помощи трансляций.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. V, 8–10 MATEMATICA, 1961]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. V. FASC. VIII-X. MATHEMATICA 1961

Bemerkungen über Translationen der Verbände

M. Kolibiar

In den Arbeiten [1]–[3] untersuchten G. Szász und J. Szendrei die Translationen der Verbände und der Halbverbände. Unter einer Translation eines Verbandes S versteht man in [1] eine Abbildung λ von S in sich selbst, die folgender Bedingung genügt:

$$\lambda(x \cup y) = \lambda(x) \cup y \qquad \text{für alle} \quad x, y \in S.$$

In den genannten Arbeiten wird es bewiesen, daß eine Translation λ eines Verbandes S folgende Eigenschaften besitzt:

A. λ ist eine Hüllenoperation, d. h. für beliebige $x, y \in S$ gilt: 1. $x \leqq \lambda(x)$, 2. $\lambda(\lambda(x)) = \lambda(x)$, 3. aus $x \leqq y$ folgt $\lambda(x) \leqq \lambda(y)$ ([1], Lemma).

B. λ ist ein $\cup$-Endomorphismus, d. h. $\lambda(x \cup y) = \lambda(x) \cup \lambda(y)$ für alle $x, y \in S$ ([2], Satz 2).

C. $\lambda(S)$ [1]) ist ein duales Ideal in S [2]) ([1], Satz 1).

D. Durch die Menge $\lambda(S)$ ist die Translation λ eindeutig bestimmt. (D. h. wenn für die Translationen λ, μ die Mengen $\lambda(S)$, $\mu(S)$ gleich sind, so ist $\lambda = \mu$.) ([1], Satz 2.)

Eine Abbildung α von S in sich selbst, die die Eigenschaften A, B aufweist, braucht nicht eine Translation zu sein, wie folgendes Beispiel zeigt: S sei der Verband der natürlichen Zahlen mit den Operationen $a \cup b = \max(a, b)$, $a \cap b = \min(a, b)$. Für $n \in S$ erklären wir $\alpha(n) = n$ falls n gerade und $\alpha(n) = n + 1$ falls n ungerade ist. (α besitzt die Eigenschaften A, B, nicht aber die Eigenschaft C.)

Es entstehen nun natürliche Fragen:

Welcher (notwendigen und hinreichenden) Bedingung soll eine Hüllenoperation bzw. ein $\cup$-Endomorphismus ϕ genügen, um eine Translation zu sein.

---

[1]) $\lambda(S)$ bedeutet die Menge aller Elemente $\lambda(x)$ mit $x \in S$.

[2]) Offenbar ist $x \in \lambda(S)$ genau dann, wenn x ein Fixelement von λ ist (d. h. wenn $\lambda(x) = x$ gilt).

Unter welchen Bedingungen gibt es zu einem dualen Ideal D im Verband S eine Translation α, so daß $\lambda(S) = D$ gilt.

Die erste Frage wird in den Arbeiten [2] und [3] beantwortet. Die Bedingung im Fall der Hüllenoperation lautet: Aus $x < y$ folgt $\phi(x) \cup y = \phi(x) \cup \phi(y)$ ([3], Satz 4). Satz 3 der vorliegenden Note bietet eine andere, durch eine Eigenschaft der Fixelemente von ϕ gegebene, Bedingung. Die Antwort auf die zweite Frage ist im Satz 4 gegeben. Im Satz 1 und 2 ist ein Zusammenhang der Translationen eines Verbandes S mit gewissen $\cup$-Kongruenzen von S gegeben.

Satz 1. *Es besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Translationen eines Verbandes S und den Kongruenzrelationen R von S in bezug auf die Vereinigung (kurz: $\cup$-Kongruenzen), die folgende Eigenschaft aufweisen:*

(a) *Es gibt in S ein duales Ideal D derart, daß jede Klasse der Kongruenz R genau ein Element von D enthält.*

Die der Translation λ zugehörige $\cup$-Kongruenz R_λ und die der Kongruenz R zugehörige Translation λ_R sind wie folgt erklärt:

$x \equiv y(R_\lambda)$ genau dann, wenn $\lambda(x) = \lambda(y)$.

$\lambda_R(x)$ ist dasjenige Element x' von D, für das $x \equiv x'$ (R) gilt.

Beweis. Ist λ gegeben, so folgt aus den Resultaten A, B, C, daß R_λ eine $\cup$-Kongruenz mit der Eigenschaft (*a*) ist. Sei nun R eine $\cup$-Kongruenz mit der Eigenschaft (*a*) und λ_R die zugehörige Abbildung. Offenbar $\lambda_R(t) = t$ für jedes $t \in D$. Für beliebige $x, y \in S$ ist $x' \in D$, $x' \cup y \in D$, $x \equiv x'(R)$, $x \cup y \equiv x' \cup y(R)$, also $\lambda_R(x \cup y) = x' \cup y = \lambda_R(x) \cup y$.

Man sieht leicht, daß für gegebenes λ bzw. R resp. gilt $\lambda_{R_\lambda} = \lambda$, $R_{\lambda_R} = R$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Für die Translationen λ, μ soll $\lambda \leqq \mu$ bedeuten, daß $\lambda(x) \leqq \mu(x)$ für alle $x \in S$ gilt. Nach [3] ist die Abbildung $\lambda\mu$ [erklärt durch $\lambda\mu(x) = \lambda(\mu(x))$] eine Translation und $\lambda\mu = \mu\lambda$. Es gilt nun der folgende

Satz 2. *Für die Translationen λ, μ sind die folgende Bedingungen untereinander äquivalent:*

(1) $$\lambda \leqq \mu;$$

(2) $$\lambda\mu = \mu;$$

(3) $$R_\lambda \leqq R_\mu.[3]$$

[3]) D. h. aus $x \equiv y(R_\lambda)$ folgt $x \equiv y(R_\mu)$.

Beweis. Wir haben (1)→(2)→(3)→(1) zu beweisen. Aus (1) folgt $\lambda\mu(x) = \lambda(\mu(x)) \leqq \mu(\mu(x)) = \mu(x)$; wegen $x \leqq \lambda(x)$ ist weiter $\mu(x) \leqq \mu\lambda(x) = \lambda\mu(x)$, also $\lambda\mu = \mu$. Es gelte nun (2). Aus $x \equiv y(R_\lambda)$ folgt $\lambda(x) = \lambda(y)$, $\mu(x) = \lambda\mu(x) = \mu\lambda(x) = \mu(\lambda(x)) = \mu(\lambda(y)) = \mu\lambda(y) = \mu(y)$, d. h. $x \equiv y(R_\mu)$, also gilt (3). Unter Voraussetzung von (3) aus $x \equiv \lambda(x)\,(R_\lambda)$ bekommt man $x \equiv \lambda(x)\,(R_\mu)$, woraus $\mu(x) = \mu\lambda(x) = \lambda\mu(x) \geqq \lambda(x)$ (wegen $\mu(x) \geqq x$) folgt.

Satz 3. *Eine Hüllenoperation λ eines Verbandes S ist genau dann eine Translation, wenn für beliebige $x, y \in S$ gilt:*

(b) *aus $\lambda(x) = x$ und $x \leqq y$ folgt $\lambda(y) = y$.*

Beweis. Ist (b) erfüllt, so $\lambda(\lambda(x) \cup y) = \lambda(x) \cup y$. Aus $x \cup y \leqq \lambda(x) \cup y$ folgt nun $\lambda(x \cup y) \leqq \lambda(x) \cup y$. Die umgekehrte Inklusion folgt aus $\lambda(x) \leqq \lambda(x \cup y)$ und $y \leqq \lambda(y) \leqq \lambda(x \cup y)$. Somit ist λ eine Translation. Daß auch die Umkehrung gilt, folgt aus C.

Satz 4. *Dann und nur dann gibt es zu einem dualen Ideal D eines Verbandes S eine Translation λ von S derart, daß $\lambda(S) = D$, wenn der mengentheoretische Durchschnitt von D mit beliebigem dualen Hauptideal ein duales Hauptideal ist.*

Beweis. Sei gesetzt $D_x = \{t \mid t \in S, t \geqq x\}$. Sei λ eine Translation mit $\lambda(S) = D$. Dann ist $a' = \lambda(a) \in D \cap D_a$.[4]) Ist $x \in D \cap D_a$, so $a \leqq x$, also $a' = \lambda(a) \leqq \lambda(x) = x$. Hieraus folgt, daß $D \cap D_a$ ein von a' erzeugtes duales Hauptideal ist.

Umgekehrt wollen wir jetzt annehmen, daß D die im Satz angegebene Bedingung erfüllt. Ordnen wir jedem Element $x \in S$ dasjenige Element $x' \in S$ zu, für welches $D \cap D_x = D_{x'}$ gilt. Man sieht leicht, daß die Abbildung $x \to x' = \lambda(x)$ eine Hüllenoperation ist. Offenbar $\lambda(t) = t$ für jedes $t \in D$ und $\lambda(S) = D$. Wegen Satz 3 genügt es die Eigenschaft (b) für λ nachzuweisen. Aber aus $\lambda(x) = x$ und $x \leqq y$ folgt $x \in D$ und somit $y \in D$, so daß $\lambda(y) = y$.

Korollar. Ist für eine Translation λ das duale Ideal $\lambda(S)$ kein duales Hauptideal, so gibt es kein Element $u \in S$ derart, daß $u \leqq x$ für alle $x \in D$ gilt.

Gäbe es nämlich ein derartiges Element u, so wäre nach Satz 4 $D_u \cap \lambda(S) = \lambda(S)$ ein duales Hauptideal.

---

[4]) Mit $\cap$ wird der Mengentheoretische Durchschnitt bezeichnet.

Literatur

[1] G. Szász, Translationen der Verbände. Acta fac. rer. nat. Univ. Comenianae. Mathematica, **5**, 449—453 (1961).
[2] G. Szász, Die Translationen der Halbverbände. Acta Sci. Math., **17**, 165—169 (1956).
[3] G. Szász und J. Szendrei, Über die Translationen der Halbverbände. Acta Sci. Math., **18**, 44—47 (1957).

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2.

Do redakcie dodané 15. 1. 1960

Poznámky k transláciám sväzov

M. Kolibiar

Zhrnutie

Táto poznámka nadväzuje na prácu [1] G. Szásza o transláciách sväzov. Transláciou sväzu rozumie sa zobrazenie λ sväzu do seba, splňujúce identitu $\lambda(x \cup y) = \lambda(x) \cup y$. Ukazuje sa súvis translácií s určitými $\cup$-kongruenciami a charakterizujú sa translácie pomocou operácie uzáveru a duálnych ideálov.

Заметки к трансляциям решеток

М. Колибиар

Резюме

В работе [1] исследовал Г. Сас трансляции решеток, т. е. отображения λ решеток в себя, удовлетворяющие тождеству $\lambda(x \cup y) = \lambda(x) \cup y$. В настоящей заметке даются некоторые характеристики трансляций. Находится связь трансляций с некоторыми отношениями $\cup$-конгруентности.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. V, 8–10 MATEMATICA, 1961]
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. V., FASC. VIII-X. MATHEMATICA 1961

Über die Kommutativität einer Klasse archimedisch geordneter Halbgruppen

F. Šik, Brno

Es gilt ein wohlbekannter Satz, daß jede archimedich (einfach) geordnete Gruppe kommutativ ist. Es wurde eine Reihe von Beweisen dieses Satzes gefunden. Einer von ihnen liegt darin (siehe z. B. Birkhoff [1] XIV), daß man die Gruppe in die Gruppe der reellen Zahlen einbettet. Auf eine ähnliche Weise hat Pondělíček [2] bewiesen, daß eine gewisse Klasse archimedisch geordneter Halbgruppen kommutativ ist. In diesem Artikel geben wir einen neuen Beweis des Satzes von Pondělíček. In diesem Beweise nützen wir den Gedanken aus, den Rieger ([3] Satz 1,1) zum Beweis der Kommutativität einer archimedisch geordneten Gruppe gebraucht hat. Der vorliegende Beweis ist wesentlich kürzer als der von Pondělíček. Er stützt sich auf einige seltene größtenteils ersichtliche Hilfssätze, während eine Reihe von achtzehn Hilfssätzen den Beweis in der Arbeit [2] vorgeht.

Mit der Untersuchung einfach geordneter Halbgruppen beschäftigte sich auch N. G. Alimov. In seiner Arbeit [4] ist eine hinreichende Bedingung gefunden, daß eine einfach geordnete Halbgruppe kommutativ sei. Diese Bedingung ist in einem Zusammenhang mit der archimedischen Eigenschaft. Bemerken wir, daß der Begriff der archimedischen Eigenschaft, der in diesem Artikel benutzt ist, ist nicht gleichwertig mit dem aus [4]. Aus dem ersten von ihnen folgt der andere aber nicht umgekehrt.

Unter einer *einfach geordneten Halbgruppe G* verstehen wir einen assoziativen Gruppoid, in dem eine (einfache) Anordnungsrelation $\leqq$ erklärt wird, die mit der Gruppoidoperation folgenderweise verknüpft ist:

$$a, b, c \in G, a \leqq b \Rightarrow ac \leqq bc, ca \leqq cb.$$

Man sagt, daß *G der rechts-(links-) seitigen Kürzungsregel genügt,* wenn aus $ac = bc$ $(ca = cb)$ $a = b$ folgt.

Es sie mit ϱ eine binäre Relation auf G bezeichnet, die folgendermaßen definiert ist:

$a\varrho b \Leftrightarrow$ es gibt ein $r \in G$, das eine von der Gleichungen $ar = b$, $ra = b$, $a = br$, $a = rb$ erfüllt.

Zuletzt sagen wir, daß die ein Einselement e enthaltende Halbgruppe G *von links (von rechts) archimedisch geordnet ist*, wenn ein natürliches n für $a < b$, $e < c$ bezw. $a < b$, $c < e$ existiert, so daß $b \leqq c^n a$ bezw. $c^n b \leqq a$ ($b \leqq ac^n$ bezw. $bc^n \leqq a$) gilt.

Satz. *G sei eine von links archimedisch geordnete Halbgruppe (mit einem Einselement e), die der rechtsseitigen Kürzungsregel genügt. Wenn für $a, b \in G$ aus $a, b > e$ oder $a, b < e$ die Relation $a\varrho b$ folgt, so ist die Halbgruppe G kommutativ.*

Zuerst geben wir fünf Hilfssätze. Die leichten Beweise überlassen wir dem Leser. Überall im folgenden setzen wir voraus, daß die Bedingungen des Satzes erfüllt sind. Noch bemerken wir, daß G die Bedingungen des Satzes erfüllt, wenn wir die Anordnung in G durch die duale ersetzen.

In den Bedingungen des Satzes ist es möglich die Forderung der rechtsseitigen Kürzungsregel durch die linksseitige ersetzen. Unabhängig von der Wahl einer von diesen Möchtigkeiten ist es möglich die rechte archimedische Eigenschaft statt der linken erfordern.

L1. $a < b, c \leqq d \Rightarrow ac < bd$.

L2. $e = ab \Rightarrow e = ba$.

L3. 1. $e < ab \Rightarrow e < ba$; 2. $e > ab \Rightarrow e > ba$.

L4. 1. $x < y, cx = y$ *oder* $xc = y \Rightarrow c > e$; 2. *Es gilt ein dualer Satz.*

L5. 1. *G besitze kein kleinstes Element $> e$. Ist $e < c$, dann existieren $u, q \in G$, so daß $e < q < u < c$, $q^4 \leqq c$, $u^2 \leqq c$ gilt.*

2. *Es gilt ein dualer Satz.*

Beweis. 1. Ein $v \in G$ existiert, so daß $e < v < c$ gilt. Weiter existiert ein $r \in G$, so daß eine der Gleichungen a) $vr = c$, b) $rv = c$, c) $v = cr$, d) $v = rc$ erfüllt ist.

a) b) Es gilt $e < r$ (L4). Es sei $u = \min(v, r)$. Dann ist $e < u$ und es gilt im Fall a) $u^2 \leqq vr = c$, im Fall b) $u^2 \leqq rv = c$.

c) d) Es gilt $r < e$ (L4). Aus der archimedischen Eigenschaft folgt: $e < v$, $r < e \Rightarrow$ es existiert ein natürliches k, so daß $r^k v \leqq e$ gilt. Es sei k minimal. Dann gilt $e < r^{k-1}v$. Wählen wir $u = \min(v, r^{k-1}v)$. Im Fall c) ist $u^2 \leqq vr^{k-1}v = crr^{k-1}v = cr^k v \leqq c$. Im Fall d) gilt $u^2 \leqq vr^{k-1}v = vr^{k-1}rc = vr^k c \leqq c$ (aus L3 folgt nämlich: $e \geqq r^k v \Rightarrow e \geqq vr^k$).

Es ist bewiesen: $e < c \Rightarrow$ es existiert ein $u \in G$, so daß $e < u < c$, $u^2 \leqq c$ gilt. Aus der gerade bewiesenen Behauptung folgt die Existenz eines Elementes $q \in G$, für das $e < q < u$, $q^2 \leqq u$ erfüllt ist. Daher erhält man (L1) $q^4 \leqq u^2 \leqq c$.

2. Dualer Beweis.

Beweis des Satzes.

A. Zuerst setzen wir voraus, daß in G weder das kleinste Element $> e$, noch das größte Element $< e$ existieren. Setzen wir weiter voraus, daß Elemente

$a, b \in G$ existieren, so daß $ab < ba$ gilt. Offenbar gilt $a \neq e \neq b$. Es existiert ein $c \in G$, so daß eine von den Gleichungen I $abc = ba$, II $ab = bac$, III $cab = ba$, IV $ab = cba$ erfüllt ist. Im Fall I und III bezw. II und IV ist $e < c$ bezw. $c < e$ (L4). Im Fall I und III existiert nach L5 ein $q \in G$, so daß $e < q < c$, $q^4 \leqq c$ ist. Die Fälle II und IV sind dual zu I und III. Somit untersuchen wir nur die Fälle I und III. Es können vier Möglichkeiten auftretten: α) $e < a, b$; β) $a, b < e$; γ) $a < e < b$; δ) $b < e < a$. In allen diesen Fällen stellen wir fest, daß $c < q^4$ gilt, was einen Widerspruch mit $q^4 \leqq c$ beinhaltet.

α) Aus der archimedischen Eigenschaft folgt: $e < a, e < b, e < q \Rightarrow$ es existieren natürliche m, n, so daß $q^{m-1} < a \leqq q^m, q^{n-1} < b \leqq q^n$ gilt. Daher folgt $q^{m+n-2} < ab$, $ba \leqq q^{m+n}$. Im Fall I bezw. III gilt $q^{m+n-2}c < abc = ba \leqq q^{m+n} < q^{m+n+2}$ bezw. $cq^{m+n-2} \leqq cab = ba \leqq q^{m+n} < q^{m+n+2}$. In den beiden Fällen ist $c < q^4$.

β) Fall I. $a < e$, $b < e$, $e < q \Rightarrow$ es existieren natürliche m, n, so daß $q^{m-1}a < e \leqq q^m a$, $q^{n-1}b < e \leqq q^n b$ ist. Es gilt: $e \leqq q^m a \Rightarrow q^n b \leqq q^{m+n}ab$; $e \leqq$ $\leqq q^n b \Rightarrow e \leqq q^{m+n}ab \Rightarrow c \leqq q^{m+n}abc = q^{m+n}ba$. Weiter ist $q^{n-1}b < e \Rightarrow q^{m+n-2}ba \leqq$ $\leqq q^{m-1}a$; $q^{m-1}a < e \Rightarrow q^{m+n-2}ba < e \Rightarrow q^{m+n}ba \leqq q^2$. Schließlich erhalten wir $c \leqq q^2 < q^4$.

Fall III. Es gilt $ca \leqq e$, denn aus $ca > e$ folgt $caba > ba = cab$ und daher $a > e$, ein Widerspruch mit der Voraussetzung. Aus der archimedischen Eigenschaft folgt: $ca < e$, $b < c$, $e < q \Rightarrow$ es existieren natürliche m, n, so daß $q^{m-1}ca \leqq e \leqq q^m ca$, $q^{n-1}b < c \leqq q^n b$ gilt. Ist $ca = e$, dann gelten die zugehörigen Ungleichungen für $m = 1$. Es gilt: $e \leqq q^m ca \Rightarrow q^n b \leqq q^{m+n}cab$; $c \leqq q^n b \Rightarrow c \leqq q^{m+n}cab = q^{m+n}ba$, Weiter ist $q^{n-1}b < c \Rightarrow q^{m+n-2}ba \leqq q^{m-1}ca \leqq e \Rightarrow q^{m+n}ba \leqq q^2$. Schließlich ergibt sich $c \leqq q^2 < q^4$.

γ) Fall I. $a < e, b > e, e < q \Rightarrow$ es existieren natürliche m, n, so daß $q^{m-1}a < e \leqq$ $\leqq q^m a$, $q^{n-1} < b \leqq q^n$ ist. Es gilt: $e \leqq q^m a$, $q^{n-1} < b \Rightarrow q^{n-1} \leqq q^m ab \Rightarrow q^{n-1}c \leqq$ $\leqq q^m abc = q^m ba$. Weiter ist $b \leqq q^n \Rightarrow q^{m-1}ba \leqq q^{m+n-1}a \Rightarrow q^m ba \leqq q^{m+n}a$; $q^{m-1}a <$ $< e \Rightarrow q^{m+n}a \leqq q^{n+1}$; daher folgt $q^m ba \leqq q^{n+1}$. Schließlich erhalten wir $q^{n-1}c \leqq$ $\leqq q^{n+1} < q^{n+3}$; also ist $c < q^4$.

Fall III. Es gilt $e < b \Rightarrow ca \leqq cab = ba \Rightarrow c \leqq b$. Ebenso wie im Fall β) III ist $ca \leqq e$. Aus der archimedischen Eigenschaft folgt: $ca < e$, $c < b$, $e < q \Rightarrow$ es existieren natürliche m, n, so daß $q^{m-1}ca \leqq e \leqq q^m ca$, $q^{n-1}b \leqq c \leqq q^n b$ gilt. Ist $ca = e$ oder $c = b$, dann gelten die zugehörigen Ungleichungen für $m = 1$ oder $n = 1$. Es gilt: $e \leqq q^m ca$, $q^{n-1}c \leqq b \Rightarrow q^{n-1}c \leqq q^m cab = q^m ba$. Weiter ist: $b \leqq q^n c \Rightarrow q^m ba \leqq q^{m+n}ca$; $q^{m-1}ca \leqq e \Rightarrow q^{m+n}ca \leqq q^{n+1}$; daher schließen wir $q^m ba \leqq q^{n+1}$. Schließlich erhält man $q^{n-1}c \leqq q^m ba \leqq q^{n+1} < q^{n+3}$; daraus folgt $c < q^4$.

δ) Fall I. $a > e, b < e, e < q \Rightarrow$ es existieren natürliche m, n, so daß $q^{m-1} < a \leqq$ $\leqq q^m$, $q^{n-1}b < e \leqq q^n b$ ist. Es gilt $q^{m-1} < a \Rightarrow q^{m+n-1}b \leqq q^n ab$; $e \leqq q^n b \Rightarrow$

$\Rightarrow q^{m-1} \leqq q^{m+n-1}b$; daraus folgt $q^{m-1} \leqq q^n ab$, $q^{m-1}c \leqq q^n abc = q^n ba$. Weiter ist: $a \leqq q^m$, $q^{n-1}b < e \Rightarrow q^{n-1}ba < q^m \Rightarrow q^n ba \leqq q^{m+1}$. Schließlich erhalten wir $q^{m-1}c \leqq q^n ba \leqq q^{m+1} < q^{m+3}$; also ist $c < q^4$.

Fall III. $ca > e$, $b < c$, $e < q \Rightarrow$ es existieren natürliche m, n, so daß $q^{m-1} < ca \leqq q^m$, $q^{n-1}b < c \leqq q^n b$ ist. Es gilt: $q^{m-1} < ca \Rightarrow q^{m+n-1}b < q^n cab = q^n ba$; $c \leqq q^n b \Rightarrow q^{m-1}c \leqq q^{m+n-1}b$; daher folgt $q^{m-1}c < q^n ba$. Weiter ist $q^{n-1}b < c \Rightarrow q^n ba \leqq qca$; $ca \leqq q^m \Rightarrow qca \leqq q^{m+1}$; daher schließen wir $q^n ba \leqq q^{m+1}$. Schließlich ergibt sich $q^{m-1}c < q^{m+1} < q^{m+3}$; somit ist $c < q^4$.

Der Satz ist im Fall bewiesen, wenn weder das kleinste Element $> e$ noch das größte Element $< e$ existieren.

B. Setzen wir voraus, daß x das kleinste Element $> e$ ist. Es gilt $e < x < x^2 < \ldots < x^k < x^{k+1} < \ldots$ für ein beliebiges natürliches k. Setzen wir voraus, daß $e = x^0, x, x^2, \ldots, x^{i+1}$, für i, $0 \leqq i < k$, alle Elemente in G zwischen e und x^{i+1} sind. Für $k = 1$ ist die Induktionsvoraussetzung offenbar erfüllt. Setzen wir voraus, daß der Fall nicht für $i = k$ ist. Es existiere also ein $a \in G$, $x^k < a < x^{k+1}$. Dann existiert ein $c \in G$, so daß bezw. 1) $cx = a$, 2) $xc = a$, 3) $x = ac$, 4) $x = ca$ gilt.

1. $cx = a < x^{k+1} \Rightarrow c < x^k \Rightarrow c \leqq x^{k-1} \Rightarrow cx \leqq x^k < a$, während $cx = a$ gilt.
2. $xc = a < x^{k+1} \Rightarrow c < x^k \Rightarrow c \leqq x^{k-1} \Rightarrow xc \leqq x^k < a$, während $xc = a$ gilt.
3., 4. $c < e < x \Rightarrow$ es existiert ein natürliches n, so daß $x^{n-1}c < e \leqq x^n c$ ist.

Es gilt weiter: $e \leqq x^n c \Rightarrow e \leqq cx^n \Rightarrow x \leqq cx^n \Rightarrow e \leqq cx^{n-1} \Rightarrow e \leqq x^{n-1}c$; gleichzeitig aber gilt $x^{n-1}c < e$, was einen Widerspruch mit $e \leqq x^{n-1}c$ beinhaltet. Es existiert also kein $a \in G$ mit der Eigenschaft $x^k < a < x^{k+1}$. Somit sind alle positive Elemente aus G: $x, x^2, x^3, \ldots$. Wenn kein Element $< e$ existiert, so ist die Behauptung bewiesen. Wenn ein $y \in G$, $y < e$, gibt, dann existiert ein natürliches n, so daß $x^n y \geqq e$ ist. Nach L 2, L 3 gilt auch $yx^n \geqq e$. Daher folgt: $y < y_1 < y_2 < \ldots < e \Rightarrow e \leqq yx^n < y_1 x^n < y_2 x^n < \ldots < x^n$, also ist nur eine endliche Zahl verschiedener Elemente in der Menge $\{y_1, y_2, \ldots\}$; daraus folgt die Existenz des größten Elementes $< e$.

Ist y das größte Element $< e$, dann beweist man dual, daß alle Elemente $< e$ $y, y^2, y^3, \ldots$ sind und solange ein Element $> e$ existiert, daß ein kleinstes Element $> e$ gibt. Im Fall B ist also G der additiven Halbgruppe aller nichtnegativen bezw. aller nichtpositiven bezw. aller ganzen Zahlen isomorph. Der Satz ist bewiesen.

Literatur

[1] G. Birkhoff. Lattice Theory, rev. ed. 1948, New York.

[2] B. Pondělíček. Bemerkung zu einer Halbgruppe der Endomorphismen auf einer einfach geordneten Menge. Čas. pěst. mat. 85 (1960) 410—417.

[3] L. Rieger. On the ordered and cyclically ordered groups. I—III. Věstník Král. č. spol. nauk, tř. mat.-přír. I 6 (1946) 1—31, II 7 (1947) 1—33, III 8 (1948) 1—26. (Tschechisch).

[4] N. G. Alimov. *Ob uporjadočennych polugruppach.* Izvestija AN SSSR, ser. mat. 14 (1950) 569—576.

Do redakcie dodané 20. 12. 1959

Adresa autora: Katedra matematiky Univerzity Brno, Kotlářská 2

Komutativita jedné třídy archimedovsky uspořádaných pologrup

F. Šik, Brno

Resumé

O archimedovsky (jednoduše) uspořádaných grupách platí známá věta, že každá taková grupa je komutativní. Z celé řady důkazů jeden z nich spočívá v tom (viz např. Birkhoff [1] XIV), že se grupa vnoří do grupy reálných čísel. Podobné myšlenky použil Pondělíček [2] k důkazu, že jistá třída archimedovsky uspořádaných pologrup je komutativní. V tomto článku podávám nový podstatně stručnější důkaz věty dokázané Pondělíčkem.

Pod *jednoduše uspořádanou pologrupou* G rozumíme asociativní grupoid, který je jednoduše uspořádán relací $\leqq$ a pro jehož prvky $a, b, c \in G$ platí $a \leqq b \Rightarrow ac \leqq bc$, $ca \leqq cb$. Řekneme, že v G platí *pravidlo o krácení zprava (zleva)*, když $ac = bc$ $(ca = cb) \Rightarrow a = b$. Označme ϱ binární relaci na G, definovanou takto $a\varrho b \Leftrightarrow$ existuje $r \in G$ tak, že platí resp. $ar = b$, $ra = b$, $a = br$, $a = rb$. Konečně řekneme, že G, obsahující jedničku e, je *zleva (zprava) archimedovsky uspořádaná*, jestliže pro $a < b$, $e < c$ resp. $a < b$, $c < e$ existuje přirozené n tak, že $b \leqq c^n a$ resp. $c^n b \leqq a$ ($b \leqq ac^n$ resp. $bc^n \leqq a$).

Věta. *Nechť G je zleva archimedovsky uspořádaná pologrupa (s jedničkou e), ve které platí pravidlo o krácení zprava. Nechť pro $a, b \in G$ platí: $a, b > e$ nebo $a, b < e \Rightarrow a\varrho b$. Potom pologrupa G je komutativní.*

V podmínkách věty je možné požadavek krácení zprava zaměnit za levé krácení. Nezávisle na volbě jedné z těchto dvou možností je možné požadovat archimedovskou vlastnost zprava místo zleva.

О коммутативности одного класса архимедовых упорядоченных полугрупп

Ф. Шик, Брно

Резюме

Известна теорема, что архимедова (просто) упорядоченная группа коммутативна. Одно из большего числа доказательств заключается в этом (см. напр. Биркгоф [1] XIV), что группа погружится в группу действительных чисел. Аналогичную идею применил Понделичек [2] к доказательству, что специальный класс архимедовых упорядоченных полугрупп коммутативен. В этой статьи дано новое существенным образом более краткое доказательство Понделичком доказываемой теоремы.

Под *просто упорядоченной полугруппой* G подразумывается ассоциативный группоид, который просто упорядочен отношением $\leqq$ и для a, b, $c \in G$ из $a \leqq b$ следует $ac \leqq bc$, $ca \leqq cb$. Мы скажем, что в G имеет место правило о сокращении справа (слева), когда из $ac = bc (ca = cb)$ следует $a = b$. Обозначайме буквой ϱ бинарное следующим образом в G определенное отношение: $a\varrho b \Leftrightarrow$ существует $r \in G$ так, что бы было выполнено одно из уравнений $ar = b$, $ra = b$, $a = rb$, $a = br$. Наконец мы говорим, что единицу e заключающая упорядоченная полугруппа G слева (справа) архимедова, если для $a < b$, $e < c$ или $a < b$, $c < e$ существует натуральное n такое, что $b \leqq c^n a$ или $c^n b \leqq a$ ($b \leqq ac^n$ или $bc^n \leqq a$).

Теорема. *Пусть G слева архимедова упорядоченная полугруппа (с единицей e), в которой имеет место правило о сокращении справа. Пусть для a, $b \in G$ из a, $b > e$ или a, $b < e$ следует $a\varrho b$. То полугруппа G коммутативна.*

В условиях теоремы можно требование сокращения справа заменить за сокращение слева. В обоих случаях можно требовать архимедово свойство справа вместо слева.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. V, 8–10 MATEMATICA, 1961]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. V., FASC. VIII-X. MATHEMATICA 1961

O rozložení nulových bodů řešení lineární diferenciální rovnice $y'' = Q(t)\,y$ a jejich derivací

E. Barvínek, Brno

V tomto článku dokážeme, že existuje nekonečně mnoho lineárních diferenciálních rovnic $y'' = Q(t)\,y$, které mají předem danou základní centrální dispersi 1. druhu $\phi(t)$ a odvodíme dvě nutné a postačující podmínky pro splynutí základních centrálních dispersí 3. a 4. druhu.

1. Nechť $Q(t)$ je spojitá funkce v intervalu $(-\infty, \infty) = I$. Diferenciální rovnici

$$\text{(a)} \qquad y'' = Q(t)\,y$$

budeme nazývat oscilatorickou, jestliže každé její řešení má nekonečně mnoho nulových bodů napravo i nalevo od libovolného čísla t. Pro rozložení nulových bodů řešení dif. rovnice (a) je charakteristická funkce $\phi(t)$, kterou definoval O. Borůvka [1] a kterou nazval základní centrální dispersí 1. druhu dif. rovnice (a). Tuto funkci budeme v dalším nazývat krátce dispersí 1. druhu.

Buď t libovolné číslo. Buď y řešení dif. rovnice (a), které vymizí v čísle t. Hodnota $\phi(t)$ je první nulové místo řešení y napravo od t.

Disperse 1. druhu $\phi(t)$ dif. rovnice (a) má [1] vlastnosti:

(i) je funkcí třídy C^3 v I,

(ii) v I roste od $-\infty$ do ∞, přičemž má kladnou 1. derivaci,

(iii) $\phi(t) > t$.

Nechť $q(t)$ je spojitá funkce v intervalu I. Diferenciální rovnici (a) můžeme transformovat na dif. rovnici téhož tvaru

$$\text{(A)} \qquad Y'' = q(t)\,Y.$$

Transformaci řešení y, Y dif. rovnic (a), (A) realisují řešení $X(t)$ nelineární dif. rovnice 3. řádu

$$\text{(b)} \qquad -\{X, t\} + q(X)\,X'^2 = Q(t),$$

kde $\{X, t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{X''}{X'}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{X''}{X'}\right)^2$ je Schwarzova derivace funkce $X(t)$, vztahem [4]

$$(1) \qquad y(t) = \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}.$$

Jsou-li dif. rovnice (a), (A) oscilatorické, existují [4] řešení $X(t)$ dif. rovnice (b) s vlastnostmi (i), (ii). Je-li $\Phi(t)$ disperse 1. druhu dif. rovnice (A), pak pro tato $X(t)$ platí funkcionální rovnice [3]

$$(2) \qquad X[\phi(t)] = \Phi[X(t)].$$

Je zřejmé, že funkcí $\phi(t)$ je úplně dáno rozložení nulových bodů všech řešení dif. rovnice (a).

Zvláštním případem je ekvidistantní rozložení nulových bodů. Je-li konstantní vzdálenost dvou sousedních nulových bodů každého řešení dif. rovnice (a) rovna d, pak disperse 1. druhu je rovna $\phi(t) = t + d$.

Tímto případem se již zabýval M. Laitoch [2], který dokázal dvě věty. V jedné udává nutnou, v druhé postačující podmínku pro to, aby dif. rovnice (a) měla dispersi 1. druhu $\phi(t) = t + d$. Laitochovy věty nahradíme jedinou podmínkou nutnou a postačující k tomu, aby dif. rovnice (a) měla dispersi 1. druhu $\phi(t) = t + d$.

Theorem 1. Nechť $X(t)$ je libovolná funkce s vlastnostmi (i), (ii). Dif. rovnice (a) má dispersi 1. druhu $\phi(t) = t + d$, když a jen když existuje funkce $X(t)$ s vlastnostmi:

$$(\alpha) \qquad X(t) - t \text{ má periodu } d,$$

$$(\beta) \qquad Q(t) = -\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 X'^2 - \{X, t\}.$$

Důkaz. Nechť dif. rovnice (a) má dispersi 1. druhu $\phi(t) = t + d$. Nechť $X(t)$ je libovolné řešení dif. rovnice (β), mající vlastnosti (i), (ii). Dif. rovnice (A), v níž $q(t) = -\left(\frac{\pi}{d}\right)^2$, má dispersi 1. druhu $\Phi(t) = t + d$. Funkce $X(t)$ realizuje transformaci dif. rovnice (a) na dif. rovnici (A), přičemž vyhovuje diferenční rovnici $X(t + d) = X(t) + d$, která je ekvivalentní s podmínkou (α).

Naopak, nechť existuje funkce $X(t)$ s vlastnostmi (i), (ii), (α). Definujme funkci $Q(t)$ vzorcem (β). Zřejmě je $Q(t)$ spojitá v I. Funkce $X(t)$ realizuje transformaci dif. rovnice (A), v níž $q(t) = -\left(\frac{\pi}{d}\right)^2$, na dif. rovnici (a), a tedy podle (1) je funkce

$y = \dfrac{\sin \frac{\pi}{d} X(t)}{\sqrt{X'(t)}}$ řešením dif. rovnice (a). Odtud plyne, že dif. rovnice (a) je oscilatorická. Její disperse 1. druhu $\phi(t)$ je vázána s dispersí $\Phi(t) = t + d$ dif. rovnice (A), v níž $q(t) = -\left(\dfrac{\pi}{d}\right)^2$, vztahem $X[\phi(t)] = X(t) + d$. Na druhé straně $X(t)$ má vlastnost (α), ekvivalentní s diferenční rovnicí $X(t + d) = X(t) + d$. Odtud plyne, že $\phi(t) = t + d$.

V obecném případě je disperse 1. druhu $\phi(t)$ libovolná funkce splňující podmínky (i), (ii), (iii).

Nutnou, avšak ne postačující podmínkou k tomu, aby dif. rovnice (a) měla předem danou dispersi 1. druhu $\phi(t)$ je, aby [1] funkce $Q(t)$ vyhovovala funkcionální rovnici $Q(t) = \phi'^2 Q[\phi(t)] - \{\phi, t\}$. Laitoch vyjádřil explicitně koeficienty dif. rovnice (a), které mají předem danou funkci $\phi(t)$ za dispersi 1. druhu, pomocí [5] řešení $X(t)$ funkcionální rovnice (2), kde $\Phi(t) = t + d$, avšak pominul otázku existence a počtu jejích řešení. Řešením této speciální funkcionální rovnice se zabýval N. H. Abel [6], který o dané funkci $\phi(t)$ nic nepředpokládal. Abel převádí otázku určení všech řešení zmíněné funkcionální rovnice na otázku existence alespoň jednoho řešení $X^{-1}(t)$ funkcionální rovnice $X^{-1}(t + 1) = \phi[X^{-1}(t)]$, jíž vyhovují funkce inversní k $X(t)$, avšak existenci řešení poslední funkcionální rovnice nedokazuje.

Jestliže o funkci $\phi(t)$ předpokládáme, že má vlastnosti (i), (ii), (iii), není těžké dokázat, že existuje nekonečně mnoho řešení $X(t)$ funkcionální rovnice

$$X[\phi(t)] = X(t) + d, \tag{3}$$

majících vlastnosti (i), (ii). Použijeme metody M. Kuczmy [7], který se zabýval určením spojitých řešení podobné funkcionální rovnice.

Theorem 2. Nechť $\phi(t)$ má vlastnosti (i), (ii), (iii). Potom existuje nekonečně mnoho řešení $X(t)$ funkcionální rovnice (3) majících vlastnosti (i), (ii).

Důkaz. Nechť pro každé celé n značí $\phi^n(t)$ n-tou iteraci funkce $\phi(t)$, t. j. $\phi^0(t) = t$, $\phi^{n+1}(t) = \phi[\phi^n(t)]$, $\phi^{n-1}(t) = \phi^{-1}[\phi^n(t)]$ pro $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Tedy kupř. $\phi^{-1}(t)$ je inversní funkce k $\phi(t)$.

Zvolme libovolně číslo t_0. Nechť $t_n = \phi^n(t_0)$. Pomocí bodů t_n se rozdělí celá číselná osa na intervaly tvaru $\langle t_n, t_{n+1})$.

Nechť $\gamma(t)$ je libovolná funkce v intervalu $\langle t_0, t_1)$, která tam má spojité derivace do 3. řádu včetně, přičemž 1. derivace je kladná, a pro kterou platí podmínky

$$\lim_{t \to t_1^-} \gamma(t) = \gamma(t_0) + d, \tag{j}$$

$$\lim_{t \to t_1^-} \gamma'(t) = \frac{\gamma'^+(t_0)}{\phi'(t_0)}, \tag{jj}$$

(jjj)
$$\lim_{t\to t_1^-} \gamma''(t) = \frac{1}{\phi'(t_0)}\left[\frac{\gamma'^+(t)}{\phi'(t)}\right]'^+_{t_0},$$

(jjjj)
$$\lim_{t\to t_1^-} \gamma'''(t) = \frac{1}{\phi'(t_0)}\left[\frac{1}{\phi'(t)}\left(\frac{\gamma'^+(t)}{\phi'(t)}\right)'^+\right]'^+_{t_0}.$$

Definujme funkci $X(t)$ indukcí následujícím způsobem:

$$X(t) = \gamma(t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_0, t_1),$$
$$X(t) = X[\phi^{-1}(t)] + d \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_n, t_{n+1}), \quad n > 0,$$
$$X(t) = X[\phi(t)] - d \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_n, t_{n+1}), \quad n < 0.$$

Funkce $X(t)$ je definována na celé číselné ose, je řešením funkcionální rovnice (3) a má vlastnosti (i), (ii).

Uvedeme explicitní vyjádření koeficientů $Q(t)$ dif. rovnic (a), majících předem danou dispersi 1. druhu $\phi(t)$, které bude zahrnovat Laitochovo vyjádření jako zvláštní případ.

Theorem 3. Nechť $\phi(t)$ má vlastnosti (i), (ii), (iii). Nechť $X(t)$ je libovolné řešení funkcionální rovnice (3), mající vlastnosti (i), (ii). Buď $q(t)$ libovolná funkce taková, že dif. rovnice (A) má dispersi 1. druhu $\Phi(t) = t + d$. Nechť $Q(t)$ je funkce definovaná vzorcem

(b)
$$Q(t) = X'^2 q(X) - \{X, t\}.$$

Potom dif. rovnice (a) je oscilatorická a má dispersi 1. druhu $\phi(t)$.

Důkaz. Zřejmě je funkce $Q(t)$ spojitá v I. Funkce $X(t)$ realizuje transformaci řešení $Y(t)$ dif. rovnice (A) na řešení dif. rovnice (a), a tedy podle (1) je funkce $y = \dfrac{Y[X(t)]}{\sqrt{X'(t)}}$ řešením dif. rovnice (a). Odtud plyne, že dif. rovnice (a) je oscilatorická.

Funkce $X(t)$ vyhovuje jednak funkcionální rovnici (2): $X[\bar{\phi}(t)] = X(t) + d$, kde $\bar{\phi}(t)$ značí dispersi 1. druhu dif. rovnice (a), jednak funkcionální rovnici (3), t. j. $X[\phi(t)] = X(t) + d$. Odtud plyne $\bar{\phi}(t) = \phi(t)$.

Volíme-li $q(t) = -\pi^2$ a $d = 1$, dostaneme Laitochovo vyjádření [5].

2. Pro rozložení nulových bodů řešení dif. rovnice (a) a jejich derivací jsou charakteristické funkce, zavedené [1] O. Borůvkou pod názvem základní centrální disperse 2., 3. a 4. druhu.

Buď $Q(t) < 0$ a t_0 libovolné číslo. Nechť u, resp. v je řešení dif. rovnice (a), pro které $u(t_0) = 0$, resp. $v'(t_0) = 0$. První nulové místo napravo od čísla t_0 funkce v', resp. u', resp. v je hodnota základní centrální disperse 2. druhu ψ, resp. 3. druhu χ, resp. 4. druhu ω v čísle t_0. V dalším budeme tyto funkce stručně nazývat disperse 2., 3. a 4. druhu.

Ve zvláštním případě, kdy nastává rovnost $\chi = \omega$, mluvíme o splynutí dispersí 3. a 4. druhu. To nastane např. u dif. rovnice $y'' = -k^2 y$.

Jestliže splývají disperse χ a ω, pak také splývají disperse ϕ a ψ. Proto dif. rovnice (a), pro něž $\chi = \omega$ je nutno hledat mezi rovnicemi, které mají dispersi 1. druhu $\phi(t) = t + d$, [2].

Theorem 4. Nechť $Q(t)$ je záporná v I. Nechť dif. rovnice (a) má dispersi 1. druhu $\phi(t) = t + d$. Potom $\chi = \omega$ tehdy a jen tehdy, jestliže pro funkci $X(t)$ z theorému 1., pro kterou $X(0) = 0$, $X'(0) = 1$, $X''(0) = 0$, platí identita

$$\frac{X''[\omega(t)]}{X'^2[\omega(t)]} + \frac{X''(t)}{X'^2(t)} = 0.$$

Důkaz. Nechť $S(t)$, $C(t)$ jsou řešení dif. rovnice (a), určená počátečními podmínkami $S(0) = 0, S'(0) = 1, C(0) = 1, C'(0) = 0$. Nechť $X(t)$ je funkce z theorému 1., pro kterou $X(0) = X''(0) = 0$, $X'(0) = 1$. Tato funkce transformuje současně dvojici $S(t)$, $C(t)$ na $\sin t$ a $\cos t$, takže platí

(4) $$S(t) = \frac{\sin \frac{\pi}{d} X(t)}{\sqrt{X'(t)}}, \quad C(t) = \frac{\cos \frac{\pi}{d} X(t)}{\sqrt{X'(t)}}.$$

Nechť t_0 je libovolné číslo. K němu přiřaďme dvojici u, v řešení dif. rovnice (a), určenou počátečními podmínkami $u(t_0) = 0$, $u'(t_0) = 1$, $v(t_0) = 1$, $v'(t_0) = 0$. Tato řešení se vyjádří pomocí $S(t)$, $C(t)$ vzorci

(5) $$\begin{aligned} u(t) &= -S(t_0)\, C(t) + C(t_0)\, S(t), \\ v(t) &= S'(t_0)\, C(t) - C'(t_0)\, S(t). \end{aligned}$$

Naopak, řešení $S(t)$, $C(t)$ se vyjádří pomocí u, v vzorci

(6) $$\begin{aligned} S(t) &= S'(t_0)\, u(t) + S(t_0)\, v(t), \\ C(t) &= C'(t_0)\, u(t) + C(t_0)\, v(t). \end{aligned}$$

Vypočteme-li $u'(t)$ a vyjádříme-li je pomocí $u(t)$, $v(t)$, dostaneme vzorec

$$u'(t) =$$

$$= \left\{[S(t_0)\, S'(t_0) + C(t_0)\, C'(t_0)]\, X'(t) - \frac{1}{2}\, [C(t_0)\, S'(t_0) - S(t_0)\, C'(t_0)]\, \frac{X''(t)}{X'(t)}\right\} u(t) +$$

(7) $$+ [S^2(t_0) + C^2(t_0)]\, X'(t)\, v(t).$$

Z (4) plyne $S^2(t_0) + C^2(t_0) = \dfrac{1}{X'(t_0)}$, a dále derivováním podle t_0:

$$S(t_0)\, S'(t_0) + C(t_0)\, C'(t_0) = -\frac{1}{2}\, \frac{X''(t_0)}{[X'(t_0)]^2}.$$

Vzorec (7) pak dává

$$(8) \qquad u'(t) = -\frac{1}{2}\left[\frac{X''(t_0)}{X'^2 t_0)} + \frac{X''(t)}{X'^2(t)}\right] X'(t)\, u(t) + \frac{X'(t)}{X'(t_0)}\, v(t).$$

Ze vzorce (8) plyne, že $\frac{X''(t_0)}{X'^2(t_0)} + \frac{X''[\omega(t_0)]}{X'^2[\omega(t_0)]} = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže $u'[\omega(t_0)] = 0$, tj., jestliže $\chi(t_0) = \omega(t_0)$.

Theorem 5. Nechť $Q(t) < 0$. Potom $\chi = \omega$ tehdy a jen tehdy, jestliže $Q(t) = -k^2\omega'(t)$.

Důkaz. Disperse 4. druhu má všude kladnou derivaci [1] danou vzorcem

$$(9) \qquad \omega'(t) = -\,Q(t)\,\frac{u(t)\, v[\omega(t)] - u[\omega(t)]\, v(t)}{u'(t)\, v'[\omega(t)] - u'[\omega(t)]\, v'(t)},$$

kde $u(t)$, $v(t)$ jsou libovolná lineárně nezávislá řešení dif. rovnice (a). Funkce $\frac{Q(t)}{\omega'(t)}$ má derivaci

$$\left(\frac{Q}{\omega'}\right)' = -\frac{\{Q[uv(\omega) - u(\omega)\, v] - \omega'[u'v'(\omega) - u'(\omega)\, v']\}[uv'(\omega) - u'(\omega)\, v] +}{[uv(\omega) - u(\omega)\, v]^2}$$

$$\frac{+\{\omega' Q(\omega)[uv(\omega) - u(\omega)\, v] - [u'v'(\omega) - u'(\omega)\, v']\}[u'v(\omega) - u(\omega)\, v']}{[uv(\omega) - u(\omega)\, v]^2}.$$

Výraz tvaru $u'(\eta)\, v(\xi) - u(\xi)\, v'(\eta)$ je roven nule ([1], str. 204) když a jen když ξ je nulovým místem některého řešení dif. rovnice (a), a η je nulovým místem jeho derivace.

Je tedy $u'(t)\, v[\omega(t)] - u[\omega(t)]\, v'(t) = 0$, takže

$$(10) \qquad \left(\frac{Q}{\omega'}\right)' = -\frac{Q[uv(\omega) - u(\omega)\, v] - \omega'[u'v'(\omega) - u'(\omega)\, v']}{[uv(\omega) - u(\omega)\, v]^2}\,[uv'(\omega) - u'(\omega)\, v].$$

Je-li $\chi = \omega$, pak $uv'(\omega) - u'(\omega)\, v = 0$, a tedy $Q = -k^2\omega'$.

Naopak, nechť $Q(t) = -k^2\omega'(t)$. Čitatel zlomku na pravé straně (10) nemůže být roven nule pro žádné t_0, neboť to by spolu s (9) dávalo $\omega'(t_0) = 0$, zatím co $\omega'(t) > 0$, ([1], str. 211). Proto je nutně $uv'(\omega) - u'(\omega)\, v = 0$, takže když t je nulovým místem některého řešení dif. rovnice (a), pak $\omega(t)$ je nulovým místem jeho derivace, což značí, že $\chi = \omega$.

Z theorému 5. plyne, že při $\chi(t) = \omega(t) = t + \text{konst.}$, je nutně $Q(t) = -k^2$. V obecném případě jsou funkce $\chi(t)$ a $\omega(t)$ různé. V třídě dif. rovnic (a), pro něž disperse 1. druhu je tvaru $\phi(t) = t + d$, jsou disperse 3. a 4. druhu speciálního tvaru, i když nejsou nutně splývající.

Theorém 6. Nechť $Q(t) < 0$. Nechť disperse 1. druhu dif. rovnice (a) je $\phi(t) = t + d$. Potom disperse 3. a 4. druhu dif. rovnice (a) jsou tvaru $\chi(t) = t + \mu(t)$, $\omega(t) = t + \nu(t)$, kde $\mu(t) > 0$, $\nu(t) > 0$ jsou periodické funkce s periodou d, mající spojitou derivaci větší než -1.

Důkaz. Funkce $\chi(t)$, $\omega(t)$ splňují v tomto případě diferenční rovnici $f(t + d) = f(t) + d$ a mají kladné derivace.

Literatura

[1] O. Борувка, О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-го порядка, Чехословацкий математический журнал, Т. 3 (78), 199–255.

[2] М. Лайтох, Совпадение центральных дисперсий 1-го и 2-го рода, соответствующих дифференциальному уравнению второго порядка $y'' = Q(t)\,y$, Чехословацкий математический журнал, Т. 6 (81) 1956, 365–380.

[3] Е. Барвинек, О свойстве заменительности дисперсий и решений дифференциального уравнения $\sqrt{|X'|}\left(\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\right)'' + q(X)\,X'^2 = Q(t)$, Spisy Přírodovědecké fakulty university v Brně, č. 393, 1958, 141–155.

[4] O. Borůvka, Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre, Annali di matematica pura ed applicata, S. IV, T. XLI, 1956, 325–342.

[5] M. Laitoch, O jistých řešeních funkční rovnice $F[\phi(x)] - F(x) = 1$, Časopis pro pěstování matematiky, 81, 1956, 420–425.

[6] Oeuvres complétes de N. H. Abel, Tome second, 36–39, Christiania 1881.

[7] M. Kuczma, On the functional equation $\phi(x) + \phi[f(x)] = F(x)$, Annales Polonici matematici, VI, 281–287.

Adresa autora: Katedra matematiky University Brno, Kotlářská 2.

Do redakcie došlo 20. 12. 1959

О размещении нулевых и экстремальных значений решений дифференциального уравнения $y'' = Q(t)\,y$

Э. Барвинек

Резюме

Рассмотрим дифференциальное уравнение

(a) $$y'' = Q(t)\,y,$$

причем коэффициент $Q(t)$ является в интервале $I = (-\infty, \infty)$ непрерывной функцией.

Для размещения нулевых и экстремальных значений решений дифф. уравнения (a) характерны дисперсии [1].

Пусть t_0 любое число и u, или же v решение дифф. уравнения (a), для которого $u(t_0) = 0$, или же $v'(t_0) = 0$. Первое следующее за числом t_0 нулевое значение функции u, или же v', или же u', или же v является значением дисперсии 1-го рода ϕ, или же 2-го рода ψ, или же 3-го рода χ, или же 4-го рода ω в числе t_0.

Если решения дифф. уравнения (a) в интервале I колеблются, то дисперсия 1-го рода $\phi(t)$ обладает следующими свойствами:

(i) является функцией класса C^3 в I,

(ii) возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ в I, и имеет положительную производную,

(iii) $\phi(t) > t$.

Если $\phi(t) = t + d$, то расстояние соседних нулевых значений всякого решения дифф. уравнения (a) равно d. Это имеет место тогда и только тогда, когда существует функция $X(t)$, обладающая свойствами (i), (ii), такая, что $X(t) - t$ имеет период d, и что справедливо уравнение

(1) $$Q(t) = -\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 X'^2 - \{X, t\},$$

где $\{X, t\}$ обозначает производную Шварца $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X''}{X'}\right)' - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{X''}{X'}\right)^2.$

Теорема 1. Пусть $\phi(t)$ произвольная функция, обладающая свойствами (i), (ii), (iii). Пусть $q(t)$ – коэффициент дифф. уравнения $Y'' = q(t)\,Y$, имеющего дисперсию 1-го рода $\Phi(t) = t + d$. Функциональное уравнение

(2) $$X[\phi(t)] = X(t) + d$$

имеет бесконечно много решений $X(t)$, обладающих свойствами (i), (ii). Пусть $X(t)$ такое решение и $Q(t)$ функция, определенная формулой

(b) $$Q(t) = X'^2 q(X) - \{X, t\}.$$

Тогда дифф. уравнение (a) имеет дисперсию 1-го рода $\phi(t)$.

Пусть далее в дифф. уравнении (a) коэффициент $Q(t)$ отрицательный. Для частного случая размещения нулевых и екстремальных значений решений дифф. уравнения (a) характерно совпадение дисперсий 3-го и 4-го рода, это значит $\chi = \omega$. Это например имеет место для уравнения $Y'' = -k^2 Y$.

Для того необходимо, чтобы $\phi = \psi$, и это справедливо тогда и только тогда, когда $\phi(t) = t + d$, [2].

Теорема 2. Для дифф. уравнения (a) имеет место $\chi = \omega$ тогда и только тогда, когда $Q(t) = -k^2\omega'(t)$.

Теорема 3. Для дифф. уравнения (a) имеет место $\chi = \omega$ тогда и только тогда, когда существует постоянная $d > 0$ такая, что решение $X(t)$ нелинейного уравнения (1), которое дано начальными условиями Коши $X(0) = 0$, $X'(0) = 1$, $X''(0) = 0$, обладает следующими свойствами: α) $X(t) - t$ имеет период d, β) в интервале I справедливо уравнение

$$\frac{X''[\omega(t)]}{X'^2[\omega(t)]} + \frac{X''(t)}{X'^2(t)} = 0.$$

Über die Verteilung der Nullstellen der Lösungen und ihrer Ableitungen der linearen Differentialgleichung $y'' = Q(t)\,y$

E. Barvínek

Zusammenfassung

Es sei die Differentialgleichung (DGl.)

(a) $$y'' = Q(t)\,y$$

gegeben. Wir setzen voraus, daß die Funktion $Q(t)$ im Intervall $I = (-\infty, \infty)$ stetig ist. Für die Verteilung der Nullstellen der Lösungen der DGl. (a) und der Nullstellen ihrer Ableitungen sind die Dispersionen [1] charakteristisch.

Es sei t_0 eine beliebige Zahl und u, bzw. v eine Lösung der DGl. (a), für welche $u(t_0) = 0$, bzw. $v'(t_0) = 0$ ist. Die erste Nullstelle rechts von t_0 der Funktion u, bzw. v', bzw. u', bzw. v ist der Wert der Dispersion der ersten Art ϕ, bzw. der zweiten Art ψ, bzw. der dritten Art χ, bzw. der vierten Art ω im Punkte t_0.

Wenn die DGl. (a) im Intervall I oszillatorisch ist in dem Sinne, das jede ihre Lösung unendlich viele Nullstellen rechts und links von der beliebigen Zahl t hat, dann hat die Dispersion der ersten Art $\phi(t)$ folgende Eigenschaften:

(i) sie ist eine Funktion der Klasse C_3 in I,

(ii) sie wächst von $-\infty$ bis $+\infty$, und hat eine positive Ableitung in I,

(iii) $\phi(t) > t$.

Gibt es eine positive Konstante d so, daß $\phi(t) = t + d$ gilt, dann ist die Entfernung der aufeinanderfolgenden Nullstellen jeder Lösung der DGl. (a) gleich d. Dieser besondere Fall tritt dann und nur dann ein, wenn es eine Funktion $X(t)$ mit den Eigenschaften (i), (ii) gibt, so daß $X(t) - t$ die Periode d besitzt, und $X(t)$ die nichtlineare DGl. dritter Ordnung

$$Q(t) = -\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 X'^2 - \{X, t\} \tag{1}$$

befriedigt, wobei $\{X, t\}$ die Schwarzsche Ableitung $\frac{1}{2}\left(\frac{X''}{X'}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{X''}{X'}\right)^2$ der Funktion $X(t)$ ist.

Die neuen Ergebnisse kann man in drei Sätze zusammenfassen.

Satz 1. Es sei eine beliebige Funktion $\phi(t)$ mit den Eigenschaften (i), (ii), (iii) gegeben. Es sei $q(t)$ eine Funktion mit der Eigenschaft, daß die DGl. $Y'' = q(t)\,Y$ die Dispersion der ersten Art $\Phi(t) = t + d$ hat. Die Funktionalgleichung

$$X[\phi(t)] = X(t) + d \tag{2}$$

hat unendlich viele Lösungen $X(t)$ mit den Eigenschaften (i), (ii). Ist $X(t)$ eine solche Lösung, und bildet man die Funktion $Q(t)$ durch die Formel

$$Q(t) = X'^2 q(X) - \{X, t\}, \tag{b}$$

dann hat die DGl. (a) die Dispersion der ersten Art $\phi(t)$.

Betrachten wir weiter die DGl. (a), deren Koeffizient $Q(t)$ in I negativ ist. Ein besonderer Fall der Verteilung der Nullstellen von Lösungen und ihren Ableitung der DGl. (a) ist durch die Beziehung $\chi = \omega$ charakterisiert. Das ist z. B. bei der DGl. $Y'' = -k^2 Y$.

Die notwendige Bedingung dafür ist $\phi = \psi$, welche gerade dann [2] in I gilt, wenn es eine positive konstante d so gibt, daß $\phi(t) = t + d$.

Satz 2. Für die DGl. (a) gilt $\chi = \omega$ gerade dann, wenn $Q(t) = -k^2\omega'(t)$.

Satz 3. Für die DGl. (a) gilt $\chi = \omega$ gerade dann, wenn es eine Konstante $d > 0$ gibt, so daß die Lösung $X(t)$ der nichtlinearen DGl. (1) mit den Anfangsbedingungen $X(0) = 0$, $X'(0) = 1$, $X''(0) = 0$ die folgenden zwei Eigenschaften besitzt: α) $X(t) - t$ hat die Periode d, β) es gilt im Intervall I die Gleichung

$$\frac{X''[\omega(t)]}{X'^2[\omega(t)]} + \frac{X''(t)}{X'^2(t)} = 0.$$

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. V, 8–10 MATEMATICA, 1961]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. V., FASC. VIII-X. MATHEMATICA 1961

Syntetický dôkaz vety o incidencii bodu a nadroviny v m-rozmernom priestore P_m

V. Svitek

Predpokladajme, že v danom priestore m-rozmernom P_m je zavedená súradná sústava, ktorá je viazaná na základné body Z_i súradného simplexu, pričom $i = 1, 2, \ldots, m + 1$ pre $m > 3$ a jednotkový bod J a jednotkovú nadrovinu $P^{(j)}_{m-1}$. V takto zavedenom priestore P_m zvoľme bod M a nadrovinu $P^{(\mu)}_{m-1}$ tak, aby boli v polohe incidentnej. Potom o súradniciach spomenutého bodu a nadroviny platí známa veta:

Veta: *Nech v priestore P_m sú dané bod M o súradniciach x_i a nadrovina $P^{(\mu)}_{m-1}$ o súradniciach $\bar{x}_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, m + 1$, ktorých poloha spĺňuje vyššie spomenuté vlastnosti. Potom o súradniciach x_i, $\bar{x}_i$ je splnený tento vzťah:*

$$\sum_{i=1}^{m+1} \bar{x}_i x_i = 0. \tag{1}$$

Dôkaz správnosti tvrdenia tejto vety dá sa dokázať i cestou syntetickou, ktorú pre zaujímavosť uvádzam v tomto znení:

Predpokladajme najskôr, za účelom syntetického dôkazu vety, že daný bod M a daná nadrovina $P^{(\mu)}_{m-1}$ sú vzhľadom na charakteristické body súradného systému vo všeobecnej polohe.

Označme priemety bodu M z lineárnych priestorov $(Z_1Z_2\ldots Z_{i-1}Z_{i+1}\ldots \ldots Z_{j-1}Z_{j+1}\ldots Z_{m+1})$ do hrán (Z_iZ_j) značkami M_{ij} a rovnako priesečíky danej nadroviny $P^{(\mu)}_{m-1}$ s hranami (Z_iZ_j) pre $i \neq j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, m + 1$ značkami $\overline{M}_{ij}$, t. j.

$$(Z_iZ_j) \cap (Z_1Z_2\ldots Z_{i-1}Z_{i+1}\ldots Z_{j-1}Z_{j+1}\ldots Z_{m+1}) = M_{ij},$$

$$(Z_iZ_j) \cap P^{(\mu)}_{m-1} = \overline{M}_{ij}. \tag{2}$$

V dôsledku vzťahov (2) zoskupia sa na každej z hrán (Z_iZ_j) štvorice bodov $(Z_iZ_jM_{ij}\overline{M}_{ij})$, ktorých dvojpomery majú známe vlastnosti.

Podobne ako vo vzťahu (2) zaveďme na základe geometrických operácií pre priemety bodu M do lineárnych priestorov, daných skupinami vrcholov simplexu, tieto označenia:

$$(Z_1Z_2 \ldots Z_m) \cap (Z_{m+1}M) = M_{12..m}^{(m-1)},$$
$$(Z_1Z_2 \ldots Z_{m-1}) \cap (Z_mZ_{m+1}M) = M_{12 \ldots (m-1)}^{(m-1)},$$
$$(Z_1Z_2 \ldots Z_{m-2}) \cap (Z_{m-1}Z_mZ_{m+1}M) = M_{12 \ldots (m-2)}^{(m-1)}, \ldots,$$
$$(Z_1Z_2Z_3) \cap (Z_4Z_5 \ldots Z_{m+1}M) = M_{123}^{(m-1)},$$
$$(Z_1Z_2) \cap (Z_3Z_4 \ldots Z_{m+1}M) = M_{12}^{(m-1)}, \quad \text{resp.}$$
$$(Z_1Z_3) \cap (Z_2Z_4 \ldots Z_{m+1}M) = M_{13}^{(m-1)} = M_{13}. \tag{2a}$$

Podobne

$$(Z_1Z_2 \ldots Z_m) \cap (\overline{M}_{1(m+1)}M) = \underline{M_{12 \ldots m}^{(m-2)}},$$
$$(Z_1Z_2 \ldots Z_{m-1}) \cap (Z_m\overline{M}_{1(m+1)}M) = \underline{M_{12 \ldots (m-1)}^{(m-2)}},$$
$$(Z_1Z_2 \ldots Z_{m-2}) \cap (Z_{m-1}Z_m\overline{M}_{1(m+1)}M) =$$
$$= \underline{M_{12 \ldots (m-2)}}, \ldots, \quad (Z_1Z_2) \cap (Z_3Z_4 \ldots Z_m\overline{M}_{1(m+1)}M) = \underline{M_{12}^{(m-2)}}, \quad \text{resp.}$$
$$(Z_1Z_3) \cap (Z_2Z_4 \ldots Z_m\overline{M}_{1(m+1)}M) = \underline{M_{13}^{(m-2)}}; \tag{2b}$$
$$(Z_1Z_2 \ldots Z_{m-1}) \cap (\overline{M}_{1m}\overline{M}_{1(m+1)}M) = \underline{M_{12 \ldots (m-1)}^{(m-3)}},$$
$$(Z_1Z_2 \ldots Z_{m-2}) \cap (Z_{m-1}\overline{M}_{1m}\overline{M}_{1(m+1)}M) =$$
$$= \underline{M_{12 \ldots (m-2)}^{(m-3)}}, \ldots, \quad (Z_1Z_2) \cap (Z_3Z_4 \ldots Z_{m-1}\overline{M}_{1m}\overline{M}_{1(m+1)}M) = \underline{M_{12}^{(m-3)}}, \quad \text{resp.}$$
$$(Z_1Z_3) \cap (Z_2Z_4 \ldots Z_{m-1}\overline{M}_{1m}\overline{M}_{1(m+1)}M) = \underline{M_{13}^{(m-3)}}; \quad \text{atď.} \tag{2c}$$
$$(Z_1Z_2Z_3) \cap (\overline{M}_{14}\overline{M}_{15} \ldots \overline{M}_{1(m+1)}M) = \underline{M_{123}^{(1)}},$$
$$(Z_1Z_2) \cap (Z_3\overline{M}_{14} \ldots \overline{M}_{1(m+1)}M) = \underline{M_{12}^{(1)}};$$
$$(Z_1Z_2) \cap (\overline{M}_{13}\overline{M}_{14} \ldots \overline{M}_{1(m+1)}M) = \underline{\overline{M}_{12}}, \quad \text{resp.}$$
$$(Z_1Z_3) \cap (\overline{M}_{12}\overline{M}_{14} \ldots \overline{M}_{1(m+1)})M) = \underline{\overline{M}_{13}}. \tag{2d}$$

Ak podľa vzťahov (2), (2a), (2b), (2c) a (2d) zostavíme tabulku pre postupné vzniklé priemety bodu M z bodu Z_i a $\overline{M}_{1i}$ pre $i = 3, 4, \ldots, m + 1$, resp. $i = 2, 4, \ldots, m + 1$, do lineárnych priestorov daných rôznymi skupinami dvoch, troch, ..., $(m - 1)$-nezávislých bodov vybratých zo zvyšných bodov Z_i a M_{1i} nesplývajúcich s bodmi, z ktorých bod M premietame, potom obdržíme:

$$
\begin{array}{l}
{}^{*)}\ M - Z_{m+1} \to M^{(m-1)}_{12\ldots m} - Z_m \to M^{(m-1)}_{12\ldots(m-1)} \ldots - Z_4 \to M^{(m-1)}_{123} \begin{array}{l} -Z_3 \to M^{(m-1)}_{12} \\ -Z_2 \to M^{(m-1)}_{13}; \end{array} \\
\quad \diagdown \\
\quad \overline{M}_{1(m+1)} \\
\qquad \searrow \\
\qquad M^{(m-2)}_{12\ldots m} - Z_m \to M^{(n-2)}_{12\ldots(m-1)} \ldots - Z_4 \to M^{(m-2)}_{123} \begin{array}{l} -Z_3 \to M^{(m-2)}_{12} \\ -Z_2 \to M^{(m-2)}_{13}; \end{array} \\
\qquad\quad \diagdown \\
\qquad\quad \overline{M}_{1m} \\
\qquad\qquad \searrow \\
\qquad\qquad M^{(m-3)}_{12\ldots(m-1)} \ldots - Z_4 \to M^{(m-3)}_{123} \begin{array}{l} -Z_3 \to M^{(m-3)}_{12} \\ -Z_2 \to M^{(m-3)}_{13}; \end{array} \\
\qquad\qquad\quad \ddots \\
\qquad\qquad\qquad M^{(2)}_{1234} - Z_4 \to M^{(2)}_{123} \begin{array}{l} -Z_3 \to M^{(2)}_{12} \\ -Z_2 \to M^{(2)}_{13}; \end{array} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \diagdown \\
\qquad\qquad\qquad\quad \overline{M}_{14} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \searrow \\
\qquad\qquad\qquad\qquad M^{(1)}_{123} \begin{array}{l} -Z_3 \to M^{(1)}_{12} \\ -Z_2 \to M^{(1)}_{13}; \end{array} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \diagdown \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{M}_{13} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \searrow \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{M}_{12}.
\end{array}
\tag{3}
$$

V dôsledku prevedeného premietania bodu M, ako to schéma naznačuje, zoskupili sa na hranách (Z_1Z_2), (Z_1Z_3) sústavy bodov $(Z_1, Z_2, \overline{M}_{12}, M^{(1)}_{12}, M^{(2)}_{12}, \ldots, M^{(m-2)}_{12}, M^{(m-1)}_{12})$, $[Z_1, Z_3, \overline{M}_{13}, M^{(1)}_{13}, \ldots, M^{(m-2)}_{13}, M^{(m-1)}_{13}]$, ktoré sú v perspektívnej polohe.

Vzhľadom na to, že štvorica bodov $(Z_1Z_2M^{(1)}_{12}\overline{M}_{12})$ je perspektívna so štvoricou bodov $(Z_1M^{(1)}_{13}Z_3\overline{M}_{13})$ podľa stredu $M^{(1)}_{123}$, môžeme o dvojpomeroch týchto štvoríc napísať tento vzťah:

$$
(Z_1Z_2M^{(1)}_{12}\overline{M}_{12}) + (Z_1Z_3M^{(1)}_{13}\overline{M}_{13}) = 1. \tag{4}
$$

Podľa vzťahov (2a)–(2d) na priesečných priamkach (Z_1M_{23}), (Z_1M_{234}), ..., $(Z_1M_{23\ldots m})$ dvojíc priestorov $[(Z_1Z_2Z_3), (Z_1Z_4\ldots Z_{m+1}M)]$, $[(Z_1Z_2Z_3Z_4), (Z_1Z_5\ldots Z_{m+1}M)]$, ..., $[(Z_1Z_2\ldots Z_m), (Z_1Z_{m+1}M)]$ sa zoskupili tieto skupiny bodov $[M_{23}, M^{(1)}_{123}, \ldots, M^{(m-1)}_{123}]$, $[M_{234}, M^{(2)}_{1234}, \ldots, M^{(m-1)}_{1234}]$, ..., $[M_{23\ldots m}, M^{(m-2)}_{12\ldots m}, M^{(m-1)}_{12\ldots m}]$.

Na základe vzťahov, ktoré sme vyššie naznačili, na hranách (Z_1Z_h) pre $h = 2, 3, \ldots, m$ vytvorili sa sústavy bodov, o ktorých môžeme napísať tieto rovnosti:

---

*) V naznačenej schéme znak napr. $M - Z_{m+1} \to M^{(m-1)x}_{12\ldots m}$, atď. môžeme vysloviť touto vetou: *bod M premietaním cez bod Z_{m+1} prejde do bodu $M^{(m-1)}_{12\ldots m}$.*

$$
\begin{aligned}
&(Z_1Z_2M_{12}^{(1)}\overline{M}_{12})(Z_1Z_2M_{12}^{(2)}M_{12}^{(1)})\ldots\\
&\quad\ldots(Z_1Z_2M_{12}^{(m-2)}M_{12}^{(m-3)})(Z_1Z_2M_{12}^{(m-1)}M_{12}^{(m-2)})(Z_1Z_2\overline{M}_{12}M_{12}^{(m-1)}) = 1,\\
&(Z_1Z_3M_{13}^{(1)}\overline{M}_{13})(Z_1Z_3M_{13}^{(2)}M_{13}^{(1)})\ldots\\
&\quad\ldots(Z_1Z_3M_{13}^{(m-2)}M_{13}^{(m-3)})(Z_1Z_3M_{13}^{(m-1)}M_{13}^{(m-2)})(Z_1Z_3\overline{M}_{13}M_{13}^{(m-1)}) = 1,\\
&(Z_1Z_4M_{14}^{(2)}\overline{M}_{14})\ldots\\
&\quad\ldots(Z_1Z_4M_{14}^{(m-2)}M_{14}^{(m-3)})(Z_1Z_4M_{14}^{(m-1)}M_{14}^{(m-2)})(Z_1Z_4\overline{M}_{14}M_{14}^{(m-1)}) = 1,\\
(5)\qquad&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad(Z_1Z_mM_{1m}^{(m-2)}\overline{M}_{1m})(Z_1Z_mM_{1m}^{(m-1)}M_{1m}^{(m-2)})(Z_1Z_m\overline{M}_{1m}M_{1m}^{(m-1)}) = 1,
\end{aligned}
$$

pričom značky $M_{1h}^{(m-1)}$ sú vlastne podľa vzťahu (2) body značiek M_{1h} pre $h = 2, 3, \ldots, m$.

Ak z prvých dvoch rovníc sústavy (5) vypočítame prvých dvojpomerových činiteľov a dosadíme za patričné dvojpomery do rovnice (4), po určitej úprave dostaneme:

$$
(6)\qquad \frac{(Z_1Z_2M_{12}^{(m-1)}\overline{M}_{12})}{(Z_1Z_2M_{12}^{(2)}M_{12}^{(1)})\ldots(Z_1Z_2M_{12}^{(m-1)}M_{12}^{(m-2)})} + \frac{(Z_1Z_3M_{13}^{(m-1)}\overline{M}_{13})}{(Z_1Z_3M_{13}^{(2)}M_{13}^{(1)})\ldots(Z_1Z_3M_{13}^{(m-1)}M_{13}^{(m-2)})} = 1.
$$

Z dôvodu, že bodové sústavy

$$
(a)\qquad Z_1Z_2M_{12}^{(1)}M_{12}^{(2)}\ldots M_{12}^{(m-2)}M_{12}^{(m-1)},\qquad Z_1Z_3M_{13}^{(1)}M_{13}^{(2)}\ldots M_{13}^{(m-2)}M_{13}^{(m-1)}
$$

sú, ako sme vyššie spomenuli, perspektívne, musia, ako dôsledok tejto vlastnosti, platiť tieto rovnosti medzi dvojpomermi:

$$
\begin{aligned}
&(Z_1Z_2M_{12}^{(2)}M_{12}^{(1)}) = (Z_1Z_3M_{13}^{(2)}M_{13}^{(1)}),\qquad (Z_1Z_2M_{12}^{(3)}M_{12}^{(2)}) = (Z_1Z_3M_{13}^{(3)}M_{13}^{(2)}),\\
&\ldots, (Z_1Z_2M_{12}^{(m-2)}M_{12}^{(m-3)}) = (Z_1Z_3M_{13}^{(m-2)}M_{13}^{(m-3)}),\qquad (Z_1Z_2M_{12}^{(m-1)}M_{12}^{(m-2)}) =\\
(7)\qquad&\qquad = (Z_1Z_3M_{13}^{(m-1)}M_{13}^{(m-2)}).
\end{aligned}
$$

Rovnica (6) dá sa, v dôsledku vzťahov (7), uviesť (po úprave) na tvar:

$$
\begin{aligned}
&(Z_1Z_2M_{12}^{(m-1)}\overline{M}_{12})+(Z_1Z_3M_{13}^{(m-1)}\overline{M}_{13}) = (Z_1Z_2M_{12}^{(2)}M_{12}^{(1)})(Z_1Z_2M_{12}^{(3)}M_{12}^{(2)})\ldots\\
(6a)\qquad&\qquad\ldots(Z_1Z_2M_{12}^{(m-2)}M_{12}^{(m-3)})(Z_1Z_2M_{12}^{(m-1)}M_{12}^{(m-2)}).
\end{aligned}
$$

Ak teraz dvojpomery štvoríc bodových nachádzajúcich sa na pravej strane rovnice (6a), nahradíme rovnakými dvojpomerami projektívnych štvoríc a to na základe vzťahov (2a)–(2d), schémy (3) a sústavy rovníc (5), dá sa táto rovnica uviesť na základný tvar, z ktorej bude už priamo vyplývať dôkaz našej vety.

Za týmto účelom naznačme:

$$\underline{(Z_1Z_2M_{12}^{(2)}M_{12}^{(1)})} = (Z_1M_{23}M_{123}^{(2)}M_{123}^{(1)}) = (Z_1M_{14}^{(2)}Z_4\overline{M}_{14}) = \underline{1-(Z_1Z_4M_{14}^{(2)}\overline{M}_{14})},$$

pričom zrejme platí, že

$$\text{(a)} \qquad \underline{(Z_1Z_2M_{12}^{(2)}M_{12}^{(1)}) = (Z_1Z_3M_{13}^{(2)}M_{13}^{(1)};}$$

podobne

$$\underline{(Z_1Z_2M_{12}^{(3)}M_{12}^{(2)})} = (Z_1M_{23}M_{123}^{(3)}M_{123}^{(2)}) = (Z_1M_{234}M_{1234}^{(3)}M_{1234}^{(2)}) =$$
$$= (Z_1M_{15}^{(3)}Z_5\overline{M}_{15}) = \underline{1-(Z_1Z_5M_{15}^{(3)}\overline{M}_{15})} \quad \text{a}$$
$$\text{(b)} \qquad \underline{(Z_1Z_2M_{12}^{(3)}M_{12}^{(2)}) = (Z_1Z_3M_{13}^{(3)}M_{13}^{(2)}) = (Z_1Z_4M_{14}^{(3)}M_{14}^{(2)});}$$

atď.

$$\underline{(Z_1Z_2M_{12}^{(m-2)}M_{12}^{(m-3)})} = (Z_1M_{23}M_{123}^{(m-2)}M_{123}^{(m-3)}) = (Z_1M_{234}M_{1234}^{(m-2)}M_{1234}^{(m-3)}) =$$
$$\text{(c)} \qquad = \ldots = (Z_1M_{23\ldots(m-1)}M_{12\ldots(m-1)}^{(m-2)}M_{12\ldots(m-1)}^{(m-3)}) = (Z_1M_{1m}^{(m-2)}Z_m\overline{M}_{1m}) =$$
$$\underline{= 1-(Z_1Z_mM_{1m}^{(m-2)}\overline{M}_{1m})} \quad \text{a}$$
$$\underline{(Z_1Z_2M_{12}^{(m-2)}M_{12}^{(m-3)}) = (Z_1Z_3M_{13}^{(m-2)}M_{13}^{(m-3)}) = \ldots = (Z_1Z_{m-1}M_{1(m-1)}^{(m-2)}M_{1(m-1)}^{(m-3)});}$$
$$\underline{(Z_1Z_2M_{12}^{(m-1)}M_{12}^{(m-2)})} = \ldots = (Z_1M_{23\ldots m}M_{12\ldots m}^{(m-1)}M_{12\ldots m}^{(m-2)}) =$$
$$= (Z_1M_{1(m+1)}^{(m-1)}Z_{m+1}\overline{M}_{1(m+1)}) = \underline{1-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)})} \quad \text{a}$$
$$\text{(8)} \qquad \underline{(Z_1Z_2M_{12}^{(m-1)}M_{12}^{(m-2)}) = \ldots = (Z_1Z_mM_{1m}^{(m-1)}M_{1m}^{(m-2)}).}$$

Na základe vzťahov (8) rovnica (6a) prejde (po úprave) do tvaru:

$$(Z_1Z_2M_{12}^{(m-1)}\overline{M}_{12}) + (Z_1Z_3M_{13}^{(m-1)}\overline{M}_{13}) =$$
$$= [1-(Z_1Z_4M_{14}^{(2)}\overline{M}_{14})] \cdot [1-(Z_1Z_5M_{15}^{(3)}\overline{M}_{15})]\ldots$$
$$\text{(6b)} \qquad \ldots[1-(Z_1Z_mM_{1m}^{(m-2)}\overline{M}_{1m})] \cdot [1-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)}).$$

Ak teraz ďalej upravíme rovnicu (6b) a to podľa vzťahov (5) tým, že činiteľov pravej strany tejto rovnice (v poradí):

$$1-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)}),\ 1-(Z_1Z_mM_{1m}^{(m-2)}\overline{M}_{1m}),\ \ldots,\ 1-(Z_1Z_5M_{15}^{(3)}\overline{M}_{15}),$$
$$1-(Z_1Z_4M_{14}^{(2)}\overline{M}_{14}),$$

nahradíme novými formami, a to:

$$1-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)}) = \underline{1-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)});}$$

$$1-(Z_1Z_mM_{1m}^{(m-2)}\overline{M}_{1m})=1-\frac{(Z_1Z_mM_{1m}^{(m-1)}\overline{M}_{1m})}{(Z_1Z_mM_{1m}^{(m-1)}\overline{M}_{1m})}=$$

$$=\frac{1-(Z_1Z_mM_{1m}^{(m-1)}\overline{M}_{1m})-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)})}{1-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)})};$$

analogicky by sa dali odvodiť i ďalšie formy, t. j.

$$1-(Z_1Z_{m-1}M_{1(m-1)}^{(m-3)}\overline{M}_{1(m-1)})=$$

$$=\frac{1-(Z_1Z_{m-1}M_{1(m-1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m-1)})-(Z_1Z_mM_{1m}^{(m-1)}\overline{M}_{1m})-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)})}{1-(Z_1Z_mM_{1m}^{(m-1)}\overline{M}_{1m})-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)})};$$

atď.

$$1-(Z_1Z_5M_{15}^{(3)}\overline{M}_{15})=\frac{1-(Z_1Z_5M_{15}^{(m-1)}\overline{M}_{15})-\ldots-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)})}{1-(Z_1Z_6M_{16}^{(m-1)}\overline{M}_{16})-\ldots-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)})};$$

$$1-(Z_1Z_4M_{14}^{(2)}\overline{M}_{14})=\frac{1-(Z_1Z_4M_{14}^{(m-1)}\overline{M}_{14})-\ldots-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)})}{1-(Z_1Z_5M_{15}^{(m-1)}\overline{M}_{15})-\ldots-(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}^{(m-1)}\overline{M}_{1(m+1)})},$$

prejde rovnica (6b) (po patričnom vykrátení a úprave) do tohto základného tvaru:

$$(Z_1Z_2M_{12}\overline{M}_{12})+(Z_1Z_3M_{13}\overline{M}_{13})+\ldots+(Z_1Z_mM_{1m}\overline{M}_{1m})+$$

$$+(Z_1Z_{m+1}M_{1(m+1)}\overline{M}_{1(m+1)})=1, \tag{9}$$

kde miesto symbolov $M_{1h}^{(m-1)}$ sme písali krátko podľa vzťahu (2) symbol M_{1h}, pre $h = 2, 3, \ldots, m + 1$.

Ak teraz do rovnice (9) za jednotlivé dvojpomerové členy tvaru $(Z_1Z_iM_{1i}\overline{M}_{1i})$ dosadíme známe výrazy, t. j.

$$(Z_1Z_iM_{1i}\overline{M}_{1i})=-\frac{(Z_1Z_i\overline{J}_{1i}\overline{M}_{1i})}{(Z_1Z_iJ_{1i}M_{1i})}=-\frac{\overline{x}_ix_i}{\overline{x}_1x_1}, \tag{9a}$$

pre $i = 2, 3, \ldots, m + 1$, dostaneme hľadanú rovnicu, na ktorú sa veta pýta, t. j.

$$\overline{x}_1x_1+\overline{x}_2x_2+\ldots+\overline{x}_{m+1}x_{m+1}=0,$$

alebo krátko rovnicu (1).

Že rovnica daná vzťahom (1) platí aj v prípade špeciálnej polohy bodu a nadroviny si záujemca snadno overí sám. Stačí na základe incidencie bodu a nadroviny pre túto špeciálnu polohu vyjádriť vzťah (9) a z vyjádrenia dvojpomerov pre túto špeciálnu polohu podľa vzoru daného (9a) a po patričnom dosadení a úprave, sa presvedčiť o správnosti nášho tvrdenia, čo je ináč známa vlastnosť.

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2.

Do redakcie dodané 31. 1. 1960

Синтетическое доказательство теоремы об инцидентности точки и гиперплоскости в m-размерном пространстве P_m

В. Свитек

Выводы

Автор этой стати приводит здесь доказательство теоремы об инцидентности точки и гиперплоскости синтетического-проективным способом, аналогичным с доказательством этой теоремы в 2- и 3-размерном пространстве.

Ein synthetischer Beweis des Satzes von der Incidenz des Punktes und der Überebene im m-Dimensionalen Raume P_m

V. Svitek

Der Autor dieses Artikels bringt hier den Beweis der Satzes über die Inzidenz des Punktes und der Überebene auf synthetisch projektivem Wege, der ein Analogen des Weges für den Beweis dieses Satzes im zwei- und dreidimensionalem Raume ist.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. V, 8–10 MATEMATICA, 1961]
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. V., FASC. VIII-X. MATHEMATICA 1961

O niektorých vlastnostiach iterovaných jadier Fredholmových integrálnych rovníc

J. Šajda

V článku sa na podnet práce [1] skúmajú niektoré, najmä konvergenčné vlastnosti iterovaných jadier integrálnych rovníc Fredholmovho typu. Článok má charakter prípravný a preto obsahuje výsledky, ktoré možno využiť pri riešení integrálnych rovníc ako pomocné. Z nich uvedieme: ak jadro $K(x, t)$ má tzv. základné vlastnosti, potom ich má aj každé iterované jadro $K_n(x, t)$; ak $\| K \| \leqq 1$, potom nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \| K_n \|$ konverguje a postupnosti funkcií $\{\int_a^b | K_n(x, t) |^2 \, dt\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\int_a^b | K_n(x, t) |^2 \, dx\}_{n=1}^{\infty}$ v intervale (a, b) konvergujú; ak je $\| K \| < 1$, potom nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t)$ v dvojrozmernom intervale $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ rovnomerne konverguje a nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b K_n(x, t) f(t) \, dt$ v intervale (a, b) rovnomerne konverguje pri každej kvadraticky integrovateľnej funkcii $f(t)$.

Budeme uvažovať o lineárnej homogénnej Fredholmovej integrálnej rovnici druhého druhu s parametrom

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \, \phi(t) \, dt, \tag{1}$$

kde $K(x, t)$ je jadro rovnice, λ je parameter, $\phi(x)$ je hľadaná funkcia, a, b sú reálne čísla, $a < b$. Budeme predpokladať, že riešenia rovnice (1), ak pravda existujú, sú funkcie kvadraticky integrovateľné v intervale (a, b), ďalej, že λ je vo všeobecnosti komplexné číslo s vlastnosťou $0 \neq | \lambda | < \infty$ a jadro $K(x, t)$ je vo všeobecnosti komplexná funkcia reálnych premenných x a t, definovaná a kvadraticky integrovateľná vo dvojrozmernom intervale $D = (a, b) \times (a, b)$, nie nutne spojitá, alebo symetrická, pre ktorú neplatí, že $K(x, t) = 0$ skoro všade v intervale D.

Predovšetkým urobíme tento dohovor: Namiesto symbolu $\int_a^b$, resp. $\int_a^b \int_a^b$ budeme písať iba $\int$, resp. $\int\int$, pričom všetky integrály, ktoré sa v tomto článku vyskytnú, sú Riemannove. Ďalej pod symbolom $f \in S$ budeme rozumieť, že funkcia $f(x)$ je v intervale (a, b) kvadraticky integrovateľná, t. j. že existuje integrál $\int |f(x)|^2 \, dx$. V prípade funkcie dvoch premenných budeme pod symbolom $f \in S$ rozumieť, že funkcia $f(x, y)$ je kvadraticky integrovateľná v dvojrozmernom intervale D, t. j. že existuje integrál

$$\int\int |f(x, y)|^2 \, dx \, dy.$$

Poznamenajme, že často používaný symbol $f \in L_2$ nebudeme používať, lebo znak L_2 budeme používať v inom zmysle. V obidvoch prípadoch f značí vo všeobecnosti komplexnú funkciu reálnych premenných.

Ak jadro $K(x, t)$ bude pre každé dve funkcie $f_1 \in S, f_2 \in S$ vyhovovať nasledujúcim podmienkam a to

1. integrály $\quad \int K(x, t) f_1(x) \, dx, \quad \int K(x, t) f_2(t) \, dt$

ako funkcie existujú a sú v intervale (a, b) kvadraticky integrovateľné,

2. dvojnásobné integrály

$$\int [\int K(x, t) f_1(x) \, dx] f_2(t) \, dt, \qquad \int [\int K(x, t) f_2(t) \, dt] f_1(x) \, dx$$

existujú a platí rovnosť

$$\int [\int K(x, t) f_1(x) \, dx] f_2(t) \, dt = \int [\int K(x, t) f_2(t) \, dt] f_1(x) \, dx$$

potom budeme hovoriť, že $K(x, t)$ *má základné vlastnosti*, alebo, že spĺňa *základné podmienky*. ([2], str. 32).

Pozn. 1: Ak jadro $K(x, t)$ má základné vlastnosti, potom:

a) existujú integrály

$$\int |K(x, t)|^2 \, dx, \qquad \int |K(x, t)|^2 \, dt,$$

t. j. jadro ako funkcia jednej premennej pri každej hodnote druhej premennej je v intervale (a, b) kvadraticky integrovateľnou funkciou,

b) existujú dvojnásobné integrály

$$\int [\int |K(x, t)|^2 \, dx] \, dt, \qquad \int [\int |K(x, t)|^2 \, dt] \, dx.$$

a) Z podmienky 1. totiž vyplýva, že pri $f_1 = f_2 = 1$ existujú integrály $\int K(x, t) \, dx$, $\int K(x, t) \, dt$ a teda tiež integrály $\int \overline{K(x, t)} \, dx$, $\int \overline{K(x, t)} \, dt$ a preto existujú aj integrály $\int |K(x, t)|^2 \, dx$, $\int |K(x, t)|^2 \, dt$.

b) Z podmienky 2. vyplýva, že pri $f_1(x) = \overline{K(x, t)}, f_2(t) = 1$ dvojnásobný integrál

$$\int [\int K(x, t) \overline{K(x, t)} \, dx] \, dt = \int [\int |K(x, t)|^2 \, dx] \, dt$$

existuje a pri $f_1(x) = 1, f_2(t) = \overline{K(x, t)}$ zasa dvojnásobný integrál

$$\int [\int K(x, t) \, dx] \overline{K(x, t)} \, dt = \int [\int |K(x, t)|^2 \, dt] \, dx$$

existuje.

Ako je známe ([2], str. 270) *n-té iterované jadro* $K_n(x, t)$ pôvodného jadra $K(x, t)$ je definované vzorcom

$$K_n(x, t) = \int K_1(x, s) K_{n-1}(s, t) \, ds, \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{2}$$

kde $K_1(x, s) \equiv K(x, s)$, pričom sa pravda predpokladá, že integrál na pravej strane existuje. Je jasné, že ak je jadro $K(x, t)$ spojité, potom iterované jadrá (2) vždy existujú.

Pozn. 2: Ak jadro $K(x, t)$ má základné vlastnosti, potom iterované jadrá $K_n(x, t)$, $n = 2, 3, \ldots$ existujú a ako funkcie jednej premennej sú pri každej hodnote druhej premennej kvadraticky integrovateľné v intervale (a, b).

Podľa pozn. 1 je totiž $K(x, t_0) \in S$ pri každom $t_0 \in (a, b)$ a podobne $K(x_0, t) \in S$ pri každom $x_0 \in (a, b)$. Preto podľa prvej základnej vlastnosti jadra $K(x, t)$ funkcie

$$\int K(x, s) K(s, t_0) \, ds = K_2(x, t_0) \quad \text{a} \quad \int K(x_0, s) K(s, t) \, ds = K_2(x_0, t)$$

kde sme použili označenie (2), existujú a sú kvadraticky integrovateľné. Teda pri $n = 2$ je pozn. 2 správna. Je zrejmé aj bez ďalších dôkazov, že aj každé ďalšie iterované jadro $K_n(x, t)$, $n = 3, 4, \ldots$ má vlastnosti uvedené v pozn. 2.

Pozn. 3: Ak jadro $K(x, t)$ má základné vlastnosti, potom platí známy vzorec ([2], str. 270)

$$K_{m+n}(x, t) = \int K_m(x, s) K_n(s, t) \, ds, \tag{3}$$

kde m a n sú ľubovoľné prirodzené čísla.

Ak totiž použijeme definíciu (2) a využijeme základné vlastnosti jadra $K(x, t)$, môžeme napísať rovnosti

$$\begin{aligned} K_{n+m}(x, t) &= \int K_1(x, s) K_{n+m-1}(s, t) \, ds = \\ &= \int K_1(x, s) \left[\int K_1(s, u) K_{n+m-2}(u, t) \, du\right] ds = \\ = \int K_{n+m-2}(u, t) \left[\int K_1(s, u) K_1(x, s) \, ds\right] du &= \int K_2(x, u) K_{n+m-2}(u, t) \, du = \\ &= \int K_2(x, u) \left[\int K_1(u, v) K_{n+m-3}(v, t) \, dv\right] du = \\ &= \int K_{n+m-3}(v, t) \left[\int K_1(u, v) K_2(x, u) \, du\right] dv = \\ = \int K_3(x, v) K_{n+m-3}(v, t) \, dv &= \ldots = \int K_m(x, w) K_n(w, t) \, dw. \end{aligned}$$

Vzorec (3) sa obyčajne odvodzuje za ostrejších predpokladov než sú základné vlastnosti jadra $K(x, t)$, napr. keď je $K(x, t)$ spojité v obidvoch premenných.

Lemma 1.: *Ak jadro $K(x, t)$ má základné vlastnosti, potom ich má aj každé iterované jadro $K_{n+1}(x, t)$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Dôkaz: Ak $f \in S$, potom podľa prvej základnej vlastnosti funkcia $\int K_1(s, t) f(t) \, dt$ existuje a patrí do S. Preto existuje aj funkcia $\int K_1(x, s) \left[\int K_1(s, t) f(t) \, dt\right] ds$ a patrí do S. Podľa druhej základnej vlastnosti pri každom $x \in (a, b)$ platí rovnosť

$$\begin{aligned} &\int K_1(x, s) \left[\int K_1(s, t) f(t) \, dt\right] ds = \\ &= \int \left[\int K_1(x, s) K_1(s, t) \, ds\right] f(t) \, dt = \int K_2(x, t) f(t) \, dt, \end{aligned}$$

z ktorej vyplýva, že funkcia $\int K_2(x, t) f(t)\,dt$ existuje a patrí do S, pretože integrál $\int K_1(x, s)\,[\int K_1(s, t) f(t)\,dt]\,ds$ ako funkcia premennej x existuje a patrí do S. Podobne z rovnosti

$$\int K_2(x, s)\,[\int K_1(s, t) f(t)\,dt]\,ds =$$
$$= \int [\int K_2(x, s)\,K_1(s, t)\,ds]\,f(t)\,dt = \int K_3(x, t) f(t)\,dt$$

vyplýva, že funkcia $\int K_3(x, t) f(t)\,dt$ existuje a patrí do S. Bez ďalšieho je jasné, že vzhľadom na pozn. 2 pri využití druhej základnej vlastnosti jadra $K(x, t)$ pre každé n platí rovnosť

$$\int K_n(x, s)\,[\int K_1(s, t) f(t)\,dt]\,ds = \int K_{n+1}(x, t) f(t)\,dt, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

z ktorej vyplýva, že funkcia $\int K_{n+1}(x, t) f(t)\,dt$ pri každom $n = 1, 2, \ldots$ existuje a patrí do S.

Analogicky sa dokáže, že funkcia $\int K_{n+1}(x, t) f(x)\,dx$ pri každom $n = 1, 2, \ldots$ existuje a patrí do S.

Ešte treba dokázať, že jadrá $K_{n+1}(x, t)$ majú aj druhú základnú vlastnosť. Ľahko zistíme, že jadro $K_2(x, t)$ má túto vlastnosť. Pri ľubovoľných funkciách $f_1 \in S$, $f_2 \in S$ totiž platí

$$\int [\int K_1(s, t) f_2(t)\,dt]\,\{\int K_1(x, s) f_1(x)\,dx\}\,ds =$$
$$= \int f_1(x)\,\{\int K_1(x, s)\,[\int K_1(s, t) f_2(t)\,dt]\,ds\}\,dx =$$
$$= \int f_1(x)\,\{\int f_2(t)[\int K_1(x, s)\,K_1(s, t)\,ds]\,dt\}\,dx =$$
$$= \int f_1(x)\,\{\int K_2(x, t) f_2(t)\,dt\}\,dx.$$

Platí teda rovnosť

(a)
$$\int [\int K_1(s, t) f_2(t)\,dt]\,.\,\{\int K_1(x, s) f_1(x)\,dx\}\,ds =$$
$$= \int f_1(x)\,\{\int K_2(x, t) f_2(t)\,dt\}\,dx$$

z ktorej vyplýva, že dvojnásobný integrál na pravej strane existuje, pretože integrál na ľavej strane existuje. Ale zrejme platí tiež

$$\int \{\int K_1(x, s) f_1(x)\,dx\}\,.\,[\int K_1(s, t) f_2(t)\,dt]\,ds =$$
$$= \int f_2(t)\,[\int K_1(s, t)\,\{\int K_1(x, s) f_1(x)\,dx\}\,ds]\,dt =$$
$$= \int f_2(t)[\int f_1(x)\,\{\int K_1(x, s)\,K_1(s, t)\,ds\}\,dx]\,dt =$$
$$= \int f_2(t)\,[\int K_2(x, t) f_1(x)\,dx]\,dt,$$

takže z rovnosti

(b)
$$\int \{\int K_1(x, s) f_1(x)\,dx\}\,.\,[\int K_1(s, t) f_2(t)\,dt]\,ds =$$
$$= \int f_2(t)\,[\int K_2(x, t) f_1(x)\,dx]\,dt$$

vyplýva existencia integrálu na pravej strane. Avšak vzťahy (a) a (b) majú rovnaké ľavé strany, preto platí rovnosť

$$\int f_1(x) \{\int K_2(x, t) f_2(t) \, dt\} \, dx = \int f_2(t) \{\int K_2(x, t) f_1(x) \, dx\} \, dt.$$

Úplnou indukciou sa dá ľahko dokázať, že platí všeobecne

$$\int [\int K_n(s, t) f_2(t) \, dt] \{\int K_1(x, s) f_1(x) \, dx\} \, ds =$$
$$= \int f_1(x) \{\int K_{n+1}(x, t) f_2(t) \, dt\} \, dx$$

a tiež

$$\int [\int K_1(x, s) f_1(x) \, dx] \{\int K_n(s, t) f_2(t) \, dt\} \, ds =$$
$$= \int f_2(t) \{\int K_{n+1}(x, t) f_1(x) \, dx\} \, dt,$$

pričom zo zrejmej existencie integrálov na ľavých stranách vyplývajú existencie dvojnásobných integrálov na pravých stranách a ďalej z rovnosti ľavých strán vyplýva rovnosť

$$\int f_1(x) \{\int K_{n+1}(x, t) f_2(t) \, dt\} \, dx = \int f_2(t) \{\int K_{n+1}(x, t) f_1(x) \, dx\} \, dt$$

platná pre všetky $n = 1, 2, \ldots$
Tým je lemma 1 dokázaná.

Pozn. 4: Z poznámky 2 a lemmy 1 vyplýva, že pre všetky iterované jadrá $K_n(x, t)$, $n = 1, 2, \ldots$ dvojnásobné integrály

$$\int [\int | K_n(x, t) |^2 \, dt] \, dx, \qquad \int [\int | K_n(x, t) |^2 \, dx] \, dt$$

existujú. To je zrejmé zo základných vlastností iterovaných jadier, z ktorých vyplýva, že ľavé strany rovností

$$\int [\int K_n(x, t) \overline{K_n(x, t)} \, dx] \, dt = \int [\int | K_n(x, t) |^2 \, dx] \, dt, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

a

$$\int [\int K_n(x, t) \overline{K_n(x, t)} \, dt] \, dx = \int [\int | K_n(x, t) |^2 \, dt] \, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

existujú.

Podľa predpokladu je jadro $K(x, t)$ kvadraticky integrovateľné vo štvorci D. Z doterajších predpokladov nevyplýva, že by aj iterované jadrá $K_n(x, t)$ mali túto vlastnosť. Preto budeme predpokladať, že iterované jadrá $K_n(x, t)$ sú v intervale D kvadraticky integrovateľné. Potom platí nasledujúca poznámka.

Pozn. 5: Ak je iterované jadro $K_n(x, t)$ kvadraticky integrovateľné v intervale D, potom platí rovnosť

$$\int\int | K_n(x, t) |^2 \, dx \, dt = \int [\int | K_n(x, t) |^2 \, dx] \, dt = \int [\int | K_n(x, t) |^2 \, dt] \, dx, \; n = 1, 2, \ldots$$

ktorá je zrejmá z vety o rovnosti dvojného a dvojnásobného integrálu ([3], str. 409).

Pripomenieme niektoré známe pojmy, ktoré budeme potrebovať. Pod normou $\| f \|$ funkcie $f(x) \in S$ rozumieme nezáporné číslo

$$\| f \| = \sqrt{\int | f(x) |^2 \, dx}$$

a podobne pod normou $\| f \|$ funkcie $f(x, y) \in S$ rozumieme číslo

$$\| f \| = \sqrt{\int\int | f(x, y) |^2 \, dx \, dy},$$

pričom označovanie normy pre funkciu jednej, resp. dvoch premenných nebudeme rozlišovať. Špeciálne teda norma n-tého iterovaného jadra $K_n(x, t)$ bude

$$\| K_n \| = \sqrt{\int\int | K_n(x, t) |^2 \, dx \, dt.}$$

Za predpokladu, že jadro $K(x, t)$ spĺňa základné podmienky, môžeme definovať funkcie $L_n(x)$ vzťahom

$$L_n(x) = \int K_n(x, t) f(t) \, dt, \tag{4}$$

kde $f \in S$ je daná funkcia a $n = 1, 2, \ldots$. Pomocou definície (4), lemmy 1 a vzorca (3) pri $m = 1$ dostaneme rekurentný vzorec pre $L_{n+1}(x)$

$$L_{n+1}(x) = \int K(x, t) \, L_n(t) \, dt, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

pretože je

$$L_{n+1}(x) = \int K_{n+1}(x, t) f(t) \, dt = \int \{ \int K_1(x, s) \, K_n(s, t) \, ds \} f(t) \, dt =$$
$$= \int K_1(x, s) \{ \int K_n(s, t) f(t) \, dt \} \, ds = \int K(x, s) \, L_n(s) \, ds.$$

Lemma 2: *Nech jadro $K(x, t)$ spĺňa okrem základných podmienok aj podmienku*

$$\| K \| \leqq 1. \tag{6}$$

Potom pre každú funkciu $f \in S$ platí, že postupnosť noriem

$$\| L_1 \|, \| L_2 \|, \ldots, \| L_n \|, \ldots$$

kde je

$$\| L_n \| = \sqrt{\int | L_n(x) |^2 \, dx} = \sqrt{\int | \int K_n(x, t) f(t) \, dt |^2 \, dx},$$

konverguje a je zhora ohraničená číslom $\| f \|$.

Dôkaz: Zo vzťahu (5) umocnením absolútnych hodnôt obidvoch strán a integrovaním podľa x dostaneme

$$\| L_{n+1} \|^2 = \int | L_{n+1}(x) |^2 \, dx = \int | \int K(x, t) \, L_n(t) \, dt |^2 \, dx,$$

z čoho po použití Schwarz–Buňakovského nerovnosti na posledný integrál dostaneme

$$\| L_{n+1} \|^2 \leqq \int [\int | K(x, t) |^2 \, dt \int | L_n(t) |^2 \, dt] \, dx = \| K \|^2 \, \| L_n \|^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

a z toho vzhľadom na podmienku (6)

$$(7) \qquad \| L_{n+1} \| \leqq \| L_n \|, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Podobne dostaneme zo vzťahu (4) pri $n = 1$

$$(8) \qquad \| L_1 \| \leqq \| f \|.$$

Zo vzťahov (7) a (8) vyplýva, že normy $\| L_n \|$ tvoria nerastúcu postupnosť, ohraničenú číslom $\| f \|$

$$(9) \qquad \| f \| \geqq \| L_1 \| \geqq \| L_2 \| \geqq \ldots \geqq \| L_n \| \geqq \| L_{n+1} \| \geqq \ldots$$

Táto postupnosť je zdola ohraničená (nulou) a preto konverguje.

Pozn. 6: Jadro $K(x, t)$ integrálnej rovnice (1) obecne nevyhovuje podmienke (6). Avšak jadro $K^*(x, t)$, súvisiace s jadrom $K(x, t)$ vzťahom

$$(10) \qquad K^*(x, t) \doteq \| K \|^{-1} K(x, t)$$

už podmienku (6) spĺňa. Ľahko vidíme, že z rovnice (1) s jadrom $K(x, t)$ a s vlastnými hodnotami λ dostaneme rovnicu s jadrom, ktoré spĺňa vzťah (6) tak, keď namiesto jadra $K(x, t)$ vezmeme jadro $K^*(x, t)$ a namiesto vlastných hodnôt λ vlastné hodnoty λ^*, súvisiace s hodnotami λ vzťahom

$$(11) \qquad \lambda^* = \lambda \| K \|.$$

Vidíme, že integrálna rovnica

$$(1^*) \qquad \phi(x) = \lambda^* \int K^*(x, t)\, \phi(t)\, \mathrm{d}t$$

má tie isté vlastné funkcie $\phi(x)$ ako rovnica (1). Z toho je zrejmé, že každú rovnicu (1) s ľubovoľným kvadraticky integrovateľným jadrom $K(x, t)$ možno previesť na rovnicu (1*) s jadrom $K^*(x, t)$, ktoré už má vlastnosť (6), pričom sa zmenia iba vlastné hodnoty λ na λ^* podľa vzťahu (11), nie však vlastné funkcie.

Lemma 3: *Nech jadro $K(x, t)$ je kvadraticky integrovateľné. Potom v kruhu o polomere $r = \| K \|^{-1}$ neleží nijaká jeho vlastná hodnota.*

Dôkaz: Ak jadro $K(x, t)$ nemá nijakú vlastnú hodnotu, potom je lemma správna. Ak je λ vlastnou hodnotou jadra $K(x, t)$, potom existuje funkcia $f \in S$, ktorá je vlastnou funkciou jadra $K(x, t)$ patriacou ku vlastnej hodnote λ. Potom z rovnice

$$f(x) = \lambda \int K(x, t) f(t)\, \mathrm{d}t$$

ľahko dostaneme

$$\int | f(x) |^2\, \mathrm{d}x = | \lambda |^2 \int \left| \int K(x, t) f(t)\, \mathrm{d}t \right|^2 \mathrm{d}x$$

a z toho po použití Schwarz–Buňakovského nerovnosti na pravú stranu

$$\| f \|^2 \leqq | \lambda |^2 \| K \|^2 \| f \|^2.$$

Z tejto nerovnosti s ohľadom na vzťah $\|f\| > 0$ vychádza

$$(12) \qquad |\lambda| \geqq \|K\|^{-1}$$

čím je lemma 3 dokázaná, pretože λ bola ľubovoľná vlastná hodnota jadra $K(x, t)$.

Lemma 4: *Nech jadro $K(x, t)$ má základné vlastnosti a nech vyhovuje podmienke* (6). *Nech existuje také prirodzené číslo k, že platí $\|K_k\| < 1$. Potom postupnosť*

$$\|K_1\|, \|K_2\|, \ldots, \|K_n\|, \ldots$$

konverguje k nule.

Dôkaz: Zo vzťahu (3) pri použití Schwarz–Buňakovského nerovnosti dostaneme

$$|K_{m+n}(x, t)|^2 \leqq \int |K_m(x, s)|^2 \, ds \int |K_n(s, t)|^2 \, ds,$$

z čoho po integrovaní obidvoch strán podľa t a podľa x máme

$$\int [\int |K_{m+n}(x, t)|^2 \, dt] \, dx \leqq \int [\int |K_m(x, s)|^2 \, ds] \, dx \, . \int [\int |K_n(x, t)|^2 \, ds] \, dt,$$

a z toho

$$(13) \qquad \|K_{m+n}\| \leqq \|K_m\| \, . \, \|K_n\|,$$

ktorý vzťah platí zrejme pre každé prirodzené m a n. Ak je $m = n$, potom z toho dostávame

$$(14) \qquad \|K_{2n}\| \leqq \|K_n\|^2.$$

Zo vzťahu (13) ďalej máme

$$\|K_{m+n+p}\| \leqq \|K_{m+n}\| \, . \, \|K_p\| \leqq \|K_m\| \, . \, \|K_n\| \, . \, \|K_p\|,$$

z čoho pri $m = n = p$ dostávame

$$\|K_{3n}\| \leqq \|K_n\|^3.$$

Bez ťažkostí ihneď vidíme, že platí pre každé prirodzené m a n

$$(15) \qquad \|K_{mn}\| \leqq \|K_n\|^m$$

a zrejme tiež

$$(16) \qquad \|K_{mn}\| \leqq \|K_m\|^n.$$

Zo vzťahu (13) pri $m = 1$, dostaneme

$$\|K_{n+1}\| \leqq \|K_1\| \, . \, \|K_n\|.$$

Pretože je podľa predpokladu $\|K_1\| = \|K\| \leqq 1$, máme z toho nerovnosť

$$(17) \qquad \|K_{n+1}\| \leqq \|K_n\|,$$

ktorá platí pre $n = 1, 2, \ldots$. To však znamená, že platí

$$(18) \qquad 1 \geqq \|K_1\| \geqq \|K_2\| \geqq \ldots \geqq \|K_n\| \geqq \ldots$$

Podľa predpokladu existuje taký index k, že je $\| K_k \| < 1$. Preto vzhľadom na nerovnosť (17) bude pre každé prirodzené $m \geqq k$ splnená nerovnosť: $\| K_m \| < 1$. Z toho vyplýva, že je

$$\lim_{n\to\infty} \| K_m \|^n = 0.$$

Ale vzhľadom na nerovnosť (16) bude aj

$$\lim_{n\to\infty} \| K_{mn} \| = 0, \qquad m \geqq k. \tag{19}$$

Teda postupnosť

$$\| K_m \| \geqq \| K_{2m} \| \geqq \| K_{3m} \| \geqq \ldots, \tag{20}$$

konverguje k nule.

Postupnosť (18) je však nerastúcou postupnosťou kladných čísel, preto je zdola ohraničená. Má teda limitu, ktorá musí byť nezáporná. Táto limita nemôže byť kladná, pretože postupnosť (20), ktorá je vybranou postupnosťou z postupnosti (18) podľa vzťahu (19) konverguje k nule. Preto musí byť

$$\lim_{n\to\infty} \| K_n \| = 0, \tag{21}$$

čím je lemma 4 dokázaná.

Pozn. 7: Ak by neexistovalo také prirodzené k, že $\| K_k \| < 1$, potom by zrejme muselo byť $\| K_n \| = 1$ pre všetky $n = 1, 2, \ldots$, teda aj $\lim_{n\to\infty} \| K_n \| = 1$.

Veta 1: *Nech jadro $K(x, t)$ spĺňa základné podmienky a podmienku (6). Nech existuje také prirodzené číslo k, že je $\| K_k \| < 1$. Potom nekonečný rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| K_n \| \tag{22}$$

konverguje.

Dôkaz: Nutnú podmienku konvergencie tohoto radu dáva lemma 4. Podľa predpokladu je $\| K_m \| < 1$ pre $m \geqq k$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \| K_m \|^n$ pri pevnom $m \geqq k$ zrejme konverguje, pretože je to geometrický rad s kvocientom $\| K_m \| < 1$. Avšak zo vzťahu (16) vyplýva, že potom podľa porovnávacieho kritéria konverguje aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| K_{mn} \| = \| K_m \| + \| K_{2m} \| + \| K_{3m} \| + \ldots, \qquad m \geqq k.$$

Avšak je podľa (18) pre $m \geqq k$

$$1 > \| K_m \| \geqq \| K_{m+1} \| \geqq \| K_{m+2} \| \geqq \ldots \geqq \| K_{2m} \| \geqq \ldots \geqq \| K_{3m} \| \geqq \ldots \tag{23}$$

alebo ináč

$$\| K_{m+p} \| \leqq \| K_m \|,$$

$$\| K_{2m+p} \| \leqq \| K_{2m} \|,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\| K_{mn+p} \| \leqq \| K_{mn} \|, \tag{24}$$

pre $p = 1, 2, \dots, m-1$. Pretože rad $\sum_{n=1}^{\infty} \| K_{mn} \|$ konverguje, zo vzťahov (24) vyplýva, že aj všetky rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| K_{mn+p} \|, \quad p = 1, 2, \dots, \quad m-1 \quad m \geqq k$$

konvergujú. Ale potom pri konečnom $m \geqq k$ konverguje i rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\sum_{p=0}^{m-1} \| K_{mn+p} \| \Big],$$

pretože jeho n-tý člen je súčtom n-tých členov konvergentných radov

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| K_{mn+p} \|, \quad p = 0, 1, \dots, \quad m-1.$$

Ľahko sa presvedčíme, že platí rovnosť

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\sum_{p=0}^{m-1} \| K_{mn+p} \| \Big] = \sum_{n=m}^{\infty} \| K_n \|. \tag{25}$$

Tým je dokázané, že rad (22) konverguje, pretože sa líši od konvergentného radu (25) iba tým, že obsahuje prvých $m-1$ členov naviac.

Na základe vety 1 dokážeme niekoľko ďalších viet.

Lemma 5: *Nech (f_n) je ľubovoľný ortonormálny systém funkcií, pričom nech je $f_n \in S$, $n = 1, 2, \dots$. Nech sú splnené predpoklady vety 1. Potom rad*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{m,n}^{(i)} \tag{26}$$

kde je

$$c_{m,n}^{(i)} = \iint K_i(x, t) f_m(x) f_n(t) \, dx \, dt, \tag{27}$$

absolútne konverguje pre všetky prirodzené m a n.

Dôkaz: Keď použijeme na pravú stranu rovnosti (27) Schwarz–Buňakovského nerovnosť a využijeme vlastnosti funkcií f_n, dostaneme

$$| c_{m,n}^{(i)} | \leqq \sqrt{\iint | K_i(x, t) |^2 \, dx \, dt} \sqrt{\int | f_m(x) |^2 \, dx} \sqrt{\int | f_n(t) |^2 \, dt} = \| K_i \|$$

a na základe toho

$$\sum_{i=1}^{\infty} | c_{m,n}^{(i)} | \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \| K_i \|, \qquad m, n = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Ale rad na pravej strane podľa vety 1 konverguje, preto zo vzťahu (28) vyplýva, že rad (26) konverguje absolútne.

Veta 2: *Nech sú splnené predpoklady vety* 1. *Nech $f \in S$ je ľubovoľná daná funkcia. Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| L_n \| \tag{29}$$

konverguje a platí nerovnosť

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| L_n \| \leqq \| f \| \sum_{n=1}^{\infty} \| K_n \|.$$

Dôkaz: Zo vzťahu (5) pomocou Schwarz–Buňakovského nerovnosti dostaneme

$$\| L_n \| \leqq \| K_n \| \cdot \| f \|$$

a z toho hneď

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| L_n \| \leqq \| f \| \sum_{n=1}^{\infty} \| K_n \|,$$

čím je veta 2 dokázaná, lebo rad na pravej strane podľa vety 1 konverguje.

Veta 3: *Nech jadro $K(x, t)$ je ohraničené a spĺňa okrem základných podmienok aj podmienku* (6).

Potom postupnosť funkcií

$$A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x), \ldots \tag{30}$$

kde

$$A_n(x) = \int | K_n(x, t) |^2 \,\mathrm{d}t, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

a tiež postupnosť funkcií

$$B_1(x), \ B_2(x), \ldots, \ B_n(x), \ldots \tag{31}$$

kde

$$B_n(x) = \int | K_n(x, t) |^2 \,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

konverguje.

Dôkaz: Podľa definície je

$$K_{n+1}(x, t) = \int K_n(x, s)\, K_1(s, t) \,\mathrm{d}s,$$

z čoho dostaneme

$$| K_{n+1}(x, t) |^2 = | \int K_n(x, s)\, K_1(s, t) \,\mathrm{d}s |^2.$$

Ak na pravú stranu použijeme Schwarz–Buňakovského nerovnosť a potom obidve strany integrujeme podľa t, dostaneme

$$\int |K_{n+1}(x, t)|^2 \, dt \leqq [\int |K_n(x, s)|^2 \, ds] \, . \, [\int dt \int |K_1(s, t)|^2 \, ds],$$

z čoho na základe podmienky (6) vyplýva vzťah

$$\int |K_{n+1}(x, t)|^2 \, dt \leqq \int |K_n(x, t)|^2 \, dt$$

platný pre každé $x \in (a, b)$ a pre všetky $n = 1, 2, \ldots$. Z tohto vzťahu vyplýva, že funkcie (30) tvoria nerastúcu postupnosť

$$A_1(x) \geqq A_2(x) \geqq \ldots \geqq A_n(x) \geqq A_{n+1}(x) \geqq \ldots$$

Zo vzťahu (3) vyplýva, že iterované jadro $K_{n+1}(x, t)$ má i tvar

$$K_{n+1}(x, t) = \int K_1(x, s) \, K_n(s, t) \, ds.$$

Preto možno z rovnosti

$$|K_{n+1}(x, t)|^2 = |\int K_1(x, s) \, K_n(s, t) \, ds|^2$$

integrovaním podľa x a použitím Schwarz–Buňakovského nerovnosti na pravú stranu dostať nerovnosť

$$\int |K_{n+1}(x, t)|^2 \, dx \leqq \int\int |K_1(x, s)|^2 \, ds \, dx \int |K_n(s, t)|^2 \, ds$$

a z toho vzhľadom na podmienku (6)

$$\int |K_{n+1}(x, t)|^2 \, dx \leqq \int |K_n(x, t)|^2 \, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

z čoho vyplýva, že funkcie (31) tvoria nerastúcu postupnosť

$$B_1(x) \geqq B_2(x) \geqq \ldots \geqq B_n(x) \geqq B_{n+1}(x) \geqq \ldots$$

Funkcie $A_n(x)$ a $B_n(x)$ sú podľa definície nezáporné, preto podľa Bolzano–Weierstrassovej vety o existencii limity monotónnej ohraničenej postupnosti sú postupnosti funkcií (30) a (31) konvergentné pri každom $x \in (a, b)$, čo bolo treba dokázať.

Veta 4.: *Nech jadro $K(x, t)$ je ohraničené a nech spĺňa okrem základných podmienok aj podmienku*

(32) $$\| K \| < 1.$$

Potom postupnosť iterovaných jadier

(33) $$K_1(x, t), \quad K_2(x, t), \ldots, \quad K_n(x, t), \ldots$$

pre obidve premenné x a t rovnomerne konverguje k nule.

Dôkaz: Podľa predpokladu je jadro $K(x, t)$ ohraničené, preto sú ohraničené aj funkcie

(34) $$A_1(x) = \int |K(x, t)|^2 \, dt, \qquad B_1(t) = \int |K(x, t)|^2 \, dx.$$

Existujú teda také konštanty $N_1 > 0$, $N_2 > 0$, že pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ a $t \in \langle a, b \rangle$ platí

$$0 \leqq A_1(x) \leqq N_1 < \infty \tag{35}$$
$$0 \leqq B_1(t) \leqq N_2 < \infty.$$

Zo vzťahov (34) vyplýva, že je

$$\int A_1(x)\,\mathrm{d}x = \int B_1(t)\,\mathrm{d}t = \| K \|^2 \tag{36}$$

a z toho na základe predpokladu (32)

$$\int A_1(x)\,\mathrm{d}x = \int B_1(x)\,\mathrm{d}x < 1.$$

Zo vzťahu (3) pri $m = 1$ dostaneme

$$K_{n+1}(x, t) = \int K_1(x, s)\, K_n(s, t)\,\mathrm{d}s.$$

Z tohoto vzťahu pomocou Schwarz–Buňakovského nerovnosti dostaneme pri $n = 1, 2, \ldots$ nasledujúce odhady

$$| K_2(x, t) |^2 = | \int K_1(x, s)\, K_1(s, t)\,\mathrm{d}s |^2 \leqq \int | K_1(x, s) |^2\,\mathrm{d}s \int | K_1(s, t) |^2\,\mathrm{d}s =$$
$$= A_1(x)\, B_1(t),$$

$$| K_3(x, t) |^2 = | \int K_1(x, s)\, K_2(s, t)\,\mathrm{d}s |^2 \leqq \int | K_1(x, s) |^2\,\mathrm{d}s \int | K_2(s, t) |^2 \leqq$$
$$\leqq A_1(x)\, B_1(t)\, \| K \|^2,$$

lebo je podľa predchádzajúceho riadku a vzťahu (36)

$$\int | K_2(s, t) |^2\,\mathrm{d}s \leqq \| K \|^2\, B_1(t).$$

Podobne bude ďalej

$$| K_4(x, t) |^2 = | \int K_1(x, s)\, K_3(s, t)\,\mathrm{d}s |^2 \leqq \int | K_1(x, s) |^2\,\mathrm{d}s \int | K_3(s, t) |^2\,\mathrm{d}s \leqq$$
$$\leqq A_1(x)\, B_1(t)\, \| K \|^4,$$

$$| K_5(x, t) |^2 \leqq A_1(x)\, B_1(t)\, \| K \|^6, \text{ atď.}$$

Je jasné, že platí obecne

$$| K_n(x, t) |^2 \leqq A_1(x)\, B_1(t)\, \| K \|^{2(n-2)} \tag{37}$$

alebo vzhľadom na nerovnosti (35)

$$| K_n(x, t) |^2 \leqq N_1 N_2\, \| K \|^{2(n-2)}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{38}$$

Z toho vyplýva, že pre každé prirodzené číslo $n \geqq 2$ a pre každé x a t, $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$, platí

$$| K_n(x, t) | \leqq \sqrt{A_1(x)\, B_1(t)}\, \| K \|^{n-2} \leqq \sqrt{N_1 N_2}\, \| K \|^{n-2}. \tag{39}$$

Avšak z toho pri použití vzťahov (32) a (35) vyplýva, že

$$\lim_{n \to \infty} K_n(x, t) = 0,$$

pričom je táto konvergencia rovnomerná pre všetky $x \in \langle a, b \rangle$ a $t \in \langle a, b \rangle$, ako to ľahko vyplýva zo vzťahu (39).

Pozn. 8: Budeme hovoriť, že nekonečný rad funkcií na intervale $\langle a, b \rangle$ *regulárne* konverguje, ak tam rad absolútnych hodnôt jeho členov konverguje rovnomerne ([4], str. 81).

Veta 5: *Nech jadro $K(x, t)$ je ohraničené a nech spĺňa okrem základných podmienok aj podmienku* (32). *Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \tag{40}$$

na intervale D pre obidve premenné x a t regulárne konverguje.

Dôkaz: Pretože táto veta má rovnaké predpoklady ako veta 4, platí vzťah (39), z ktorého vyplýva

$$\sum_{n=2}^{\infty} |K_n(x, t)| \leqq \sqrt{N_1 N_2} \sum_{n=2}^{\infty} \| K \|^{n-2},$$

kde rad na pravej strane zrejme konverguje, lebo je to geometrický rad s kvocientom $\| K \| < 1$. Preto aj rad na ľavej strane konverguje pri každom x a t, $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$, a to podľa Weierstrassovho kritéria rovnomerne pre obidve premenné. Preto rad (40) konverguje podľa pozn. 8 regulárne, čo sme mali dokázať.

Lemma 6: *Nech jadro $K(x, t)$ je ohraničené a spĺňa základné podmienky. Nech nijaká z funkcií rovnomerne konvergentnej postupnosti*

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{41}$$

nie je riešením homogénnej Fredholmovej integrálnej rovnice 1. *druhu*

$$\int K(x, t)\, \psi(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Nech je

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \not\equiv 0.$$

Potom nutnou a postačujúcou podmienkou k tomu, aby $f(x)$ bola vlastnou funkciou jadra $K(x, t)$ je, aby postupnosť funkcií

$$F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$$

kde je

$$F_n(x) = \frac{f_n(x)}{\int K(x, t) f_n(t)\, \mathrm{d}t} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{42}$$

konvergovala k nenulovej konštante.

Dôkaz: a) Nutná podmienka: Nech $f(x)$ je vlastnou funkciou jadra $K(x, t)$. Potom existuje číslo λ tak, že platí rovnica

$$f(x) = \lambda \int K(x, t) f(t) \, dt$$

resp.

$$\lambda = \frac{f(x)}{\int K(x, t) f(t) \, dt}.$$

Vzhľadom na rovnomernú konvergenciu postupnosti (41) a ohraničenosť jadra platí

$$\lambda = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)}{\int K(x, t) \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t) \, dt} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)}{\lim\limits_{n \to \infty} \int K(x, t) f_n(t) \, dt} = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x)}{\int K(x, t) f_n(t) \, dt}$$

čo s ohľadom na definíciu (42) funkcí $F_n(x)$ znamená, že je

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \lambda = \text{konšt.}$$

b) postačujúca podmienka: Nech platí

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \text{konšt.} = \lambda.$$

Potom vzhľadom na definíciu (42) funkcií $F_n(x)$ bude

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} F_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x)}{\int K(x, t) f_n(t) \, dt} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)}{\int K(x, t) \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t) \, dt} = \frac{f(x)}{\int K(x, t) f(t) \, dt}.$$

z čoho vyplýva rovnica

$$f(x) = \lambda \int K(x, t) f(t) \, dt,$$

ekvivalentná s tvrdením, že $f(x)$ je vlastnou funkciou jadra $K(x, t)$ pri vlastnej hodnote λ.

Lemmu 6 využijeme pri riešení rovnice (1) metódou postupných aproximácií funkciami $L_n(x)$. Hovorí o tom nasledujúca poznámka.

Pozn. 9: Ak jadro $K(x, t)$ spĺňa základné podmienky a funkcia $f \in S$ je taká, že postupnosť funkcií

$$L_1(x), \; L_2(x), \ldots, \; L_n(x), \ldots$$

kde $L_n(x)$ sú definované vzorcom (4), rovnomerne konverguje k funkcii $L(x) \not\equiv 0$

$$L(x) = \lim_{n \to \infty} L_n(x)$$

potom funkcia $L(x)$ je vlastnou funkciou jadra $K(x, t)$, patriacou ku vlastnej hodnote $\lambda = 1$.

Dôkaz: Utvorme funkcie $F_n(x)$ nasledujúcim spôsobom

$$F_n(x) = \frac{L_n(x)}{\int K(x, t)\, L_n(t)\, \mathrm{d}t}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

a vyšetrime limitu postupnosti týchto funkcií. Vzhľadom na vzťahy (4) a (3) je

$$\int K(x, t)\, L_n(t)\, \mathrm{d}t = \int K(x, t) \left[\int K_n(t, s)\, f(s)\, \mathrm{d}s\right] \mathrm{d}t =$$
$$= \int K_{n+1}(x, s)\, f(s)\, \mathrm{d}s = L_{n+1}(x).$$

Preto bude

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{L_n(x)}{L_{n+1}(x)} = \frac{L(x)}{L(x)} = 1,$$

čo podľa lemmy 6 znamená, že $\lambda = 1$ je vlastnou hodnotou jadra $K(x, t)$ a $L(x)$ jeho vlastnou funkciou pri tejto vlastnej hodnote $\lambda = 1$.

Pozn. 10: Ak postupnosť funkcií

$$\int K_1(x, t)\, \mathrm{d}t, \quad \int K_2(x, t)\, \mathrm{d}t, \ldots, \quad \int K_n(x, t)\, \mathrm{d}t, \ldots$$

rovnomerne konverguje, potom jej limita je vlastnou funkciou jadra $K(x, t)$ pri vlastnej hodnote $\lambda = 1$.

Lemma 7: *Nech jadro $K(x, t)$ spĺňa okrem základných podmienok aj podmienku (32). Nech je $f \in S$ ľubovoľná funkcia. Potom*

a) *postupnosť postupných aproximácií*

(43) $$L_1(x), L_2(x), \ldots, L_n(x), \ldots$$

rovnomerne konverguje k nule,

b) *rad*

(44) $$\sum_{n=1}^{\infty} L_n(x)$$

v intervale $\langle a, b \rangle$ regulárne konverguje.

Dôkaz: a) Zo vzťahu (4) použitím Schwarz–Buňakovského nerovnosti dostaneme

$$| L_n(x) |^2 = | \int K_n(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t |^2 \leqq \int | K_n(x, t) |^2\, \mathrm{d}t \int | f(t) |^2\, \mathrm{d}t.$$

Z toho ďalej po použití vzťahov (37) a (36) dostaneme

$$| L_n(x) |^2 \leqq \| f \|^2\, \| K \|^{2(n-1)} A_1(x),$$

z čoho s prihliadnutím na nerovnosť (35) máme

(45) $$| L_n(x) | \leqq \| f \| \,.\, \| K \|^{n-1} \sqrt{N_1}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Z tohto vzťahu vzhľadom na podmienku (32) vyplýva, že je

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = 0,$$

pričom je táto konvergencia zrejme rovnomerná, ako to ľahko vyplýva z nerovnosti (45).

b) Ľahko vyplýva zo vzťahu (45), pretože číslo $\|f\| \sqrt{N_1}$ je konečné a rad $\sum_{n=1}^{\infty} \| K \|^{n-1}$ konverguje, na základe čoho rad (44) konverguje regulárne.

Všimnime si súvislosť pozn. 9 a lemmy 7b) z hľadiska riešenia rovnice (1) metódou postupných aproximácií. Podľa pozn. 9 nám stačí nájsť takú funkciu $f \in S$, aby postupnosť funkcií $L_n(x)$ rovnomerne konvergovala k nenulovej funkcii $L(x)$; táto funkcia $L(x)$ je potom riešením rovnice (1) pri $\lambda = 1$. Podľa lemmy 7b) sa zasa ponúka otázka výberu funkcie $f \in S$ tak, aby rad (44), ktorého regulárna a teda tým skôr rovnomerná konvergencia je zaručená lemmou 7b) pre každú $f \in S$, určil riešenie rovnice (1) pri vlastnej hodnote λ.

Nebolo účelom tohto článku tieto dve otázky riešiť, ale len pripraviť k tomu vhodný materiál. Preto sa tu ďalšou analýzou tohto problému nebudeme zaoberať.

Literatúra

[1] Fréchet: On the behavior of the nth iterate of a Fredholm kernel as n becomes infinite. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 18, 1932.

[2] Schmeidler: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, 2. Auflage. Leipzig 1955.

[3] Grebenča–Novoselov: Kurs matematičeskogo analiza, tom 2., Učpedgiz, Moskva 1953.

[4] Smirnov: Kurs vyššej matematiki, IV, Moskva 1951.

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2

Do redakcie dodané 15. 2. 1960

О некоторых свойствах итерированных ядер интегральных уравнений типа Фредгольма

Й. Шайда

Резюме

В этой статье изучаются некоторые свойства итерированных ядер интегральных уравнений типа Фредгольма, именно свойства сходимости. В статье находится несколько простых результатов, имеющих именно вспомогательное значение.

Сначала определены так называемые основные свойства ядра $K(x, t)$ и затем показано, что эти свойства сохраняют также все итерированные ядра $K_n(x, t)$. Потом приведено несколько простых результатов, из которых мы здесь приведем следующие:

Если выполнено условие $\|K\| \leqq 1$, то бесконечный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \| K_n \|$, где

$$\| K_n \| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b | K_n(x, t) |^2 \, dx \, dt}, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad \text{и} \qquad K_1 = K$$

сходится; последовательности функций

$$A_n(x) = \int_a^b | K_n(x, t) |^2 \, dt, \qquad B_n(t) = \int_a^b | K_n(x, t) |^2 \, dx$$

в интервале $[a, b]$ сходятся.

Если выполнено условие $\|K\| < 1$, то последовательность итерированных ядер $K_n(x, t)$ равномерно сходится к нулью для обеих переменных, $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$, даже и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t)$ равномерно сходится для обеих переменных x и t, $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$; далее бесконечный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b K_n(x, t) f(t) \, dt$ в интервале $[a, b]$ равномерно сходится для каждой суммируемой с квадратом функции,

Über einige Eigenschaften der iterierten Kerne der Integralgleichungen des Fredholmschen Typus

J. Šajda

Zusammenfassung

In dieser Arbeit sind einige Eigenschaften der iterierten Kerne der Integralgleichungen des Fredholmschen Typus, besonders Konvergenzeigenschaften untersucht. Sie enthält einige einfache Ergebnisse, die eher eine Hilfsbedeutung als eine grundsätzliche Bedeutung haben.

Zunächst sind die sogenannte gründliche Eigenschaften des Kernes $K(x, t)$ definiert und dann ist gezeigt, daß diese Eigenschaften auch alle iterierte Kerne $K_n(x, t)$ besitzen.

Dann sind einige einfache Ergebnisse angeführt, und zwar: Unter der Bedingung, daß $\| K \| \leqq 1$, die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \| K_n \|$, wobei ist

$$\| K_n \| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b | K_n(x, t) |^2 \, dx \, dt},$$

konvergiert, weiter die Funktionenfolgen $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, wobei

$$A_n(x) = \int_a^b | K_n(x, t) |^2 \, dt, \qquad B_n(t) = \int_a^b | K_n(x, t) |^2 dx$$

ist, im Intervall $\langle a, b \rangle$ konvergieren.

Unter der Bedingung, daß $\| K \| < 1$ die Funktionenfolge der iterierten Kerne $K_n(x, t)$ für beide Veränderlichen x und t, gleichmäßig konvergiert zu Null und mehr die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ gleichmäßig konvergiert und weiter, die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b K_n(x, t) f(t) \, dt$ für jede quadratisch integrable Funktion $f(x)$ im Intervall $\langle a, b \rangle$ gleichmäßig konvergiert.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. V, 8—10 MATEMATICA, 1961]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. V., FASC. VIII-X. MATHEMATICA 1961

Une amélioration de la méthode de Runge—Kutta—Nyström pour la résolution numérique des équations différentielles du deuxième ordre

V. Ficker

Soit donnée une équation différentielle du deuxième ordre

$$y'' = f(x, y, y') \tag{I}$$

et la solution de l'équation différentielle (I) satisfasse aux conditions initiales:

$$\text{pour } x = x_0 \text{ est } y = y_0,\ y' = y'_0 \tag{II}$$

où x_0, y_0, y'_0 sont les nombres donnés. On remplace l'équation différentielle (I) par un système différentiel normal

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= f(x, y, u) \end{aligned} \tag{III}$$

Les intégrales du système différentiel (III) aient des formes

$$y = F(x) \tag{IV}$$

et

$$u = G(x) \tag{V}$$

La résolution numérique du système différentiel (III) consiste en calculant des accroissements L de la fonction $F(x)$ et K de sa dérivée $G(x)$ correspondant à l'accroissement h de l'argument x. On calcule ces accroissements L et K des rélations

$$y_0 + L = F(x_0 + h) \tag{VI}$$

$$y'_0 + K = G(x_0 + h) \tag{VII}$$

En développant les seconds membres des rélations (VI) et (VII) en série de Taylor et en utilisant des conditions (II) nous avons

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^i}{i!} F^{(i)}(x_0) \tag{VIII}$$

$$K = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^i}{i!} F^{(i+1)}(x_0) \tag{IX}$$

En dérivant la rélation (IV) deux fois par rapport à x et en la comparant avec (I) nous obtenons

$$y'' = F''(x) = f(x, y, y') \tag{X}$$

ensuite on a

$$L = u_0 h + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{h^i}{i!} f^{(i-2)}(x_0, y_0, u_0) \tag{XI}$$

$$K = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^i}{i!} f^{(i-1)}(x_0, y_0, u_0) \tag{XII}$$

où $f^{(0)}(x_0, y_0, u_0) = f(x_0, y_0, u_0)$

On désigne la valeur de la fonction $f(x_0, y_0, u_0)$ par f, u_0 par u et la valeur de sa dérivée partielle $\dfrac{\partial^{p+q+r} f(x_0, y_0, u_0)}{\partial x^p \partial y^q \partial u^r}$ par ${}^p_q f_r$. On introduit pour simplifier les calculs ces symbols

$$D^{(n)} f = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \frac{n!}{k_1! k_2! (n-k_1-k_2)!} \, {}^{k_1}_{k_2} f_{n-k_1-k_2} \,.\, u^{k_2} \,.\, f^{n-k_1-k_2} \tag{XIII}$$

$$D^{(n)}{}_j f_l = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \frac{n!}{k_1! k_2! (n-k_1-k_2)!} \, {}^{k_1}_{k_2+j} f_{n+l-k_1-k_2} \,.\, u^{k_2} \,.\, f^{n-k_1-k_2} \tag{XIV}$$

Pour la dérivation de (XIII) et (XIV) sont accomplies évidemment les rélations suivantes

$$[D^{(n)} f]' = D^{(n+1)} f + n D^{(n-1)} f_1 \,.\, Df + nf \,.\, D^{(n-1)}{}_1 f \tag{XV}$$

$$[D^{(n)}{}_j f_l]' = D^{(n+1)}{}_j f_l + n D^{(n-1)}{}_j f_{1+l} Df + nf \,.\, D^{(n-1)}_{j+1} f_l \tag{XVI}$$

En utilisant des rélations (XIII), (XIV), (XV) et (XVI) on peut énoncer des accroisement L et K par les formules

$$\begin{aligned} L = hu &+ \frac{h^2}{2!} f + \frac{h^3}{3!} Df + \frac{h^4}{4!} [D^{(2)} f + f_1 . Df + f . {}_1 f] + \frac{h^5}{5!} [D^{(3)} f + \\ &+ f_1 D^{(2)} f + f_1^2 Df + 3Df_1 . Df + 3f . D_1 f + Df . {}_1 f + f . {}_1 f . f_1] + \frac{h^6}{6!} [D^{(4)} f + \\ &+ f_1 D^{(3)} f + f_1^2 D^{(2)} f + f_1^3 Df + 6D^{(2)} f_1 . Df + 4Df_1 . D^{(2)} f + 3f_2 (Df)^2 + 7f_1 . Df_1 Df + \\ &+ 6f . {}_1 f_1 . Df + 6f . D^{(2)}_1 f + 4Df_1 . f . {}_1 f + 4D_1 f . Df + 3f_1 . f . D_1 f + 3f^2 . {}_2 f + \\ &+ f_1^2 . f . {}_1 f + {}_1 f . D^{(2)} f + f . {}_1 f^2 + 2 {}_1 f . f_1 . Df] + \ldots \end{aligned} \tag{XVII}$$

$$\begin{aligned} K = hf &+ \frac{h^2}{2!} Df + \frac{h^3}{3!} [D^{(2)} f + f_1 . Df + f . {}_1 f] + \frac{h^4}{4!} [D^{(3)} f + f_1 D^{(2)} f + f_1^2 Df + \\ &+ 3Df_1 . Df + 3f . D_1 f + Df . {}_1 f + f . {}_1 f . f_1] + \frac{h^5}{5!} [D^{(4)} f + f_1 D^{(3)} f + f_1^2 D^{(2)} f + f_1^3 Df + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+6D^{(2)}f_1 . Df+4Df_1 . D^{(2)}f+3f_2(Df)^2+7f_1 . Df_1 . Df+6f . {}_1f_1 . Df+\\
&+6f . D^{(2)}_1f+4Df_1 . f . {}_1f+4D_1f . Df+3f_1 . f . D_1f+3f^2 . {}_2f+f_1^2 . f . {}_1f+\\
&+{}_1f . D^{(2)}f+f . {}_1f^2+2{}_1f . f_1 . Df]+\frac{h^6}{6!}[D^{(5)}f+f_1D^{(4)}f+f_1^2D^{(3)}f+f_1^3D^{(2)}f+\\
&+f_1^4Df+10fD^{(3)}_1f+10D^{(3)}f_1 . Df+5Df_1 . D^{(3)}f+6f_1 . f . D^{(2)}_1f+\\
&+16f_1 . Df . D^{(2)}f_1+9f_1 . Df_1 . D^{(2)}f+3f_1^2 . f . D_1f+12f_1^2 . Df_1 . Df+f_1^3 . f . {}_1f+\\
&+30f . D_1f_1 . Df+15Df_2(Df)^2+10D^{(2)}f_1 . D^{(2)}f+10f . {}_1f . D^{(2)}f_1+10{}_1f_1(Df)^2+\\
&+10f . {}_1f_1 . D^{(2)}f+10{}_1f . f^2 . {}_1f_1+16f . {}_1f_1 . f_1Df+10Df . D^{(2)}_1f+15f^2 . D_2f+\\
&+10f_2 . DfD^{(2)}f+15f . D_1f . Df_1+15(Df_1)^2Df+10f . {}_1f . f_2 . Df+8{}_1f . Df_1 . Df+\\
&+10f . Df . {}_2f+5D_1fD^{(2)}f+8{}_1f . f . D_1f+9f_1 . Df . D_1f+13f_1 . f_2(Df)^2+\\
&+3f_1 . f^2 . {}_2f+9f_1 . Df_1 . f . {}_1f+3f_1^2 . Df . {}_1f+{}_1f . D^{(3)}f+Df . {}_1f^2+2{}_1f . f_1 . D^{(2)}f+\\
&+2f_1 . f . {}_1f^2]+\dots \qquad \text{(XVIII)}
\end{aligned}
$$

La résolution numérique des équations différentielles par la méthode de Runge–Kutta–Nyström consiste en donnant un système des formules pour les valeurs des arguments des fonctions f et u de sorte que la somme des premiers n termes de la combinaison convenable des séries de Taylor des fonctions f et u coincide avec la somme des premiers n termes des seconds membres des rélations (XVII) et (XVIII). Ce sont les formules de n-tième ordre. Dans cet article on déduira les formules du sixième ordre.

On choisit pour les fonctions f et u des valeurs suivantes

$$
\begin{aligned}
&m_0' = u_0 && m_0 = f(x_0, y_0, u_0)\\
&m_q' = (u_0+w_qh) && m_q = f(x_0+\phi_qh,\ y_0+l_qh,\ u_0+v_qh)
\end{aligned}
$$

pour $\qquad q = 1, 2, \dots 7 \qquad$ (XIX)

où

$$
\begin{aligned}
&w_1 = am_0 && l_1 = Am_0' && v_1 = \alpha m_0\\
&w_2 = b_0m_0+b_1m_1 && l_2 = B_0m_0'+B_1m_1' && v_2 = \beta_0m_0+\beta_1m_1\\
&w_3 = \sum_{j=0}^{2} g_jm_j && l_3 = \sum_{j=0}^{2} G_jm_j' && v_3 = \sum_{j=0}^{2} \gamma_jm_j\\
&w_4 = \sum_{j=0}^{3} d_jm_j && l_4 = \sum_{j=0}^{3} D_jm_j' && v_4 = \sum_{j=0}^{3} \delta_jm_j\\
&w_5 = \sum_{j=0}^{4} e_jm_j && l_5 = \sum_{j=0}^{4} E_jm_j' && v_5 = \sum_{j=0}^{4} \varepsilon_jm_j \qquad \text{(XX)}\\
&w_6 = \sum_{j=0}^{5} c_jm_j && l_6 = \sum_{j=0}^{5} Z_jm_j' && v_6 = \sum_{j=0}^{5} \zeta_jm_j\\
&w_7 = \sum_{j=0}^{6} \vartheta_jm_j && l_7 = \sum_{j=0}^{6} \exists_jm_j' && v_7 = \sum_{j=0}^{6} \eta_jm_j
\end{aligned}
$$

Les constantes ϕ_q doivent satisfaire d'après Runge – König [1] à cettes rélations suivantes

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= a &&= A &&= \alpha \\
\phi_2 &= b_0+b_1 &&= B_0+B_1 &&= \beta_0+\beta_1 \\
\phi_3 &= \sum_0^2 g_j &&= \sum_0^2 G_j &&= \sum_0^2 \gamma_j \\
\phi_4 &= \sum_0^3 d_j &&= \sum_0^3 D_j &&= \sum_0^3 \delta_j \\
\phi_5 &= \sum_0^4 e_j &&= \sum_0^4 E_j &&= \sum_0^4 \varepsilon_j \\
\phi_6 &= \sum_0^5 c_j &&= \sum_0^5 Z_j &&= \sum_0^5 \zeta_j \\
\phi_7 &= \sum_0^6 \ni_j &&= \sum_0^6 \exists_j &&= \sum_0^6 \eta_j
\end{aligned}
\tag{XXI}
$$

Si on désigne encore

$$t_i = m_i' h \quad \text{et} \quad K_i = m_i h \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \ldots 7 \tag{XXII}$$

il sera

$$L = \sum_{i=0}^{7} r_i t_i \quad et \quad K = \sum_{i=0}^{7} p_i K_i \tag{XXIII}$$

en développant m_q en série de Taylor nous avons

$$
\begin{aligned}
m_q = {} & f(x_0+\phi_q h,\, y_0+l_q h,\, u_0+v_q h) = f + h[\phi_q \cdot {}^1f + l_q \cdot {}_1f + v_q \cdot f_1] + \\
& + \frac{h^2}{2!}[\phi_q^2 \cdot {}^2f + l_q^2 \cdot {}_2f + v_q^2 \cdot f_2 + 2(\phi_q \cdot l_q \cdot {}_1^1f + \phi_q \cdot v_q{}^1f_1 + l_q v_q \cdot {}_1f_1)] + \\
& + \frac{h^3}{3!}[\phi_q^3 \cdot {}^3f + l_{q3}^3 f + v_q^3 f_3 + 3(\phi_q^2 l_{q1}^{2} f + \phi_q^2 v_q{}^2 f_1 + \phi_q l_{q2}^{21} f + l_q^2 v_q \cdot {}_2f_1 + \\
& + \phi_q v_q^{21} f_2 + l_q v_{q1}^2 f_2) + 6\phi_q l_q v_{q1}^1 f_1] + \frac{h^4}{4!}[\phi_q^4 \cdot {}^4f + l_q^4 \cdot {}_4f + v_q^4 \cdot f_4 + 4(\phi_q^3 l_{q1}^3 f + \\
& + \phi_q^3 v_q{}^3 f_1 + \phi_q l_{q3}^{31} f + l_q^3 v_{q3} f_1 + \phi_q v_q^{31} f_3 + l_q v_q^3 \cdot {}_1f_3) + 6(\phi_q^2 l_{q2}^{22} f + \phi_q^2 v_q^{22} f_2 + \\
& + l_q^2 v_{q2}^2 f_2) + 12(\phi_q^2 l_q v_{q1}^2 f_1 + \phi_q l_q^2 v_{q2}^1 f_1 + \phi_q l_q v_{q1}^{21} f_2)] + \frac{h^5}{5!}[\phi_q^{55} f + l_{q5}^5 f + \\
& + v_q^5 \cdot f_5 + 5(\phi_q^4 l_{q1}^4 f + \phi_q^4 v_q{}^4 f_1 + \phi_q l_{q4}^{41} f + l_q^4 v_{q4} f_1 + \phi_q v_q^{41} f_4 + l_q v_{q1}^4 f_4) + \\
& + 10(\phi_q^3 l_{q2}^{23} f + \phi_q^3 v_q^{23} f_2 + \phi_q^2 l_{q3}^{32} f + l_q^3 v_{q3}^2 f_2 + \phi_q^2 v_q^{32} f_3 + l_q^2 v_{q2}^3 f_3) + \\
& + 20(\phi_q^3 l_q v_{q1}^3 f_1 + \phi_q l_q^3 v_{q3}^1 f_1 + \phi_q l_q v_{q1}^{31} f_3) + 30(\phi_q^2 l_q^2 v_{q2}^2 f_1 + \phi_q^2 l_q v_{q1}^{22} f_2 + \\
& + \phi_q l_q^2 v_{q2}^{21} f_2)] + \ldots,
\end{aligned}
\tag{XXIV}
$$

Des rélations (XIX) et de la formule (XXIV) nous obtenons pour $q = 1, 2, \ldots 7$ successivement les expressions suivantes:

$$m_0' = u$$

$$m_0 = f$$

$$m_1' = u + \phi_1 f h$$

$$m_1 = f + \phi_1 D f h + \frac{1}{2!}\phi_1^2 D^{(2)} f h^2 + \frac{1}{3!}\phi_1^3 D^{(3)} f h^3 + \frac{1}{4!}\phi_1^4 D^{(4)} f h^4 + \frac{1}{5!}\phi_1^5 D^{(5)} f h^5 + \ldots$$

$$m_2' = u + \phi_2 f h + \phi_1 b_1 D f h^2 + \frac{1}{2!}\phi_1^2 b_1 D^{(2)} f h^3 + \frac{1}{3!}\phi_1^3 b_1 D^{(3)} f h^4 +$$
$$+ \frac{1}{5!}\phi_1^4 b_1 D^{(4)} f h^5 + \ldots$$

$$m_2 = f + \phi_2 D f h + \frac{1}{2!}\left[\phi_2^2 D^{(2)} f + 2\phi_1 B_1 \cdot {}_1 f . f + 2\phi_1 \beta_1 f_1 D f\right] h^2 +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[\phi_2^3 D^{(3)} f + 3\phi_1^2 \beta_1 f_1 D^{(2)} f + 6\phi_1 \phi_2 B_1 f D_1 f + 6\phi_1 \phi_2 \beta_1 D f_1 D f\right] h^3 +$$
$$+ \frac{1}{4!}\left[\phi_2^4 D^{(4)} f + 4\phi_1^3 \beta_1 f_1 D^{(3)} f + 12\phi_1^2 B_1^2 f^2 \cdot {}_2 f + 12\phi_1^2 \phi_2 \beta_1 D f_1 D^{(2)} f +\right.$$
$$+ 12\phi_1^2 \beta_1^2 (Df)^2 . f_2 + 24\phi_1^2 \beta_1 B_1 f \cdot {}_1 f_1 D f + 12\phi_1 \phi_2^2 B_1 f D^{(2)}_1 f +$$
$$\left. + 12\phi_1 \phi_2^2 \beta_1 D^{(2)} f_1 . D f\right] h^4 + \frac{1}{5!}\left[\phi_2^5 D^{(5)} f + 5\phi_1^4 \beta_1 f_1 D^{(4)} f + 20\phi_1^3 \phi_2 \beta_1 D f_1 . D^{(3)} f +\right.$$
$$+ 60\phi_1^2 \phi_2 B_1^2 f^2 D_2 f + 30\phi_1^2 \phi_2^2 \beta_1 D^{(2)} f_1 . D^{(2)} f + 60\phi_1^2 \phi_2 \beta_1^2 D f_2 (Df)^2 +$$
$$+ 60\phi_1^3 \beta_1^2 f_2 D f D^{(2)} f + 60\phi_1^3 B_1 \beta_1 f \cdot {}_1 f_1 . D^{(2)} f + 120\phi_1^2 \phi_2 \beta_1 B_1 f D_1 f_1 . D f +$$
$$\left. + 20\phi_1 \phi_2^3 B_1 f D^{(3)}_1 f + 20\phi_1 \phi_2^3 \beta_1 D^{(3)} f_1 D f\right] h^5 + \ldots$$

$$m_3' = u + \phi_3 f h + (\phi_1 g_1 + \phi_2 g_2) D f h^2 + \frac{1}{2!}\left[(\phi_1^2 g_1 + \phi_2^2 g_2) D^{(2)} f + 2\phi_1 B_1 g_2 \cdot {}_1 f . f +\right.$$
$$\left. + 2\phi_1 \beta_1 g_2 f_1 . D f\right] h^3 + \frac{1}{3!}\left[(\phi_1^3 g_1 + \phi_2^3 g_2) D^{(3)} f + 3\phi_1^2 \beta_1 g_2 f_1 D^{(2)} f +\right.$$
$$\left. + 6\phi_1 \phi_2 B_1 g_2 f D_1 f + 6\phi_1 \phi_2 \beta_1 g_2 D f_1 . D f\right] h^4 + \frac{1}{4!}\left[(\phi_1^4 g_1 + \phi_2^4 g_2) D^{(4)} f +\right.$$
$$+ 4\phi_1^3 \beta_1 g_2 f_1 . D^{(3)} f + 12\phi_1^2 B_1^2 g_2 f^2 \cdot {}_2 f + 12\phi_1^2 \phi_2 \beta_1 g_2 D f_1 . D^{(2)} f +$$
$$+ 12\phi_1^2 \beta_1^2 g_2 f_2 (Df)^2 + 24\phi_1^2 \beta_1 B_1 g_2 f \cdot {}_1 f_1 . D f + 12\phi_1 \phi_2^2 B_1 g_2 f D^{(2)}_1 f +$$
$$\left. + 12\phi_1 \phi_2^2 \beta_1 g_2 D^{(2)} f_1 . D f\right] h^5 + \ldots$$

$$m_3=f+\phi_3 Dfh+\frac{1}{2!}[\phi_3^2 D^{(2)}f+2(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2) f._1 f+2(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2) f_1 Df] h^2+$$

$$+\frac{1}{3!}[\phi_3^3 D^{(3)}f+6\phi_1 b_1 G_2 Df._1 f+3(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2) f_1 . D^{(2)}f+6\phi_1\gamma_2 B_1 f._1 f.f_1+$$

$$+6\phi_1\beta_1\gamma_2 f_1^2 Df+6\phi_3(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2) fD_1 f+6\phi_3(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2) Df_1 . Df] h^3+$$

$$+\frac{1}{4!}[\phi_3^4 D^{(4)}f+12\phi_1^2 b_1 G_2 D^{(2)}f._1 f+4(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2) f_1 . D^{(3)}f+$$

$$+24\phi_1\phi_2\gamma_2 B_1 f.D_1 f.f_1+12\phi_1^2\beta_1\gamma_2 f_1^2 D^{(2)}f+24(\phi_1\phi_2\beta_1\gamma_2+$$

$$+\phi_1\phi_3\beta_1\gamma_2).f_1 . Df.Df_1+12(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2 f_2(Df)^2+24\phi_1\phi_3 G_2 b_1 Df.D_1 f+$$

$$+12(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)^2 f^2 ._2 f+12\phi_3(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2) Df_1 . D^{(2)}f+$$

$$+24\phi_1\phi_3\gamma_2 B_1 f._1 f.Df_1+24(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2).(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2) f._1 f_1 . Df+$$

$$+12\phi_3^2(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2) f.D_1^{(2)}f+12\phi_3^2(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2) D^{(2)}f_1 . Df] h^4+$$

$$+\frac{1}{5!}[\phi_3^5 D^{(5)}f+20\phi_1^3 b_1 G_2 D^{(3)}f._1 f+5(\phi_1^4\gamma_1+\phi_2^4\gamma_2) f_1 D^{(4)}f+$$

$$+20\phi_1^3\beta_1\gamma_2 f_1^2 D^{(3)}f+60\phi_1^2 B_1^2\gamma_2 f_1 . f^2 ._2 f+60(\phi_1^2\phi_2\beta_1\gamma_2+$$

$$+\phi_1^2\phi_3\beta_1\gamma_2) f_1 . Df_1 . D^{(2)}f+60(\phi_1^2\beta_1^2\gamma_2+2\phi_1^2\beta_1\gamma_1\gamma_2+2\phi_1\phi_2\beta_1\gamma_2^2).f_1 .f_2(Df)^2+$$

$$+60(\phi_1\phi_2^2\beta_1\gamma_2+\phi_1\phi_3^2\beta_1\gamma_2) f_1 . D^{(2)}f_1 . Df+20\phi_3 .(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2) D^{(3)}f.Df_1+$$

$$+30\phi_3^2(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2) D^{(2)}f_1 . D^{(2)}f+20\phi_3^3(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2) D^{(3)}f_1 . Df+$$

$$+60(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2) f_2 . DfD^{(2)}f+60\phi_3(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2 Df_2(Df)^2+$$

$$+120\phi_1\phi_2\phi_3\beta_1\gamma_2(Df_1)^2 Df+120\phi_1\beta_1\gamma_2(\phi_1 B_1+\phi_1 G_1+\phi_2 G_2) f._1 f_1 .f_1 Df+$$

$$+60\phi_1\phi_2^2\gamma_2 B_1 f_1 .f.D_1^{(2)}f+60\phi_1^2\phi_3 G_2 b_1 D_1 fD^{(2)}f+120\phi_1 b_1 G_2(\phi_1 G_1+$$

$$+\phi_2 G_2) fDf._2 f+120\phi_1\phi_2\phi_3\gamma_2 B_1 fD_1 fDf_1+120\phi_1 B_1\gamma_2(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2) f._1 ff_2 Df+$$

$$+60(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2) f._1 f_1 . D^{(2)}f+120\phi_1 B_1\gamma_2(\phi_1 G_1+$$

$$+\phi_2 G_2)_1 ff^2 ._1 f_1+120\phi_1 b_1 G_2(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)_1 f_1(Df)^2+60\phi_3(\phi_1 G_1+$$

$$+\phi_2 G_2)^2 f^2 D_2 f+60\phi_1\phi_3^2 b_1 G_2 DfD_1^{(2)}f+60\phi_1\phi_3^2\gamma_2 B_1 f._1 fD^{(2)}f_1+$$

$$+120\phi_3(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2) fD_1 f_1 Df+20\phi_3^3(\phi_1 G_1+$$

$$+\phi_2 G_2) f.D_1^{(3)}f] h^5+\ldots$$

$$m_4'=u+\phi_4 fh+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3) Dfh^2+\frac{1}{2!}\{(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3) D^{(2)}f+$$

$$+2[\phi_1 B_1 d_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2) d_3] f._1 f+2[\phi_1\beta_1 d_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2) d_3] f_1 Df\} h^3+$$

$$+\frac{1}{3!}\{(\phi_1^3 d_1+\phi_2^3 d_2+\phi_3^3 d_3) D^{(3)}f+3[\phi_1^2\beta_1 d_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2) d_3] f_1 D^{(2)}f+$$

$$+6[\phi_1 B_1\phi_2 d_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3 d_3]\,f.D_1 f+6[\phi_1\beta_1\phi_2 d_2+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3 d_3]\,Df_1.Df+6\phi_1 G_2 b_1 d_3 Df._1 f+6\phi_1\gamma_2 B_1 d_3 f._1 f.f_1+$$
$$+6\phi_1\beta_1\gamma_2 d_3 f_1^2 Df\}\,h^4+\frac{1}{4!}\{(\phi_1^4 d_1+\phi_2^4 d_2+\phi_3^4 d_3)\,D^{(4)}f+4[\phi_1^3\beta_1 d_2+$$
$$+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)\,d_3]\,f_1 D^{(3)}f+12[\phi_1^2 B_1^2 d_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)^2\,d_3]\,f^2._2 f+$$
$$+12[\phi_1^2\beta_1\phi_2 d_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\phi_3 d_3]\,Df_1 D^{(2)}f+12[\phi_1^2\beta_1^2 d_2+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2 d_3]\,f_2(Df)^2+24[\phi_1\beta_1\phi_1 B_1 d_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,(\phi_1 G_1+$$
$$+\phi_2 G_2)\,d_3].f._1 f_1 Df+12[\phi_1 B_1\phi_2^2 d_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3^2 d_3]\,fD^{(2)}_{\ 1}f+$$
$$+12\phi_1^2 G_2 b_1 d_3 D^{(2)}f._1 f+12[\phi_1\beta_1\phi_2^2 d_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3^2 d_3]\,D^{(2)}f_1.Df+$$
$$+24\phi_1 B_1\phi_2\gamma_2 d_3 f.D_1 f.f_1+12\phi_1^2\beta_1\gamma_2 d_3 f_1^2 D^{(2)}f+24\phi_1 b_1 G_2\phi_3 d_3 DfD_1 f+$$
$$+24(\phi_1\phi_2\beta_1\gamma_2+\phi_1\phi_3\beta_1\gamma_2)\,d_3 f_1 Df_1 Df+24\phi_1\phi_3\gamma_2 B_1 d_3 f._1 fDf_1\}\,h^5+\ldots$$

$$m_4=f+\phi_4 Dfh+\frac{1}{2!}[\phi_4^2 D^{(2)}f+2(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,f._1 f+2(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+$$
$$+\phi_3\delta_3)\,f_1 Df]\,h^2+\frac{1}{3!}\{\phi_4^3 D^{(3)}f+6[\phi_1 b_1 D_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\,D_3]\,Df._1 f+$$
$$+3(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,f_1 D^{(2)}f+6[\phi_1 B_1\delta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\delta_3]\,f._1 f.f_1+$$
$$+6[\phi_1\beta_1\delta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3]\,f_1^2 Df+6\phi_4(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3).fD_1 f+$$
$$+6\phi_4(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,Df_1.Df\}\,h^3+\frac{1}{4!}\{\phi_4^4 D^{(4)}f+4(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+$$
$$+\phi_3^3\delta_3)\,f_1 D^{(3)}f+12[\phi_1^2 b_1 D_2+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)\,D_3]\,D^{(2)}f._1 f+24\phi_1 B_1 g_2 D_3.f._1 f^2+$$
$$+24(\phi_1\beta_1 g_2 D_3+\phi_1 b_1 G_2\delta_3)\,{}_1 f.f_1 Df+12[\phi_1^2\beta_1\delta_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\delta_3]\,f_1^2 D^{(2)}f+$$
$$+12(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\phi_4 Df_1.D^{(2)}f+24[\phi_1\beta_1\phi_2\delta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3\delta_3+$$
$$+\phi_1\beta_1\delta_2\phi_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3\phi_4]\,f_1 Df_1 Df+24\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3 f_1^3 Df+$$
$$+12\phi_4^2(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,D^{(2)}f_1 Df+12(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2 f_2(Df)^2+$$
$$+24[\phi_1 B_1\phi_2\delta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3\delta_3]\,f_1.fD_1 f+24\phi_1 B_1\gamma_2\delta_3 f_1^2.f._1 f+$$
$$+12(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)^2 f^2{}_2 f+24[\phi_1 b_1\phi_4 D_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\,\phi_4 D_3]\,D_1 fDf+$$
$$+24(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,f._1 f_1 Df+24[\phi_1 B_1\phi_4\delta_2+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_4\delta_3]\,Df_1.f._1 f+12\phi_4^2(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,fD^{(2)}_{\ 1}f\}\,h^4+$$
$$+\frac{1}{5!}\{\phi_4^5 D^{(5)}f+5(\phi_1^4\delta_1+\phi_2^4\delta_2+\phi_3^4\delta_3)\,f_1.D^{(4)}f+20\phi_4(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+$$
$$+\phi_3^3\delta_3)\,Df_1 D^{(3)}f+30\phi_4^2(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,D^{(2)}f_1 D^{(2)}f+20[\phi_1^3 b_1 D_2+$$
$$+(\phi_1^3 g_1+\phi_2^3 g_2)\,D_3]\,D^{(3)}f._1 f+20\phi_4^3(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,D^{(3)}f_1.Df+$$

$$+60(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)f_2DfD^{(2)}f+60[\phi_1^2\beta_1\phi_2\delta_2+$$
$$+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\phi_3\delta_3+\phi_1^2\beta_1\phi_4\delta_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\phi_4\delta_3]f_1Df_1D^{(2)}f+$$
$$+60[\phi_1\beta_1\phi_2^2\delta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3^2\delta_3+\phi_1\beta_1\phi_4^2\delta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_4^2\delta_3]f_1DfD^{(2)}f_1+$$
$$+60[\phi_1^2\beta_1^2\delta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\delta_3+2(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3).(\phi_1\beta_1\delta_2+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3)]f_1.f_2(Df)^2+120(\phi_1\phi_2\beta_1\gamma_2\delta_3+\phi_1\phi_3\beta_1\gamma_2\delta_3+$$
$$+\phi_1\phi_4\beta_1\gamma_2\delta_3)f_1^2Df_1Df+60\phi_1^2\beta_1\gamma_2\delta_3f_1^3D^{(2)}f+20[\phi_1^3\beta_1\delta_2+$$
$$+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)\delta_3]f_1^2D^{(3)}f+120\phi_4[\phi_1\beta_1\phi_2\delta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\delta_3](Df_1)^2Df+$$
$$+60(\phi_1^2\beta_1g_2D_3+\phi_1^2b_1G_2\delta_3)\,{}_1ff_1D^{(2)}f+120(\phi_1B_1\phi_2g_2D_3+$$
$$+\phi_1B_1\phi_4g_2D_3)\,{}_1f.fD_1f+120(\phi_1\beta_1\phi_2g_2D_3+\phi_1b_1\phi_4G_2\delta_3)\,{}_1fDf_1Df+$$
$$+60[\phi_1^2b_1\phi_4D_2+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)\phi_4D_3]D_1fD^{(2)}f+60\phi_4(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+$$
$$+\phi_3\delta_3)^2Df_2(Df)^2+60[\phi_1^2B_1^2\delta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)^2\delta_3]f_1.f^2.{}_2f+$$
$$+20\phi_4^3(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)fD^{(3)}_1f+60[\phi_1B_1\phi_2^2\delta_2+(\phi_1G_1+$$
$$+\phi_2G_2)\phi_3^2\delta_3]f_1.fD^{(2)}_1f+120\phi_4[\phi_1B_1\phi_2\delta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\delta_3]fD_1fDf_1+$$
$$+120(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3).[\phi_1b_1D_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3]fDf.{}_2f+$$
$$+120(\phi_1b_1G_2\phi_3\delta_3+\phi_1\beta_1g_2\phi_4D_3)f_1DfD_1f+60\phi_4^2[\phi_1b_1D_2+$$
$$+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3]DfD^{(2)}_1f+60\phi_4^2[\phi_1B_1\delta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3]f.{}_1fD^{(2)}f_1+$$
$$+60\phi_4(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)^2f^2D_2f+120\phi_4(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)(\phi_1D_1+$$
$$+\phi_2D_2+\phi_3D_3)fD_1f_1.Df+120(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)[\phi_1b_1D_2+$$
$$+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3]\,{}_1f_1(Df)^2+120\phi_1B_1\phi_2\gamma_2\delta_3f_1^2.fD_1f+$$
$$+120(\phi_1B_1\gamma_2\phi_3\delta_3+\phi_1B_1\gamma_2\phi_4\delta_3)f_1Df_1.f.{}_1f+120(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+$$
$$+\phi_3\delta_3)[\phi_1B_1\delta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3]f.{}_1ff_2Df+60(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+$$
$$+\phi_3^2\delta_3)(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)f.{}_1f_1D^{(2)}f+120(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)[\phi_1B_1\delta_2+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3]\,{}_1ff^2.{}_1f_1+120[\phi_1\beta_1\delta_2(\phi_1B_1+\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3(\phi_1G_1+\phi_2G_2+\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)]f.{}_1f_1.f_1Df\}h^5+\ldots$$

$$m_5'=u+\phi_5fh+(\phi_1e_1+\phi_2e_2+\phi_3e_3+\phi_4e_4)Dfh^2+\frac{1}{2!}\{(\phi_1^2e_1+\phi_2^2e_2+$$
$$+\phi_3^2e_3+\phi_4^2e_4)D^{(2)}f+2[\phi_1B_1e_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)e_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+$$
$$+\phi_3D_3)e_4]f.{}_1f+2[\phi_1\beta_1e_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)e_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+$$
$$+\phi_3\delta_3)e_4]f_1Df\}h^3+\frac{1}{3!}\{(\phi_1^3e_1+\phi_2^3e_2+\phi_3^3e_3+\phi_4^3e_4)D^{(3)}f+$$
$$+3[\phi_1^2\beta_1e_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)e_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)e_4]f_1D^{(2)}f+$$

$$+6[\phi_1B_1\phi_2e_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3e_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4e_4]fD_1f+$$
$$+6[\phi_1\beta_1\phi_2e_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3e_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4e_4]Df_1Df+$$
$$+6[\phi_1b_1G_2e_3+\phi_1b_1D_2e_4+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3e_4]Df\cdot{}_1f+6[\phi_1B_1\gamma_2e_3+$$
$$+\phi_1B_1\delta_2e_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3e_4]f\cdot{}_1ff_1+6[\phi_1\beta_1\gamma_2e_3+\phi_1\beta_1\delta_2e_4+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3e_4]f_1^2Df\}h^4+\frac{1}{4!}\{(\phi_1^4e_1+\phi_2^4e_2+\phi_3^4e_3+\phi_4^4e_4)D^{(4)}f+$$
$$+4[\phi_1^3\beta_1e_2+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)e_3+(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+\phi_3^3\delta_3)e_4]f_1D^{(3)}f+$$
$$+12[\phi_1^2B_1^2e_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)^2e_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)^2e_4]f^2{}_2f+$$
$$+12[\phi_1^2\beta_1\phi_2e_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\phi_3e_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\phi_4e_4]Df_1D^{(2)}f+$$
$$+12[\phi_1^2\beta_1^2e_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2e_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2e_4]f_2(Df)^2+$$
$$+24[\phi_1\beta_1\phi_1B_1e_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)(\phi_1G_1+\phi_2G_2)e_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+$$
$$+\phi_3\delta_3)(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)e_4]f\cdot{}_1f_1Df+12[\phi_1B_1\phi_2^2e_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3^2e_3+$$
$$+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4^2e_4]fD^{(2)}_1f+12[\phi_1^2b_1G_2e_3+\phi_1^2b_1D_2e_4+$$
$$+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)D_3e_4]D^{(2)}f\cdot{}_1f+12[\phi_1\beta_1\phi_2^2e_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3^2e_3+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4^2e_4]D^{(2)}f_1Df+24[\phi_1B_1\phi_2\gamma_2e_3+\phi_1B_1\phi_2\delta_2e_4+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\delta_3e_4]f_1\,.fD_1f+12[\phi_1^2\beta_1\gamma_2e_3+\phi_1^2\beta_1\delta_2e_4+$$
$$+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\delta_3e_4]f_1^2D^{(2)}f+24[\phi_1b_1G_2\phi_3e_3+\phi_1b_1D_2\phi_4e_4+$$
$$+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\phi_4e_4]Df.D_1f+24[\phi_1\beta_1\phi_2\gamma_2e_3+\phi_1\beta_1\phi_2\delta_2e_4+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\delta_3e_4+\phi_1\beta_1\gamma_2\phi_3e_3+\phi_1\beta_1\delta_2\phi_4e_4+(\phi_1\gamma_1+$$
$$+\phi_2\gamma_2)\delta_3\phi_4e_4]f_1Df_1Df+24[\phi_1B_1\gamma_2\phi_3e_3+\phi_1B_1\delta_2\phi_4e_4+(\phi_1G_1+$$
$$+\phi_2G_2)\delta_3\phi_4e_4]Df_1\,.f\cdot{}_1f+24\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3e_4f_1^3Df+24\phi_1B_1\gamma_2\delta_3e_4f_1^2\,.f\cdot{}_1f+$$
$$+24\phi_1B_1g_2D_3e_4f\cdot{}_1f^2+24(\phi_1\beta_1g_2D_3e_4+\phi_1b_1G_2\delta_3e_4)\,{}_1ff_1Df\}\,h^5+\ldots$$

$$m_5=f+\phi_5Dfh+\frac{1}{2!}[\phi_5^2D^{(2)}f+2(\phi_1E_1+\phi_2E_2+\phi_3E_3+\phi_4E_4)f\cdot{}_1f+$$
$$+2(\phi_1\varepsilon_1+\phi_2\varepsilon_2+\phi_3\varepsilon_3+\phi_4\varepsilon_4)f_1Df]\,h^2+\frac{1}{3!}\{\phi_5^3D^{(3)}f+6[\phi_1b_1E_2+$$
$$+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4]Df\cdot{}_1f+3(\phi_1^2\varepsilon_1+\phi_2^2\varepsilon_2+$$
$$+\phi_3^2\varepsilon_3+\phi_4^2\varepsilon_4)f_1D^{(2)}f+6[\phi_1B_1\varepsilon_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+$$
$$+\phi_3D_3)\varepsilon_4]f\cdot{}_1ff_1+6[\phi_1\beta_1\varepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+$$
$$+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4]f_1^2Df+6\phi_5(\phi_1E_1+\phi_2E_2+\phi_3E_3+\phi_4E_4)f.D_1f+6\phi_5(\phi_1\varepsilon_1+$$
$$+\phi_2\varepsilon_2+\phi_3\varepsilon_3+\phi_4\varepsilon_4)Df_1Df\}\,h^3+\frac{1}{4!}\{\phi_5^4D^{(4)}f+4(\phi_1^3\varepsilon_1+\phi_2^3\varepsilon_2+\phi_3^3\varepsilon_3+$$

$$+\phi_4^3\varepsilon_4)\, f_1 D^{(3)}f+12[\phi_1^2 b_1 E_2+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)\, E_3+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+$$
$$+\phi_3^2 d_3)\, E_4]\, D^{(2)}f\,.\,{}_1f+24[\phi_1 B_1 g_2 E_3+\phi_1 B_1 d_2 E_4+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\, d_3 E_4]\, f\,.\,{}_1f^2+$$
$$+24[\phi_1\beta_1 g_2 E_3+\phi_1\beta_1 d_2 E_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\, d_3 E_4+\phi_1 b_1 G_2\varepsilon_3+\phi_1 b_1 D_2\varepsilon_4+$$
$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\, D_3\varepsilon_4]\,{}_1ff_1Df+12[\phi_1^2\beta_1\varepsilon_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\varepsilon_3+(\phi_1^2\delta_1+$$
$$+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\varepsilon_4]\, f_1^2 D^{(2)}f+12\phi_5(\phi_1^2\varepsilon_1+\phi_2^2\varepsilon_2+\phi_3^2\varepsilon_3+\phi_4^2\varepsilon_4)\, Df_1\,.\,D^{(2)}f+$$
$$+24[\phi_1\beta_1\phi_2\varepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3\varepsilon_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\phi_4\varepsilon_4+$$
$$+\phi_1\beta_1\phi_5\varepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_5\varepsilon_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\phi_5\varepsilon_4]\, f_1 Df_1 Df+$$
$$+24[\phi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3+\phi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3\varepsilon_4]\, f_1^3 Df+12\phi_5^2(\phi_1\varepsilon_1+\phi_2\varepsilon_2+$$
$$+\phi_3\varepsilon_3+\phi_4\varepsilon_4)\, D^{(2)}f_1 Df+12(\phi_1\varepsilon_1+\phi_2\varepsilon_2+\phi_3\varepsilon_3+\phi_4\varepsilon_4)^2\, f_2(Df)^2+$$
$$+24[\phi_1 B_1\phi_2\varepsilon_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3\varepsilon_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,\phi_4\varepsilon_4]\, f_1\,.\,fD_1f+$$
$$+24[\phi_1 B_1\gamma_2\varepsilon_3+\phi_1 B_1\delta_2\varepsilon_4+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\delta_3\varepsilon_4]\, f_1^2\,.\,f\,.\,{}_1f+12(\phi_1 E_1+$$
$$+\phi_2 E_2+\phi_3 E_3+\phi_4 E_4)^2 f^2\,.\,{}_2f+24[\phi_1 b_1\phi_5 E_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\,\phi_5 E_3+$$
$$+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)\,\phi_5 E_4]\, D_1 f\,.\,Df+24(\phi_1\varepsilon_1+\phi_2\varepsilon_2+\phi_3\varepsilon_3+\phi_4\varepsilon_4)(\phi_1 E_1+$$
$$+\phi_2 E_2+\phi_3 E_3+\phi_4 E_4)\, f\,.\,{}_1f_1\,.\,Df+24[\phi_1 B_1\phi_5\varepsilon_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_5\varepsilon_3+$$
$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,\phi_5\varepsilon_4]\, Df_1\,.\,f\,.\,{}_1f+12\phi_5^2(\phi_1 E_1+\phi_2 E_2+\phi_3 E_3+$$
$$+\phi_4 E_4)\, fD^{(2)}{}_1f\}\, h^4+\frac{1}{5!}\{\phi_5^5 D^{(5)}f+5(\phi_1^4\varepsilon_1+\phi_2^4\varepsilon_2+\phi_3^4\varepsilon_3+\phi_4^4\varepsilon_4)\, f_1 D^{(4)}f+$$
$$+20\phi_5(\phi_1^3\varepsilon_1+\phi_2^3\varepsilon_2+\phi_3^3\varepsilon_3+\phi_4^3\varepsilon_4)\, Df_1 D^{(3)}f+30\phi_5^2(\phi_1^2\varepsilon_1+\phi_2^2\varepsilon_2+$$
$$+\phi_3^2\varepsilon_3+\phi_4^2\varepsilon_4)\,.\,D^{(2)}f_1 D^{(2)}f+20[\phi_1^3 b_1 E_2+(\phi_1^3 g_1+\phi_2^3 g_2)\, E_3+$$
$$+(\phi_1^3 d_1+\phi_2^3 d_2+\phi_3^3 d_3)\, E_4]\, D^{(3)}f\,.\,{}_1f+20\phi_5^3(\phi_1\varepsilon_1+\phi_2\varepsilon_2+\phi_3\varepsilon_3+\phi_4\varepsilon_4)\, D^{(3)}f_1 Df+$$
$$+60(\phi_1^2\varepsilon_1+\phi_2^2\varepsilon_2+\phi_3^2\varepsilon_3+\phi_4^2\varepsilon_4)\,(\phi_1\varepsilon_1+\phi_2\varepsilon_2+\phi_3\varepsilon_3+\phi_4\varepsilon_4)\, f_2 Df D^{(2)}f+$$
$$+60[\phi_1^2\beta_1\phi_2\varepsilon_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\phi_3\varepsilon_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\phi_4\varepsilon_4+$$
$$+\phi_1^2\beta_1\phi_5\varepsilon_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\phi_5\varepsilon_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\phi_5\varepsilon_4]\, f_1 Df_1 D^{(2)}f+$$
$$+60[\phi_1\beta_1\phi_2^2\varepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3^2\varepsilon_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\phi_4^2\varepsilon_4+$$
$$+\phi_1\beta_1\phi_5^2\varepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_5^2\varepsilon_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\phi_5^2\varepsilon_4]\, f_1 Df D^{(2)}f_1+$$
$$+60[\phi_1^2\beta_1^2\varepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\,\varepsilon_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2\,\varepsilon_4+2(\phi_1\varepsilon_1+\phi_2\varepsilon_2+$$
$$+\phi_3\varepsilon_3+\phi_4\varepsilon_4)(\phi_1\beta_1\varepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\varepsilon_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\varepsilon_4)]\, f_1\,.\,f_2(Df)^2+$$
$$+120[\phi_1\beta_1\phi_2\gamma_2\varepsilon_3+\phi_1\beta_1\phi_2\delta_2\varepsilon_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3\delta_3\varepsilon_4+\phi_1\beta_1\gamma_2\phi_3\varepsilon_3+$$
$$+\phi_1\beta_1\delta_2\phi_4\varepsilon_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3\phi_4\varepsilon_4+\phi_1\beta_1\gamma_2\phi_5\varepsilon_3+\phi_1\beta_1\delta_2\phi_5\varepsilon_4+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3\phi_5\varepsilon_4]\, f_1^2 Df_1 Df+60[\phi_1^2\beta_1\gamma_2\varepsilon_3+\phi_1^2\beta_1\delta_2\varepsilon_4+(\phi_1^2\gamma_1+$$
$$+\phi_2^2\gamma_2)\,\delta_3\varepsilon_4]\, f_1^3 D^{(2)}f+20[\phi_1^3\beta_1\varepsilon_2+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)\,\varepsilon_3+(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+$$

$$+\phi_3^3\delta_3)\varepsilon_4]f_1^2D^{(3)}f+120\phi_5[\phi_1\beta_1\phi_2\varepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\varepsilon_3+(\phi_1\delta_1+$$
$$+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\varepsilon_4](Df_1)^2Df+60[\phi_1^2\beta_1g_2E_3+\phi_1^2\beta_1d_2E_4+$$
$$+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)d_3E_4+\phi_1^2b_1G_2\varepsilon_3+\phi_1^2b_1D_2\varepsilon_4+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)D_3\varepsilon_4]\,{}_1f.f_1D^{(2)}f+$$
$$+120[\phi_1B_1\phi_2g_2E_3+\phi_1B_1\phi_2d_2E_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3d_3E_4+\phi_1B_1\phi_5g_2E_3+$$
$$+\phi_1B_1\phi_5d_2E_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_5d_3E_4]\,{}_1f.f.D_1f+120[\phi_1\beta_1\phi_2g_2E_3+$$
$$+\phi_1\beta_1\phi_2d_2E_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3d_3E_4+\phi_1b_1\phi_5G_2\varepsilon_3+\phi_1b_1\phi_5D_2\varepsilon_4+$$
$$+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\phi_5D_3\varepsilon_4]\,{}_1fDf_1Df+60\phi_5[\phi_1^2b_1E_2+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)E_3+$$
$$+(\phi_1^2d_1+\phi_2^2d_2+\phi_3^2d_3)E_4]D_1fD^{(2)}f+60\phi_5(\phi_1\varepsilon_1+\phi_2\varepsilon_2+\phi_3\varepsilon_3+$$
$$+\phi_4\varepsilon_4)^2Df_2(Df)^2+60[\phi_1^2B_1^2\varepsilon_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)^2\varepsilon_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+$$
$$+\phi_3D_3)^2\varepsilon_4]f_1.f^2.{}_2f+20\phi_5^3(\phi_1E_1+\phi_2E_2+\phi_3E_3+\phi_4E_4)fD^{(3)}_1f+$$
$$+60[\phi_1B_1\phi_2^2\varepsilon_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3^2\varepsilon_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+$$
$$+\phi_3D_3)\phi_4^2\varepsilon_4]f_1.fD^{(2)}_1f+120\phi_5[\phi_1B_1\phi_2\varepsilon_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\varepsilon_3+$$
$$+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4\varepsilon_4]fD_1fDf_1+120[\phi_1b_1E_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3+$$
$$+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4].(\phi_1E_1+\phi_2E_2+\phi_3E_3+\phi_4E_4)fDf.{}_2f+$$
$$+120[\phi_1b_1G_2\phi_3\varepsilon_3+\phi_1b_1D_2\phi_4\varepsilon_4+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\phi_4\varepsilon_4+\phi_1\beta_1g_2\phi_5E_3+$$
$$+\phi_1\beta_1d_2\phi_5E_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3\phi_5E_4]f_1DfD_1f+60\phi_5^2[\phi_1b_1E_2+$$
$$+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4]DfD^{(2)}_1f+60\phi_5^2[\phi_1B_1\varepsilon_2+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4]f.{}_1fD^{(2)}f_1+$$
$$+60\phi_5(\phi_1E_1+\phi_2E_2+\phi_3E_3+\phi_4E_4)^2f^2D_2f+120\phi_5(\phi_1E_1+\phi_2E_2+$$
$$+\phi_3E_3+\phi_4E_4)(\phi_1\varepsilon_1+\phi_2\varepsilon_2+\phi_3\varepsilon_3+\phi_4\varepsilon_4)fD_1f_1Df+120[\phi_1b_1E_2+$$
$$+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4](\phi_1\varepsilon_1+\phi_2\varepsilon_2+\phi_3\varepsilon_3+$$
$$+\phi_4\varepsilon_4)\,{}_1f_1(Df)^2+120[\phi_1B_1\phi_2\gamma_2\varepsilon_3+\phi_1B_1\phi_2\delta_2\varepsilon_4+(\phi_1G_1+$$
$$+\phi_2G_2)\phi_3\delta_3\varepsilon_4]f_1^2.fD_1f+120[\phi_1B_1\gamma_2\phi_3\varepsilon_3+\phi_1B_1\delta_2\phi_4\varepsilon_4+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\phi_4\varepsilon_4+\phi_1B_1\gamma_2\phi_5\varepsilon_3+\phi_1B_1\delta_2\phi_5\varepsilon_4+(\phi_1G_1+$$
$$+\phi_2G_2)\delta_3\phi_5\varepsilon_4]f_1Df_1.f.{}_1f+120(\phi_1\varepsilon_1+\phi_2\varepsilon_2+\phi_3\varepsilon_3+\phi_4\varepsilon_4)[\phi_1B_1\varepsilon_2+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4]f.{}_1ff_2Df+60(\phi_1^2\varepsilon_1+$$
$$+\phi_2^2\varepsilon_2+\phi_3^2\varepsilon_3+\phi_4^2\varepsilon_4)(\phi_1E_1+\phi_2E_2+\phi_3E_3+\phi_4E_4)f.{}_1f_1D^{(2)}f+$$
$$+120[\phi_1B_1\varepsilon_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4].(\phi_1E_1+$$
$$+\phi_2E_2+\phi_3E_3+\phi_4E_4)\,{}_1f.f^2.{}_1f_1+120[\phi_1\beta_1\varepsilon_2(\phi_1B_1+\phi_1E_1+\phi_2E_2+$$
$$+\phi_3E_3+\phi_4E_4)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3(\phi_1G_1+\phi_2G_2+\phi_1E_1+\phi_2E_2+$$
$$+\phi_3E_3+\phi_4E_4)+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3+\phi_1E_1+$$

$$+\phi_2E_2+\phi_3E_3+\phi_4E_4)]f._1f_1.f_1Df+120\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\varepsilon_4f_1^4Df+$$
$$+120\phi_1B_1\gamma_2\delta_3\varepsilon_4f_1^3.f._1f+120(\phi_1\beta_1\gamma_2d_3E_4+\phi_1\beta_1g_2D_3\varepsilon_4+$$
$$+\phi_1b_1G_2\delta_3\varepsilon_4)f_1^2Df._1f+120(\phi_1B_1\gamma_2d_3E_4+\phi_1B_1g_2D_3\varepsilon_4)f_1.f._1f^2+$$
$$+120\phi_1b_1G_2d_3E_4Df._1f^2\}\,h^5+\dots$$

$$m_6'=u+\phi_6fh+(\phi_1c_1+\phi_2c_2+\phi_3c_3+\phi_4c_4+\phi_5c_5)\,Dfh^2+$$
$$+\frac{1}{2!}\{(\phi_1^2c_1+\dots+\phi_5^2c_5)D^{(2)}f+2[\phi_1B_1c_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\,c_3+$$
$$+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\,c_4+(\phi_1E_1+\dots+\phi_4E_4)\,c_5]f._1f+2[\phi_1\beta_1c_2+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,c_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,c_4+(\phi_1\varepsilon_1+\dots+\phi_4\varepsilon_4)\,c_5]f_1Df\}\,h^3+$$
$$+\frac{1}{3!}\{(\phi_1^3c_1+\dots+\phi_5^3c_5)D^{(3)}f+3[\phi_1^2\beta_1c_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,c_3+$$
$$+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,c_4+(\phi_1^2\varepsilon_1+\dots+\phi_4^2\varepsilon_4)\,c_5]f_1D^{(2)}f+6[\phi_1B_1\phi_2c_2+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\,\phi_3c_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\,\phi_4c_4+(\phi_1E_1+\dots+$$
$$+\phi_4E_4)\,\phi_5c_5]fD_1f+6[\phi_1\beta_1\phi_2c_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3c_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+$$
$$+\phi_3\delta_3)\,\phi_4c_4+(\phi_1\varepsilon_1+\dots+\phi_4\varepsilon_4)\,\phi_5c_5]Df_1.Df+6[\phi_1b_1G_2c_3+$$
$$+\phi_1b_1D_2c_4+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\,D_3c_4+\phi_1b_1E_2c_5+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\,E_3c_5+$$
$$+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)\,E_4c_5]Df._1f+6[\phi_1B_1\gamma_2c_3+\phi_1B_1\delta_2c_4+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\,\delta_3c_4+\phi_1B_1\varepsilon_2c_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\,\varepsilon_3c_5+(\phi_1D_1+$$
$$+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\,\varepsilon_4c_5]f._1ff_1+6[\phi_1\beta_1\gamma_2c_3+\phi_1\beta_1\delta_2c_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3c_4+$$
$$+\phi_1\beta_1\varepsilon_2c_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\varepsilon_3c_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\varepsilon_4c_5]f_1^2Df\}\,h^4+$$
$$+\frac{1}{4!}\{(\phi_1^4c_1+\dots+\phi_5^4c_5)D^{(4)}f+4[\phi_1^3\beta_1c_2+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)\,c_3+$$
$$+(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+\phi_3^3\delta_3)\,c_4+(\phi_1^3\varepsilon_1+\dots+\phi_4^3\varepsilon_4)\,c_5]f_1D^{(3)}f+12[\phi_1^2B_1^2c_2+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)^2\,c_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)^2\,c_4+(\phi_1E_1+\dots+$$
$$+\phi_4E_4)^2\,c_5]f^2{}_2f+12[\phi_1^2\beta_1\phi_2c_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\phi_3c_3+(\phi_1^2\delta_1+$$
$$+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\phi_4c_4+(\phi_1^2\varepsilon_1+\dots+\phi_4^2\varepsilon_4)\,\phi_5c_5]Df_1D^{(2)}f+12[\phi_1^2\beta_1^2c_2+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\,c_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2\,c_4+(\phi_1\varepsilon_1+\dots+$$
$$+\phi_4\varepsilon_4)^2\,c_5]f_2(Df)^2+24[\phi_1B_1\phi_1\beta_1c_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\,(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,c_3+$$
$$+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\,(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,c_4+(\phi_1E_1+\dots+\phi_4E_4)\,(\phi_1\varepsilon_1+$$
$$+\dots+\phi_4\varepsilon_4)\,c_5]f._1f_1Df+12[\phi_1B_1\phi_2^2c_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\,\phi_3^2c_3+$$
$$+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\,\phi_4^2c_4+(\phi_1E_1+\dots+\phi_4E_4)\,\phi_5^2c_5]fD^{(2)}_1f+$$

$$+12[\phi_1^2 b_1 G_2 c_3+\phi_1^2 b_1 D_2 c_4+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2) D_3 c_4+\phi_1^2 b_1 E_2 c_5+$$
$$+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2) E_3 c_5+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3) E_4 c_5] D^{(2)} f._1 f+12[\phi_1\beta_1\phi_2^2 c_2+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3^2 c_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4^2 c_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+$$
$$+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5^2 c_5] D^{(2)} f_1 . Df+24[\phi_1 B_1\phi_2\gamma_2 c_3+\phi_1 B_1\phi_2\delta_2 c_4+(\phi_1 G_1+$$
$$+\phi_2 G_2)\phi_3\delta_3 c_4+\phi_1 B_1\phi_2\varepsilon_2 c_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\varepsilon_3 c_5+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+$$
$$+\phi_3 D_3)\phi_4\varepsilon_4 c_5] f_1 . f D_1 f+12[\phi_1^2\beta_1\gamma_2 c_3+\phi_1^2\beta_1\delta_2 c_4+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\delta_3 c_4+$$
$$+\phi_1^2\beta_1\varepsilon_2 c_5+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\varepsilon_3 c_5+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\varepsilon_4 c_5] f_1^2 D^{(2)} f+$$
$$+24[\phi_1 b_1 G_2\phi_3 c_3+\phi_1 b_1 D_2\phi_4 c_4+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) D_3\phi_4 c_4+\phi_1 b_1 E_2\phi_5 c_5+$$
$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) E_3\phi_5 c_5+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3) E_4\phi_5 c_5] D_1 f Df+24[\phi_1\beta_1\phi_2\gamma_2 c_3+$$
$$+\phi_1\beta_1\phi_2\delta_2 c_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\delta_3 c_4+\phi_1\beta_1\phi_2\varepsilon_2 c_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\varepsilon_3 c_5+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\phi_4\varepsilon_4 c_5+\phi_1\beta_1\gamma_2\phi_3 c_3+\phi_1\beta_1\delta_2\phi_4 c_4+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\phi_4 c_4+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\phi_5 c_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\phi_5 c_5+(\phi_1\delta_1+$$
$$+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\phi_5 c_5] f_1 D f_1 D f+24[\phi_1 B_1\gamma_2\phi_3 c_3+\phi_1 B_1\delta_2\phi_4 c_4+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\delta_3\phi_4 c_4+\phi_1 B_1\varepsilon_2\phi_5 c_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\varepsilon_3\phi_5 c_5+$$
$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\varepsilon_4\phi_5 c_5] D f_1 . f ._1 f+24[\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3 c_4+\phi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3 c_5+$$
$$+\phi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4 c_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\varepsilon_4 c_5] f_1^3 D f+24[\phi_1 B_1\gamma_2\delta_3 c_4+\phi_1 B_1\gamma_2\varepsilon_3 c_5+$$
$$+\phi_1 B_1\delta_2\varepsilon_4 c_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\delta_3\varepsilon_4 c_5] f_1^2 . f ._1 f+24[\phi_1 B_1 g_2 D_3 c_4+$$
$$+\phi_1 B_1 g_2 E_3 c_5+\phi_1 B_1 d_2 E_4 c_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\, d_3 E_4 c_5] f ._1 f^2+$$
$$+24[\phi_1\beta_1 g_2 D_3 c_4+\phi_1\beta_1 g_2 E_3 c_5+\phi_1\beta_1 d_2 E_4 c_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\, d_3 E_4 c_5+$$
$$+\phi_1 b_1 G_2\delta_3 c_4+\phi_1 b_1 G_2\varepsilon_3 c_5+\phi_1 b_1 D_2\varepsilon_4 c_5+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) D_3\varepsilon_4 c_5]\,{}_1 f f_1 D f\}\, h^5+\ldots$$

$$m_6=f+\phi_6 D f h+\frac{1}{2!}\{\phi_6^2 D^{(2)} f+2(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5) f ._1 f+2(\phi_1\zeta_1+\ldots+$$
$$+\phi_5\zeta_5) f_1 D f\}\, h^2+\frac{1}{3!}\{\phi_6^3 D^{(3)} f+6[\phi_1 b_1 Z_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) Z_3+(\phi_1 d_1+$$
$$+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3) Z_4+(\phi_1 e_1+\ldots+\phi_4 e_4) Z_5] D f ._1 f+3(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5) f_1 D^{(2)} f+$$
$$+6[\phi_1 B_1\zeta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\zeta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\zeta_4+$$
$$+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\zeta_5] f ._1 f f_1+6[\phi_1\beta_1\zeta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\zeta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5] f_1^2 . D f+6\phi_6(\phi_1 Z_1+\ldots+$$
$$+\phi_5 Z_5) f D_1 f+6\phi_6(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5) D f_1 D f\}\, h^3+\frac{1}{4!}\{\phi_6^4 D^{(4)} f+$$
$$+4(\phi_1^3\zeta_1+\ldots+\phi_5^3\zeta_5) f_1 D^{(3)} f+12[\phi_1^2 b_1 Z_2+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2) Z_3+$$

$$+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3)Z_4+(\phi_1^2 e_1+\ldots+\phi_4^2 e_4)Z_5]D^{(2)}f._1 f+$$
$$+24[\phi_1 B_1 g_2 Z_3+\phi_1 B_1 d_2 Z_4+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)d_3 Z_4+\phi_1 B_1 e_2 Z_5+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)e_3 Z_5+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)e_4 Z_5]f._1 f^2+24[\phi_1\beta_1 g_2 Z_3+$$
$$+\phi_1\beta_1 d_2 Z_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3 Z_4+\phi_1\beta_1 e_2 Z_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)e_3 Z_5+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)e_4 Z_5+\phi_1 b_1 G_2\zeta_3+\phi_1 b_1 D_2\zeta_4+(\phi_1 g_1+$$
$$+\phi_2 g_2)D_3\zeta_4+\phi_1 b_1 E_2\zeta_5+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)E_3\zeta_5+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+$$
$$+\phi_3 d_3)E_4\zeta_5]\,_1 f f_1 Df+12[\phi_1^2\beta_1\zeta_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\zeta_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+$$
$$+\phi_3^2\delta_3)\zeta_4+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\zeta_5]f_1^2 D^{(2)}f+12\phi_6(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5)Df_1 D^{(2)}f+$$
$$+24[\phi_1\beta_1\phi_2\zeta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\zeta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\zeta_4+$$
$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5\zeta_5+\phi_1\beta_1\phi_6\zeta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_6\zeta_3+(\phi_1\delta_1+$$
$$+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_6\zeta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_6\zeta_5]f_1 Df_1 Df+24[\phi_1\beta_1\gamma_2\zeta_3+$$
$$+\phi_1\beta_1\delta_2\zeta_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\zeta_4+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\zeta_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\zeta_5+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\zeta_5]f_1^3 Df+12\phi_6^2(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)D^{(2)}f_1 Df+$$
$$+12(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)^2 f_2(Df)^2+24[\phi_1 B_1\phi_2\zeta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\zeta_3+$$
$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\phi_4\zeta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\phi_5\zeta_5]fD_1 ff_1+24[\phi_1 B_1\gamma_2\zeta_3+$$
$$+\phi_1 B_1\delta_2\zeta_4+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\delta_3\zeta_4+\phi_1 B_1\varepsilon_2\zeta_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\varepsilon_3\zeta_5+$$
$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\varepsilon_4\zeta_5]f_1^2.f._1 f+12(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)^2 f^2._2 f+$$
$$+24[\phi_1 b_1\phi_6 Z_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\phi_6 Z_3+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)\phi_6 Z_4+$$
$$+(\phi_1 e_1+\ldots+\phi_4 e_4)\phi_6 Z_5]D_1 fDf+24(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)(\phi_1 Z_1+\ldots+$$
$$+\phi_5 Z_5)f._1 f_1 Df+24[\phi_1 B_1\zeta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_6\zeta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+$$
$$+\phi_3 D_3)\phi_6\zeta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\phi_6\zeta_5]Df_1.f._1 f+12\phi_6^2(\phi_1 Z_1+\ldots+$$
$$+\phi_5 Z_5)fD^{(2)}_1 f\}h^4+\frac{1}{5!}\{\phi_6^5 D^{(5)}f+5(\phi_1^4\zeta_1+\ldots+\phi_5^4\zeta_5)f_1 D^{(4)}f+$$
$$+20\phi_6(\phi_1^3\zeta_1+\ldots+\phi_5^3\zeta_5)Df_1 D^{(3)}f+30\phi_6^2(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5)D^{(2)}f_1.D^{(2)}f+$$
$$+20[\phi_1^3 b_1 Z_2+(\phi_1^3 g_1+\phi_2^3 g_2)Z_3+(\phi_1^3 d_1+\phi_2^3 d_2+\phi_3^3 d_3)Z_4+(\phi_1^3 e_1+\ldots+$$
$$+\phi_4^3 e_4)Z_5]D^{(3)}f._1 f+20\phi_6^3(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)D^{(3)}f_1 Df+60(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+$$
$$+\phi_5^2\zeta_5)(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)f_2 DfD^{(2)}f+60[\phi_1^2\beta_1\phi_2\zeta_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\phi_3\zeta_3+$$
$$+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\phi_4\zeta_4+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\phi_5\zeta_5+\phi_1^2\beta_1\phi_6\zeta_2+$$
$$+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\phi_6\zeta_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\phi_6\zeta_4+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+$$
$$+\phi_4^2\varepsilon_4)\phi_6\zeta_5]f_1 Df_1 D^{(2)}f+60[\phi_1\beta_1\phi_2^2\zeta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3^2\zeta_3+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4^2\zeta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5^2\zeta_5+\phi_1\beta_1\phi_6^2\zeta_2+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_6^2\zeta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_6^2\zeta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+$$
$$+\phi_4\varepsilon_4)\phi_6^2\zeta_5]f_1DfD^{(2)}f_1+60[\phi_1^2\beta_1^2\zeta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\zeta_3+(\phi_1\delta_1+$$
$$+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2\zeta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)^2\zeta_5+2(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)(\phi_1\beta_1\zeta_2+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\zeta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+$$
$$+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5)]f_1\cdot f_2(Df)^2+120[\phi_1\beta_1\phi_2\gamma_2\zeta_3+\phi_1\beta_1\phi_2\delta_2\zeta_4+(\phi_1\gamma_1+$$
$$+\phi_2\gamma_2)\phi_3\delta_3\zeta_4+\phi_1\beta_1\phi_2\varepsilon_2\zeta_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\varepsilon_3\zeta_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+$$
$$+\phi_3\delta_3)\phi_4\varepsilon_4\zeta_5+\phi_1\beta_1\gamma_2\phi_3\zeta_3+\phi_1\beta_1\delta_2\phi_4\zeta_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\phi_4\zeta_4+$$
$$+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\phi_5\zeta_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\phi_5\zeta_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\phi_5\zeta_5+$$
$$+\phi_1\beta_1\gamma_2\phi_6\zeta_3+\phi_1\beta_1\delta_2\phi_6\zeta_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\phi_6\zeta_4+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\phi_6\zeta_5+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\phi_6\zeta_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\phi_6\zeta_5]f_1^2Df_1Df+$$
$$+60[\phi_1^2\beta_1\gamma_2\zeta_3+\phi_1^2\beta_1\delta_2\zeta_4+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\delta_3\zeta_4+\phi_1^2\beta_1\varepsilon_2\zeta_5+$$
$$+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\varepsilon_3\zeta_5+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\varepsilon_4\zeta_5]f_1^3D^{(2)}f+20[\phi_1^3\beta_1\zeta_2+$$
$$+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)\zeta_3+(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+\phi_3^3\delta_3)\zeta_4+(\phi_1^3\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^3\varepsilon_4)\zeta_5]f_1^2D^{(3)}f+$$
$$+120\phi_6[\phi_1\beta_1\phi_2\zeta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\zeta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\zeta_4+$$
$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5\zeta_5](D_1)^2Df+60[\phi_1^2\beta_1g_2Z_3+\phi_1^2\beta_1d_2Z_4+$$
$$+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)d_3Z_4+\phi_1^2\beta_1e_2Z_5+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)e_3Z_5+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+$$
$$+\phi_3^2\delta_3)e_4Z_5+\phi_1^2b_1G_2\zeta_3+\phi_1^2b_1D_2\zeta_4+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)D_3\zeta_4+\phi_1^2b_1E_2\zeta_5+$$
$$+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)E_3\zeta_5+(\phi_1^2d_1+\phi_2^2d_2+\phi_3^2d_3)E_4\zeta_5]\,{}_1f\cdot f_1D^{(2)}f+$$
$$+120[\phi_1B_1\phi_2g_2Z_3+\phi_1B_1\phi_2d_2Z_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3d_3Z_4+$$
$$+\phi_1B_1\phi_2e_2Z_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3e_3Z_5+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4e_4Z_5+$$
$$+\phi_1B_1\phi_6g_2Z_3+\phi_1B_1\phi_6d_2Z_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_6d_3Z_4+\phi_1B_1\phi_6e_2Z_5+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_6e_3Z_5+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_6e_4Z_5]\,{}_1ffD_1f+$$
$$+120[\phi_1\beta_1\phi_2g_2Z_3+\phi_1\beta_1\phi_2d_2Z_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3d_3Z_4+\phi_1\beta_1e_2Z_5+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3e_3Z_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4e_4Z_5+\phi_1b_1\phi_6G_2\zeta_3+$$
$$+\phi_1b_1\phi_6D_2\zeta_4+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\phi_6D_3\zeta_4+\phi_1b_1\phi_6E_2\zeta_5+(\phi_1g_1+$$
$$+\phi_2g_2)\phi_6E_3\zeta_5+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)\phi_6E_4\zeta_5]\,{}_1fDf_1Df+60\phi_6[\phi_1^2b_1Z_2+$$
$$+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)Z_3+(\phi_1^2d_1+\phi_2^2d_2+\phi_3^2d_3)Z_4+(\phi_1^2e_1+\ldots+\phi_4^2e_4)Z_5]D_1fD^{(2)}f+$$
$$+60\phi_6(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)^2Df_2(Df)^2+60[\phi_1^2B_1^2\zeta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)^2\zeta_3+$$
$$+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)^2\zeta_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)^2\zeta_5]f^2\cdot{}_2ff_1+$$
$$+20\phi_6^3(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)fD_1^{(3)}f+60[\phi_1B_1\phi_2^2\zeta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3^2\zeta_3+$$
$$+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4^2\zeta_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\phi_5^2\zeta_5]f_1\cdot fD_1^{(2)}f+$$

$$+120\phi_6[\phi_1 B_1\phi_2\zeta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\zeta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\phi_4\zeta_4+$$
$$+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\phi_5\zeta_5]fD_1fDf_1+120[\phi_1 b_1 Z_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)Z_3+$$
$$+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)Z_4+(\phi_1 e_1+\ldots+\phi_4 e_4)Z_5].(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)fDf.{}_2f+$$
$$+120[\phi_1 b_1 G_2\phi_3\zeta_3+\phi_1 b_1 D_2\phi_4\zeta_4+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)D_3\phi_4\zeta_4+\phi_1 b_1 E_2\phi_5\zeta_5+$$
$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)E_3\phi_5\zeta_5+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)E_4\phi_5\zeta_5+\phi_1\beta_1\phi_6 g_2 Z_3+$$
$$+\phi_1\beta_1 d_2\phi_6 Z_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3\phi_6 Z_4+\phi_1\beta_1 e_2\phi_6 Z_5+(\phi_1\gamma_1+$$
$$+\phi_2\gamma_2)e_3\phi_6 Z_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)e_4\phi_6 Z_5]f_1DfD_1f+60\phi_6^2[\phi_1 b_1 Z_2+$$
$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)Z_3+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)Z_4+(\phi_1 e_1+\ldots+\phi_4 e_4)Z_5]DfD^{(2)}_1f+$$
$$+60\phi_6^2[\phi_1 B_1\zeta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\zeta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\zeta_4+$$
$$+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\zeta_5]f.{}_1fD^{(2)}f_1+60\phi_6(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)^2 f^2 D_2 f+$$
$$+120\phi_6(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)fD_1f_1Df+120(\phi_1\zeta_1+\ldots+$$
$$+\phi_5\zeta_5)[\phi_1 b_1 Z_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)Z_3+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)Z_4+(\phi_1 e_1+\ldots+$$
$$+\phi_4 e_4)Z_5]{}_1f_1(Df)^2+120[\phi_1 B_1\phi_2\gamma_2\zeta_3+\phi_4 B_1\phi_2\delta_2\zeta_4+(\phi_1 G_1+$$
$$+\phi_2 G_2)\phi_3\delta_3\zeta_4+\phi_1 B_1\phi_2\varepsilon_2\zeta_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\varepsilon_3\zeta_5+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+$$
$$+\phi_3 D_3)\phi_4\varepsilon_4\zeta_5]f_1^2.fD_1f+120[\phi_1 B_1\gamma_2\phi_3\zeta_3+\phi_1 B_1\delta_2\phi_4\zeta_4+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\delta_3\phi_4\zeta_4+\phi_1 B_1\varepsilon_2\phi_5\zeta_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\varepsilon_3\phi_5\zeta_5+$$
$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\varepsilon_4\phi_5\zeta_5+\phi_1 B_1\gamma_2\phi_6\zeta_3+\phi_1 B_1\delta_2\phi_6\zeta_4+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\delta_3\phi_6\zeta_4+\phi_1 B_1\varepsilon_2\phi_6\zeta_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\varepsilon_3\phi_6\zeta_5+$$
$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\varepsilon_4\phi_6\zeta_5]f_1Df_1.f.{}_1f+120[\phi_1 B_1\zeta_2+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\zeta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\zeta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\zeta_5](\phi_1\zeta_1+$$
$$+\ldots+\phi_5\zeta_5)f.{}_1ff_2Df+60(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5)(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)f.{}_1f_1D^{(2)}f+$$
$$+120[\phi_1 B_1\zeta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\zeta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\zeta_4+$$
$$+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\zeta_5].(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5){}_1f.f^2.{}_1f_1+120[\phi_1\beta_1\zeta_2(\phi_1 B_1+$$
$$+\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2+\phi_1 Z_1+\ldots+$$
$$+\phi_5 Z_5)+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\zeta_4(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3+\phi_1 Z_1+\ldots+$$
$$+\phi_5 Z_5)+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4+\phi_1 Z_1+\ldots+$$
$$+\phi_5 Z_5)].f.{}_1f_1.f_1Df+120[\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\zeta_4+\phi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3\zeta_5+\phi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4\zeta_5+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\varepsilon_4\zeta_5]f_1^4Df+120[\phi_1 B_1\gamma_2\delta_3\zeta_4+\phi_1 B_1\gamma_2\varepsilon_3\zeta_5+$$
$$+\phi_1 B_1\delta_2\varepsilon_4\zeta_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\delta_3\varepsilon_4\zeta_5]f_1^3.f.{}_1f+120[\phi_1\beta_1\gamma_2 d_3 Z_4+$$
$$+\phi_1\beta_1\gamma_2 e_3 Z_5+\phi_1\beta_1\delta_2 e_4 Z_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3 e_4 Z_5+\phi_1\beta_1 g_2 D_3\zeta_4+$$
$$+\phi_1\beta_1 g_2 E_3\zeta_5+\phi_1\beta_1 d_2 E_4\zeta_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3 E_4\zeta_5+\phi_1 b_1 G_2\delta_3\zeta_4+$$

$$+\phi_1 b_1 G_2 \varepsilon_3 \zeta_5 + \phi_1 b_1 D_2 \varepsilon_4 \zeta_5 + (\phi_1 g_1 + \phi_2 g_2) D_3 \varepsilon_4 \zeta_5] f_1^2 Df \cdot {}_1 f +$$
$$+120[\phi_1 B_1 \gamma_2 d_3 Z_4 + \phi_1 B_1 \gamma_2 e_3 Z_5 + \phi_1 B_1 \delta_2 e_4 Z_5 + (\phi_1 G_1 + \phi_2 G_2) \delta_3 e_4 Z_5 +$$
$$+\phi_1 B_1 g_2 D_3 \zeta_4 + \phi_1 B_1 g_2 E_3 \zeta_5 + \phi_1 B_1 d_2 E_4 \zeta_5 + (\phi_1 G_1 +$$
$$+\phi_2 G_2) d_3 E_4 \zeta_5] f_1 \cdot f \cdot {}_1 f^2 + 120[\phi_1 b_1 G_2 d_3 Z_4 + \phi_1 b_1 G_2 e_3 Z_5 + \phi_1 b_1 D_2 e_4 Z_5 +$$
$$+(\phi_1 g_1 + \phi_2 g_2) D_3 e_4 Z_5] Df \cdot {}_1 f^2 \} h^5 + \dots$$

$$m_7' = u + \phi_7 fh + (\phi_1 э_1 + \dots + \phi_6 э_6) Dfh^2 + \frac{1}{2!} \{(\phi_1^2 э_1 + \dots + \phi_6^2 э_6) D^{(2)} f +$$
$$+2[\phi_1 B_1 э_2 + (\phi_1 G_1 + \phi_2 G_2) э_3 + (\phi_1 D_1 + \phi_2 D_2 + \phi_3 D_3) э_4 + (\phi_1 E_1 + \dots +$$
$$+\phi_4 E_4) э_5 + (\phi_1 Z_1 + \dots + \phi_5 Z_5) э_6] f \cdot {}_1 f + 2[\phi_1 \beta_1 э_2 + (\phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2) э_3 +$$
$$+(\phi_1 \delta_1 + \phi_2 \delta_2 + \phi_3 \delta_3) э_4 + (\phi_1 \varepsilon_1 + \dots + \phi_4 \varepsilon_4) э_5 + (\phi_1 \zeta_1 + \dots +$$
$$+\phi_5 \zeta_5) э_6] f_1 Df \} h^3 + \frac{1}{3!} \{(\phi_1^3 э_1 + \dots + \phi_6^3 э_6) D^{(3)} f + 3[\phi_1^2 \beta_1 э_2 +$$
$$+(\phi_1^2 \gamma_1 + \phi_2^2 \gamma_2) э_3 + (\phi_1^2 \delta_1 + \phi_2^2 \delta_2 + \phi_3^2 \delta_3) э_4 + (\phi_1^2 \varepsilon_1 + \dots + \phi_4^2 \varepsilon_4) э_5 +$$
$$+(\phi_1^2 \zeta_1 + \dots + \phi_5^2 \zeta_5) э_6] f_1 D^{(2)} f + 6[\phi_1 B_1 \phi_2 э_2 + (\phi_1 G_1 + \phi_2 G_2) \phi_3 э_3 +$$
$$+(\phi_1 D_1 + \phi_2 D_2 + \phi_3 D_3) \phi_4 э_4 + (\phi_1 E_1 + \dots + \phi_4 E_4) \phi_5 э_5 + (\phi_1 Z_1 + \dots +$$
$$+\phi_5 Z_5) \phi_6 э_6] f D_1 f + 6[\phi_1 \beta_1 \phi_2 э_2 + (\phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2) \phi_3 э_3 + (\phi_1 \delta_1 + \phi_2 \delta_2 +$$
$$+\phi_3 \delta_3) \phi_4 э_4 + (\phi_1 \varepsilon_1 + \dots + \phi_4 \varepsilon_4) \phi_5 э_5 + (\phi_1 \zeta_1 + \dots + \phi_5 \zeta_5) \phi_6 э_6] Df_1 \cdot Df +$$
$$+6[\phi_1 b_1 G_2 э_3 + \phi_1 b_1 D_2 э_4 + (\phi_1 g_1 + \phi_2 g_2) D_3 э_4 + \phi_1 b_1 E_2 э_5 +$$
$$+(\phi_1 g_1 + \phi_2 g_2) E_3 э_5 + (\phi_1 d_1 + \phi_2 d_2 + \phi_3 d_3) E_4 э_5 + \phi_1 b_1 Z_2 э_6 +$$
$$+(\phi_1 g_1 + \phi_2 g_2) Z_3 э_6 + (\phi_1 d_1 + \phi_2 d_2 + \phi_3 d_3) Z_4 э_6 + (\phi_1 e_1 + \dots +$$
$$+\phi_4 e_4) Z_5 э_6] Df \cdot {}_1 f + 6[\phi_1 B_1 \gamma_2 э_3 + \phi_1 B_1 \delta_2 э_4 + (\phi_1 G_1 + \phi_2 G_2) \delta_3 э_4 +$$
$$+\phi_1 B_1 \varepsilon_2 э_5 + (\phi_1 G_1 + \phi_2 G_2) \varepsilon_3 э_5 + (\phi_1 D_1 + \phi_2 D_2 + \phi_3 D_3) \varepsilon_4 э_5 +$$
$$+\phi_1 B_1 \zeta_2 э_6 + (\phi_1 G_1 + \phi_2 G_2) \zeta_3 э_6 + (\phi_1 D_1 + \phi_2 D_2 + \phi_3 D_3) \zeta_4 э_6 +$$
$$+(\phi_1 E_1 + \dots + \phi_4 E_4) \zeta_5 э_6] f_1 \cdot f \cdot {}_1 f + 6[\phi_1 \beta_1 \gamma_2 э_3 + \phi_1 \beta_1 \delta_2 э_4 +$$
$$+(\phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2) \delta_3 э_4 + \phi_1 \beta_1 \varepsilon_2 э_5 + (\phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2) \varepsilon_3 э_5 + (\phi_1 \delta_1 + \phi_2 \delta_2 +$$
$$+\phi_3 \delta_3) \varepsilon_4 э_5 + \phi_1 \beta_1 \zeta_2 э_6 + (\phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2) \zeta_3 э_6 + (\phi_1 \delta_1 + \phi_2 \delta_2 + \phi_3 \delta_3) \zeta_4 э_6 +$$
$$+(\phi_1 \varepsilon_1 + \dots + \phi_4 \varepsilon_4) \zeta_5 э_6] f_1^2 Df \} h^4 + \frac{1}{4!} \{(\phi_1^4 э_1 + \dots + \phi_6^4 э_6) D^{(4)} f +$$
$$+4[\phi_1^3 \beta_1 э_2 + (\phi_1^3 \gamma_1 + \phi_2^3 \gamma_2) э_3 + (\phi_1^3 \delta_1 + \phi_2^3 \delta_2 + \phi_3^3 \delta_3) э_4 + (\phi_1^3 \varepsilon_1 + \dots +$$
$$+\phi_4^3 \varepsilon_4) э_5 + (\phi_1^3 \zeta_1 + \dots + \phi_5^3 \zeta_5) э_6] f_1 D^{(3)} f + 12[\phi_1^2 B_1^2 э_2 + (\phi_1 G_1 + \phi_2 G_2)^2 э_3 +$$
$$+(\phi_1 D_1 + \phi_2 D_2 + \phi_3 D_3)^2 э_4 + (\phi_1 E_1 + \dots + \phi_4 E_4)^2 э_5 + (\phi_1 Z_1 + \dots +$$

$$+\phi_5 Z_5)^2 \backepsilon_6] f^2 \cdot {}_2 f+12[\phi_1^2\beta_1\phi_2\backepsilon_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\phi_3\backepsilon_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+$$

$$+\phi_3^2\delta_3)\phi_4\backepsilon_4+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\phi_5\backepsilon_5+(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5)\phi_6\backepsilon_6] Df_1 \cdot D^{(2)}f+$$

$$+12[\phi_1^2\beta_1^2\backepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\backepsilon_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2\backepsilon_4+$$

$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)^2\backepsilon_5+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)^2\backepsilon_6] f_2(Df)^2+24[\phi_1 B_1\phi_1\beta_1\backepsilon_2+$$

$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\backepsilon_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)(\phi_1\delta_1+$$

$$+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\backepsilon_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\backepsilon_5+$$

$$+(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\backepsilon_6] f \cdot {}_1 f_1 \cdot Df+12[\phi_1 B_1\phi_2^2\backepsilon_2+$$

$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3^2\backepsilon_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\phi_4^2\backepsilon_4+(\phi_1 E_1+\ldots+$$

$$+\phi_4 E_4)\phi_5^2\backepsilon_5+(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)\phi_6^2\backepsilon_6] f D^{(2)}_1 f+12[\phi_1^2 b_1 G_2\backepsilon_3+$$

$$+\phi_1^2 b_1 D_2\backepsilon_4+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2) D_3\backepsilon_4+\phi_1^2 b_1 E_2\backepsilon_5+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2) E_3\backepsilon_5+$$

$$+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3) E_4\backepsilon_5+\phi_1^2 b_1 Z_2\backepsilon_6+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2) Z_3\backepsilon_6+$$

$$+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3) Z_4\backepsilon_6+(\phi_1^2 e_1+\ldots+\phi_4^2 e_4) Z_5\backepsilon_6] D^{(2)}f \cdot {}_1 f+$$

$$+12[\phi_1\beta_1\phi_2^2\backepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3^2\backepsilon_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4^2\backepsilon_4+$$

$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5^2\backepsilon_5+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\phi_6^2\backepsilon_6] D^{(2)} f_1 Df+$$

$$+24[\phi_1 B_1\phi_2\gamma_2\backepsilon_3+\phi_1 B_1\phi_2\delta_2\backepsilon_4+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\delta_3\backepsilon_4+\phi_1 B_1\phi_2\varepsilon_2\backepsilon_5+$$

$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\varepsilon_3\backepsilon_5+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\phi_4\varepsilon_4\backepsilon_5+\phi_1 B_1\phi_2\zeta_2\backepsilon_6+$$

$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\zeta_3\backepsilon_6+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\phi_4\zeta_4\backepsilon_6+(\phi_1 E_1+\ldots+$$

$$+\phi_4 E_4)\phi_5\zeta_5\backepsilon_6] f_1 \cdot f \cdot D_1 f+12[\phi_1^2\beta_1\gamma_2\backepsilon_3+\phi_1^2\beta_1\delta_2\backepsilon_4+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\delta_3\backepsilon_4+$$

$$+\phi_1^2\beta_1\varepsilon_2\backepsilon_5+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\varepsilon_3\backepsilon_5+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\varepsilon_4\backepsilon_5+\phi_1^2\beta_1\zeta_2\backepsilon_6+$$

$$+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\zeta_3\backepsilon_6+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\zeta_4\backepsilon_6+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\zeta_5\backepsilon_6] f_1^2 D^{(2)}f+$$

$$+24[\phi_1 b_1 G_2\phi_3\backepsilon_3+\phi_1 b_1 D_2\phi_4\backepsilon_4+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) D_3\phi_4\backepsilon_4+\phi_1 b_1 E_2\phi_5\backepsilon_5+$$

$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) E_3\phi_5\backepsilon_5+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3) E_4\phi_5\backepsilon_5+\phi_1 b_1 Z_2\phi_6\backepsilon_6+$$

$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) Z_3\phi_6\backepsilon_6+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3) Z_4\phi_6\backepsilon_6+(\phi_1 e_1+\ldots+$$

$$+\phi_4 e_4) Z_5\phi_6\backepsilon_6] D_1 f Df+24[\phi_1\beta_1\phi_2\gamma_2\backepsilon_3+\phi_1\beta_1\phi_2\delta_2\backepsilon_4+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\delta_3\backepsilon_4+\phi_1\beta_1\phi_2\varepsilon_2\backepsilon_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\varepsilon_3\backepsilon_5+(\phi_1\delta_1+$$

$$+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\varepsilon_4\backepsilon_5+\phi_1\beta_1\phi_2\zeta_2\backepsilon_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\zeta_3\backepsilon_6+$$

$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\zeta_4\backepsilon_6+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5\zeta_5\backepsilon_6+\phi_1\beta_1\gamma_2\phi_3\backepsilon_3+$$

$$+\phi_1\beta_1\delta_2\phi_4\backepsilon_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\phi_4\backepsilon_4+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\phi_5\backepsilon_5+(\phi_1\gamma_1+$$

$$+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\phi_5\backepsilon_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\phi_5\backepsilon_5+\phi_1\beta_1\zeta_2\phi_6\backepsilon_6+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3\phi_6\backepsilon_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\zeta_4\phi_6\backepsilon_6+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+$$

$$+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5\phi_6\backepsilon_6] f_1 Df_1 Df+24[\phi_1 B_1\gamma_2\phi_3\backepsilon_3+\phi_1 B_1\delta_2\phi_4\backepsilon_4+(\phi_1 G_1+$$

$$+\phi_2G_2)\delta_3\phi_4\text{э}_4+\phi_1B_1\varepsilon_2\phi_5\text{э}_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3\phi_5\text{э}_5+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+$$

$$+\phi_3D_3)\varepsilon_4\phi_5\text{э}_5+\phi_1B_1\zeta_2\phi_6\text{э}_6+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\zeta_3\phi_6\text{э}_6+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+$$

$$+\phi_3D_3)\zeta_4\phi_6\text{э}_6+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\zeta_5\phi_6\text{э}_6]\,Df_1\,.f\,._1f+24[\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\text{э}_4+$$

$$+\phi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3\text{э}_5+\phi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4\text{э}_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\varepsilon_4\text{э}_5+\phi_1\beta_1\gamma_2\zeta_3\text{э}_6+\phi_1\beta_1\delta_2\zeta_4\text{э}_6+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\zeta_4\text{э}_6+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\zeta_5\text{э}_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\zeta_5\text{э}_6+(\phi_1\delta_1+$$

$$+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\zeta_5\text{э}_6]\,f_1^3Df+24[\phi_1B_1\gamma_2\delta_3\text{э}_4+\phi_1B_1\gamma_2\varepsilon_3\text{э}_5+$$

$$+\phi_1B_1\delta_2\varepsilon_4\text{э}_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\varepsilon_4\text{э}_5+\phi_1B_1\gamma_2\zeta_3\text{э}_6+\phi_1B_1\delta_2\zeta_4\text{э}_6+$$

$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\zeta_4\text{э}_6+\phi_1B_1\varepsilon_2\zeta_5\text{э}_6+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3\zeta_5\text{э}_6+(\phi_1D_1+$$

$$+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4\zeta_5\text{э}_6]\,f_1^2\,.f\,._1f+24[\phi_1B_1g_2D_3\text{э}_4+\phi_1B_1g_2E_3\text{э}_5+$$

$$+\phi_1B_1d_2E_4\text{э}_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3E_4\text{э}_5+\phi_1B_1g_2Z_3\text{э}_6+\phi_1B_1d_2Z_4\text{э}_6+$$

$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3Z_4\text{э}_6+\phi_1B_1e_2Z_5\text{э}_6+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)e_3Z_5\text{э}_6+$$

$$+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)e_4Z_5\text{э}_6]\,f\,._1f^2+24[\phi_1\beta_1g_2D_3\text{э}_4+\phi_1\beta_1g_2E_3\text{э}_5+$$

$$+\phi_1\beta_1d_2E_4\text{э}_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3E_4\text{э}_5+\phi_1\beta_1g_2Z_3\text{э}_6+\phi_1\beta_1d_2Z_4\text{э}_6+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3Z_4\text{э}_6+\phi_1\beta_1e_2Z_5\text{э}_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)e_3Z_5\text{э}_6+$$

$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)e_4Z_5\text{э}_6+\phi_1b_1G_2\delta_3\text{э}_4+\phi_1b_1G_2\varepsilon_3\text{э}_5+$$

$$+\phi_1b_1D_2\varepsilon_4\text{э}_5+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\varepsilon_4\text{э}_5+\phi_1b_1G_2\zeta_3\text{э}_6+\phi_1b_1D_2\zeta_4\text{э}_6+$$

$$+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\zeta_4\text{э}_6+\phi_1b_1E_2\zeta_5\text{э}_6+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3\zeta_5\text{э}_6+$$

$$+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4\zeta_5\text{э}_6]\,{}_1f\,.f_1Df\}\,h^5+\ldots$$

$$m_7=f+\phi_7Dfh+\frac{1}{2!}\{\phi_7^2D^{(2)}f+2(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)f\,._1f+2(\phi_1\eta_1+\ldots+$$

$$+\phi_6\eta_6)f_1Df\}h^2+\frac{1}{3!}\{\phi_7^3D^{(3)}f+6[\phi_1b_1\exists_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\exists_3+$$

$$+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)\exists_4+(\phi_1e_1+\ldots+\phi_4e_4)\exists_5+(\phi_1c_1+\ldots+$$

$$+\phi_5c_5)\exists_6]Df\,._1f+3(\phi_1^2\eta_1+\ldots+\phi_6^2\eta_6)f_1D^{(2)}f+6[\phi_1B_1\eta_2+$$

$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\eta_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\eta_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\eta_5+$$

$$+(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)\eta_6]\,f\,._1ff_1+6[\phi_1\beta_1\eta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\eta_3+$$

$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\eta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\eta_5+(\phi_1\zeta_1+\ldots+$$

$$+\phi_5\zeta_5)\eta_6]\,f_1^2Df+6\phi_7(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)f.D_1f+6\phi_7(\phi_1\eta_1+\ldots+$$

$$+\phi_6\eta_6)Df_1Df\}\,h^3+\frac{1}{4!}\{\phi_7^4D^{(4)}f+4(\phi_1^3\eta_1+\ldots+\phi_6^3\eta_6)f_1D^{(3)}f+$$

$$+12[\phi_1^2b_1\exists_2+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)\exists_3+(\phi_1^2d_1+\phi_2^2d_2+\phi_3^2d_3)\exists_4+$$

$$+(\phi_1^2 e_1+\dots+\phi_4^2 e_4)\exists_5+(\phi_1^2 c_1+\dots+\phi_5^2 c_5)\exists_6]D^{(2)}f\,.\,{}_1f+24[\phi_1 B_1 g_2\exists_3+$$

$$+\phi_1 B_1 d_2\exists_4+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)d_3\exists_4+\phi_1 B_1 e_2\exists_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)e_3\exists_5+$$

$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)e_4\exists_5+\phi_1 B_1 c_2\exists_6+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)c_3\exists_6+$$

$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)c_4\exists_6+(\phi_1 E_1+\dots+\phi_4 E_4)c_5\exists_6]f\,.\,{}_1f^2+$$

$$+24[\phi_1\beta_1 g_2\exists_3+\phi_1\beta_1 d_2\exists_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3\exists_4+\phi_1\beta_1 e_2\exists_5+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)e_3\exists_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)e_4\exists_5+\phi_1\beta_1 c_2\exists_6+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)c_3\exists_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)c_4\exists_6+(\phi_1\varepsilon_1+\dots+\phi_4\varepsilon_4)c_5\exists_6+$$

$$+\phi_1 b_1 G_2\eta_3+\phi_1 b_1 D_2\eta_4+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)D_3\eta_4+\phi_1 b_1 E_2\eta_5+$$

$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)E_3\eta_5+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)E_4\eta_5+\phi_1 b_1 Z_2\eta_6+$$

$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)Z_3\eta_6+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)Z_4\eta_6+(\phi_1 e_1+\dots+$$

$$+\phi_4 e_4)Z_5\eta_6]\,{}_1f\,.\,f_1 Df+12[\phi_1^2\beta_1\eta_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\eta_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+$$

$$+\phi_3^2\delta_3)\eta_4+(\phi_1^2\varepsilon_1+\dots+\phi_4^2\varepsilon_4)\eta_5+(\phi_1^2\zeta_1+\dots+\phi_5^2\zeta_5)\eta_6]f_1^2 D^{(2)}f+$$

$$+12\phi_7(\phi_1^2\eta_1+\dots+\phi_6^2\eta_6)Df_1 D^{(2)}f+24[\phi_1\beta_1\phi_2\eta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\eta_3+$$

$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\eta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\dots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5\eta_5+(\phi_1\zeta_1+\dots+$$

$$+\phi_5\zeta_5)\phi_6\eta_6+\phi_1\beta_1\phi_7\eta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_7\eta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+$$

$$+\phi_3\delta_3)\phi_7\eta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\dots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_7\eta_5+(\phi_1\zeta_1+\dots+\phi_5\zeta_5)\phi_7\eta_6]f_1 Df_1 Df+$$

$$+24[\phi_1\beta_1\gamma_2\eta_3+\phi_1\beta_1\delta_2\eta_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\eta_4+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\eta_5+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\eta_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\eta_5+\phi_1\beta_1\zeta_2\eta_6+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3\eta_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\zeta_4\eta_6+(\phi_1\varepsilon_1+\dots+$$

$$+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5\eta_6]f_1^3 Df+12\phi_7^2(\phi_1\eta_1+\dots+\phi_6\eta_6)D^{(2)}f_1 Df+12(\phi_1\eta_1+\dots+$$

$$+\phi_6\eta_6)^2\,.\,f_2(Df)^2+24[\phi_1 B_1\phi_2\eta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\eta_3+(\phi_1 D_1+$$

$$+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\phi_4\eta_4+(\phi_1 E_1+\dots+\phi_4 E_4)\phi_5\eta_5+(\phi_1 Z_1+\dots+$$

$$+\phi_5 Z_5)\phi_6\eta_6]f_1\,.\,fD_1 f+24[\phi_1 B_1\gamma_2\eta_3+\phi_1 B_1\delta_2\eta_4+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\delta_3\eta_4+$$

$$+\phi_1 B_1\varepsilon_2\eta_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\varepsilon_3\eta_5+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\varepsilon_4\eta_5+$$

$$+\phi_1 B_1\zeta_2\eta_6+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\zeta_3\eta_6+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\zeta_4\eta_6+$$

$$+(\phi_1 E_1+\dots+\phi_4 E_4)\zeta_5\eta_6]f_1^2\,.\,f\,.\,{}_1f+12(\phi_1\exists_1+\dots+\phi_6\exists_6)^2\,.\,f^2\,.\,{}_2f+$$

$$+24[\phi_1 b_1\phi_7\exists_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\phi_7\exists_3+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)\phi_7\exists_4+$$

$$+(\phi_1 e_1+\dots+\phi_4 e_4)\phi_7\exists_5+(\phi_1 c_1+\dots+\phi_5 c_5)\phi_7\exists_6]D_1 f\,.\,Df+$$

$$+24(\phi_1\eta_1+\dots+\phi_6\eta_6)(\phi_1\exists_1+\dots+\phi_6\exists_6)f\,.\,{}_1f_1\,.\,Df+24[\phi_1 B_1\phi_7\eta_2+$$

$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_7\eta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\phi_7\eta_4+(\phi_1 E_1+\dots+$$

$$+\phi_4 E_4)\phi_7\eta_5+(\phi_1 Z_1+\dots+\phi_5 Z_5)\phi_7\eta_6]Df_1\,.\,f\,.\,{}_1f+12\phi_7^2(\phi_1\exists_1+\dots+$$

$$+\phi_6\exists_6)fD^{(2)}_{1}f\}h^4+\frac{1}{5!}\{\phi_7^5D^{(5)}f+5(\phi_1^4\eta_1+\ldots+\phi_6^4\eta_6)f_1D^{(4)}f+$$

$$+20\phi_7(\phi_1^3\eta_1+\ldots+\phi_6^3\eta_6)Df_1D^{(3)}f+30\phi_7^2(\phi_1^2\eta_1+\ldots+\phi_6^2\eta_6)D^{(2)}f_1\,.\,Df+$$

$$+20[\phi_1^3b_1\exists_2+(\phi_1^3g_1+\phi_2^3g_2)\exists_3+(\phi_1^3d_1+\phi_2^3d_2+\phi_3^3d_3)\exists_4+(\phi_1^3e_1+\ldots+$$

$$+\phi_4^3e_4)\exists_5+(\phi_1^3c_1+\ldots+\phi_5^3c_5)\exists_6]D^{(3)}f\,.\,_1f+20\phi_7^3(\phi_1\eta_1+\ldots+$$

$$+\phi_6\eta_6)D^{(3)}f_1\,.\,Df+60(\phi_1^2\eta_1+\ldots+\phi_6^2\eta_6)(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)f_2DfD^{(2)}f+$$

$$+60[\phi_1^2\beta_1\phi_2\eta_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\phi_3\eta_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\phi_4\eta_4+$$

$$+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\phi_5\eta_5+(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5)\phi_6\eta_6+\phi_1^2\beta_1\phi_7\eta_2+(\phi_1^2\gamma_1+$$

$$+\phi_2^2\gamma_2)\phi_7\eta_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\phi_7\eta_4+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\phi_7\eta_5+$$

$$+(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5)\phi_7\eta_6]f_1Df_1D^{(2)}f+60[\phi_1\beta_1\phi_2^2\eta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3^2\eta_3+$$

$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4^2\eta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5^2\eta_5+(\phi_1\zeta_1+\ldots+$$

$$+\phi_5\zeta_5)\phi_6^2\eta_6+\phi_1\beta_1\phi_7^2\eta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_7^2\eta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_7^2\eta_4+$$

$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_7^2\eta_5+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\phi_7^2\eta_6]f_1DfD^{(2)}f_1+$$

$$+60[\phi_1^2\beta_1^2\eta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\eta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2\eta_4+$$

$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)^2\eta_5+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)^2\eta_6+2(\phi_1\eta_1+\ldots+$$

$$+\phi_6\eta_6)(\phi_1\beta_1\eta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\eta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\eta_4+$$

$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\eta_5+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\eta_6)]f_1f_2(Df)^2+$$

$$+120[\phi_1\beta_1\phi_2\gamma_2\eta_3+\phi_1\beta_1\phi_2\delta_2\eta_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\delta_3\eta_4+\phi_1\beta_1\phi_2\varepsilon_2\eta_5+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\varepsilon_3\eta_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\varepsilon_4\eta_5+\phi_1\beta_1\phi_2\zeta_2\eta_6+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\zeta_3\eta_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\zeta_4\eta_6+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+$$

$$+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5\zeta_5\eta_6+\phi_1\beta_1\gamma_2\phi_3\eta_3+\phi_1\beta_1\delta_2\phi_4\eta_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\phi_4\eta_4+$$

$$+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\phi_5\eta_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\phi_5\eta_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\phi_5\eta_5+$$

$$+\phi_1\beta_1\zeta_2\phi_6\eta_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3\phi_6\eta_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\zeta_4\phi_6\eta_6+$$

$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5\phi_6\eta_6+\phi_1\beta_1\gamma_2\phi_7\eta_3+\phi_1\beta_1\delta_2\phi_7\eta_4+(\phi_1\gamma_1+$$

$$+\phi_2\gamma_2)\delta_3\phi_7\eta_4+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\phi_7\eta_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\phi_7\eta_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+$$

$$+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\phi_7\eta_5+\phi_1\beta_1\zeta_2\phi_7\eta_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3\phi_7\eta_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+$$

$$+\phi_3\delta_3)\zeta_4\phi_7\eta_6+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5\phi_7\eta_6]f_1^2Df_1Df+60[\phi_1^2\beta_1\gamma_2\eta_3+$$

$$+\phi_1^2\beta_1\delta_2\eta_4+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\delta_3\eta_4+\phi_1^2\beta_1\varepsilon_2\eta_5+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\varepsilon_3\eta_5+$$

$$+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\varepsilon_4\eta_5+\phi_1^2\beta_1\zeta_2\eta_6+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\zeta_3\eta_6+$$

$$+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\zeta_4\eta_6+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\zeta_5\eta_6]f_1^3D^{(2)}f+$$

$$+20[\phi_1^3\beta_1\eta_2+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)\eta_3+(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+\phi_3^3\delta_3)\eta_4+(\phi_1^3\varepsilon_1+\ldots+$$

$$+\phi_4^3\varepsilon_4)\eta_5+(\phi_1^3\zeta_1+\ldots+\phi_5^3\zeta_5)\eta_6]\,f_1^2D^{(3)}f+120\phi_7[\phi_1\beta_1\phi_2\eta_2+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\eta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\eta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5\eta_5+$$

$$+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\phi_6\eta_6](Df_1)^2\,Df+60[\phi_1^2\beta_1 g_2\exists_3+\phi_1^2\beta_1 d_2\exists_4+(\phi_1^2\gamma_1+$$

$$+\phi_2^2\gamma_2)\,d_3\exists_4+\phi_1^2\beta_1 e_2\exists_5+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,e_3\exists_5+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,e_4\exists_5+$$

$$+\phi_1^2\beta_1 c_2\exists_6+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,c_3\exists_6+(\phi_1^2\delta_2+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,c_4\exists_6+$$

$$+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\,c_5\exists_6+\phi_1^2 b_1 G_2\eta_3+\phi_1^2 b_1 D_2\eta_4+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)\,D_3\eta_4+$$

$$+\phi_1^2 b_1 E_2\eta_5+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)\,E_3\eta_5+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3)\,E_4\eta_5+$$

$$+\phi_1^2 b_1 Z_2\eta_6+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)\,Z_3\eta_6+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3)\,Z_4\eta_6+$$

$$+(\phi_1^2 e_1+\ldots+\phi_4^2 e_4)\,Z_5\eta_6]\,{}_1ff_1D^{(2)}f+120[\phi_1 B_1\phi_2 g_2\exists_3+\phi_1 B_1\phi_2 d_2\exists_4+$$

$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3 d_3\exists_4+\phi_1 B_1\phi_2 e_2\exists_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3 e_3\exists_5+$$

$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,\phi_4 e_4\exists_5+\phi_1 B_1\phi_2 c_2\exists_6+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3 c_3\exists_6+$$

$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,\phi_4 c_4\exists_6+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\,\phi_5 c_5\exists_6+$$

$$+\phi_1 B_1 g_2\phi_7\exists_3+\phi_1 B_1 d_2\phi_7\exists_4+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,d_3\phi_7\exists_4+\phi_1 B_1 e_2\phi_7\exists_5+$$

$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,e_3\phi_7\exists_5+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,e_4\phi_7\exists_5+\phi_1 B_1 c_2\phi_7\exists_6+$$

$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,c_3\phi_7\exists_6+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,c_4\phi_7\exists_6+(\phi_1 E_1+\ldots+$$

$$+\phi_4 E_4)\,c_5\phi_7\exists_6]\,{}_1f\cdot fD_1f+120[\phi_1\beta_1\phi_2 g_2\exists_3+\phi_1\beta_1\phi_2 d_2\exists_4+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3 d_3\exists_4+\phi_1\beta_1\phi_2 e_2\exists_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3 e_3\exists_5+$$

$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\phi_4 e_4\exists_5+\phi_1\beta_1\phi_2 c_2\exists_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3 c_3\exists_6+$$

$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\phi_4 c_4\exists_6+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\,\phi_5 c_5\exists_6+\phi_1 b_1 G_2\phi_7\eta_3+$$

$$+\phi_1 b_1 D_2\phi_7\eta_4+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\,D_3\phi_7\eta_4+\phi_1 b_1 E_2\phi_7\eta_5+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\,E_3\phi_7\eta_5+$$

$$+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)\,E_4\phi_7\eta_5+\phi_1 b_1 Z_2\phi_7\eta_6+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\,Z_3\phi_7\eta_6+$$

$$+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)\,Z_4\phi_7\eta_6+(\phi_1 e_1+\ldots+\phi_4 e_4)\,Z_5\phi_7\eta_6]\,{}_1fDf_1Df+$$

$$+60\phi_7[\phi_1^2 b_1\exists_2+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)\exists_3+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3)\exists_4+$$

$$+(\phi_1^2 e_1+\ldots+\phi_4^2 e_4)\exists_5+(\phi_1^2 c_1+\ldots+\phi_5^2 c_5)\exists_6]\,D_1fD^{(2)}f+60\phi_7(\phi_1\eta_1+\ldots+$$

$$+\phi_6\eta_6)^2\,Df_2(Df)^2+60[\phi_1^2 B_1^2\eta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)^2\,\eta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+$$

$$+\phi_3 D_3)^2\,\eta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)^2\,\eta_5+(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)^2\,\eta_6]\,f_1\cdot f^2\cdot{}_2f+$$

$$+20\phi_7^3(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)\,fD_1^{(3)}f+60[\phi_1 B_1\phi_2^2\eta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3^2\eta_3+$$

$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,\phi_4^2\eta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\,\phi_5^2\eta_5+(\phi_1 Z_1+\ldots+$$

$$+\phi_5 Z_5)\,\phi_6^2\eta_6]\,f_1\cdot f\cdot D_1^{(2)}f+120\phi_7[\phi_1 B_1\phi_2\eta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3\eta_3+$$

$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,\phi_4\eta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\,\phi_5\eta_5+$$

$$+(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)\,\phi_6\eta_6]\,fD_1\dot{f}Df_1+120(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)\cdot[\phi_1 b_1\exists_2+$$

$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\exists_3+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)\exists_4+(\phi_1 e_1+\ldots+\phi_4 e_4)\exists_5+(\phi_1 c_1+\ldots+$$
$$+\phi_5 c_5)\exists_6]fDf\cdot{}_2f+120[\phi_1 b_1 G_2\phi_3\eta_3+\phi_1 b_1 D_2\phi_4\eta_4+(\phi_1 g_1+$$
$$+\phi_2 g_2)D_3\phi_4\eta_4+\phi_1 b_1 E_2\phi_5\eta_5+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)E_3\phi_5\eta_5+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+$$
$$+\phi_3 d_3)E_4\phi_5\eta_5+\phi_1 b_1 Z_2\phi_6\eta_6+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)Z_3\phi_6\eta_6+(\phi_1 d_1+$$
$$+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)Z_4\phi_6\eta_6+(\phi_1 e_1+\ldots+\phi_4 e_4)Z_5\phi_6\eta_6++\phi_1\beta_1 g_2\phi_7\exists_3+$$
$$+\phi_1\beta_1 d_2\phi_7\exists_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3\phi_7\exists_4+\phi_1\beta_1 e_2\phi_7\exists_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)e_3\phi_7\exists_5+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)e_4\phi_7\exists_5+\phi_1\beta_1 c_2\phi_7\exists_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)c_3\phi_7\exists_6+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)c_4\phi_7\exists_6+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)c_5\phi_7\exists_6]f_1DfD_1f+$$
$$+60\phi_7^2[\phi_1 b_1\exists_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\exists_3+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)\exists_4+(\phi_1 e_1+\ldots+$$
$$+\phi_4 e_4)\exists_5+(\phi_1 c_1+\ldots+\phi_5 c_5)\exists_6]DfD^{(2)}_1f+60\phi_7^2[\phi_1 B_1\eta_2+(\phi_1 G_1+$$
$$+\phi_2 G_2)\eta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\eta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\eta_5+$$
$$+(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)\eta_6]f\cdot{}_1fD^{(2)}f_1+60\phi_7(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)^2 f^2 D_2 f+$$
$$+120\phi_7(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)fD_1f_1Df+120(\phi_1\eta_1+\ldots+$$
$$+\phi_6\eta_6)\cdot[\phi_1 b_1\exists_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\exists_3+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)\exists_4+$$
$$+(\phi_1 e_1+\ldots+\phi_4 e_4)\exists_5+(\phi_1 c_1+\ldots+\phi_5 c_5)\exists_6]{}_1f_1(Df)^2+120[\phi_1 B_1\phi_2\gamma_2\eta_3+$$
$$+\phi_1 B_1\phi_2\delta_2\eta_4+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\delta_3\eta_4+\phi_1 B_1\phi_2\varepsilon_2\eta_5+(\phi_1 G_1+$$
$$+\phi_2 G_2)\phi_3\varepsilon_3\eta_5+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\phi_4\varepsilon_4\eta_5+\phi_1 B_1\phi_2\zeta_2\eta_6+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\zeta_3\eta_6+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\phi_4\zeta_4\eta_6+(\phi_1 E_1+\ldots+$$
$$+\phi_4 E_4)\phi_5\zeta_5\eta_6]f_1^2\cdot fD_1f+120[\phi_1 B_1\gamma_2\phi_3\eta_3+\phi_1 B_1\delta_2\phi_4\eta_4+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\delta_3\phi_4\eta_4+\phi_1 B_1\varepsilon_2\phi_5\eta_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\varepsilon_3\phi_5\eta_5+$$
$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\varepsilon_4\phi_5\eta_5+\phi_1 B_1\zeta_2\phi_6\eta_6+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\zeta_3\phi_6\eta_6+$$
$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\zeta_4\phi_6\eta_6+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\zeta_5\phi_6\eta_6+$$
$$+\phi_1 B_1\gamma_2\phi_7\eta_3+\phi_1 B_1\delta_2\phi_7\eta_4+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\delta_3\phi_7\eta_4+\phi_1 B_1\varepsilon_2\phi_7\eta_5+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\varepsilon_3\phi_7\eta_5+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\varepsilon_4\phi_7\eta_5+\phi_1 B_1\zeta_2\phi_7\eta_6+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\zeta_3\phi_7\eta_6+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\zeta_4\phi_7\eta_6+(\phi_1 E_1+\ldots+$$
$$+\phi_4 E_4)\zeta_5\phi_7\eta_6]f_1Df_1\cdot f\cdot{}_1f+120(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)\cdot[\phi_1 B_1\eta_2+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\eta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\eta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\eta_5+$$
$$+(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)\eta_6]f\cdot{}_1ff_2Df+60(\phi_1^2\eta_1+\ldots+\phi_6^2\eta_6)(\phi_1\exists_1+\ldots+$$
$$+\phi_6\exists_6)f\cdot{}_1f_1\cdot D^{(2)}f+120(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)\cdot[\phi_1 B_1\eta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\eta_3+$$
$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\eta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\eta_5+(\phi_1 Z_1+\ldots+$$
$$+\phi_5 Z_5)\eta_6]{}_1ff^2\cdot{}_1f_1+120[\phi_1\beta_1\eta_2(\phi_1 B_1+\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)+$$

$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\eta_3(\phi_1G_1+\phi_2G_2+\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+$$
$$+\phi_3\delta_3)\eta_4(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3+\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+$$
$$+\phi_4\varepsilon_4)\eta_5(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4+\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\eta_6(\phi_1Z_1+$$
$$+\ldots+\phi_5Z_5+\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)]f\cdot{}_1f_1\cdot f_1Df+120[\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\eta_4+\phi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3\eta_5+$$
$$+\phi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4\eta_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\varepsilon_4\eta_5+\phi_1\beta_1\gamma_2\zeta_3\eta_6+\phi_1\beta_1\delta_2\zeta_4\eta_6+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\zeta_4\eta_6+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\zeta_5\eta_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\zeta_5\eta_6+(\phi_1\delta_1+$$
$$+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\zeta_5\eta_6]f_1^4Df+120[\phi_1B_1\gamma_2\delta_3\eta_4+\phi_1B_1\gamma_2\varepsilon_3\eta_5+$$
$$+\phi_1B_1\delta_2\varepsilon_4\eta_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\varepsilon_4\eta_5+\phi_1B_1\gamma_2\zeta_3\eta_6+\phi_1B_1\delta_2\zeta_4\eta_6+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\zeta_4\eta_6+\phi_1B_1\varepsilon_2\zeta_5\eta_6+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3\zeta_5\eta_6+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+$$
$$+\phi_3D_3)\varepsilon_4\zeta_5\eta_6]f_1^3\cdot f\cdot{}_1f+120[\phi_1\beta_1\gamma_2d_3\exists_4+\phi_1\beta_1\gamma_2e_3\exists_5+\phi_1\beta_1\delta_2e_4\exists_5+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3e_4\exists_5+\phi_1\beta_1\gamma_2c_3\exists_6+\phi_1\beta_1\delta_2c_4\exists_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3c_4\exists_6+$$
$$+\phi_1\beta_1\varepsilon_2c_5\exists_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3c_5\exists_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4c_5\exists_6+$$
$$+\phi_1\beta_1g_2D_3\eta_4+\phi_1\beta_1g_2E_3\eta_5+\phi_1\beta_1d_2E_4\eta_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3E_4\eta_5+$$
$$+\phi_1\beta_1g_2Z_3\eta_6+\phi_1\beta_1d_2Z_4\eta_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3Z_4\eta_6+\phi_1\beta_1e_2Z_5\eta_6+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)e_3Z_5\eta_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)e_4Z_5\eta_6+\phi_1b_1G_2\delta_3\eta_4+$$
$$+\phi_1b_1G_2\varepsilon_3\eta_5+\phi_1b_1D_2\varepsilon_4\eta_5+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\varepsilon_4\eta_5+\phi_1b_1G_2\zeta_3\eta_6+$$
$$+\phi_1b_1D_2\zeta_4\eta_6+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\zeta_4\eta_6+\phi_1b_1E_2\zeta_5\eta_6+(\phi_1g_1+$$
$$+\phi_2g_2)E_3\zeta_5\eta_6+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4\zeta_5\eta_6]f_1^2Df\cdot{}_1f+120[\phi_1B_1\gamma_2d_3\exists_4+$$
$$+\phi_1B_1\gamma_2e_3\exists_5+\phi_1B_1\delta_2e_4\exists_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3e_4\exists_5+\phi_1B_1\gamma_2c_3\exists_6+$$
$$+\phi_1B_1\delta_2c_4\exists_6+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3c_4\exists_6+\phi_1B_1\varepsilon_2c_5\exists_6+(\phi_1G_1+$$
$$+\phi_2G_2)\varepsilon_3c_5\exists_6+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4c_5\exists_6+\phi_1B_1g_2D_3\eta_4+$$
$$+\phi_1B_1g_2E_3\eta_5+\phi_1B_1d_2E_4\eta_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3E_4\eta_5+\phi_1B_1g_2Z_3\eta_6+$$
$$+\phi_1B_1d_2Z_4\eta_6+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3Z_4\eta_6+\phi_1B_1e_2Z_5\eta_6+(\phi_1G_1+$$
$$+\phi_2G_2)e_3Z_5\eta_6+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)e_4Z_5\eta_6]f_1\cdot f\cdot{}_1f^2+120[\phi_1b_1G_2d_3\exists_4+$$
$$+\phi_1b_1G_2e_3\exists_5+\phi_1b_1D_2e_4\exists_5+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3e_4\exists_5+\phi_1b_1G_2c_3\exists_6+$$
$$+\phi_1b_1D_2c_4\exists_6+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3c_4\exists_6+\phi_1b_1E_2c_5\exists_6+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3c_5\exists_6+$$
$$+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4c_5\exists_6]Df\cdot{}_1f^2\}h^5+\ldots$$

Si on pose m_i' et m_i ($i = 0, 1, \ldots, 7$) dans (XXII) et dans (XXIII) nous obtenons les expressions pour L et K. En comparant les coefficients des termes des cettes expressions avec les coefficients des termes correspondants des formules (XVII) et (XVIII) nous obtenons un système des équations. L' expression entre les crochets désigne qu' on a obtenu l'équation en comparant des coefficients de K, et entre les parenthèses de L.

$[f]$
$$p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7=1 \tag{1_1}$$

(u)
$$r_0+r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7=1 \tag{1_2}$$

$[Df]$
$$p_1\phi_1+p_2\phi_2+p_3\phi_3+p_4\phi_4+p_5\phi_5+p_6\phi_6+p_7\phi_7=\frac{1}{2} \tag{2_1}$$

(f)
$$r_1\phi_1+r_2\phi_2+r_3\phi_3+r_4\phi_4+r_5\phi_5+r_6\phi_6+r_7\phi_7=\frac{1}{2} \tag{2_2}$$

$[D^{(2)}f]$
$$p_1\phi_1^2+p_2\phi_2^2+p_3\phi_3^2+p_4\phi_4^2+p_5\phi_5^2+p_6\phi_6^2+p_7\phi_7^2=\frac{1}{3} \tag{3_1}$$

$[D^{(3)}f]$
$$p_1\phi_1^3+p_2\phi_2^3+p_3\phi_3^3+p_4\phi_4^3+p_5\phi_5^3+p_6\phi_6^3+p_7\phi_7^3=\frac{1}{4} \tag{4_1}$$

$[D^{(4)}f]$
$$p_1\phi_1^4+p_2\phi_2^4+p_3\phi_3^4+p_4\phi_4^4+p_5\phi_5^4+p_6\phi_6^4+p_7\phi_7^4=\frac{1}{5} \tag{5_1}$$

$[D^{(5)}f]$
$$p_1\phi_1^5+p_2\phi_2^5+p_3\phi_3^5+p_4\phi_4^5+p_5\phi_5^5+p_6\phi_6^5+p_7\phi_7^5=\frac{1}{6} \tag{6_1}$$

$[f_1Df]$
$$\begin{aligned}&p_2\phi_1\beta_1+p_3(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)+p_4(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)+\\&+p_5(\phi_1\varepsilon_1+\cdots+\phi_4\varepsilon_4)+p_6(\phi_1\zeta_1+\cdots+\phi_5\zeta_5)+\\&+p_7(\phi_1\eta_1+\cdots+\phi_6\eta_6)=\frac{1}{6}\end{aligned} \tag{7_1}$$

$[f\cdot{}_1f]$
$$\begin{aligned}&p_2\phi_1B_1+p_3(\phi_1G_1+\phi_2G_2)+p_4(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)+\\&+p_5(\phi_1E_1+\cdots+\phi_4E_4)+p_6(\phi_1Z_1+\cdots+\phi_5Z_5)+\\&+p_7(\phi_1\exists_1+\cdots+\phi_6\exists_6)=\frac{1}{6}\end{aligned} \tag{7_2}$$

(Df)
$$\begin{aligned}&r_2\phi_1b_1+r_3(\phi_1g_1+\phi_2g_2)+r_4(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)+\\&+r_5(\phi_1e_1+\cdots+\phi_4e_4)+r_6(\phi_1c_1+\cdots+\phi_5c_5)+\\&+r_7(\phi_1\text{э}_1+\cdots+\phi_6\text{э}_6)=\frac{1}{6}\end{aligned} \tag{7_3}$$

$[f_1D^{(2)}f]$
$$\begin{aligned}&p_2\phi_1^2\beta_1+p_3(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)+p_4(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)+\\&+p_5(\phi_1^2\varepsilon_1+\cdots+\phi_4^2\varepsilon_4)+p_6(\phi_1^2\zeta_1+\cdots+\phi_5^2\zeta_5)+\\&+p_7(\phi_1^2\eta_1+\cdots+\phi_6^2\eta_6)=\frac{1}{12}\end{aligned} \tag{8_1}$$

$$(D^{(2)}f)\qquad \begin{aligned} & r_2\phi_1^2 b_1 + r_3(\phi_1^2 g_1 + \phi_2^2 g_2) + r_4(\phi_1^2 d_1 + \phi_2^2 d_2 + \phi_3^2 d_3) + \\ & + r_5(\phi_1^2 e_1 + \cdots + \phi_4^2 e_4) + r_6(\phi_1^2 c_1 + \cdots + \phi_5^2 c_5) + \\ & + r_7(\phi_1^2 \text{э}_1 + \cdots + \phi_6^2 \text{э}_6) = \frac{1}{12} \end{aligned} \tag{8_2}$$

$$[f_1 D^{(3)} f]\qquad \begin{aligned} & p_2\phi_1^3 \beta_1 + p_3(\phi_1^3 \gamma_1 + \phi_2^3 \gamma_2) + p_4(\phi_1^3 \delta_1 + \phi_2^3 \delta_2 + \phi_3^3 \delta_3) + \\ & + p_5(\phi_1^3 \varepsilon_1 + \ldots + \phi_4^3 \varepsilon_4) + p_6(\phi_1^3 \zeta_1 + \ldots + \phi_5^3 \zeta_5) + \\ & + p_7(\phi_1^3 \eta_1 + \ldots + \phi_6^3 \eta_6) = \frac{1}{20} \end{aligned} \tag{9_1}$$

$$(D^{(3)}f)\qquad \begin{aligned} & r_2\phi_1^3 b_1 + r_3(\phi_1^3 g_1 + \phi_2^3 g_2) + r_4(\phi_1^3 d_1 + \phi_2^3 d_2 + \phi_3^3 d_3) + \\ & + r_5(\phi_1^3 e_1 + \ldots + \phi_4^3 e_4) + r_6(\phi_1^3 c_1 + \ldots + \phi_5^3 c_5) + \\ & + r_7(\phi_1^3 \text{э}_1 + \ldots + \phi_6^3 \text{э}_6) = \frac{1}{20} \end{aligned} \tag{9_2}$$

$$[f_1 D^{(4)} f]\qquad \begin{aligned} & p_2\phi_1^4 \beta_1 + p_3(\phi_1^4 \gamma_1 + \phi_2^4 \gamma_2) + p_4(\phi_1^4 \delta_1 + \phi_2^4 \delta_2 + \phi_3^4 \delta_3) + \\ & + p_5(\phi_1^4 \varepsilon_1 + \ldots + \phi_4^4 \varepsilon_4) + p_6(\phi_1^4 \zeta_1 + \ldots + \phi_5^4 \zeta_5) + \\ & + p_7(\phi_1^4 \eta_1 + \ldots + \phi_6^4 \eta_6) = \frac{1}{30} \end{aligned} \tag{10_1}$$

$$(D^{(4)}f)\qquad \begin{aligned} & r_2\phi_1^4 b_1 + r_3(\phi_1^4 g_1 + \phi_2^4 g_2) + r_4(\phi_1^4 d_1 + \phi_2^4 d_2 + \phi_3^4 d_3) + \\ & + r_5(\phi_1^4 e_1 + \ldots + \phi_4^4 e_4) + r_6(\phi_1^4 c_1 + \ldots + \phi_5^4 c_5) + \\ & + r_7(\phi_1^4 \text{э}_1 + \ldots + \phi_6^4 \text{э}_6) = \frac{1}{30} \end{aligned} \tag{10_2}$$

$$[Df_1 Df]\qquad \begin{aligned} & p_2\phi_2\phi_1 \beta_1 + p_3\phi_3(\phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2) + p_4\phi_4(\phi_1 \delta_1 + \phi_2 \delta_2 + \phi_3 \delta_3) + \\ & + p_5\phi_5(\phi_1 \varepsilon_1 + \ldots + \phi_4 \varepsilon_4) + p_6\phi_6(\phi_1 \zeta_1 + \ldots + \phi_5 \zeta_5) + \\ & + p_7\phi_7(\phi_1 \eta_1 + \ldots + \phi_6 \eta_6) = \frac{1}{8} \end{aligned} \tag{11_1}$$

$$[fD_1 f]\qquad \begin{aligned} & p_2\phi_2\phi_1 B_1 + p_3\phi_3(\phi_1 G_1 + \phi_2 G_2) + p_4\phi_4(\phi_1 D_1 + \phi_2 D_2 + \phi_3 D_3) + \\ & + p_5\phi_5(\phi_1 E_1 + \ldots + \phi_4 E_4) + p_6\phi_6(\phi_1 Z_1 + \ldots + \phi_5 Z_5) + \\ & + p_7\phi_7(\phi_1 \text{Э}_1 + \ldots + \phi_6 \text{Э}_6) = \frac{1}{8} \end{aligned} \tag{11_2}$$

$$[Df_1 D^{(2)} f]\qquad \begin{aligned} & p_2\phi_2\phi_1^2 \beta_1 + p_3\phi_3(\phi_1^2 \gamma_1 + \phi_2^2 \gamma_2) + p_4\phi_4(\phi_1^2 \delta_1 + \phi_2^2 \delta_2 + \phi_3^2 \delta_3) + \\ & + p_5\phi_5(\phi_1^2 \varepsilon_1 + \ldots + \phi_4^2 \varepsilon_4) + p_6\phi_6(\phi_1^2 \zeta_1 + \ldots + \phi_5^2 \zeta_5) + \\ & + p_7\phi_7(\phi_1^2 \eta_1 + \ldots + \phi_6^2 \eta_6) = \frac{1}{15} \end{aligned} \tag{12_1}$$

$$[Df_1 D^{(3)}f] \qquad \begin{aligned} &p_2\phi_2\phi_1^3\beta_1+p_3\phi_3(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)+p_4\phi_4(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+\phi_3^3\delta_3)+\\ &+p_5\phi_5(\phi_1^3\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^3\varepsilon_4)+p_6\phi_6(\phi_1^3\zeta_1+\ldots+\phi_5^3\zeta_5)+\\ &+p_7\phi_7(\phi_1^3\eta_1+\ldots+\phi_6^3\eta_6)=\frac{1}{24} \end{aligned} \tag{13$_1$}$$

$$[D^{(2)}f_1 Df] \qquad \begin{aligned} &p_2\phi_2^2\phi_1\beta_1+p_3\phi_3^2(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)+p_4\phi_4^2(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)+\\ &+p_5\phi_5^2(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)+p_6\phi_6^2(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)+\\ &+p_7\phi_7^2(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)=\frac{1}{10} \end{aligned} \tag{14$_1$}$$

$$[fD^{(2)}{}_1f] \qquad \begin{aligned} &p_2\phi_2^2\phi_1B_1+p_3\phi_3^2(\phi_1G_1+\phi_2G_2)+p_4\phi_4^2(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)+\\ &+p_5\phi_5^2(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)+p_6\phi_6^2(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)+\\ &+p_7\phi_7^2(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)=\frac{1}{10} \end{aligned} \tag{14$_2$}$$

$$[D^{(2)}f_1 D^{(2)}f] \qquad \begin{aligned} &p_2\phi_2^2\phi_1^2\beta_1+p_3\phi_3^2(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)+p_4\phi_4^2(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)+\\ &+p_5\phi_5^2(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)+p_6\phi_6^2(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5)+\\ &+p_7\phi_7^2(\phi_1^2\eta_1+\ldots+\phi_6^2\eta_6)=\frac{1}{18} \end{aligned} \tag{15$_1$}$$

$$[D^{(3)}f_1 Df] \qquad \begin{aligned} &p_2\phi_2^3\phi_1\beta_1+p_3\phi_3^3(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)+p_4\phi_4^3(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)+\\ &+p_5\phi_5^3(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)+p_6\phi_6^3(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)+\\ &+p_7\phi_7^3(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)=\frac{1}{12} \end{aligned} \tag{16$_1$}$$

$$[fD^{(3)}{}_1f] \qquad \begin{aligned} &p_2\phi_2^3\phi_1B_1+p_3\phi_3^3(\phi_1G_1+\phi_2G_2)+p_4\phi_4^3(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)+\\ &+p_5\phi_5^3(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)+p_6\phi_6^3(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)+\\ &+p_7\phi_7^3(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)=\frac{1}{12} \end{aligned} \tag{16$_2$}$$

$$[f_2(Df)^2] \qquad \begin{aligned} &p_2\phi_1^2\beta_1^2+p_3(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2+p_4(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2+\\ &+p_5(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)^2+p_6(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)^2+\\ &+p_7(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)^2=\frac{1}{20} \end{aligned} \tag{17$_1$}$$

$$[f^2{}_{\cdot 2}f] \qquad \begin{aligned} &p_2\phi_1^2B_1^2+p_3(\phi_1G_1+\phi_2G_2)^2+p_4(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)^2+\\ &+p_5(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)^2+p_6(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)^2+\\ &+p_7(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)^2=\frac{1}{20} \end{aligned} \tag{17$_2$}$$

$[f \cdot {}_1f_1Df]$

$$\begin{aligned}
&p_2\phi_1^2\beta_1B_1+p_3(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)(\phi_1G_1+\phi_2G_2)+\\
&+p_4(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)+\\
&+p_5(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)+\\
&+p_6(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)+\\
&+p_7(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)=\frac{1}{20}
\end{aligned} \tag{17_3}$$

$[Df_2(Df)^2]$

$$\begin{aligned}
&p_2\phi_2\phi_1^2\beta_1^2+p_3\phi_3(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2+p_4\phi_4(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2+\\
&+p_5\phi_5(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)^2+p_6\phi_6(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)^2+\\
&+p_7\phi_7(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)^2=\frac{1}{24}
\end{aligned} \tag{18_1}$$

$[f^2D_2f]$

$$\begin{aligned}
&p_2\phi_2\phi_1^2B_1^2+p_3\phi_3(\phi_1G_1+\phi_2G_2)^2+p_4\phi_4(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)^2+\\
&+p_5\phi_5(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)^2+p_6\phi_6(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)^2+\\
&+p_7\phi_7(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)^2=\frac{1}{24}
\end{aligned} \tag{18_2}$$

$[fD_1f_1Df]$

$$\begin{aligned}
&p_2\phi_2\phi_1^2\beta_1B_1+p_3\phi_3(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)(\phi_1G_1+\phi_2G_2)+\\
&+p_4\phi_4(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)+\\
&+p_5\phi_5(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)+\\
&+p_6\phi_6(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)+\\
&+p_7\phi_7(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)=\frac{1}{24}
\end{aligned} \tag{18_3}$$

$[f_2DfD^{(2)}f]$

$$\begin{aligned}
&p_2\phi_1^3\beta_1^2+p_3(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)+\\
&+p_4(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)+\\
&+p_5(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)+\\
&+p_6(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5)+\\
&+p_7(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)(\phi_1^2\eta_1+\ldots+\phi_6^2\eta_6)=\frac{1}{36}
\end{aligned} \tag{19_1}$$

$[f \cdot {}_1f_1D^{(2)}f]$

$$\begin{aligned}
&p_2\phi_1^3\beta_1B_1+p_3(\phi_1G_1+\phi_2G_2)(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)+\\
&+p_4(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)+\\
&+p_5(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)+\\
&+p_6(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5)+\\
&+p_7(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)(\phi_1^2\eta_1+\ldots+\phi_6^2\eta_6)=\frac{1}{36}
\end{aligned} \tag{19_2}$$

$[f_1^2 Df]$

$$\begin{aligned}
&p_3\phi_1\beta_1\gamma_2+p_4[\phi_1\beta_1\delta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3]+\\
&+p_5[\phi_1\beta_1\varepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4]+\\
&+p_6[\phi_1\beta_1\zeta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\zeta_4+\\
&+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5]++p_7[\phi_1\beta_1\eta_2+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\eta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\eta_4+\\
&+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\eta_5+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\eta_6]=\frac{1}{24}
\end{aligned}\tag{20$_1$}$$

$[f\cdot {}_1ff_1]$

$$\begin{aligned}
&p_3\phi_1B_1\gamma_2+p_4[\phi_1B_1\delta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3]+p_5[\phi_1B_1\varepsilon_2+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4]+p_6[\phi_1B_1\zeta_2+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\zeta_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\zeta_4+\\
&+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\zeta_5]+p_7[\phi_1B_1\eta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\eta_3+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\eta_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\eta_5+\\
&+(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)\eta_6]=\frac{1}{24}
\end{aligned}\tag{20$_2$}$$

$[Df\cdot {}_1f]$

$$\begin{aligned}
&p_3\phi_1b_1G_2+p_4[\phi_1b_1D_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3]+\\
&+p_5[\phi_1b_1E_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4]+\\
&+p_6[\phi_1b_1Z_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)Z_3+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)Z_4+\\
&+(\phi_1e_1+\ldots+\phi_4e_4)Z_5]+p_7[\phi_1b_1\text{Э}_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\text{Э}_3+\\
&+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)\text{Э}_4+(\phi_1e_1+\ldots+\phi_4e_4)\text{Э}_5+\\
&+(\phi_1c_1+\ldots+\phi_5c_5)\text{Э}_6]=\frac{1}{24}
\end{aligned}\tag{20$_3$}$$

(f_1Df)

$$\begin{aligned}
&r_3\phi_1\beta_1g_2+r_4[\phi_1\beta_1d_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3]+r_5[\phi_1\beta_1e_2+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)e_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)e_4]+\\
&+r_6[\phi_1\beta_1c_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)c_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)c_4+\\
&+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)c_5]+r_7[\phi_1\beta_1\text{э}_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\text{э}_3+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\text{э}_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\text{э}_5+\\
&+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\text{э}_6]=\frac{1}{24}
\end{aligned}\tag{20$_4$}$$

$(f\cdot {}_1f)$

$$\begin{aligned}
&r_3\phi_1B_1g_2+r_4[\phi_1B_1d_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3]+r_5[\phi_1B_1e_2+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)e_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)e_4]+r_6[\phi_1B_1c_2+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)c_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)c_4+\\
&+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)c_5]+r_7[\phi_1B_1\text{э}_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\text{э}_3+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\text{э}_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\text{э}_5+\\
&+(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)\text{э}_6]=\frac{1}{24}
\end{aligned}\tag{20$_5$}$$

$$
\begin{aligned}
[f_1^2D^{(2)}f] \qquad & p_3\phi_1^2\beta_1\gamma_2+p_4[\phi_1^2\beta_1\delta_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\delta_3]+\\
&+p_5[\phi_1^2\beta_1\varepsilon_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\varepsilon_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\varepsilon_4]+\\
&+p_6[\phi_1^2\beta_1\zeta_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\zeta_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\zeta_4+\\
&+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\,\zeta_5]+p_7[\phi_1^2\beta_1\eta_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\eta_3+\\
&+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\eta_4+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\,\eta_5+\\
&+(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5)\,\eta_6]=\frac{1}{60}
\end{aligned}
\tag{21$_1$}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^{(2)}f\,.\,{}_1f] \qquad & p_3\phi_1^2b_1G_2+p_4[\phi_1^2b_1D_2+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)\,D_3]+\\
&+p_5[\phi_1^2b_1E_2+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)\,E_3+(\phi_1^2d_1+\phi_2^2d_2+\phi_3^2d_3)\,E_4]+\\
&+p_6[\phi_1^2b_1Z_2+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)\,Z_3+(\phi_1^2d_1+\phi_2^2d_2+\phi_3^2d_3)\,Z_4+\\
&+(\phi_1^2e_1+\ldots+\phi_4^2e_4)\,Z_5]+p_7[\phi_1^2b_1\exists_2+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)\,\exists_3+\\
&+(\phi_1^2d_1+\phi_2^2d_2+\phi_3^2d_3)\,\exists_4+(\phi_1^2e_1+\ldots+\phi_4^2e_4)\,\exists_5+\\
&+(\phi_1^2c_1+\ldots+\phi_5^2c_5)\,\exists_6]=\frac{1}{60}
\end{aligned}
\tag{21$_2$}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_1D^{(2)}f) \qquad & r_3\phi_1^2\beta_1g_2+r_4[\phi_1^2\beta_1d_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,d_3]+r_5[\phi_1^2\beta_1e_2+\\
&+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,e_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,e_4]+r_6[\phi_1^2\beta_1c_2+\\
&+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,c_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,c_4+\\
&+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\,c_5]+r_7[\phi_1^2\beta_1\text{э}_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\text{э}_3+\\
&+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\text{э}_4+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\,\text{э}_5+\\
&+(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5)\text{э}_6]=\frac{1}{60}
\end{aligned}
\tag{21$_3$}
$$

$$
\begin{aligned}
[f_1^2D^{(3)}f] \qquad & p_3\phi_1^3\beta_1\gamma_2+p_4[\phi_1^3\beta_1\delta_2+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)\,\delta_3]+p_5[\phi_1^3\beta_1\varepsilon_2+\\
&+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)\,\varepsilon_3+(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+\phi_3^3\delta_3)\,\varepsilon_4]+p_6[\phi_1^3\beta_1\zeta_2+\\
&+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)\,\zeta_3+(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+\phi_3^3\delta_3)\,\zeta_4+\\
&+(\phi_1^3\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^3\varepsilon_4)\,\zeta_5]+p_7[\phi_1^3\beta_1\eta_2+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)\,\eta_3+\\
&+(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+\phi_3^3\delta_3)\,\eta_4+(\phi_1^3\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^3\varepsilon_4)\,\eta_5+\\
&+(\phi_1^3\zeta_1+\ldots+\phi_5^3\zeta_5)\,\eta_6]=\frac{1}{120}
\end{aligned}
\tag{22$_1$}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^{(3)}f\,.\,{}_1f] \qquad & p_3\phi_1^3b_1G_2+p_4[\phi_1^3b_1D_2+(\phi_1^3g_1+\phi_2^3g_2)D_3]+p_5[\phi_1^3b_1E_2+\\
&+(\phi_1^3g_1+\phi_2^3g_2)\,E_3+(\phi_1^3d_1+\phi_2^3d_2+\phi_3^3d_3)\,E_4]+p_6[\phi_1^3b_1Z_2+\\
&+(\phi_1^3g_1+\phi_2^3g_2)\,Z_3+(\phi_1^3d_1+\phi_2^3d_2+\phi_3^3d_3)\,Z_4+\\
&+(\phi_1^3e_1+\ldots+\phi_4^3e_4)\,Z_5]+p_7[\phi_1^3b_1\exists_2+(\phi_1^3g_1+\phi_2^3g_2)\,\exists_3+
\end{aligned}
$$

$$+(\phi_1^3 d_1+\phi_2^3 d_2+\phi_3^3 d_3)\exists_4+(\phi_1^3 e_1+\ldots+\phi_4^3 e_4)\exists_5+$$
$$+(\phi_1^3 c_1+\ldots+\phi_5^3 c_5)\exists_6]=\frac{1}{120} \qquad (22_2)$$

$(f_1 D^{(3)} f)$

$$r_3\phi_1^3\beta_1 g_2+r_4[\phi_1^3\beta_1 d_2+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)d_3]+r_5[\phi_1^3\beta_1 e_2+$$
$$+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)e_3+(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+\phi_3^3\delta_3)e_4]+r_6[\phi_1^3\beta_1 c_2+$$
$$+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)c_3+(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+\phi_3^3\delta_3)c_4+$$
$$+(\phi_1^3\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^3\varepsilon_4)c_5]+r_7[\phi_1^3\beta_1\text{э}_2+(\phi_1^3\gamma_1+\phi_2^3\gamma_2)\text{э}_3+$$
$$+(\phi_1^3\delta_1+\phi_2^3\delta_2+\phi_3^3\delta_3)\text{э}_4+(\phi_1^3\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^3\varepsilon_4)\text{э}_5+$$
$$+(\phi_1^3\zeta_1+\ldots+\phi_5^3\zeta_5)\text{э}_6]=\frac{1}{120} \qquad (22_3)$$

$[f_1 D f_1 D f]$

$$p_3[\phi_1\beta_1\gamma_2(\phi_2+\phi_3)]+p_4[\phi_1\beta_1\delta_2(\phi_2+\phi_4)+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3(\phi_3+\phi_4)]+p_5[\phi_1\beta_1\varepsilon_2(\phi_2+\phi_5)+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3(\phi_3+\phi_5)+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4(\phi_4+\phi_5)]+$$
$$+p_6[\phi_1\beta_1\zeta_2(\phi_2+\phi_6)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3(\phi_3+\phi_6)+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\zeta_4(\phi_4+\phi_6)+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5(\phi_5+\phi_6)]+$$
$$+p_7[\phi_1\beta_1\eta_2(\phi_2+\phi_7)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\eta_3(\phi_3+\phi_7)+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\eta_4(\phi_4+\phi_7)+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\cdot\eta_5(\phi_5+\phi_7)+$$
$$+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\eta_6(\phi_6+\phi_7)]=\frac{7}{120} \qquad (23_1)$$

$[f_1 . f D_1 f]$

$$p_3\phi_1 B_1\phi_2\gamma_2+p_4[\phi_1 B_1\phi_2\delta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\delta_3]+p_5[\phi_1 B_1\phi_2\varepsilon_2+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\varepsilon_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\phi_4\varepsilon_4]+$$
$$+p_6[\phi_1 B_1\phi_2\zeta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\zeta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\phi_4\zeta_4+$$
$$+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\phi_5\zeta_5]+p_7[\phi_1 B_1\phi_2\eta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\phi_3\eta_3+$$
$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\phi_4\eta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\phi_5\eta_5+$$
$$+(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)\phi_6\eta_6]=\frac{1}{40} \qquad (23_2')$$

$(Df_1 . Df)$

$$r_3\phi_1\beta_1\phi_2 g_2+r_4[\phi_1\beta_1\phi_2 d_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3 d_3]+r_5[\phi_1\beta_1\phi_2 e_2+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3 e_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4 e_4]+r_6[\phi_1\beta_1\phi_2 c_2+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3 c_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4 c_4+$$
$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5 c_5]+r_7[\phi_1\beta_1\phi_2\text{э}_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\text{э}_3+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\text{э}_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5\text{э}_5+$$
$$+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\phi_6\text{э}_6]=\frac{1}{40} \qquad (23_3')$$

$$
\begin{aligned}
&(f.D_1f) \quad r_3\phi_1B_1\phi_2g_2+r_4[\phi_1B_1\phi_2d_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3d_3]+r_5[\phi_1B_1\phi_2e_2+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3e_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4e_4]+r_6[\phi_1B_1\phi_2c_2+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3c_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4c_4+\\
&+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\phi_5c_5]+r_7[\phi_1B_1\phi_2\text{э}_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\text{э}_3+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4\text{э}_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\phi_5\text{э}_5+\\
&+(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)\phi_6\text{э}_6]=\frac{1}{40}
\end{aligned}
\tag{$23_4'$}
$$

$$
\begin{aligned}
&[Df_1\cdot f\cdot {}_1f] \quad p_3\phi_1B_1\phi_3\gamma_2+p_4[\phi_1B_1\phi_4\delta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_4\delta_3]+\\
&+p_5[\phi_1B_1\phi_5\varepsilon_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_5\varepsilon_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_5\varepsilon_4]+\\
&+p_6[\phi_1B_1\phi_6\zeta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_6\zeta_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_6\zeta_4+\\
&+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\phi_6\zeta_5]+p_7[\phi_1B_1\phi_7\eta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_7\eta_3+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_7\eta_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\phi_7\eta_5+\\
&+(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)\phi_7\eta_6]=\frac{1}{30}
\end{aligned}
\tag{$23_5'$}
$$

$$
\begin{aligned}
&[Df.D_1f] \quad p_3\phi_1b_1\phi_3G_2+p_4[\phi_1b_1\phi_4D_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\phi_4D_3]+p_5[\phi_1b_1\phi_5E_2+\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\phi_5E_3+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)\phi_5E_4]+p_6[\phi_1b_1\phi_6Z_2+\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\phi_6Z_3+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)\phi_6Z_4+\\
&+(\phi_1e_1+\ldots+\phi_4e_4)\phi_6Z_5]+p_7[\phi_1b_1\phi_7\text{Э}_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\phi_7\text{Э}_3+\\
&+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)\phi_7\text{Э}_4+(\phi_1e_1+\ldots+\phi_4e_4)\phi_7\text{Э}_5+\\
&+(\phi_1c_1+\ldots+\phi_5c_5)\phi_7\text{Э}_6]=\frac{1}{30}
\end{aligned}
\tag{$23_6'$}
$$

$$
\begin{aligned}
&[f_1Df_1D^{(2)}f] \quad p_3[\phi_1^2\beta_1\gamma_2(\phi_2+\phi_3)]+p_4[\phi_1^2\beta_1\delta_2(\phi_2+\phi_4)+\\
&+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\delta_3(\phi_3+\phi_4)]+p_5[\phi_1^2\beta_1\varepsilon_2(\phi_2+\phi_5)+\\
&+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\varepsilon_3(\phi_3+\phi_5)+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\varepsilon_4(\phi_4+\phi_5)]+\\
&+p_6[\phi_1^2\beta_1\zeta_2(\phi_2+\phi_6)+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\zeta_3(\phi_3+\phi_6)+\\
&+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\zeta_4(\phi_4+\phi_6)+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\zeta_5(\phi_5+\phi_6)]+\\
&+p_7[\phi_1^2\beta_1\eta_2(\phi_2+\phi_7)+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\eta_3(\phi_3+\phi_7)+\\
&+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\eta_4(\phi_4+\phi_7)+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\eta_5(\phi_5+\phi_7)+\\
&+(\phi_1^2\zeta_1+\ldots+\phi_5^2\zeta_5)\eta_6(\phi_6+\phi_7)]=\frac{1}{40}
\end{aligned}
\tag{24_1}
$$

$$
\begin{aligned}
&[D_1fD^{(2)}f] \quad p_3\phi_1^2b_1\phi_3G_2+p_4[\phi_1^2b_1\phi_4D_2+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)\phi_4D_3]+\\
&+p_5[\phi_1^2b_1\phi_5E_2+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)\phi_5E_3+(\phi_1^2d_1+\phi_2^2d_2+\phi_3^2d_3)\phi_5E_4]+\\
&+p_6[\phi_1^2b_1\phi_6Z_2+(\phi_1^2g_1+\phi_2^2g_2)\phi_6Z_3+(\phi_1^2d_1+\phi_2^2d_2+\phi_3^2d_3)\phi_6Z_4+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(\phi_1^2 e_1+\dots+\phi_4^2 e_4)\,\phi_6 Z_5]+p_7[\phi_1^2 b_1\phi_7\exists_2+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)\,\phi_7\exists_3+\\
&+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3)\,\phi_7\exists_4+(\phi_1^2 e_1+\dots+\phi_4^2 e_4)\,\phi_7\exists_5+\\
&+(\phi_1^2 c_1+\dots+\phi_5^2 c_5)\,\phi_7\exists_6]=\frac{1}{72} \qquad (24'_2)
\end{aligned}
$$

$(Df_1\,.\,D^{(2)}f)$

$$
\begin{aligned}
&r_3\phi_1^2\beta_1\phi_2 g_2+r_4[\phi_1^2\beta_1\phi_2 d_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\phi_3 d_3]+\\
&+r_5[\phi_1^2\beta_1\phi_2 e_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\phi_3 e_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\phi_4 e_4]+\\
&+r_6[\phi_1^2\beta_1\phi_2 c_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\phi_3 c_3+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\phi_4 c_4+\\
&+(\phi_1^2\varepsilon_1+\dots+\phi_4^2\varepsilon_4)\,\phi_5 c_5]+r_7[\phi_1^2\beta_1\phi_2\text{э}_2+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\phi_3\text{э}_3+\\
&+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\phi_4\text{э}_4+(\phi_1^2\varepsilon_1+\dots+\phi_4^2\varepsilon_4)\,\phi_5\text{э}_5+\\
&+(\phi_1^2\zeta_1+\dots+\phi_5^2\zeta_5)\,\phi_6\text{э}_6]=\frac{1}{90} \qquad (24'_3)
\end{aligned}
$$

$[f_1 D^{(2)} f_1 Df]$

$$
\begin{aligned}
&p_3[\phi_1\beta_1\gamma_2(\phi_2^2+\phi_3^2)]+p_4[\phi_1\beta_1\delta_2(\phi_2^2+\phi_4^2)+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3(\phi_3^2+\phi_4^2)]+p_5[\phi_1\beta_1\varepsilon_2(\phi_2^2+\phi_5^2)+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\varepsilon_2(\phi_3^2+\phi_5^2)+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\varepsilon_4(\phi_4^2+\phi_5^2)]+\\
&+p_6[\phi_1\beta_1\zeta_2(\phi_2^2+\phi_6^2)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\zeta_3(\phi_3^2+\phi_6^2)+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\zeta_4(\phi_4^2+\phi_6^2)+(\phi_1\varepsilon_1+\dots+\phi_4\varepsilon_4)\,\zeta_5(\phi_5^2+\phi_6^2)]+\\
&+p_7[\phi_1\beta_1\eta_2(\phi_2^2+\phi_7^2)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\eta_3(\phi_3^2+\phi_7^2)+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\eta_4(\phi_4^2+\phi_7^2)+(\phi_1\varepsilon_1+\dots+\phi_4\varepsilon_4)\,\eta_5(\phi_5^2+\phi_7^2)+\\
&+(\phi_1\zeta_1+\dots+\phi_5\zeta_5)\,\eta_6(\phi_6^2+\phi_7^2)]=\frac{2}{45} \qquad (25_1)
\end{aligned}
$$

$[f_1\cdot f\,.\,D^{(2)}_1 f]$

$$
\begin{aligned}
&p_3\phi_1 B_1\phi_2^2\gamma_2+p_4[\phi_1 B_1\phi_2^2\delta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3^2\delta_3]+\\
&+p_5[\phi_1 B_1\phi_2^2\varepsilon_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3^2\varepsilon_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,\phi_4^2\varepsilon_4]+\\
&+p_6[\phi_1 B_1\phi_2^2\zeta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3^2\zeta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,\phi_4^2\zeta_4+\\
&+(\phi_1 E_1+\dots+\phi_4 E_4)\,\phi_5^2\zeta_5]+p_7[\phi_1 B_1\phi_2^2\eta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3^2\eta_3+\\
&+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,\phi_4^2\eta_4+(\phi_1 E_1+\dots+\phi_4 E_4)\,\phi_5^2\eta_5+\\
&+(\phi_1 Z_1+\dots+\phi_5 Z_5)\,\phi_6^2\eta_6]=\frac{1}{60} \qquad (25'_2)
\end{aligned}
$$

$(D^{(2)}f_1\,Df)$

$$
\begin{aligned}
&r_3\phi_1\beta_1\phi_2^2 g_2+r_4[\phi_1\beta_1\phi_2^2 d_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3^2 d_3]+r_5[\phi_1\beta_1\phi_2^2 e_2+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3^2 e_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\phi_4^2\varepsilon_4]+r_6[\phi_1\beta_1\phi_2^2 c_2+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3^2 c_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\phi_4^2 c_4+\\
&+(\phi_1\varepsilon_1+\dots+\phi_4\varepsilon_4)\,\phi_5^2 c_5]+r_7[\phi_1\beta_1\phi_2^2\text{э}_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_3^2\text{э}_3+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\phi_4^2\text{э}_4+(\phi_1\varepsilon_1+\dots+\phi_4\varepsilon_4)\,\phi_5^2\text{э}_5+\\
&+(\phi_1\zeta_1+\dots+\phi_5\zeta_5)\,\phi_6^2\text{э}_6]=\frac{1}{60} \qquad (25'_3)
\end{aligned}
$$

$(fD_{1}^{(2)}f)$

$$
\begin{aligned}
& r_3\phi_1B_1\phi_2^2g_2+r_4[\phi_1B_1\phi_2^2d_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3^2d_3]+r_5[\phi_1B_1\phi_2^2e_2+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3^2e_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4^2e_4]+\\
&+r_6[\phi_1B_1\phi_2^2c_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3^2c_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4^2c_4+\\
&+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\phi_5^2c_5]+r_7[\phi_1B_1\phi_2^2\text{э}_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3^2\text{э}_3+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4^2\text{э}_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\phi_5^2\text{э}_5+\\
&+(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)\phi_6^2\text{э}_6]=\frac{1}{60}
\end{aligned}
\tag{$25_4'$}
$$

$[f\cdot{}_1fD^{(2)}f_1]$

$$
\begin{aligned}
& p_3\phi_1B_1\phi_3^2\gamma_2+p_4[\phi_1B_1\phi_4^2\delta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_4^2\delta_3]+\\
&+p_5[\phi_1B_1\phi_5^2\varepsilon_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_5^2\varepsilon_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_5^2\varepsilon_4]+\\
&+p_6[\phi_1B_1\phi_6^2\zeta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_6^2\zeta_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_6^2\zeta_4+\\
&+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\phi_6^2\zeta_5]+p_7[\phi_1B_1\phi_7^2\eta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_7^2\eta_3+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_7^2\eta_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\phi_7^2\eta_5+\\
&+(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)\phi_7^2\eta_6]=\frac{1}{36}
\end{aligned}
\tag{$25_5'$}
$$

$[DfD_{1}^{(2)}f]$

$$
\begin{aligned}
& p_3\phi_1b_1\phi_3^2G_2+p_4[\phi_1b_1\phi_4^2D_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\phi_4^2D_3]+\\
&+p_5[\phi_1b_1\phi_5^2E_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\phi_5^2E_3+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)\phi_5^2E_4]+\\
&+p_6[\phi_1b_1\phi_6^2Z_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\phi_6^2Z_3+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)\phi_6^2Z_4+\\
&+(\phi_1e_1+\ldots+\phi_4e_4)\phi_6^2Z_5]+p_7[\phi_1b_1\phi_7^2\exists_2+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)\phi_7^2\exists_3+\\
&+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)\phi_7^2\exists_4+(\phi_1e_1+\ldots+\phi_4e_4)\phi_7^2\exists_5+\\
&+(\phi_1c_1+\ldots+\phi_5c_5)\phi_7^2\exists_6]=\frac{1}{36}
\end{aligned}
\tag{$25_6'$}
$$

$[(Df_1)^2\,Df]$

$$
\begin{aligned}
& p_3\phi_3\phi_1\beta_1\phi_2\gamma_2+p_4\phi_4[\phi_1\beta_1\phi_2\delta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\delta_3]+\\
&+p_5\phi_5[\phi_1\beta_1\phi_2\varepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\varepsilon_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\varepsilon_4]+\\
&+p_6\phi_6[\phi_1\beta_1\phi_2\zeta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\zeta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\zeta_4+\\
&+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5\zeta_5]+p_7\phi_7[\phi_1\beta_1\phi_2\eta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3\eta_3+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4\eta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5\eta_5+\\
&+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\phi_6\eta_6]=\frac{1}{48}
\end{aligned}
\tag{26_1}
$$

$[fD_1fDf_1]$

$$
\begin{aligned}
& p_3\phi_3\phi_1B_1\phi_2\gamma_2+p_4\phi_4[\phi_1B_1\phi_2\delta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\delta_3]+\\
&+p_5\phi_5[\phi_1B_1\phi_2\varepsilon_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\varepsilon_3+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4\varepsilon_4]+\\
&+p_6\phi_6[\phi_1B_1\phi_2\zeta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\zeta_3+
\end{aligned}
$$

$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,\phi_4\zeta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\,\phi_5\zeta_5]+$$
$$+p_7\phi_7[\phi_1 B_1\phi_2\eta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,\phi_3\eta_3+$$
$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,\phi_4\eta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\,\phi_5\eta_5+$$
$$+(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)\,\phi_6\eta_6]=\frac{1}{48} \qquad (26_2)$$

$[f_1\cdot f_2(Df)^2]$
$$p_3[\phi_1^2\beta_1^2\gamma_2+2(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\phi_1\beta_1\gamma_2]+p_4\{\phi_1^2\beta_1^2\delta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\,\delta_3+$$
$$+2(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,[\phi_1\beta_1\delta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3]\}+$$
$$+p_5\{\phi_1^2\beta_1^2\varepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\,\varepsilon_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2\,\varepsilon_4+$$
$$+2(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\,[\phi_1\beta_1\varepsilon_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\varepsilon_3+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\varepsilon_4]\}+p_6\{\phi_1^2\beta_1^2\zeta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\,\zeta_3+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2\,\zeta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)^2\,\zeta_5+$$
$$+2(\phi_1\zeta_1+\cdots\phi_5\zeta_5)\,[\phi_1\beta_1\zeta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\zeta_3+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\zeta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\cdots+\phi_4\varepsilon_4)\,\zeta_5]\}+$$
$$+p_7\{\phi_1^2\beta_1^2\eta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\,\eta_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2\,\eta_4+$$
$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)^2\,\eta_5+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)^2\,\eta_6+$$
$$+2(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)\,[\phi_1\beta_1\eta_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\eta_3$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\eta_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\,\eta_5+$$
$$+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\,\eta_6]\}=\frac{13}{360} \qquad (27_1)$$

$[f_1\cdot f^2\cdot{}_2f]$
$$p_3\phi_1^2B_1^2\gamma_2+p_4[\phi_1^2B_1^2\delta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)^2\,\delta_3]+$$
$$+p_5[\phi_1^2\beta_1^2\varepsilon_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)^2\,\varepsilon_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)^2\,\varepsilon_4]+$$
$$+p_6[\phi_1^2B_1^2\zeta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)^2\,\zeta_3+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)^2\,\zeta_4+$$
$$+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)^2\,\zeta_5]+p_7[\phi_1^2B_1^2\eta_2+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)^2\,\eta_3+$$
$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)^2\,\eta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)^2\,\eta_5+$$
$$+(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)^2\,\eta_6]=\frac{1}{120} \qquad (27_2')$$

$(f_2(Df)^2)$
$$r_3\phi_1^2\beta_1^2 g_2+r_4[\phi_1^2\beta_1^2 d_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\,d_3]+r_5[\phi_1^2\beta_1^2 e_2+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\,e_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2\,e_4]+r_6[\phi_1^2\beta_1^2 c_2+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\,c_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2\,c_4+$$
$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)^2\,c_5]+r_7[\phi_1^2\beta_1^2\text{э}_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)^2\,\text{э}_3+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)^2\,\text{э}_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)^2\,\text{э}_5+$$
$$+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)^2\,\text{э}_6]=\frac{1}{120} \qquad (27_3')$$

$(f^2{}_2f)$

$$r_3\phi_1^2B_1^2g_2+r_4[\phi_1^2B_1^2d_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)^2d_3]+r_5[\phi_1^2B_1^2e_2+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)^2e_3++(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)^2e_4]+r_6[\phi_1^2B_1^2c_2+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)^2c_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)^2c_4+$$
$$+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)^2c_5]+r_7[\phi_1^2B_1^2\text{э}_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)^2\text{э}_3+$$
$$+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)^2\text{э}_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)^2\text{э}_5+$$
$$+(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)^2\text{э}_6]=\frac{1}{120} \tag{27$'_4$}$$

$(f\cdot{}_1f_1Df)$

$$r_3\phi_1^2\beta_1B_1g_2+r_4[\phi_1^2\beta_1B_1d_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3]+$$
$$+r_5[\phi_1^2\beta_1B_1e_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)(\phi_1G_1+\phi_2G_2)e_3+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)e_4]+$$
$$+r_6[\phi_1^2\beta_1B_1c_2+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)(\phi_1G_1+\phi_2G_2)c_3+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)c_4+$$
$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)c_5]+r_7[\phi_1^2\beta_1B_1\text{э}_2+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\text{э}_3+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,.$$
$$.\,(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\text{э}_4+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\text{э}_5+$$
$$+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)\text{э}_6]=\frac{1}{120} \tag{27$'_5$}$$

$[f\cdot{}_1ff_2Df]$

$$p_3\phi_1B_1\gamma_2(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)+p_4(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)[\phi_1B_1\delta_2+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3]+p_5(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)[\phi_1B_1\varepsilon_2+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4]+$$
$$+p_6(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)[\phi_1B_1\zeta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\zeta_3+$$
$$+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\zeta_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\zeta_5]+$$
$$+p_7(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)[\phi_1B_1\eta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\eta_3+$$
$$+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\eta_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\eta_5+$$
$$+(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)\eta_6]=\frac{1}{72} \tag{27$'_6$}$$

$[{}_1ff^2\cdot{}_1f_1]$

$$p_3\phi_1B_1\gamma_2(\phi_1G_1+\phi_2G_2)+p_4(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)[\phi_1B_1\delta_2+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3]+p_5(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)[\phi_1B_1\varepsilon_2+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4]+$$
$$+p_6(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5)[\phi_1B_1\zeta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\zeta_3+$$
$$+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\zeta_4+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\zeta_5]+$$
$$+p_7(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)[\phi_1B_1\eta_2+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\eta_3+$$

$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\eta_4+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\eta_5+$$
$$+(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)\eta_6]=\frac{1}{72} \qquad (27'_7)$$

$[{}_1f_1(Df)^2]$

$$p_3\phi_1 b_1 G_2(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)+p_4(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)[\phi_1 b_1 D_2+$$
$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)D_3]+p_5(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)[\phi_1 b_1 E_2+$$
$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)E_3+(\phi_2 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)E_4]+$$
$$+p_6(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)[\phi_1 b_1 Z_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)Z_3+$$
$$+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)Z_4+(\phi_1 e_1+\ldots+\phi_4 e_4)Z_5]+$$
$$+p_7(\phi_1\eta_1+\ldots+\phi_6\eta_6)[\phi_1 b_1 \exists_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\exists_3+$$
$$+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)\exists_4+(\phi_1 e_1+\ldots+\phi_4 e_4)\exists_5+$$
$$+(\phi_1 c_1+\ldots+\phi_5 c_5)\exists_6]=\frac{1}{72} \qquad (27'_8)$$

$[fDf\,.\,{}_2f]$

$$p_3\phi_1 b_1 G_2(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)+p_4(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)[\phi_1 b_1 D_2+$$
$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)D_3]+p_5(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)[\phi_1 b_1 E_2+$$
$$+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)E_3+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)E_4]+$$
$$+p_6(\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)[\phi_1 b_1 Z_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)Z_3+$$
$$+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)Z_4+(\phi_1 e_1+\ldots+\phi_4 e_4)Z_5]+$$
$$+p_7(\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)[\phi_1 b_1\exists_2+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\exists_3+$$
$$+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)\exists_4+(\phi_1 e_1+\ldots+\phi_4 e_4)\exists_5+$$
$$+(\phi_1 c_1+\ldots+\phi_5 c_5)\exists_6]=\frac{1}{72} \qquad (27'_9)$$

$[f\cdot{}_1f_1\cdot f_1Df]$

$$p_3\phi_1\beta_1\gamma_2(\phi_1 B_1+\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)+p_4[\phi_1\beta_1\delta_2(\phi_1 B_1+\phi_1 D_1+$$
$$+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2+\phi_1 D_1+$$
$$+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)]+p_5[\phi_1\beta_1\varepsilon_2(\phi_1 B_1+\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)e_3(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2+\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3+\phi_1 E_1+\ldots+$$
$$+\phi_4 E_4)]+p_6[\phi_1\beta_1\zeta_2(\phi_1 B_1+\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2+\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\zeta_4(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3+\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)+$$
$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4+\phi_1 Z_1+\ldots+\phi_5 Z_5)]+$$
$$+p_7[\phi_1\beta_1\eta_2(\phi_1 B_1+\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\eta_3(\phi_1 G_1+$$
$$+\phi_2 G_2+\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\eta_4(\phi_1 D_1+$$
$$+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3+\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)+$$

$$
\begin{aligned}
&+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\eta_5(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4+\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6)+\\
&+(\phi_1\zeta_1+\ldots+\phi_5\zeta_5)\eta_6(\phi_1Z_1+\ldots+\phi_5Z_5+\\
&+\phi_1\exists_1+\ldots+\phi_6\exists_6]=\frac{1}{45}
\end{aligned}
\tag{$27'_{10}$}
$$

$[f_1^3\, Df]$

$$
\begin{aligned}
&p_4\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3+p_5[\phi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3+\phi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\varepsilon_4]+\\
&+p_6[\phi_1\beta_1\gamma_2\zeta_3+\phi_1\beta_1\delta_2\zeta_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\zeta_4+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\zeta_5+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\zeta_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\zeta_5]+p_7[\phi_1\beta_1\gamma_2\eta_3+\\
&+\phi_1\beta_1\delta_2\eta_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\eta_4+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\eta_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\eta_5+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\eta_5+\phi_1\beta_1\zeta_2\eta_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3\eta_6+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\zeta_4\eta_6+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5\eta_6]=\frac{1}{120}
\end{aligned}
\tag{28_1}
$$

$[f_1^2\cdot f\cdot{}_1f]$

$$
\begin{aligned}
&p_4\phi_1B_1\gamma_2\delta_3+p_5[\phi_1B_1\gamma_2\varepsilon_3+\phi_1B_1\delta_2\varepsilon_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\varepsilon_4]+\\
&+p_6[\phi_1B_1\gamma_2\zeta_3+\phi_1B_1\delta_2\zeta_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\zeta_4+\phi_1B_1\varepsilon_2\zeta_5+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3\zeta_5+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4\zeta_5]+\\
&+p_7[\phi_1B_1\gamma_2\eta_3+\phi_1B_1\delta_2\eta_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\eta_4+\phi_1B_1\varepsilon_2\eta_5+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3\eta_5+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4\eta_5+\\
&+\phi_1B_1\zeta_2\eta_6+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\zeta_3\eta_6+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\zeta_4\eta_6+\\
&+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\zeta_5\eta_6=\frac{1}{120}
\end{aligned}
\tag{28_2}
$$

$[f\cdot{}_1f^2]$

$$
\begin{aligned}
&p_4\phi_1B_1g_2D_3+p_5[\phi_1B_1g_2E_3+\phi_1B_1d_2E_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3E_4]+\\
&+p_6[\phi_1B_1g_2Z_3+\phi_1B_1d_2Z_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3Z_4+\phi_1B_1e_2Z_5+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)e_3Z_5+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)e_4Z_5]+\\
&+p_7[\phi_1B_1g_2\exists_3+\phi_1B_1d_2\exists_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3\exists_4+\phi_1B_1e_2\exists_5+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)e_3\exists_5+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)e_4\exists_5+\phi_1B_1c_2\exists_6+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)c_3\exists_6+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)c_4\exists_6+\\
&+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)c_5\exists_6]=\frac{1}{120}
\end{aligned}
\tag{28_3}
$$

(f_1^2Df)

$$
\begin{aligned}
&r_4\phi_1\beta_1\gamma_2d_3+r_5[\phi_1\beta_1\gamma_2e_3+\phi_1\beta_1\delta_2e_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3e_4]+\\
&+r_6[\phi_1\beta_1\gamma_2c_3+\phi_1\beta_1\delta_2c_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3c_4+\phi_1\beta_1\varepsilon_2c_5+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3c_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4c_5]+\\
&+r_7[\phi_1\beta_1\gamma_2\text{э}_3+\phi_1\beta_1\delta_2\text{э}_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\text{э}_4+\\
&+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\text{э}_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\text{э}_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\text{э}_5+
\end{aligned}
$$

$$+\phi_1\beta_1\zeta_2\text{э}_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3\text{э}_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\zeta_4\text{э}_6+$$
$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5\text{э}_6]=\frac{1}{120} \qquad (28_4)$$

$(f_1 f\cdot {}_1f)$

$$r_4\phi_1B_1\gamma_2d_3+r_5[\phi_1B_1\gamma_2e_3+\phi_1B_1\delta_2e_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3e_4]+$$
$$+r_6[\phi_1B_1\gamma_2c_3+\phi_1B_1\delta_2c_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3c_4+\phi_1B_1\varepsilon_2c_5+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3c_5+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4c_5]+$$
$$+r_7[\phi_1B_1\gamma_2\text{э}_3+\phi_1B_1\delta_2\text{э}_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\varepsilon_4+\phi_1B_1\varepsilon_2\text{э}_5+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3\text{э}_5+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4\text{э}_5+\phi_1B_1\zeta_2\text{э}_6+$$
$$+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\zeta_3\text{э}_6+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\zeta_4\text{э}_6+$$
$$+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\zeta_5\text{э}_6]=\frac{1}{120} \qquad (28_5)$$

$(Df\cdot{}_1f)$

$$r_4\phi_1b_1G_2d_3+r_5[\phi_1b_1G_2e_3+\phi_1b_1D_2e_4+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3e_4]+$$
$$+r_6[\phi_1b_1G_2c_3+\phi_1b_1D_2c_4+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3c_4+\phi_1b_1E_2c_5+$$
$$+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3c_5+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4c_5]+$$
$$+r_7[\phi_1b_1G_2\text{э}_3+\phi_1b_1D_2\text{э}_4+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\text{э}_4+\phi_1b_1E_2\text{э}_5+$$
$$+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3\text{э}_5+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4\text{э}_5+$$
$$+\phi_1b_1Z_2\text{э}_6+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)Z_3\text{э}_6+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)Z_4\text{э}_6+$$
$$+(\phi_1e_1+\ldots+\phi_4e_4)Z_5\text{э}_6]=\frac{1}{120} \qquad (28_6)$$

$[{}_1f\cdot f_1Df]$

$$p_4(\phi_1\beta_1g_2D_3+\phi_1b_1G_2\delta_3)+p_5[\phi_1\beta_1g_2E_3+\phi_1\beta_1d_2E_4+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3E_4+\phi_1b_1G_2\varepsilon_3+\phi_1b_1D_2\varepsilon_4+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\varepsilon_4]+$$
$$+p_6[\phi_1\beta_1g_2Z_3+\phi_1\beta_1d_2Z_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3Z_4+\phi_1\beta_1e_2Z_5+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)e_3Z_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)e_4Z_5+\phi_1b_1G_2\zeta_3+$$
$$+\phi_1b_1D_2\zeta_4+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\zeta_4+\phi_1b_1E_2\zeta_5+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3\zeta_5+$$
$$+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4\zeta_5]+p_7[\phi_1\beta_1g_2\exists_3+\phi_1\beta_1d_2\exists_4+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3\exists_4+\phi_1\beta_1e_2\exists_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)e_3\exists_5+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)e_4\exists_5+\phi_1\beta_1c_2\exists_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)c_3\exists_6+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)c_4\exists_6+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)c_5\exists_6+$$
$$+\phi_1b_1G_2\eta_3+\phi_1b_1D_2\eta_4+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\eta_4+\phi_1b_1E_2\eta_5+$$
$$+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3\eta_5+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4\eta_5+$$
$$+\phi_1b_1Z_2\eta_6+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)Z_3\eta_6+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)Z_4\eta_6+$$
$$+(\phi_1e_1+\ldots+\phi_4e_4)Z_5\eta_6]=\frac{1}{60} \qquad (28_2')$$

$$
\begin{aligned}
[f_1^2Df_1Df]\quad & p_4\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3(\phi_2+\phi_3+\phi_4)+p_5[\phi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3(\phi_2+\phi_3+\phi_5)+\\
&+\phi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4(\phi_2+\phi_4+\phi_5)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\varepsilon_4(\phi_3+\phi_4+\phi_5)]+\\
&+p_6[\phi_1\beta_1\gamma_2\zeta_3(\phi_2+\phi_3\phi_6)+\phi_1\beta_1\delta_2\zeta_4(\phi_2+\phi_4+\phi_6)+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\zeta_4(\phi_3+\phi_4+\phi_6)+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\zeta_5(\phi_2+\phi_5+\phi_6)+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\zeta_5(\phi_3+\phi_5+\phi_6)+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\zeta_5(\phi_4+\phi_5+\phi_6)]+\\
&+p_7[\phi_1\beta_1\gamma_2\eta_3(\phi_2+\phi_3+\phi_7)+\phi_1\beta_1\delta_2\eta_4(\phi_2+\phi_4+\phi_7)+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\zeta_4(\phi_3+\phi_4+\phi_7)+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\eta_5(\phi_2+\phi_5+\phi_7)+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\eta_5(\phi_3+\phi_5+\phi_7)+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\eta_5(\phi_4+\phi_5+\phi_7)+\phi_1\beta_1\zeta_2\eta_6(\phi_2+\phi_6+\phi_7)+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\zeta_3\eta_6(\phi_3+\phi_6+\phi_7)+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\zeta_4\eta_6(\phi_4+\phi_6+\phi_7)+\\
&+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\zeta_5\eta_6(\phi_5+\phi_6+\phi_7)]=\frac{1}{60}
\end{aligned}
\tag{29_1}
$$

$$
\begin{aligned}
[f_1^2.fD_1f]\quad & p_4\phi_1B_1\phi_2\gamma_2\delta_3+p_5[\phi_1B_1\phi_2\gamma_2\varepsilon_3+\phi_1B_1\phi_2\delta_2\varepsilon_4+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\delta_3\varepsilon_4]+p_6[\phi_1B_1\phi_2\gamma_2\zeta_3+\phi_1B_1\phi_2\delta_2\zeta_4+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\delta_3\zeta_4+\phi_1B_1\phi_2\varepsilon_2\zeta_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\varepsilon_3\zeta_5+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4\varepsilon_4\zeta_5]+p_7[\phi_1B_1\phi_2\gamma_2\eta_3+\phi_1B_1\phi_2\delta_2\eta_4+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\delta_3\eta_4+\phi_1B_1\phi_2\varepsilon_2\eta_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\varepsilon_3\eta_5+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4\varepsilon_4\eta_5+\phi_1B_1\phi_2\zeta_2\eta_6+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\zeta_3\eta_6+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4\zeta_4\eta_6+\\
&+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\phi_5\zeta_5\eta_6]=\frac{1}{240}
\end{aligned}
\tag{$29_2'$}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_1.f.D_1f)\quad & r_4\phi_1B_1\phi_2\gamma_2d_3+r_5[\phi_1B_1\phi_2\gamma_2e_3+\phi_1B_1\phi_2\delta_2e_4+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\delta_3e_4]+r_6[\phi_1B_1\phi_2\gamma_2c_3+\phi_1B_1\phi_2\delta_2c_4+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\delta_3c_4+\phi_1B_1\phi_2\varepsilon_2c_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\varepsilon_3c_5+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4\varepsilon_4c_5]+r_7[\phi_1B_1\phi_2\gamma_2\text{э}_3+\phi_1B_1\phi_2\delta_2\text{э}_4+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\delta_3\text{э}_4+\phi_1B_1\phi_2\varepsilon_2\text{э}_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\varepsilon_3\text{э}_5+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4\varepsilon_4\text{э}_5+\phi_1B_1\phi_2\zeta_2\text{э}_6+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\phi_3\zeta_3\text{э}_6+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\phi_4\zeta_4\text{э}_6+\\
&+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\phi_5\zeta_5\text{э}_6]=\frac{1}{240}
\end{aligned}
\tag{$29_3'$}
$$

$$
\begin{aligned}
[f_1Df_1.f._1f]\quad & p_4\phi_1B_1\gamma_2\delta_3(\phi_3+\phi_4)+p_5[\phi_1B_1\gamma_2\varepsilon_3(\phi_3+\phi_5)\phi_1B_1\delta_2\varepsilon_4(\phi_4+\phi_5)+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\varepsilon_4(\phi_4+\phi_5)]+p_6[\phi_1B_1\gamma_2\zeta_3(\phi_3+\phi_6)+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\phi_1B_1\delta_2\zeta_4(\phi_4+\phi_6)+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\zeta_4(\phi_4+\phi_6)+\\
&+\phi_1B_1\varepsilon_2\zeta_5(\phi_5+\phi_6)+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3\zeta_5(\phi_5+\phi_6)+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4\zeta_5(\phi_5+\phi_6)]+p_7[\phi_1B_1\gamma_2\eta_3(\phi_3+\phi_7)+\\
&+\phi_1B_1\delta_2\eta_4(\phi_4+\phi_7)+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\eta_4(\phi_4+\phi_7)+\\
&+\phi_1B_1\varepsilon_2\eta_5(\phi_5+\phi_7)+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3\eta_5(\phi_5+\phi_7)+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4\eta_5(\phi_5+\phi_7)+\phi_1B_1\zeta_2\eta_6(\phi_6+\phi_7)+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\zeta_3\eta_6(\phi_6+\phi_7)+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\\
&+\phi_3D_3)\zeta_4\eta_6(\phi_6+\phi_7)+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\zeta_5\eta_6(\phi_6+\phi_7)]=\frac{1}{80} \qquad (29'_4)
\end{aligned}
$$

$[f_1DfD_1f]$

$$
\begin{aligned}
&p_4(\phi_1b_1G_2\phi_3\delta_3+\phi_1\beta_1g_2\phi_4D_3)+p_5[\phi_1b_1G_2\phi_3\varepsilon_3+\phi_1b_1D_2\phi_4\varepsilon_4+\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\phi_4\varepsilon_4+\phi_1\beta_1g_2\phi_5E_3+\phi_1\beta_1d_2\phi_5E_4+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3\phi_5E_4]+p_6[\phi_1b_1G_2\phi_3\zeta_3+\phi_1b_1D_2\phi_4\zeta_4+\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\phi_4\zeta_4+\phi_1b_1E_2\phi_5\zeta_5+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3\phi_5\zeta_5+\\
&+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4\phi_5\zeta_5+\phi_1\beta_1g_2\phi_6Z_3+\phi_1\beta_1d_2\phi_6Z_4+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3\phi_6Z_4+\phi_1\beta_1e_2\phi_6Z_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)e_3\phi_6Z_5+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)e_4\phi_6Z_5]+p_7[\phi_1b_1G_2\phi_3\eta_3+\phi_1b_1D_2\phi_4\eta_4+\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\phi_4\eta_4+\phi_1b_1E_2\phi_5\eta_5+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3\phi_5\eta_5+\\
&+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4\phi_5\eta_5+\phi_1b_1Z_2\phi_6\eta_6+\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)Z_3\phi_6\eta_6+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)Z_4\phi_6\eta_6+\\
&+(\phi_1e_1+\ldots+\phi_4e_4)Z_5\phi_6\eta_6+\phi_1\beta_1g_2\phi_7\exists_3+\phi_1\beta_1d_2\phi_7\exists_4+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)d_3\phi_7\exists_4+\phi_1\beta_1e_2\phi_7\exists_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)e_3\phi_7\exists_5+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)e_4\phi_7\exists_5+\phi_1\beta_1c_2\phi_7\exists_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)c_3\phi_7\exists_6+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)c_4\phi_7\exists_6+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)c_5\phi_7\exists_6]=\frac{1}{80} \qquad (29'_5)
\end{aligned}
$$

$(Df_1\cdot f\cdot{}_1f)$

$$
\begin{aligned}
&r_4\phi_1B_1\gamma_2\phi_3d_3+r_5[\phi_1B_1\gamma_2\phi_3e_3+\phi_1B_1\delta_2\phi_4e_4+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\phi_4e_4]+r_6[\phi_1B_1\gamma_2\phi_3c_3+\\
&+\phi_1B_1\delta_2\phi_4c_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\phi_4c_4+\phi_1B_1\varepsilon_2\phi_5c_5+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3\phi_5c_5+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4\phi_5c_5]+\\
&+r_7[\phi_1B_1\gamma_2\phi_3\text{э}_3+\phi_1B_1\delta_2\phi_4\text{э}_4+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\phi_4\text{э}_4+\\
&+\phi_1B_1\varepsilon_2\phi_5\text{э}_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3\phi_5\text{э}_5+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4\phi_5\text{э}_5+\phi_1B_1\zeta_2\phi_6\text{э}_6+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\zeta_3\phi_6\text{э}_6+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\zeta_4\phi_6\text{э}_6+\\
&+(\phi_1E_1+\ldots+\phi_4E_4)\zeta_5\phi_6\text{э}_6]=\frac{1}{180} \qquad (29'_6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(DfD_1f)\qquad & r_4\phi_1b_1G_2\phi_3d_3+r_5[\phi_1b_1G_2\phi_3e_3+\phi_1b_1D_2\phi_4e_4+\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\phi_4e_4]+r_6[\phi_1b_1G_2\phi_3c_3+\phi_1b_1D_2\phi_4c_4+\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\phi_4c_4+\phi_1b_1E_2\phi_5c_5+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3\phi_5c_5+\\
&+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4\phi_5c_5]+r_7[\phi_1b_1G_2\phi_3\text{э}_3+\phi_1b_1D_2\phi_4\text{э}_4+\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\phi_4\text{э}_4+\phi_1b_1E_2\phi_5\text{э}_5+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3\phi_5\text{э}_5+\\
&+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4\phi_5\text{э}_5+\phi_1b_1Z_2\phi_6\text{э}_6+\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)Z_3\phi_6\text{э}_6+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)Z_4\phi_6\text{э}_6+\\
&+(\phi_1e_1+\ldots+\phi_4e_4)Z_5\phi_6\text{э}_6]=\frac{1}{180} \qquad (29_7')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[{}_1fDf_1Df]\qquad & p_4(\phi_1\beta_1\phi_2g_2D_3+\phi_1b_1G_2\phi_4\delta_3)+p_5[\phi_1\beta_1\phi_2g_2E_3+\phi_1\beta_1\phi_2d_2E_4+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3d_3E_4+\phi_1b_1G_2\phi_5\varepsilon_3+\phi_1b_1D_2\phi_5\varepsilon_4\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\phi_5\varepsilon_4]+p_6[\phi_1\beta_1\phi_2g_2Z_3+\phi_1\beta_1\phi_2d_2Z_4+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3d_3Z_4+\phi_1\beta_1\phi_2e_2Z_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3e_3Z_5+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4e_4Z_5+\phi_1b_1G_2\phi_6\zeta_3+\phi_1b_1D_2\phi_6\zeta_4+\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\phi_6\zeta_4+\phi_1b_1E_2\phi_6\zeta_5+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3\phi_6\zeta_5+\\
&+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4\phi_6\zeta_5]+p_7[\phi_1\beta_1\phi_2g_2\exists_3+\\
&+\phi_1\beta_1\phi_2d_2\exists_4+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3d_3\exists_4+\phi_1\beta_1\phi_2e_2\exists_5+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3e_3\exists_5+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4e_4\exists_5+\\
&+\phi_1\beta_1\phi_2c_2\exists_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\phi_3c_3\exists_6+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\phi_4c_4\exists_6+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\phi_5c_5\exists_6+\\
&+\phi_1b_1G_2\phi_7\eta_3+\phi_1b_1D_2\phi_7\eta_4+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3\phi_7\eta_4+\\
&+\phi_1b_1E_2\phi_7\eta_5+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3\phi_7\eta_5+\\
&+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4\phi_7\eta_5+\phi_1b_1Z_2\phi_7\eta_6+\\
&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)Z_3\phi_7\eta_6+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)Z_4\phi_7\eta_6+\\
&+(\phi_1e_1+\ldots+\phi_4e_4)Z_5\phi_7\eta_6]=\frac{1}{90} \qquad (29_8')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[{}_1f.fD_1f]\qquad & p_4\phi_1B_1g_2D_3(\phi_2+\phi_4)+p_5[\phi_1B_1g_2E_3(\phi_2+\phi_5)+\phi_1B_1d_2E_4(\phi_2+\phi_5)+\\
&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3E_4(\phi_3+\phi_5)]+p_6[\phi_1B_1g_2Z_3(\phi_2+\phi_6)+\\
&+\phi_1B_1d_2Z_4(\phi_2+\phi_6)+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3Z_4(\phi_3+\phi_6)+\\
&+\phi_1B_1e_2Z_5(\phi_2+\phi_6)+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)e_3Z_5(\phi_3+\phi_6)+\\
&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)e_4Z_5(\phi_4+\phi_6)]+p_7[\phi_1B_1g_2\exists_3(\phi_2+\phi_7)+\\
&+\phi_1B_1d_2\exists_4(\phi_2+\phi_7)+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3\exists_4(\phi_3+\phi_7)+\\
&+\phi_1B_1e_2\exists_5(\phi_2+\phi_7)+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)e_3\exists_5(\phi_3+\phi_7)+
\end{aligned}
$$

$$+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\, e_4 \exists_5(\phi_4+\phi_7)+\phi_1 B_1 c_2 \exists_6(\phi_2+\phi_7)+$$
$$+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\, c_3 \exists_6(\phi_3+\phi_7)+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\, c_4 \exists_6(\phi_4+\phi_7)$$
$$+(\phi_1 E_1+\ldots+\phi_4 E_4)\, c_5 \exists_6(\phi_5+\phi_7)]=\frac{1}{90} \qquad (29'_9)$$

$(f_1 Df_1 Df)$

$$r_4\phi_1\beta_1 d_3\gamma_2(\phi_2+\phi_3)+r_5[\phi_1\beta_1\gamma_2 e_3(\phi_2+\phi_3)+\phi_1\beta_1\delta_2 e_4(\phi_2+\phi_4)+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3 e_4(\phi_3+\phi_4)]+r_6[\phi_1\beta_1\gamma_2 c_3(\phi_2+\phi_3)+$$
$$+\phi_1\beta_1\delta_2 c_4(\phi_2+\phi_4)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3 c_4(\phi_3+\phi_4)+$$
$$+\phi_1\beta_1\varepsilon_2 c_5(\phi_2+\phi_5)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\varepsilon_3 c_5(\phi_3+\phi_5)+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\varepsilon_4 c_5(\phi_4+\phi_5)]+r_7[\phi_1\beta_1\gamma_2\text{э}_3(\phi_2+\phi_3)+$$
$$+\phi_1\beta_1\delta_2\text{э}_4(\phi_2+\phi_4)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3\text{э}_4(\phi_3+\phi_4)+$$
$$+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\text{э}_5(\phi_2+\phi_5)+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\varepsilon_3\text{э}_5(\phi_3+\phi_5)+$$
$$+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\varepsilon_4\text{э}_5(\phi_4+\phi_5)+\phi_1\beta_1\zeta_2\text{э}_6(\phi_2+\phi_6)+$$
$$+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\zeta_3\text{э}_6(\phi_3+\phi_6)+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\zeta_4\text{э}_6(\phi_4+\phi_6)+$$
$$+(\phi_1\varepsilon_1+\ldots+\phi_4\varepsilon_4)\,\zeta_5\text{э}_6(\phi_5+\phi_6)]=\frac{7}{720} \qquad (29'_{10})$$

$[f_1^3 D^{(2)} f]$

$$p_4\phi_1^2\beta_1\gamma_2\delta_3+p_5[\phi_1^2\beta_1\gamma_2\varepsilon_3+\phi_1^2\beta_1\delta_2\varepsilon_4+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\delta_3\varepsilon_4]+$$
$$+p_6[\phi_1^2\beta_1\gamma_2\zeta_3+\phi_1^2\beta_1\delta_2\zeta_4+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\delta_3\zeta_4+\phi_1^2\beta_1\varepsilon_2\zeta_5+$$
$$+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\varepsilon_3\zeta_5+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\varepsilon_4\zeta_5]+$$
$$+p_7[\phi_1^2\beta_1\gamma_2\eta_3+\phi_1^2\beta_1\delta_2\eta_4+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\delta_3\eta_4+\phi_1^2\beta_1\varepsilon_2\eta_5+$$
$$+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\varepsilon_3\eta_5+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\varepsilon_4\eta_5+\phi_1^2\beta_1\zeta_2\eta_6+$$
$$+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\zeta_3\eta_6+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\zeta_4\eta_6+$$
$$+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\,\zeta_5\eta_6]=\frac{1}{360} \qquad (30_1)$$

$(f_1^2 D^{(2)} f)$

$$r_4\phi_1^2\beta_1\gamma_2 d_3+r_5[\phi_1^2\beta_1\gamma_2 e_3+\phi_1^2\beta_1\delta_2 e_4+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\delta_3 e_4]+$$
$$+r_6[\phi_1^2\beta_1\gamma_2 c_3+\phi_1^2\beta_1\delta_2 c_4+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\delta_3 c_4+\phi_1^2\beta_1\varepsilon_2 c_5+$$
$$+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\varepsilon_3 c_5+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\varepsilon_4 c_5]+r_7[\phi_1^2\beta_1\gamma_2\text{э}_3+$$
$$+\phi_1^2\beta_1\delta_2\text{э}_4+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\delta_3\text{э}_4+\phi_1^2\beta_1\varepsilon_2\text{э}_5+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\varepsilon_3\text{э}_5+$$
$$+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\varepsilon_4\text{э}_5+\phi_1^2\beta_1\zeta_2\text{э}_6+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)\,\zeta_3\text{э}_6+$$
$$+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)\,\zeta_4\text{э}_6+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)\,\zeta_5\text{э}_6]=\frac{1}{360} \qquad (30_2)$$

$(D^{(2)} f\,._1 f)$

$$r_4\phi_1^2 b_1 G_2 d_3+r_5[\phi_1^2 b_1 G_2 e_3+\phi_1^2 b_1 D_2 e_4+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2) D_3 e_4]+$$
$$+r_6[\phi_1^2 b_1 G_2 c_3+\phi_1^2 b_1 D_2 c_4+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2) D_3 c_4+\phi_1^2 b_1 E_2 c_5+$$

$$
\begin{aligned}
&+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)E_3 c_5+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3)E_4 c_5]+\\
&+r_7[\phi_1^2 b_1 G_2 \text{э}_3+\phi_1^2 b_1 D_2 \text{э}_4+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)D_3 \text{э}_4+\phi_1^2 b_1 E_2 \text{э}_5+\\
&+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)E_3 \text{э}_5+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3)E_4 \text{э}_5+\phi_1^2 b_1 Z_2 \text{э}_6+\\
&+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)Z_3 \text{э}_6+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3)Z_4 \text{э}_6+\\
&+(\phi_1^2 e_1+\ldots+\phi_4^2 e_4)Z_5 \text{э}_6]=\frac{1}{360}
\end{aligned}
\tag{30_3}
$$

$[{}_1ff_1D^{(2)}f]$

$$
\begin{aligned}
&p_4(\phi_1^2\beta_1 g_2 D_3+\phi_1^2 b_1 G_2\delta_3)+p_5[\phi_1^2\beta_1 g_2 E_3+\phi_1^2\beta_1 d_2 E_4+\\
&+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)d_3E_4+\phi_1^2 b_1 G_2\varepsilon_3+\phi_1^2 b_1 D_2\varepsilon_4+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)D_3\varepsilon_4]+\\
&+p_6[\phi_1^2\beta_1 g_2 Z_3+\phi_1^2\beta_1 d_2 Z_4+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)d_3 Z_4+\phi_1^2\beta_1 e_2 Z_5+\\
&+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)e_3 Z_5+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)e_4 Z_5+\phi_1^2 b_1 G_2\zeta_3+\\
&+\phi_1^2 b_1 D_2\zeta_4+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)D_3\zeta_4+\phi_1^2 b_1 E_2\zeta_5+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)E_3\zeta_5+\\
&+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3)E_4\zeta_5]+p_7[\phi_1^2\beta_1 g_2\exists_3+\\
&+\phi_1^2\beta_1 d_2\exists_4+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)d_3\exists_4+\phi_1^2\beta_1 e_2\exists_5+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)e_3\exists_5+\\
&+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)e_4\exists_5+\phi_1^2\beta_1 c_2\exists_6+(\phi_1^2\gamma_1+\phi_2^2\gamma_2)c_3\exists_6+\\
&+(\phi_1^2\delta_1+\phi_2^2\delta_2+\phi_3^2\delta_3)c_4\exists_6+(\phi_1^2\varepsilon_1+\ldots+\phi_4^2\varepsilon_4)c_5\exists_6+\\
&+\phi_1^2 b_1 G_2\eta_3+\phi_1^2 b_1 D_2\eta_4+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)D_3\eta_4+\phi_1^2 b_1 E_2\eta_5+\\
&+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)E_3\eta_5+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3)E_4\eta_5+\\
&+\phi_1^2 b_1 Z_2\eta_6+(\phi_1^2 g_1+\phi_2^2 g_2)Z_3\eta_6+(\phi_1^2 d_1+\phi_2^2 d_2+\phi_3^2 d_3)Z_4\eta_6+\\
&+(\phi_1^2 e_1+\ldots+\phi_4^2 e_4)Z_5\eta_6]=\frac{1}{180}
\end{aligned}
\tag{$30_2'$}
$$

$[f_1^4Df]$

$$
\begin{aligned}
&p_5\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\varepsilon_4+p_6[\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\zeta_4+\phi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3\zeta_5+\phi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4\zeta_5+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\varepsilon_4\zeta_5]+p_7[\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\eta_4+\phi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3\eta_5+\\
&+\phi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4\eta_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\varepsilon_4\eta_5+\phi_1\beta_1\gamma_2\zeta_3\eta_6+\\
&+\phi_1\beta_1\delta_2\zeta_4\eta_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\zeta_4\eta_6+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\zeta_5\eta_6+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\zeta_5\eta_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\zeta_5\eta_6]=\frac{1}{720}
\end{aligned}
\tag{31_1}
$$

$[f_1^3\cdot f\cdot{}_1f]$

$$
\begin{aligned}
&p_5\phi_1 B_1\gamma_2\delta_3\varepsilon_4+p_6[\phi_1 B_1\gamma_2\delta_3\zeta_4+\phi_1 B_1\gamma_2\varepsilon_3\zeta_5+\phi_1 B_1\delta_2\varepsilon_4\zeta_5+\\
&+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\delta_3\varepsilon_4\zeta_5]+p_7[\phi_1 B_1\gamma_2\delta_3\eta_4+\phi_1 B_1\gamma_2\varepsilon_3\eta_5+\\
&+\phi_1 B_1\delta_2\varepsilon_4\eta_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\delta_3\varepsilon_4\eta_5+\phi_1 B_1\gamma_2\zeta_3\eta_6+\\
&+\phi_1 B_1\delta_2\zeta_4\eta_6+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\delta_3\zeta_4\eta_6+\phi_1 B_1\varepsilon_2\zeta_5\eta_6+\\
&+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\varepsilon_3\zeta_5\eta_6+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\varepsilon_4\zeta_5\eta_6]=\frac{1}{720}
\end{aligned}
\tag{31_2}
$$

$[Df\cdot{}_1f^2]$

$$\begin{aligned}&p_5\phi_1b_1G_2d_3E_4+p_6[\phi_1b_1G_2d_3Z_4+\phi_1b_1G_2e_3Z_5+\phi_1b_1D_2e_4Z_5+\\&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3e_4Z_5]+p_7[\phi_1b_1G_2d_3\exists_4+\phi_1b_1G_2e_3\exists_5+\\&+\phi_1b_1D_2e_4\exists_5+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3e_4\exists_5+\phi_1b_1G_2c_3\exists_6+\\&+\phi_1b_1D_2c_4\exists_6+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)D_3c_4\exists_6+\phi_1b_1E_2c_5\exists_6+\\&+(\phi_1g_1+\phi_2g_2)E_3c_5\exists_6+(\phi_1d_1+\phi_2d_2+\phi_3d_3)E_4c_5\exists_6]=\frac{1}{720}\end{aligned}\qquad(31_3)$$

(f_1^3Df)

$$\begin{aligned}&r_5\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3e_4+r_6[\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3c_4+\phi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3c_5+\phi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4c_5+\\&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\varepsilon_4c_5]+r_7[\phi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\backepsilon_4+\phi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3\backepsilon_5+\\&+\phi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4\backepsilon_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\varepsilon_4\backepsilon_5+\phi_1\beta_1\gamma_2\zeta_3\backepsilon_6+\\&+\phi_1\beta_1\delta_2\zeta_4\backepsilon_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\delta_3\zeta_4\backepsilon_6+\phi_1\beta_1\varepsilon_2\zeta_5\backepsilon_6+\\&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\varepsilon_3\zeta_5\backepsilon_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\varepsilon_4\zeta_5\backepsilon_6]=\frac{1}{720}\end{aligned}\qquad(31_4)$$

$(f_1^2\cdot f\cdot{}_1f)$

$$\begin{aligned}&r_5\phi_1B_1\gamma_2\delta_3e_4+r_6[\phi_1B_1\gamma_2\delta_3c_4+\phi_1B_1\gamma_2\varepsilon_3c_5+\phi_1B_1\delta_2\varepsilon_4c_5+\\&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\varepsilon_4c_5]+r_7[\phi_1B_1\gamma_2\delta_3\backepsilon_4+\phi_1B_1\gamma_2\varepsilon_3\backepsilon_5+\\&+\phi_1B_1\delta_2\varepsilon_4\backepsilon_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\varepsilon_4\backepsilon_5+\phi_1B_1\gamma_2\zeta_3\backepsilon_6+\\&+\phi_1B_1\delta_2\zeta_4\backepsilon_6+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3\zeta_4\backepsilon_6+\phi_1B_1\varepsilon_2\zeta_5\backepsilon_6+\\&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3\zeta_5\backepsilon_6+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)\varepsilon_4\zeta_5\backepsilon_6]=\frac{1}{720}\end{aligned}\qquad(31_5)$$

$(f\cdot{}_1f^2)$

$$\begin{aligned}&r_5\phi_1B_1g_2D_3e_4+r_6[\phi_1B_1g_2D_3c_4+\phi_1B_1g_2E_3c_5+\phi_1B_1d_2E_4c_5+\\&+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3E_4c_5]+r_7[\phi_1B_1g_2D_3\backepsilon_4+\phi_1B_1g_2E_3\backepsilon_5+\\&+\phi_1B_1d_2E_4\backepsilon_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3E_4\backepsilon_5+\phi_1B_1g_2Z_3\backepsilon_6+\\&+\phi_1B_1d_2Z_4\backepsilon_6+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3Z_4\backepsilon_6+\\&+\phi_1B_1e_2Z_5\backepsilon_6+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)e_3Z_5\backepsilon_6+\\&+(\phi_1D_1+\phi_2D_2+\phi_3D_3)e_4Z_5\backepsilon_6]=\frac{1}{720}\end{aligned}\qquad(31_6)$$

$[f_1\cdot f\cdot{}_1f^2]$

$$\begin{aligned}&p_5(\phi_1B_1\gamma_2d_3E_4+\phi_1B_1g_2D_3\varepsilon_4)+p_6[\phi_1B_1\gamma_2d_3Z_4+\phi_1B_1\gamma_2e_3Z_5+\\&+\phi_1B_1\delta_2e_4Z_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3e_4Z_5+\phi_1B_1g_2D_3\zeta_4+\phi_1B_1g_2E_3\zeta_5+\\&+\phi_1B_1d_2E_4\zeta_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)d_3E_4\zeta_5]+p_7[\phi_1B_1\gamma_2d_3\exists_4+\\&+\phi_1B_1\gamma_2e_3\exists_5+\phi_1B_1\delta_2e_4\exists_5+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3e_4\exists_5+\\&+\phi_1\beta_1\gamma_2c_3\exists_6+\phi_1B_1\delta_2c_4\exists_6+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\delta_3c_4\exists_6+\\&+\phi_1B_1\varepsilon_2c_5\exists_6+(\phi_1G_1+\phi_2G_2)\varepsilon_3c_5\exists_6+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,\varepsilon_4 c_5 \exists_6+\phi_1 B_1 g_2 D_3 \eta_4+\phi_1 B_1 g_2 E_3 \eta_5+\\
&+\phi_1 B_1 d_2 E_4 \eta_5+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,d_3 E_4 \eta_5+\phi_1 B_1 g_2 Z_3 \eta_6+\\
&+\phi_1 B_1 d_2 Z_4 \eta_6+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,d_3 Z_4 \eta_6+\phi_1 B_1 e_2 Z_5 \eta_6+\\
&+(\phi_1 G_1+\phi_2 G_2)\,e_3 Z_5 \eta_6+(\phi_1 D_1+\phi_2 D_2+\phi_3 D_3)\,e_4 Z_5 \eta_6]=\\
&=\frac{1}{360}
\end{aligned}
\tag{$31_2'$}
$$

$({}_1ff_1Df)$

$$
\begin{aligned}
&r_5(\phi_1\beta_1 g_2 D_3 e_4+\phi_1 b_1 G_2 \delta_3 e_4)+r_6[\phi_1\beta_1 g_2 D_3 c_4+\phi_1\beta_1 g_2 E_3 c_5+\\
&+\phi_1\beta_1 d_2 E_4 c_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,d_3 E_4 c_5+\phi_1 b_1 G_2 \delta_3 c_4+\\
&+\phi_1 b_1 G_2 \varepsilon_3 c_5+\phi_1 b_1 D_2 \varepsilon_4 c_5+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) D_3 \varepsilon_4 c_5]+\\
&+r_7[\phi_1\beta_1 g_2 D_3 \text{Э}_4+\phi_1\beta_1 g_2 E_3 \text{Э}_5+\phi_1\beta_1 d_2 E_4 \text{Э}_5+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,d_3 E_4 \text{Э}_5+\phi_1\beta_1 g_2 Z_3 \text{Э}_6+\phi_1\beta_1 d_2 Z_4 \text{Э}_6+(\phi_1\gamma_1+\\
&+\phi_2\gamma_2)\,d_3 Z_4 \text{Э}_6+\phi_1\beta_1 e_2 Z_5 \text{Э}_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,e_3 Z_5 \text{Э}_6+\\
&+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,e_4 Z_5 \text{Э}_6+\phi_1 b_1 G_2 \delta_3 \text{Э}_4+\phi_1 b_1 G_2 \varepsilon_3 \text{Э}_5+\\
&+\phi_1 b_1 D_2 \varepsilon_4 \text{Э}_5+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) D_3 \varepsilon_4 \text{Э}_5+\phi_1 b_1 G_2 \zeta_3 \text{Э}_6+\phi_1 b_1 D_2 \zeta_4 \text{Э}_6+\\
&+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) D_3 \zeta_4 \text{Э}_6+\phi_1 b_1 E_2 \zeta_5 \text{Э}_6+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\,E_3 \zeta_5 \text{Э}_6+\\
&+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)\,E_4 \zeta_5 \text{Э}_6]=\frac{1}{360}
\end{aligned}
\tag{$31_3'$}
$$

$[f_1^2 Df\cdot{}_1f]$

$$
\begin{aligned}
&p_5(\phi_1\beta_1\gamma_2 d_3 E_4+\phi_1\beta_1 g_2 D_3 \varepsilon_4+\phi_1 b_1 G_2 \delta_3 \varepsilon_4)+p_6[\phi_1\beta_1\gamma_2 d_3 Z_4+\\
&+\phi_1\beta_1\gamma_2 e_3 Z_5+\phi_1\beta_1\delta_2 e_4 Z_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3 e_4 Z_5+\phi_1\beta_1 g_2 D_3 \zeta_4+\\
&+\phi_1\beta_1 g_2 E_3 \zeta_5+\phi_1\beta_1 d_2 E_4 \zeta_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,d_3 E_4 \zeta_5+\\
&+\phi_1 b_1 G_2 \delta_3 \zeta_4+\phi_1 b_1 G_2 \varepsilon_3 \zeta_5+\phi_1 b_1 D_2 \varepsilon_4 \zeta_5+\\
&+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) D_3 \varepsilon_4 \zeta_5]+p_7[\phi_1\beta_1\gamma_2 d_3 \exists_4+\phi_1\beta_1\gamma_2 e_3 \exists_5+\\
&+\phi_1\beta_1\delta_2 e_4 \exists_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3 e_4 \exists_5+\phi_1\beta_1\gamma_2 c_3 \exists_6+\\
&+\phi_1\beta_1\delta_2 c_4 \exists_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\delta_3 c_4 \exists_6+\phi_1\beta_1\varepsilon_2 c_5 \exists_6+\\
&+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,\varepsilon_3 c_5 \exists_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,\varepsilon_4 c_5 \exists_6+\\
&+\phi_1\beta_1 g_2 D_3 \eta_4+\phi_1\beta_1 g_2 E_3 \eta_5+\phi_1\beta_1 d_2 E_4 \eta_5+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,d_3 E_4 \eta_5+\\
&+\phi_1\beta_1 g_2 Z_3 \eta_6+\phi_1\beta_1 d_2 Z_4 \eta_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,d_3 Z_4 \eta_6+\\
&+\phi_1\beta_1 e_2 Z_5 \eta_6+(\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2)\,e_3 Z_5 \eta_6+(\phi_1\delta_1+\phi_2\delta_2+\phi_3\delta_3)\,e_4 Z_5 \eta_6+\\
&+\phi_1 b_1 G_2 \delta_3 \eta_4+\phi_1 b_1 G_2 \varepsilon_3 \eta_5+\phi_1 b_1 D_2 \varepsilon_4 \eta_5+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) D_3 \varepsilon_4 \eta_5+\\
&+\phi_1 b_1 G_2 \zeta_3 \eta_6+\phi_1 b_1 D_2 \zeta_4 \eta_6+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2) D_3 \zeta_4 \eta_6+\\
&+\phi_1 b_1 E_2 \zeta_5 \eta_6+(\phi_1 g_1+\phi_2 g_2)\,E_3 \zeta_5 \eta_6+\\
&+(\phi_1 d_1+\phi_2 d_2+\phi_3 d_3)\,E_4 \zeta_5 \eta_6]=\frac{1}{240}
\end{aligned}
\tag{$31_4'$}
$$

Si l'on pose

$$
\begin{array}{lll}
b_j = B_j = \beta_j & \text{pour} & j = 1 \\
g_j = G_j = \gamma_j & \text{pour} & j = 1, 2 \\
d_j = D_j = \delta_j & \text{pour} & j = 1, 2, 3 \\
e_j = E_j = \varepsilon_j & \text{pour} & j = 1, 2, 3, 4 \\
c_j = Z_j = \zeta_j & \text{pour} & j = 1, 2, \ldots, 5 \\
з_j = З_j = \eta_j & \text{pour} & j = 1, 2, \ldots, 6 \\
p_j = r_j & \text{pour} & j = 1, 2, \ldots, 7
\end{array}
\qquad \text{(XXV)}
$$

en employant des rélations (XXI) sont accomplies simultanément pour les équations cettes rélations.

$$
\begin{array}{lll}
(23'_i) + (23'_j) = (23_1) & & i = 2, 3, 4; j = 5, 6 \\
(24'_2) + (24'_3) = (24_1) & & \\
(25'_i) + (25'_j) = (25_1) & & i = 2, 3, 4; j = 5, 6 \\
(27'_i) + 2(27'_j) = (27_1) & \rbrace & i = 2, 3, 4, 5 \\
(27'_i) + (27'_j) = (27'_{10}) & \rbrace & j = 6, 7, 8, 9 \\
(28_i) + (28_j) = (28'_2) & & i, j = 1, 2, \ldots, 6 \\
2(29'_i) + (29'_j) = (29'_l) + (29'_{10}) & \rbrace & i = 2, 3; j = 4, 5 \\
(29'_k) + (29'_l) = (29_1) & \rbrace & k = 6, 7; l = 8, 9 \\
2(30_i) = (30'_2) & & i = 1, 2, 3 \\
2(31_i) = (31'_j) & \rbrace & i = 1, 2, \ldots, 6 \\
3(31_i) = (31'_4) & \rbrace & j = 2, 3
\end{array}
\qquad \text{(XXVI)}
$$

Les équations avec les virgules ne sont que des équations dépendentes des équations restantes et elles ne nous déterminent aucunes nouvelles conditions; c'est pourquoi elles peuvent être éliminées. Il s'ensuit, que le système considéré des équations se réduit au système des équations qui désignées par les nombres avec l'indice „1".

Dans les articles [2] et [3] A. Huťa a trouvé une solution de cettes équations. En employant les résultats de [3] nous obtenons enfin les formules de sixième ordre dans la forme suivante.

$$t_0 = hu_0$$

$$t_1 = h\left[u_0 + \frac{1}{9} K_0\right]$$

$$t_2 = h\left[u_0 + \frac{1}{24}(K_0 + 3K_1)\right]$$

$$t_3 = h\left[u_0 + \frac{1}{6}(K_0 - 3K_1 + 4K_2)\right]$$

$$t_4 = h\left[u_0 + \frac{1}{8}(-5K_0 + 27K_1 - 24K_2 + 6K_3)\right]$$

$$t_5 = h\left[u_0 + \frac{1}{9}(221K_0 - 981K_1 + 867K_2 - 102K_3 + K_4)\right]$$

$$t_6 = h\left[u_0 + \frac{1}{48}(-183K_0 + 678K_1 - 472K_2 - 66K_3 + 80K_4 + 3K_5)\right]$$

$$t_7 = h\left[u_0 + \frac{1}{82}(716K_0 - 2079K_1 + 1002K_2 + 834K_3 - 454K_4 - 9K_5 + 72K_6)\right]$$

$$K_0 = hf[x_0, y_0, u_0]$$

$$K_1 = hf\left[x_0 + \frac{1}{9}h, y_0 + \frac{1}{9}t_0, u_0 + \frac{1}{9}K_0\right] \tag{XXVII}$$

$$K_2 = hf\left[x_0 + \frac{1}{6}h, y_0 + \frac{1}{24}(t_0 + 3t_1), u_0 + \frac{1}{24}(K_0 + 3K_1)\right]$$

$$K_3 = hf\left[x_0 + \frac{2}{6}h, y_0 + \frac{1}{6}(t_0 - 3t_1 + 4t_2), u_0 + \frac{1}{6}(K_0 - 3K_1 + 4K_2)\right]$$

$$K_4 = hf\left[x_0 + \frac{3}{6}h, y_0 + \frac{1}{8}(-5t_0 + 27t_1 - 24t_2 + 6t_3),\right.$$
$$\left. u_0 + \frac{1}{8}(-5K_0 + 27K_1 - 24K_2 + 6K_3)\right]$$

$$K_5 = hf\left[x_0 + \frac{4}{6}h, y_0 + \frac{1}{9}(221t_0 - 981t_1 + 867t_2 - 102t_3 + t_4),\right.$$
$$\left. u_0 + \frac{1}{9}(221K_0 - 981K_1 + 867K_2 - 102K_3 + K_4)\right]$$

$$K_6 = hf\left[x_0 + \frac{5}{6}h, y_0 + \frac{1}{48}(-183t_0 + 678t_1 - 472t_2 - 66t_3 + 80t_4 + 3t_5),\right.$$
$$\left. u_0 + \frac{1}{48}(-183K_0 + 678K_1 - 472K_2 - 66K_3 + 80K_4 + 3K_5)\right]$$

$$K_7 = hf\left[x_0 + h, y_0 + \frac{1}{82}(716t_0 - 2079t_1 + 1002t_2 + 834t_3 - 454t_4 - 9t_5 + 72t_6),\right.$$
$$\left. u_0 + \frac{1}{82}(716K_0 - 2079K_1 + 1002K_2 + 834K_3 - 454K_4 - 9K_5 + 72K_6)\right]$$

$$L = \frac{1}{840}\left[41t_0+216t_2+27t_3+272t_4+27t_5+216t_6+41t_7\right]$$

$$K = \frac{1}{840}\left[41K_0+216K_2+27K_3+272K_4+27K_5+216K_6+41K_7\right]$$

Bibliographie

[1] Runge–König: Numerisches Rechnen. Berlin 1924.

[2] A. Huťa: Une amélioration de la méthode de Runge–Kutta–Nyström pour la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre, Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Comenianae, Tomus I., Fasc. IV–VI, Mathematica, Bratislava 1956.

[3] A. Huťa: Contribution à la formule de sixième ordre dans la méthode de Runge–Kutta–Nyström, Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Comenianae, Tomus II., Fasc. I–II, Mathematica, Bratislava 1957.

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2.

Došlo 11. 4. 1960

Zostrenie Runge—Kutta—Nyströmovej metódy pre numerické riešenie diferenciálnej rovnice druhého rádu

V. Ficker

Zhrnutie

Nech funkcia $y = F(x)$ je riešením rovnice $y'' = f(x, y, y')$, ktoré splňuje počiatočné podmienky $y_0 = F(x_0)$, $y'_0 = F'(x_0)$. Ak použijeme vzorce (XXVII), potom veličiny L a K splňujú vzťahy

$$y_0 + L = F(x_0 + h)$$
$$y'_0 + K = F'(x_0 + h)$$

až po člen s h^6.

Улучшение метода Рунге—Кутта—Нистрёма для численного решения дифференциального уравнения второго порядка

В. Фиккер

Резюме

Пусть функция $y = F(x)$ есть решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$ удоволетворяющее начальным условиям $y_0 = F(x_0)$, $y'_0 = F'(x_0)$. Формулами (XXVII) выражены величины L и K удовлетворяют соотношениям

$$y_0 + L = F(x_0 + h)$$
$$y'_0 + K = F'(x_0 + h)$$

до членов шестого порядка относительно h.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. V, 8–10 MATEMATICA, 1961]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. V., FASC. VIII-X. MATHEMATICA 1961

Metrické úlohy v kótovane-Mongeovom zobrazení v E_4

L. Nagy

Úvod

V práci [18*] boli riešené úlohy polohy v kótovane-Mongeovom zobrazení. V úvode spomenutej práce sme upozornili, že niektoré z týchto úloh zasahujú do úloh metrických, ktorých riešenie podávame teraz.

I keď v tejto práci budeme riešiť úlohy metrické, stretneme sa neustále i s úlohami polohy a preto budú časté odkazy na prácu [18*].

V tejto práci vyriešime – podobne ako v práci [18*] – len základné metrické úlohy, prípadne tie, ktoré častejšie používame. Pôjde hlavne o tieto skupiny úloh: úlohy o kolmosti a vzdialenosti podpriestorov priestoru E_4 (sem sme zaradili i konštrukciu skutočnej veľkosti úsečky), skutočné veľkosti útvarov, ležiacich v podpriestoroch a úlohy o uhloch, ktoré svierajú podpriestory. V závere poukážeme na súvis tejto zobrazovacej metódy s inými známymi zobrazovacími metódami.

I. ÚLOHY O KOLMOSTI A VZDIALENOSTI PODPRIESTOROV

1. Skutočná veľkosť úsečky.

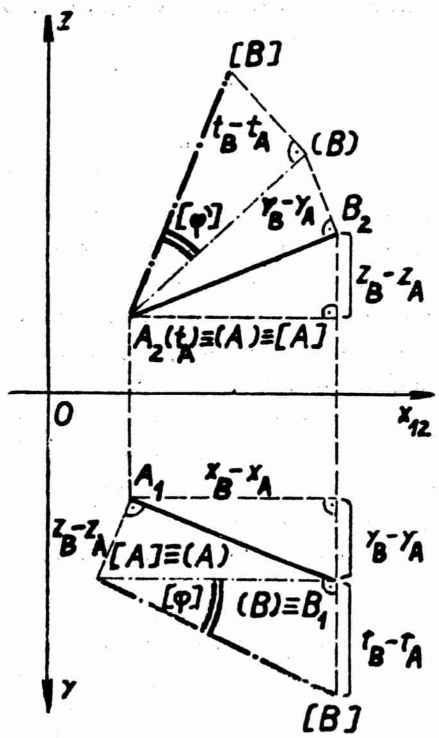
Túto úlohu sme riešili už v práci (18*); teraz si ukážeme, že uvažovaná konštrukcia sa dá zjednodušiť. Najprv zavedieme analogicky ako v Mongeovom premietaní v E_3 túto

Def. 1,1. *Pravouhlý trojuholník, ktorého jedna odvesna je ortogonálny priemet úsečky* $\left\{\begin{matrix} \bar{d} = \bar{A}\bar{B} \\ \bar{d} = \bar{A}\bar{B} \\ d = AB \end{matrix}\right\}$ do $\left\{\begin{matrix} \pi \\ \nu \\ \Pi \end{matrix}\right\}$ *pričom* $\bar{d}$ *je ortogonálny priemet* d *do* Π *a druhá odvesna je rozdiel* $\left\{\begin{matrix} \textit{súradníc } z \\ \textit{súradníc } y \\ \textit{kót } t \end{matrix}\right\}$ *bodov* A, B, *nazveme premietacím (rozdielovým) trojuhoníkom*

$\left\{\begin{array}{l} \textit{prvého} \\ \textit{druhého} \\ \textit{tretieho} \end{array}\right\}$ *druhu.*

Konštr. 1,1. *Určiť skutočnú dĺžku úsečky $d = AB$ a jej uhol ϕ s priemetným priestorom Π.*

Prevedenie. Nositeľku úsečky d označme ako priamku p. Potom môžu nastať tieto prípady:



Obr. 1.

a) p je v obecnej polohe vzhľadom na $\Pi, \pi, \nu, x, y, z, t$ (obr. 1). Keďže sa jedná iba o vzdialenosť a nie o polohu dvoch bodov $A, B \in E_4$, stačí použiť pre riešenie uvedenej konštrukcie $\left\{\begin{array}{l} \text{buď} \\ \text{alebo} \end{array}\right\}$ rozdielových trojuholníkov $\left\{\begin{array}{l} \text{druhého} \\ \text{prvého} \end{array}\right\}$ a tretieho druhu. Z konštrukcie zrejme platí

$$d = AB = A_2[B'] = (A)[B], \qquad \text{lebo je} \qquad (A)[B] = \sqrt{(A)B_1^2 + (t_A - t_B)^2} =$$

$$= \sqrt{A_1B_1^2 + (z_A - z_B)^2 + (t_A - t_B)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 + (t_A - t_B)^2} = \sqrt{A_2B_2'^2 + (t_A - t_B)^2} = A_2[B'].$$

Avšak výraz uprostred je známy vzorec z analytickej geometrie (pozri napr. [3] str. 13). Z predošlých úvah zrejme platí $\sphericalangle(d, \Pi) = [\phi] = [\phi'] = \phi$.

b) p nie je v obecnej polohe k uvedeným podpriestorom. Dá sa ukázať, že riešenie a) platí i pre tieto prípady, pričom v niektorých prípadoch rozdielové trojuholníky prejdú v úsečky.

Z konštr. 1.1 vyplýva:

Veta 1,1. *Prepona $A[B]$ premietacieho trojuholníka 3. druhu $A(B)[B]$ (ak tento existuje) sa rovná skutočnej dĺžke úsečky AB. Protiľahlý uhol ϕ k odvesne, ktorá sa rovná rozdielu kót bodov A, B je uhol úsečky AB s Π.*

2. Kolmica k priestoru.

Úlohy o kolmosti dvoch podpriestorov zaraďujeme medzi metrické, kým úlohy o rovnobežnosti medzi polohové úlohy. V oboch sa jedná síce o uhloch, ale v druhých môžeme tento pojem obísť zavedením definície rovnobežnosti v E_4 (pozri napr. [19] str. 33).

Za základnú konštrukciu pri riešení problémov kolmosti vezmeme kolmosť priamky k a nadroviny $\Sigma \subset E_4$. Uvažovanú kolmosť zavádzame definíciou

Def. 2,1. *Priamka k je kolmá na nadrovinu $\Sigma \subset E_4$, ak je kolmá na všetky priamky tejto nadroviny.*

Dá sa dokázať veta

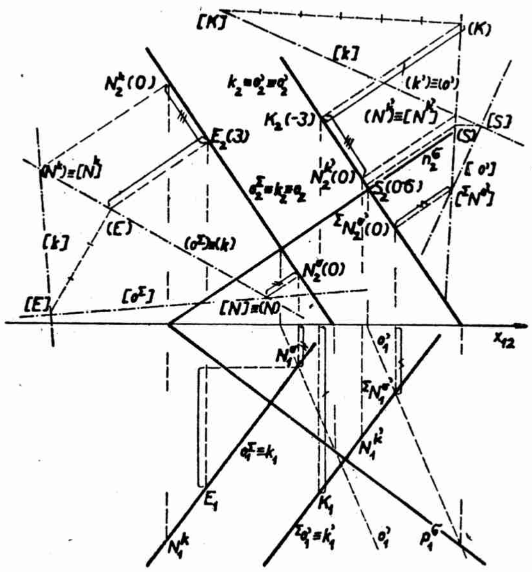
Veta 2,1. *Nutná a postačujúca podmienka, aby $k \perp \Sigma$ je, aby k bola kolmá na tri lineárne nezávislé priamky priestoru Σ.*

Dôkaz. Uvažujeme trojrozmerný priestor $\Sigma \nparallel \Pi$. Nech σ je stopná rovina tohto priestoru v priemetnom priestore Π. Predpokladajme, že Σ nemá špeciálnu polohu ku Π, t. j. stopy p^σ, n^σ stopnej roviny σ sú rôzne. V priestore Σ jestvuje jediný smer, kolmý na stopnú rovinu σ. Tento smer je udaný smerom spádovej priamky o^Σ priestoru Σ. Sú teda p^σ, n^σ, o^Σ tri lineárne nezávislé smery. Podľa predošlej vety, ak má byť $k \perp \Sigma$, musí byť $k \perp p^\sigma$, n^σ, o^Σ, z čoho vyplýva $k \perp \sigma$.

Ak na predošlé úvahy aplikujeme Mongeovu projekciu v E_3 a použijeme výsledok konštr. 4,2 kap. II. [18*], potom sme dokázali túto

Vetu 1,2. *Ak priamka k je kolmá na priestor $\Sigma \nparallel \Pi$, potom pre jej združené obrazy k_i platí: $k_2 \perp n_2^\sigma$, $k_1 \perp p_1^\sigma$, $k_i \equiv o_i^\Sigma$, kde σ je stopná rovina a o^Σ zas spádová priamka priestoru Σ, idúca bodom $E \equiv k \cap \Sigma$, $(i = 1, 2)$ a $[k] \perp [o^\Sigma]$.*

Iný dôkaz: Označme úbežný priestor E_4 ako Ω_∞. Potom podľa Vriesa ([21*], str. 42–46) nevlastné elementy totálne kolmých priestorov sú vo vzťahu polarity vzhľadom na imaginárnu absolútnu plochu guľovú κ^2_∞. Nevlastné body osí x, y, z, t sú vrcholmi polárneho štvorstena tejto guľovej plochy. Nech teraz $k \perp \Sigma \not\equiv \Pi$. Úbežník osi t je stred S_∞ premietania na Π, preto jeho polárna rovina vzhľadom na κ^2_∞ je nevlastnou rovinou ω_∞ priestoru Π. Nevlastná rovina τ_∞ priestoru Σ má úbežník K priamky k za pól vzhľadom ku κ^2_∞. Preto priesečnica $(\tau_\infty \cap \omega_\infty) \equiv s_\infty$ a spojnica $S_\infty K_\infty$ sú harmonické poláry ku κ^2_∞. Priamka s_∞ je nevlastná priamka stopnej roviny σ priestoru Σ, preto $k \perp \sigma$. Z toho je $k_2 \perp n^\sigma_2$, $k_1 \perp p^\sigma_1$, podľa konštr. 4,2 kap. II., [18*] je $o^\Sigma_2 \perp n^\sigma_2$, $o^\Sigma_1 \perp p^\sigma_1$. Porovnaním vyplýva pre $o^\Sigma \ni E$, $E \equiv k \cap \Sigma$ vzťah $o^\Sigma_i \equiv k_i$ a tým je celý dôkaz prevedený.



Obr. 2.

Konštr. 2,1. *Zostrojiť kolmicu* $\begin{Bmatrix} k \\ k' \end{Bmatrix}$ *ku* Σ $\begin{Bmatrix} v\ bode\ E \in \Sigma \\ z\ bodu\ K \notin \Sigma \end{Bmatrix}$.

Prevedenie. Môžu nastať tieto prípady:

a) $\Sigma \not\equiv \Pi$

b) $\Sigma \equiv \Pi$

c) $\Sigma \perp \Pi$

V prvom prípade (obr. 2) nech sú obrazy uvedených podpriestorov zvolené údajmi $p^\sigma_1, n^\sigma_1, E_1, E_2$ (3). Kolmopremietacia rovina κ kolmice $k \perp \Sigma$, ktorá obsahuje bod E, pretne Σ v spádovej priamke o^Σ. Pretože k je kolmá ku všetkým priamkam priestoru Σ, podľa vety 2,2 je kolmá i ku σ a preto platí $o_i^{\Sigma} \equiv k_i \perp \sigma_i$. Treba ešte určiť jej stopník $N^k(o) \equiv k \cap \Pi$, čo vykonáme, ak sklopíme rovinu κ do ν. Najprv určíme stopník N^o spádovej priamky o známymi metódami z E_3. Potom platí $(k) \equiv (o^{\Sigma})$, $[k] \perp [o^{\Sigma}]$, $[k] \ni [E]$, $[k] \cap (k) \equiv (N^k) \equiv [N^k]$. Ďalej platí $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{cotg} \delta$. Uvažované uhly sú dané takto: $\alpha = \sphericalangle(o^{\Sigma}), [o^{\Sigma}]$, $\beta = \sphericalangle \overline{[E](E)}, [o^{\Sigma}]$, $\gamma = \sphericalangle \overline{[E](E)}, [k^{\Sigma}]$ $\delta = \sphericalangle(k), [k]$ z čoho je $i_k : i_{\Sigma} = 1$ a ďalej $N_i^k E_i : E_i N_i^o = 1$. Pomocou tohto vzťahu sme mohli stopník N^k bezprostredne zostrojiť.

Pri prevedení kolmice k' z bodu $K(-3) \notin \Sigma$ pôjde len o rovnobežné posunutie (pozri prácu [18*] konštr. 7,1). I tu však môžeme konštrukciu vykonať priamo (pozri konštr. 1,2, kap. IV, [18*]).

V druhom prípade platí $N_i^k \equiv E_i \equiv N_i^o \equiv k_i$, alebo $N_i^{k'} \equiv K_i \equiv N_i^o \equiv k_i'$ a kolmica na Σ splynie s premietacími lúčmi bodov na k resp. k'.

V treťom prípade je buď $E_i \equiv D_i$, $N_i^k \to \infty$, kde $D \in \Sigma$, alebo $K_i \equiv D_i$, $N_i^k \to \infty$ a kolmica k' je rovnobežná s Π (pozri obr. 2).

Konštr. 2,2. *Určiť vzdialenosť bodu K od priestoru $\Sigma(K \notin \Sigma$, obr. 2).*

Prevedenie. V prípade a) predošlej konštrukcie môžeme ňou našu úlohu riešiť. Bod $N_2^{k'}$ dostaneme zo vzťahu $\overrightarrow{K_2 N_2^{k'}} = -\overrightarrow{E_2 N_k}$, určíme $N_2^{o'}$ a vyklopením roviny aj $S \equiv k' \cap o' \equiv k' \cap \Sigma$. Potom je $(K \perp \Sigma) \equiv [K][S]$. Túto úlohu môžeme riešiť i bez použitia kolmice k v bode E priestoru Σ (pozri konštr. 1,2 kap. IV, [18*]).

V prípade b) je $vzd(K \perp \Sigma) = t_k$.

V prípade c) je $vzd(K \perp \Sigma) = (K)(S)$, pretože $t_k = t_S = t_N$.

3. Ďalšie úlohy o kolmosti a vzdialenosti.

Konštr. 3,1. *Bodom $E \notin k$ viesť priestor Σ, kolmý k priamke k (obr. 3).*

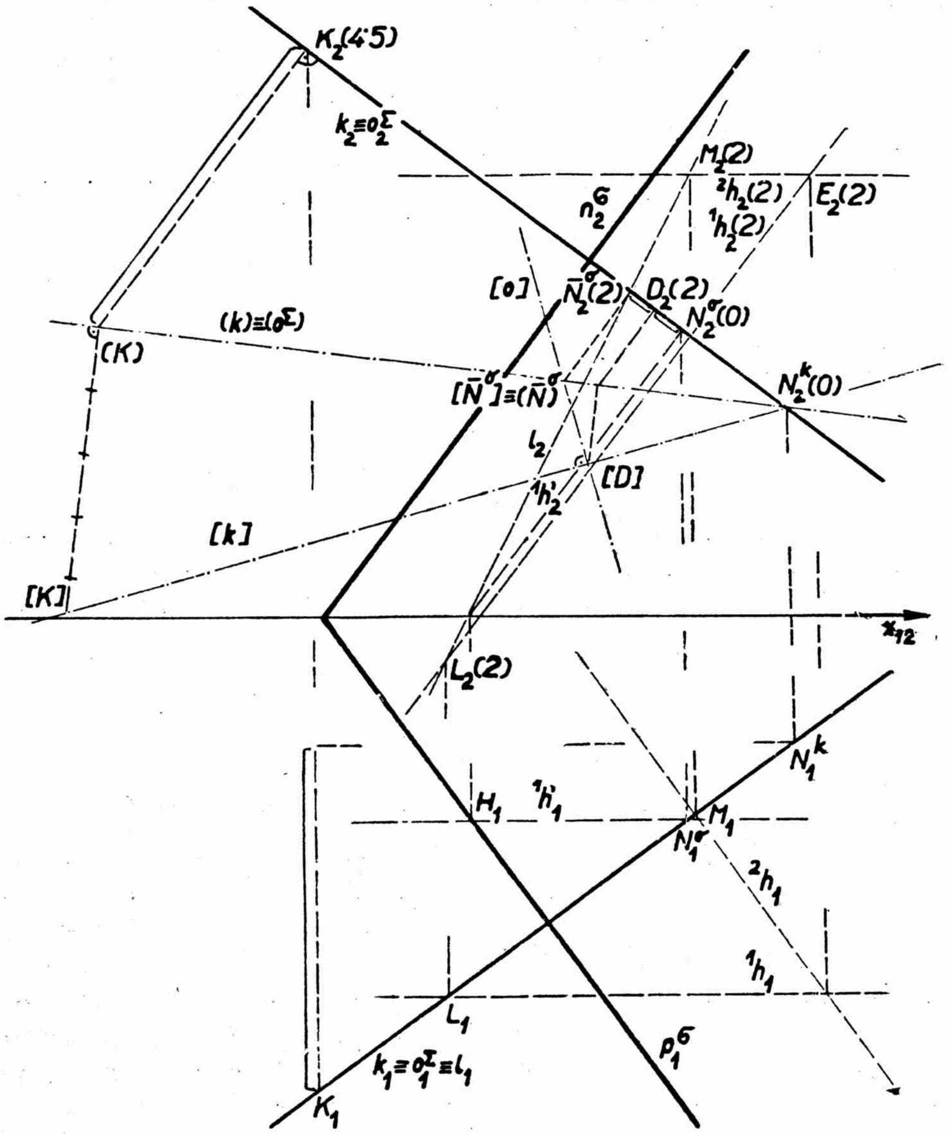
Prevedenie. Združené obrazy daných podpriestorov zvolme združenými obrazmi útvarov $k \equiv N^k(o)K(4.5)$, E (2). Bodom E vedieme hlavnú rovinu σ hľadaného priestoru Σ o kóte 2; jej združené obrazy sú dané priamkami ${}^1n_i$, ${}^2n_i \ni E_i$. Priestor Σ je potom určený priamkami ${}^1h$, ${}^2h$, o^{Σ}. Aby sme jeho určenie previedli na známe zadanie $\Sigma \equiv (E, \sigma)$ vyklopme pomocou konštr. 1,1 kap. I. kolmopremietaciu rovinu κ priamky k. Potom $[o^{\Sigma}] \perp [k]$, $[o^{\Sigma}] \ni [N^o]$, $[k] \cap [o^{\Sigma}] \equiv [D]$, kde $\bar{N}^{\sigma} \equiv o^{\Sigma} \cap \sigma$ (2), $k \wedge o^{\Sigma} \equiv \kappa$, $o_i^{\Sigma} \equiv k_i$. Odstupňovaním priamky $o^{\Sigma} \equiv \bar{N}^o D$ nájdeme jej stopník N_2^o a stačí už cez neho viesť rovinu $\sigma \parallel \sigma$ (2) podľa konštr. 4,2 kap. II, (18*). Nasledujúce tri konštrukcie prevedieme naraz v obr. 8a.

Konštr. 3,2. *Daným bodom B danej roviny α viesť totálne kolmú rovinu κ k rovine α.*

Konštr. 3,3. *Určiť ortogonálny priemet B^{α} bodu B do roviny α.*

Konštr. 3,4. *Priamkou x, idúcej spoločným bodom S rovín α, β viesť rovinu ξ, polokolmú k rovine α a súčasne polorovnobežnú k týmto rovinám, ak $\alpha, \beta \not\subset \Sigma$.*

Prevedenie. Polokolmosť roviny (ξ, α), (ξ, β) znamená, že nevlastná priamka roviny ξ pretína združenú poláru k úbežnej priamke roviny α vzhľadom na κ^2_∞, (pozri [21], str. 64). Polorovnobežnosť rovín (ξ, α), (ξ, β) znamená, že nevlastné



Obr. 3.

priamky týchto rovín sa pretínajú (pozri [12], str. 10). Z toho vyplýva, že hľadaná rovina ξ bude mať za úbežnú priamku priečku u^ξ_∞ priamok u^α_∞, v^α_∞, v^β_∞, kde u^α_∞, u^β_∞ sú úbežnice rovín α, β a v^α_∞, v^β_∞ sú ich konjugované poláry vzhľadom na κ^i_∞. Priečka u^ξ_∞

musí ďalej prechádzať nevlastným bodom X_∞ priamky x; preto je ξ určená rôznobežkami u^ξ_∞, x.

Túto konštrukciu použijeme aj pri určení uhlov dvoch rovín v konštr. 2,1, kap. III kde ovšem $\beta \equiv \pi$ (obr. 8a). Zvoľme tam počiatočné údaje obrazmi $\alpha_i \equiv (s_i^\alpha\ D_1,\ D_2(l))$, $x_2 \equiv \overline{A_2B_2} \in \pi$, $t_A = t_B = 0$, $\overline{A_1B_1} \ni S_1$, $\overline{A_1B_1} \parallel x_{12}$, $S \equiv \pi \cap \alpha$. Zvoľme si ľubovoľný bod E údajmi E_1, E_2 (2) a preložme ním priestor $\Sigma \supset \alpha$. Ak na $\overline{E_iD_i}$ nájdeme body $N_i(t_N = 0)$, potom stopná rovina $\sigma \subset \Sigma$ bude určená bodom N a priamkou s^α. Z toho snadno zostrojíme (napr. pomocou hlavnej priamky ${}^{\mathrm{II}}h \ni R$, ${}^{\mathrm{II}}h_2 \parallel x$, ${}^{\mathrm{II}}h_1 \parallel p_1^\sigma$, $p_1^\sigma \ni S_1$) jej stopy p^σ, n^σ. Cez bod B vedieme teraz kolmicu k' na $\Sigma \equiv (\sigma, E)$ pomocou konštr. 2,1, pritom použijeme kolmicu k ku Σ v jeho bode E. Celý proces zopakujeme pre iný bod $\bar{E}$ (2) a priestor $\bar{\Sigma} \subset \alpha$, čím obdržíme kolmicu $\bar{k} \ni B$. Rôznobežkami $k \wedge \bar{k}$ je už určená rovina κ, ktorá vyhovuje predpokladom konštr. 3,2.

Pomocou konštr. 6,2, [18*] nájdeme teraz priesečnicu B^α rovín α, κ. Bod B^α je výsledok konštr. 3,3 – je to ortogonálny priemet bodu B do α.

Priamka $\overline{SB^\alpha}$ je ortogonálny priemet priamky $\overline{SB}$ do α – ako to vyplýva z predošlých úvah – a preto $\xi \equiv \overline{SB} \wedge \overline{SB^\alpha}$ je hľadaná rovina ξ, čím je i konštr. 3,4 prevedená.

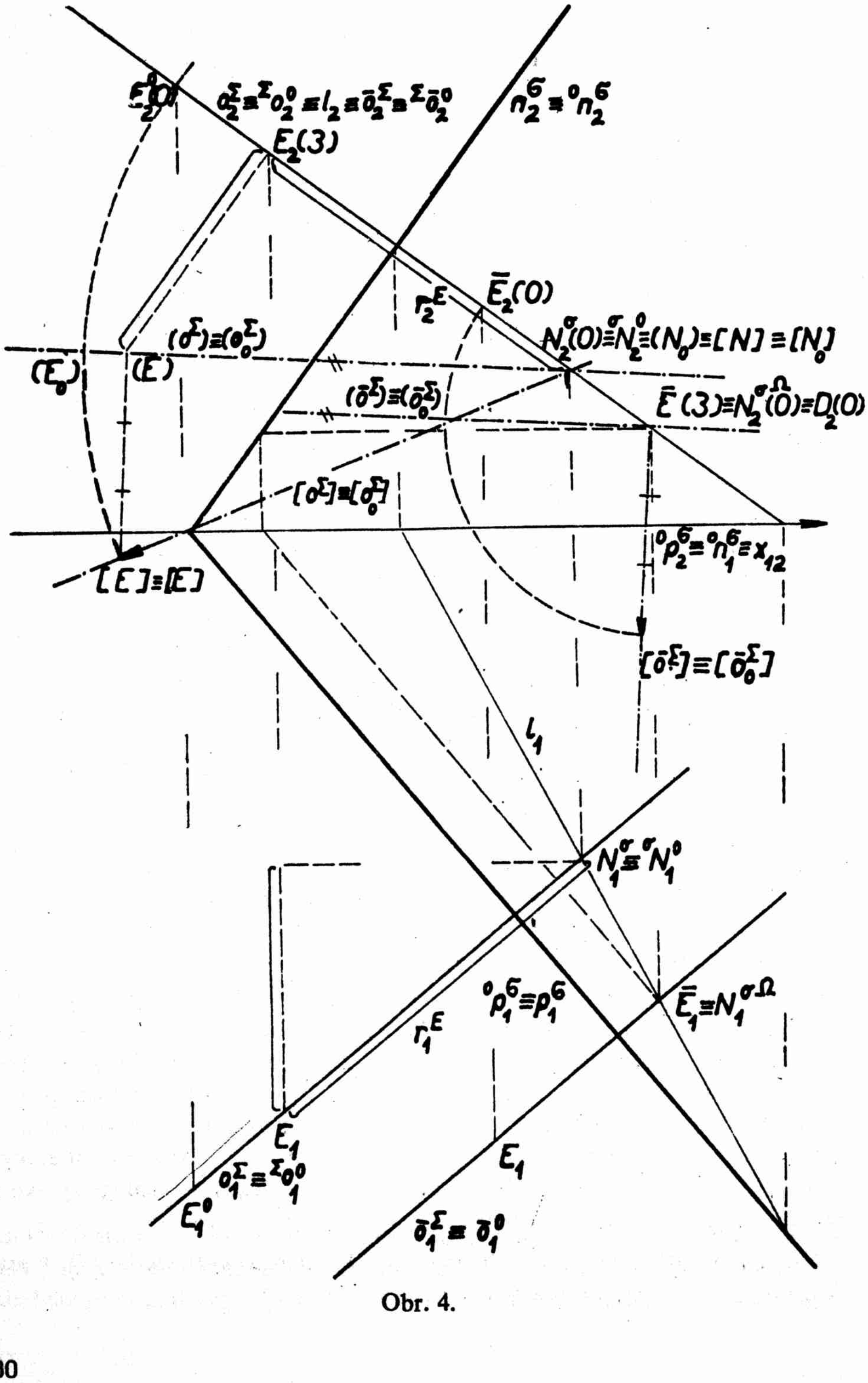
Pomocou uvedených konštrukcií sa dajú vyriešiť *ďalšie úlohy* o kolmosti a vzdialenosti, z ktorých uvádzame napr.: Daným bodom viesť rovinu, totálne kolmú k danej rovine, danou priamkou viesť rovinu, polokolmú a súčasne polorovnobežnú k danému priestoru, určiť ortogonálny priemet bodu do priamky a priestoru; určiť ortogonálny priemet priamky do priestoru, určiť vzdialenosť bodu od priamky a roviny, určiť vzdialenosť priamky od roviny, ak tieto sú disjunktné, určiť vzdialenosť dvoch disjunktných priamok, atď.

II. SKUTOČNÉ VEĽKOSTI ÚTVAROV LEŽIACICH V PODPRIESTOROCH

1. Otáčanie priestoru $\Sigma \not\equiv \Pi$ do Π.

Pre úlohy metrické i polohové často potrebujeme otočiť obecný priestor Σ do priemetného priestoru Π, kde mnohé konštrukcie metódami, známymi z E_3 vieme previesť. Priestor Σ a priemetný priestor $\Pi \nparallel \Sigma$ sa pretínajú v stopnej rovine σ, ktorá pri otáčaní zostáva samodružnou. Každý bod $E \in \Sigma$ sa otočí po kružnici do bodu $E_0 \in \Pi$. Rovina tejto kružnice je totálne kolmá k σ, jej polomer sa rovná skutočnej vzdialenosti $E \dashv \sigma$ a teda jej stred splynie so stopníkom N^o spádovej priamky o^Σ priestoru, vedenej cez E. Pri otáčaní rozlišujeme dva prípady – analogicky ako pri otáčaní roviny $\alpha \subset \Pi$ do Π – podľa

Def. 1,1. *Nech $\Sigma \not\equiv \Pi$, $\Sigma \nparallel \Pi$. Hovoríme, že Σ sklopíme do Π, ak $\Sigma \perp \Pi$. V ostatných prípadoch hovoríme o otáčaní.*



Obr. 4.

Veta 1,1. $\left\{\begin{matrix} \textit{Otočená} \\ \textit{Sklopená} \end{matrix}\right\}$ *poloha* $\left\{\begin{matrix} \Sigma_0 \equiv \Pi \\ \Omega_0 \equiv \Pi \end{matrix}\right\}$ *je s priestorom* $\left\{\begin{matrix} \Sigma \\ \Omega \perp \Pi \end{matrix}\right\}$ *vo vzťahu priestorovej afinity v* E_4. *Samodružná rovina tejto afinity je stopná rovina* σ *a pár odpovedajúcich si bodov* E, E_0.

Dôkaz. Analogicky ako v Π pri otáčaní roviny do priemetne, aj v E_4 pri otáčaní priestoru Σ do priemetného priestoru Π platí, že toto otáčanie možno nahradiť rovnobežným premietaním. Smer tohoto premietania je $\overline{EE}_0$.

Veta 1,2. *Medzi združenými obrazmi útvaru a príslušnými združenými obrazmi jeho otočenej polohy v rovinách* π, *existujú perspektívne súmiestne afinity, pričom ich osami sú obrazy príslušných stôp roviny* σ.

Dôkaz. Ak uvažujeme prvé priemety bodov E, E_0, potom priemet ich spojnice musí byť na p_1^σ kolmý, lebo $\overline{EE}_0$ leží v rovine, totálne kolmej k σ; preto je $\overline{EE}_0 \perp \sigma$ z čoho $\overline{E_1E_1^0} \perp p_1$. Stopa p_1^σ ako priamka roviny σ je samodružná a preto p_1^σ je osou spomenutej afinity v π. Analogický je dôkaz pre afinitu v ν.

Poznámka 1,1. Súmiestna perspektívna afinita medzi prvým a druhým združeným obrazom priestoru Π je známa z Mongeovho zobrazenia v E_3.

Konštr. 1,1. *Otočiť priestor* Σ, *pre ktorý je* $\Sigma \not\equiv \Pi$, $\Sigma \nparallel \Pi$, $\Sigma \not\perp \Pi$, *okolo* σ *do* Π *a určiť jeho uhol* $\xi = \sphericalangle(\Pi, \Sigma)$ *s priemetným priestorom* Π (obr. 4).

Prevedenie. Nech Σ je daný združenými obrazmi svojich podpriestorov σ, E, $t_E = 3$. Aby sme určili stred a polomer otáčania bodu E, preložíme ním totálne kolmú rovinu $\kappa \perp \sigma$. Pretože $\kappa \frac{1}{2} \perp \Pi$, je ortogonálny priemet roviny κ do Π priamka, ktorej združené obrazy sú o_i^Σ. Pre obrazy o_i^Σ platí $o_2^\Sigma \perp n_2^\sigma$, $o_1^\Sigma \perp p_1^\sigma$. Teraz zostrojíme N_2^o, druhý priemet stopníka N^o spádovej priamky o^Σ pomocou nárysnokrycej priamky (pozri [18*] konštr. 4,2, kap. II). Skutočná veľkosť $N_2^o[E]$ úsečky N^oE, zostrojená pomocou konštr. 1,1, I. kap., je už polomer otáčania bodu E. Stred otáčania pre otočený druhý obraz je v bode N_2^o. Z otočeného druhého priemetu E_2^o odvodíme E_1^o a tým sme dostali združené obrazy otočeného priestoru $\Sigma^o \equiv (E^o, \sigma^o \equiv \sigma)$. Najmenší uhol ξ priestorov Σ, Π je uhol, ktorý sviera spádová priamka o^Σ so svojím kolmým priemetom do Π (pozri [12*], str. 11). Preto je $\xi = [\xi_0] = \sphericalangle [o^\Sigma], (o^\Sigma)$.

Konštr. 1,2. *Sklopiť priestor* $\Omega \equiv (\sigma, \bar{E}) \perp \Pi$ *okolo* σ *do* Π (obr. 4).

Prevedenie. Priestor $\Omega \perp \Pi$ sa premieta do priemetného priestoru vo smere t do roviny; je to jeho stopná rovina. Nech sú preto údajmi $p_i^\sigma, n_i^\sigma, \bar{E}_1, \bar{E}_2$ (3), $\bar{E}_i \equiv D_i$, $D \in \sigma$ dané podmienky zobrazenia. Zrejme platí $o_i^\Sigma \equiv o_i^\Omega$, $N_i^{o\Omega} \equiv D_i \equiv E_i$, $[o^\Omega] \perp (o^\Omega)$ a preto je $\bar{E}_2[\bar{E}_2] = t_{\bar{E}}$ polomerom otáčania bodu $\bar{E}$. Pre konštrukciu tedy stačí naniesť na k_2 od bodu $\bar{E}_2$ vzdialenosť $\bar{E}_2E_2^o = t_E$ a potom je $\Omega_i^o \equiv (\sigma_i^o, E_i^o)$, kde $t_{E0} = 0$.

Užitím týchto dvoch konštrukcií môžeme vyriešiť množstvo rozličných úloh. Myslíme tým hlavne na úlohy, týkajúce sa konštrukcií v obecnom priestore Σ, napr. konštrukcie dvojdimenzionálnych plôch a telies, splňujúcich určité podmienky: danému štvorstenu opísať guľovú plochu, zostrojiť priemety rovnostranného rotačného valca, daného určujúcimi prvkami atď. Uvedené a podobné problémy vyriešime tým, že priestor Σ otočíme do Π i s danými určujúcimi prvkami, zostrojíme združené obrazy príslušného otočeného telesa a afinitou, o ktorej sme už uvažovali, odvodíme združené priemety telesa v premietaní v E_4.

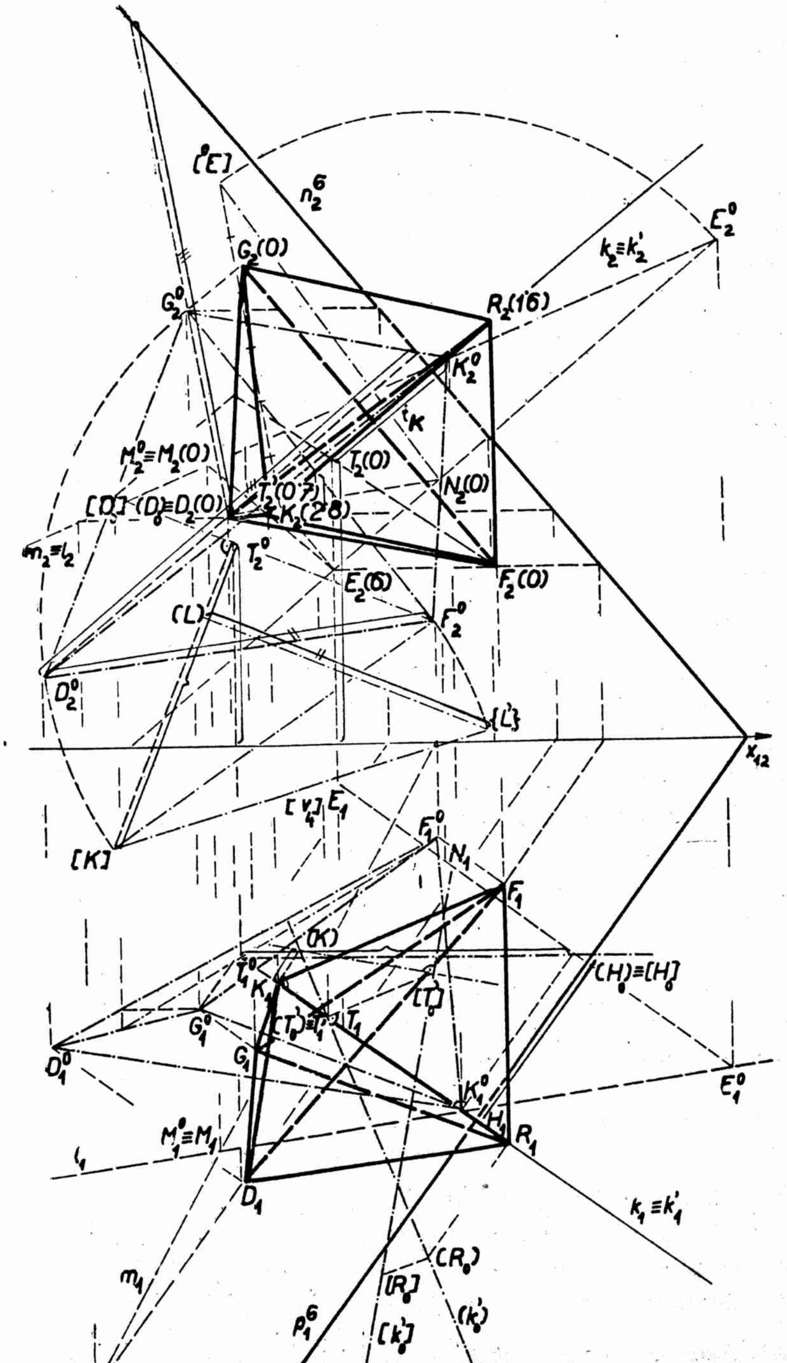
Rovnakou metódou by sa dali zostrojovať aj združené priemety rozličných polytopov, alebo kvadratických nadkvadrík, ako je to urobené napr. v práci [8], str. 15—25. Prevedieme si aspoň jednu konštrukciu pre aplikovanie uvedenej metódy a to konštrukciu polytopu (nadtelesa), ktorý je pre E_4 rozšírením štvorstena z E_3 a ktorý zavedieme touto

Def. 1,1. *Geometrický útvar, ktorého stenové priestory sú (pravidelné) štvorsteny, nazveme (pravidelným) päťsimplexom.*

Konštr. 1,3. *Daný je priestor* $\Sigma = (E, \sigma)$, ($\Sigma \not\equiv \Pi$, $\Sigma \nparallel \Pi$). *Zostrojiť pravidelný päťsimplex, ktorého jeden stenový priestor DFGK leží v* Σ *a jedna stena stenového priestoru DFGK,* ΔDFG *zas v rovine* $\sigma - \Sigma$ (obr. 5).

Prevedenie. Údajmi p_i^σ, n_i^σ, E_1, E_2 (6), D_2F_2 nech sú zvolené podmienky zobrazenia pre našu konštrukciu. Pre jednoduchosť nech je σ stopná rovina priestoru Σ. Keďže $\sigma \subset \Pi$, môžeme metódami, známymi z E_3 určiť sklopené obrazy $D_i^oF_i^oG_i^o$ jednej steny telesa; prv však odvodíme D_1, F_1. Potom otočíme Σ do Π pomocou zostrojenia bodov E_i^o (pozri konštr. 1,1). Zostrojíme sklopené obrazy F_i^o ťažiska trojuholníka $\Delta_i^o DFG$ a zároveň výšku ${}^2v = T_2^o[K]$ stenového základného priestoru pomocou pravouhlého $\Delta T_2^oF_2^oK$. Na obrazoch k_i kolmice k ku σ v bode T určíme body K_i, pre ktoré je $TK = {}^2v$ (pomocou bodov H_i a prvého priemetu). Otočené obrazy základného stenového priestoru sú potom $(DFGK)_i^o$. Odvodíme ich afinitou medzi Σ^o a Σ, ktorej samodružná rovina je σ a pár odpovedajúcich si bodov zas E^o, E: spojnica $l = E^oK^o$ pretína σ v bode $M_o \equiv M$, $\overline{ME}$ pretne smer afinity bodu T v bode K.

Teraz zostrojíme ťažisko T' telesa $DFGK$ zo vzťahu $T_iT_i' : T_i'K_i = 1 : 3$. Na základe konštr. 1,1, kap. I zostrojíme kolmicu $k' \perp \Sigma$, $k' \ni T_a'$. Určíme jej sklopený obraz (k_o') pomocou rozdielových trojuholníkov 1. a 3. druhu. Pomocou trojuholníka $(L)[K]\{L'\}$, kde $[K]\{L'\} = [K]F_2^o = [K]D_2^o = F_2^oD_2^o$ zostrojíme výšku $[v_4] = [K]\{L'\}$ telesa. Nanesieme ju od bodu $[T_o']$ na $[k_o']$, aby $[T_o'][k_0] = [v_4]$. Odvodíme obrazy R_i bodu R a jeho kótu $t_A = 1.6$. Viditeľnosť v druhom priemete určíme z kót t, viditeľnosť v 1. obraze zas kótami z. Zrejme neplatí určovanie viditeľnosti v pôdoryse a náryse pomocou obyčajného Mongeovho zobrazovania v E_3.


[E]
n_2^6
E_2^0
$k_2 \equiv k_2'$
$G_2(0)$
G_2^0
$R_2(16)$
K_2^0
K
$M_2^0 \equiv M_2(0)$
$T_2(0)$
$N_2(0)$
$F_2(0)$
T_2^0
$E_2(6)$
(L)
F_2^0
D_2^0
x_{12}
[K]
E_1
F_1^0
N_1
F_1
(K)
T_1^0
K_1
G_1^0
T_1
D_1^0
G_1
E_1^0
K_1^0
R_1
$M_1^0 \equiv M_1$
l_1
D_1
$k_1 \equiv k_1'$
m_1
(R_0)
$[R_0]$
p_1^6
$[k_0']$
(k_0')

Obr. 5.

2. Otáčanie roviny.

Rovinu môžeme otáčať dvojakým spôsobom:

a) Klíma (pozri [12*], str. 14) otáča rovinu tak, že ňou preloží kolmý priestor Ω k premietnému priestoru Π a tento potom sklopí do Π, tým zostrojí i otočený obraz roviny do priemetného priestoru Π. V tejto rovine vieme už známymi konštrukciami z E_3 prevádzať všetky potrebné konštrukcie.

b) Harant (pozri [8], str. 6) otáča rovinu dvojnásobnou afinnou transformáciou. Vymení otáčania v E_3^p a E_4, najprv otočí rovinu ϱ pomocou axonometrickej stopy stopnej roviny priestoru $\Omega \perp E_3^p$, $\Omega \supset \varrho$ a potom túto otočenú rovinu otáča pomocou kót t a jej stopy v E_3^p do priemetne α.

Pre jednoduchosť použijeme spôsob b), pričom správnosť konštrukcie môžeme overiť buď výpočtom, alebo skontrolovaním skutočnej vzdialenosti dvoch bodov pomocou konštr. 1,1, alebo logickou úvahou.

Konštr. 2,1. *Otočiť rovinu α do $\pi(v)$.*

Prevedenie. Môžu nastať tieto prípady:

a) $\alpha \subset \Pi$, alebo $\alpha \parallel \Pi$. Konštrukciu prevedieme metódami, známymi z E_3. V prvom prípade môžeme α považovať za stopnú rovinu nejakého priestoru Σ. Tento prípad je prevedený v konštrukcii 1,3, kde $\alpha = \sigma$. Riešenie konštrukcie pre rovinu $\alpha \parallel \Pi$ je dané v konštr. 2,1, kde $\alpha = \sigma$ (2).

b) $\alpha \perp \Pi$. Potom α je kolmopremietaciou rovinou nejakej priamky k. Prípad je prevedený v konštr. 1,1 kde je $\alpha \equiv \kappa \equiv (k, o^{\Sigma})$.

c) α má obecnú polohu vzhľadom na Π (obr. 6). Nech sú obrazy roviny α dané údajom s_i^α, C_1, C_2 (2.5). Najprv cez α položíme priestor $\Omega \perp \Pi : E_i = C_i$, ${}^1h_2(o) \parallel x_{12}$, ${}^1h_i \cap s_i \equiv H_i$, ${}^1h_i \ni E_i$, z toho odvodíme n_i^σ, p_i^σ pre stopnú rovinu $\sigma \subset \Omega$. Body $C_1 \equiv E_1$ sa otočia do polohy $(E_1^o) \equiv (C_1^o)$ okolo $p_1^\sigma \equiv (p_0^\sigma)$ pomocou kót z, priamka s_1^α pomocou bodu L_1 a priamky g_1 — zasa do polohy $({}^os_1^\alpha)$. Nakoniec otočíme bod (C_1) okolo $({}^os_1^\alpha) \equiv [{}^os_1^\alpha]$ do polohy $[C_1^o]$.

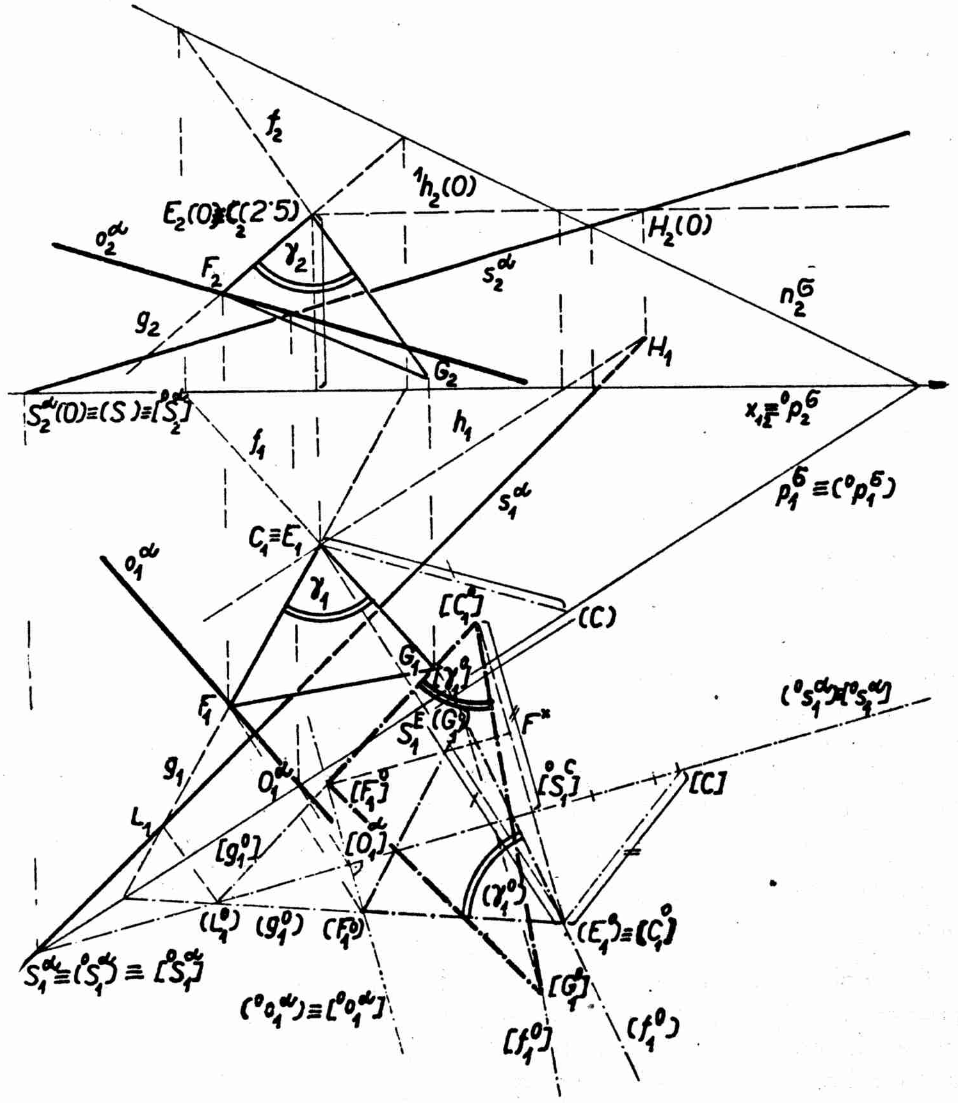
Poznámka 2,1. Ak by sme rovinu α otáčali okolo n_2^α a $[{}^os_2^\alpha]$, dostali by sme jej otočenú polohu $[\alpha_2^o]$ v v (pozri konštr. 1,3, kap. II, kde $\alpha \equiv \omega$).

Poznámka 2,2. Aby sme určili otočený obraz $[\alpha_1^o]$, resp. $[\alpha_2^o]$ roviny α, nemusíme rovinou α prekladať práve priestor $\Omega \perp \Pi$. Postačilo by priamkou $s^\alpha \subset \Pi$ preložiť ľubovoľnú rovinu σ, ktorú by sme uvažovali ako stopnú rovinu obecného priestoru $\Sigma \equiv (\sigma, C)$. Tento by sme spolu s rovinou α potom otočili podľa konštr. 1,1.

Veta 2,1. *Nech je rovina α vzhľadom na Π, π, v v obecnej polohe. Potom medzi $\alpha_1 \equiv (s_1^\alpha, C_1)$ a $[\alpha_1^o] \equiv ([{}^os_1^\alpha], [C_1^o])$ existuje vzťah obecne afinných súmiestnych rovinných polí o samodružnom bode $S_1^\alpha \equiv ({}^oS_1^\alpha) \equiv [{}^oS_1^\alpha]$.*

Dôkaz: Vyplýva priamo z konštr. 2,1.

Konštr. 2,2. *Zostrojiť skutočnú veľkosť trojuholníka* $EFG \subset \alpha$ *a spádovú priamku* $o^\alpha \ni F$ *roviny* α, *ak* α *je k* Π *v obecnej polohe* (obr. 6).



Obr. 6.

Prevedenie. Združené obrazy podpriestorov voľme údajmi s_1^α, C_1, C_2 (25), F_2, G_2. Odvodíme najprv F_1, G_1, n_1^σ, p_1^σ (ako v predošlej konštrukcii). Otočíme α dvojnásobnou afinnou transformáciou a dostaneme tak bod $[C_1^o]$. Použitím súmiestnej rovinnej afinity o osi $p_1^\sigma \equiv p_0^\sigma$ medzi $\Delta_1 EFG$ a $(\Delta_1^\circ) EFG$ (pozri vetu 2,2) posledný trojuholník zostrojíme. Potom pomocou ďalšej afinity o osi $({}^\circ s_\alpha^1) \equiv [{}^\circ s_1^\alpha]$ medzi $(\Delta_1) EFG$ a $[\Delta_1^\circ] EFG$ zostrojíme opäť posledný trojuholník. Pre spádovú priamku $o^\alpha \ni F$ platí:

$$({}^\circ O_1^\alpha) \equiv [{}^\circ O_1^\alpha] \perp [{}^\circ s_1^\alpha], \quad [{}^\circ O_1^\alpha] \cap [{}^\circ s_1^\alpha] \equiv [{}^\circ O_1^\alpha].$$

Odvodením bodov O_i^α na s_i^α dostávame už obrazy o_i^α hľadanej spádovej priamky o^α.

Poznámka 2,3. Uvedenou metódou sa dajú riešiť všetky planimetrické konštrukcie vzťahujúce sa na obecnú rovinu α, napr. zostrojiť združené priemety mnohouholníkov, kružníc atď.

III. ÚLOHY O UHLOCH PODPRIESTOROV

1. Uhol priamky p s podpriestormi E_r $(0 < r < 4)$.

Ak $p \subset E_r$ alebo $p \parallel E_r$ potom uvažovaný uhol definujeme rovný nule. Ak $p \not\subset E_r$ a $p \nparallel E_r$, potom môžeme uvažovať uhly týchto dvojíc podpriestorov p a E_r: a) dvoch rôznobežiek, b) dvoch mimobežiek, c) priamky s rovinou, d) priamky s priestorom. Ku všetkým týmto problémom používame túto základnú,

Konštr. 1,1. *Dané sú dve rôznobežky $f \wedge g$; určiť ich uhol γ* (obr. 6).

Prevedenie. Rovinu $\alpha \equiv (f, g)$ otočíme konštrukciou 3,1 do π do polohy $[\alpha_1^\circ] \equiv \pi$. Potom platí $\gamma = [\gamma_1^\circ] = \sphericalangle [f_1^\circ], [g_1^\circ]$.

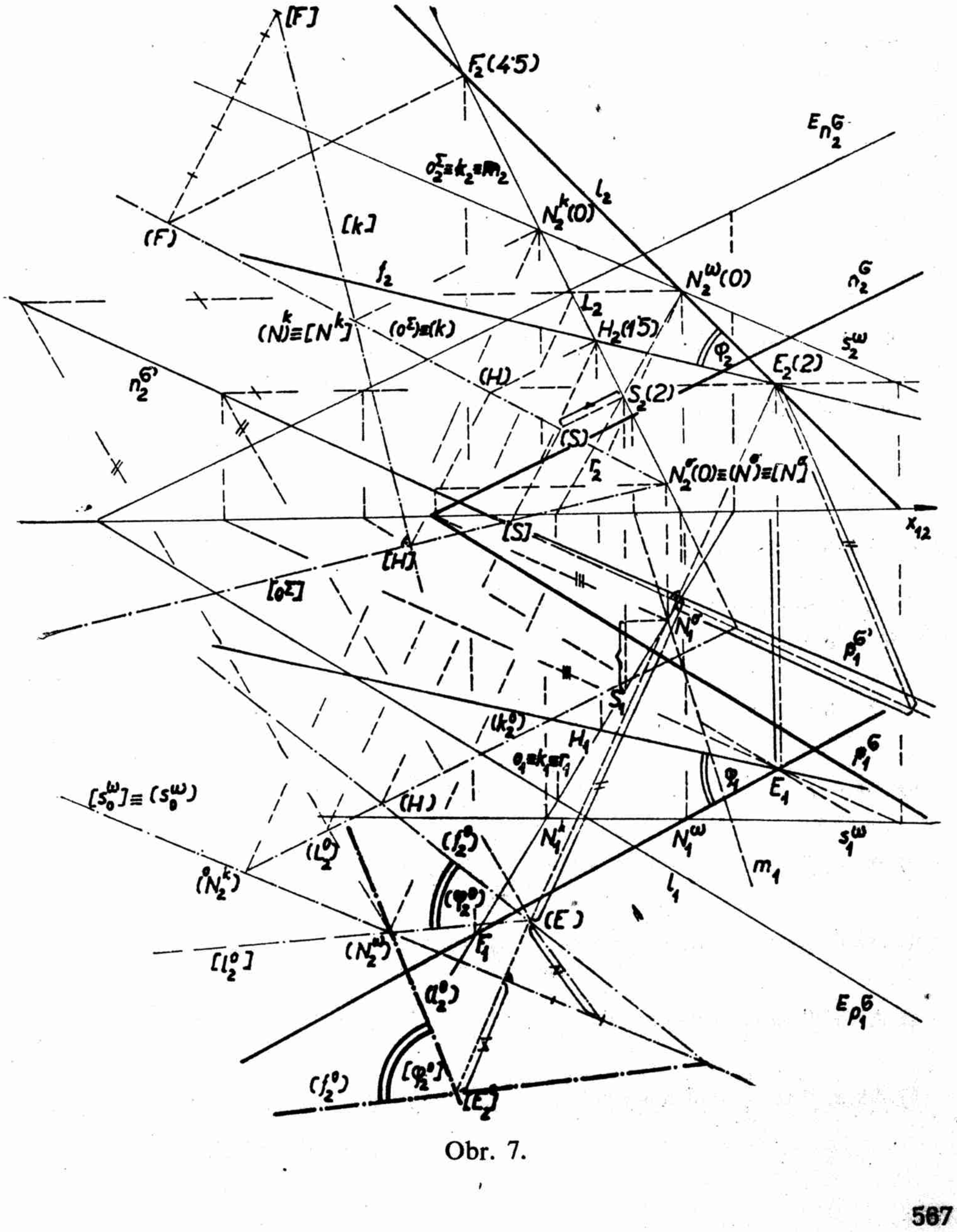
Pod uhlom priamky s priestorom rozumieme najväčší uhol zo všetkých uhlov, ktoré zvierajú daná priamka a ľubovoľná priamka v uvažovanom priestore (pozri [21*], str. 59–60). Definujeme, že je to uhol, ktorý zviera daná priamka so svojím ortogonálnym priemetom do uvažovaného priestoru (pozri napr. [9*], str. 139, alebo [19], str. 68).

Konštr. 1,2. *Určiť uhol ϕ priamky $l \equiv EF$ s priestorom $\Sigma \equiv (\sigma, E)$, $(F \in \Sigma)$;* obr. 7.

Prevedenie. Priamku l sme zvolili tak, že jeden jej bod E je už určujúcim bodom priestoru Σ. Tým odpadá totiž konštruktívne zisťovať priesečík priamky l s priestorom Σ. Ortogonálny priemet f priamky l do priestoru Σ musí zrejme obsahovať bod $E \equiv l \cap \Sigma$ a bod H, ktorý je ortogonálnym priemetom bodu F do Σ.

Počiatočné podmienky pre konštrukciu voľme údajmi $E_1 E_2$ (2), F_1, F_2 (-4.5), n_i^σ, p_i^σ. Premietnime najprv bod F kolmo do Σ do bodu H buď podľa konštr. 2,2 kap. I. alebo nasledujúcim spôsobom: Cez body F_i vedieme kolmice $k_i \equiv o_i^\Sigma$ na príslušné stopy n_2^σ, p_1^σ. Nájdeme N_i°, obrazy stopníkov spádovej priamky o^Σ priestoru Σ, na tej istej priamke pomocou hlavnej roviny $\sigma^E(2) \ni E$ nájdeme bod $S(2)$.

Vyklopíme kolmopremietaciu rovinu $\kappa \equiv k \wedge o^{\Sigma}$ pomocou priamky $o^{\Sigma} \equiv \overline{N^{o}S}$. Pritom sa o^{Σ}, F dostanú do polôh $[o^{\Sigma}], [F]$, pričom je $[k] \ni [F]$, $[k] \perp [o^{\Sigma}]$, $[k] \cap [o^{\Sigma}] \equiv [H]$. Ďalej platí $[F][H] = vz(F \dashv \Sigma)$ a bod H je už pätou kolmice vedenej cez F ku Σ. Priamky $f \equiv \overline{EH}$ a l už zvierajú hľadaný uhol ϕ, ktorý pomocou predošlej konštrukcie môžeme zostrojiť.



Obr. 7.

Poznámka 1,1. Na základe konštrukcie 1,1 prevedieme i určenie uhlu dvoch priestorov, ktorý je definovaný ako uhol dvoch rôznobežných kolmíc k týmto priestorom. Z obecnej teórie vieme, že dva trojrozmerné priestory v E_6 by mali zvierať 3 uhly, avšak (pozri [9*], str. 152) platí ${}^1\phi = {}^2\phi = 0$, $3\phi = \sphericalangle({}^1k, {}^2k)$.

2. Uhly dvoch rovín.

Uhly dvoch rovín sa definujú ako najmenší a najväčší uhol zo všetkých uhlov, ktoré zviera ľubovoľná priamka z jednej roviny s ľubovoľnou priamkou v druhej rovine. V definíciach vidíme (pozri napr. [21*], str. 62), že stačí uvažovať uhly, ktoré zvierajú priamky jednej roviny so svojimi ortogonálnymi priemetmi do druhej roviny. Konštrukciu $\left\{\begin{matrix}\text{najmenšieho}\\ \text{najväčšieho}\end{matrix}\right\}$ z týchto uhlov, v označení $\left\{\begin{matrix}{}^1\phi\\ {}^2\phi\end{matrix}\right\}$ dostaneme nasledujúcim riešením, ktoré podáva stereometricky i Klíma v práci [12], str. 15, a Harant na str. 144—149, [9*], ktorý podáva i dôkaz pomocou analytickej geometrie: V rovine α zostrojíme kružnicu k o strede O a polomer r. Jej kolmý priemet do roviny β bude obecne elipsa, ktorej osi budú $2a$, $2b$. Týmto osiam odpovedajú združené priemery a', b' kružnice v rovine α. Pritom a, $a'(b, b')$ musia ležať v polorovnobežnej a súčasne polokolmej rovine ${}^1\xi({}^2\xi)$ ku α, β. Potom zrejme platí

$$\cos {}^1\phi = \frac{a}{r}, \qquad \cos {}^2\phi = \frac{b}{r} \tag{1}$$

kde ${}^1\phi$ je najväčší a ${}^2\phi$ zas najmenší z hľadaných uhlov.

Môžu nastať tieto vzájomné polohy dvoch rovín α, β podľa toho, aké uhly zvierajú (pozri [19], str. 72).

a) Ak α, β sú $\frac{1}{2}$ rovnobežné, potom je ${}^1\phi = 0$, ${}^2\phi =$ obecný uhol

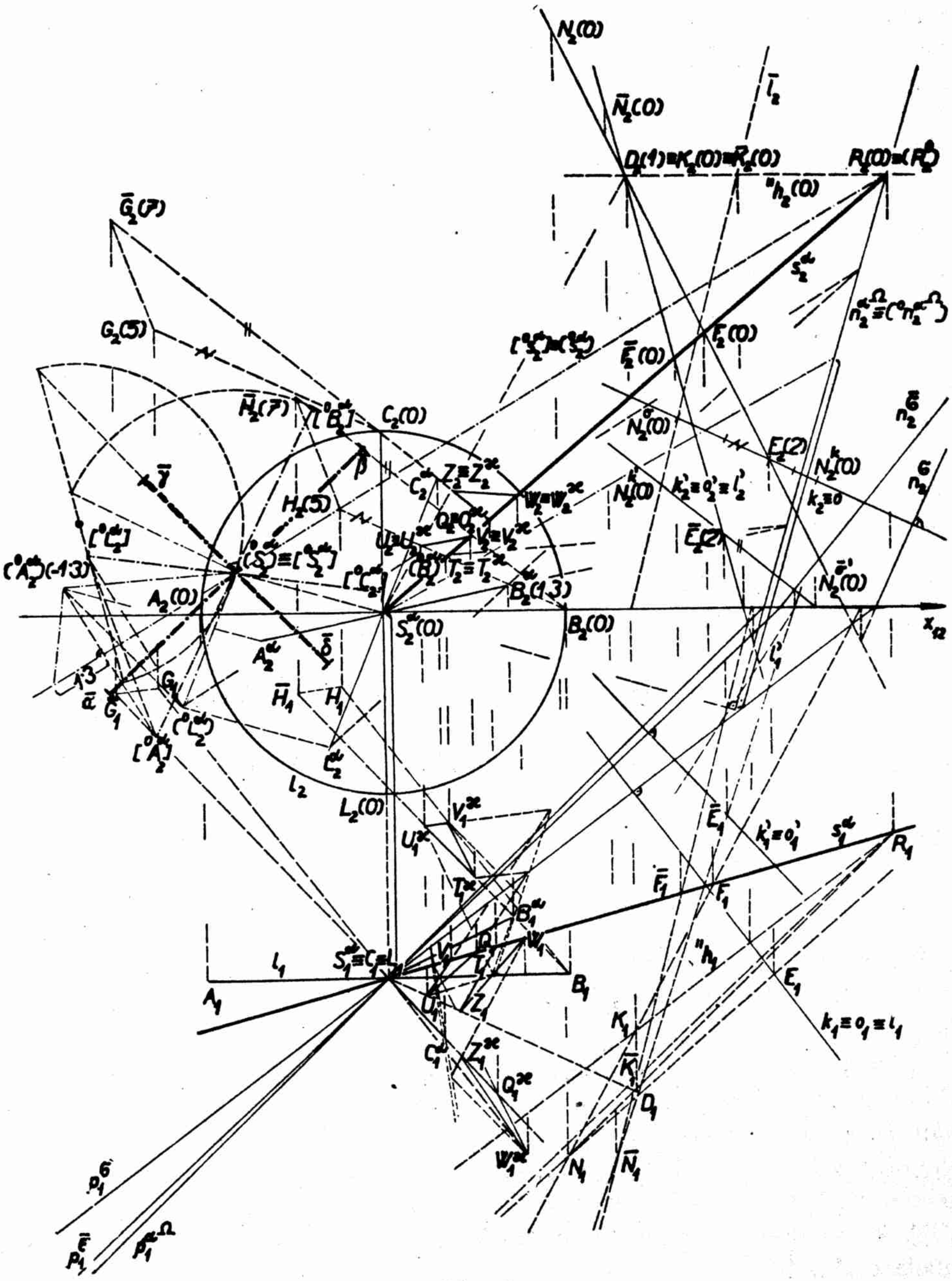
b) Ak α, β sú $\frac{1}{2}$ kolmé, potom je ${}^1\phi =$ obecný uhol, ${}^2\phi = 0$

c) Ak α, β sú $\frac{1}{2}$ stereometr. kolmé, potom je ${}^1\phi = 0$, ${}^2\phi = 90°$

d) Ak α, β sú $\frac{1}{2}$ totálne kolmé, potom je ${}^1\phi = {}^2\phi = 90°$

e) Ak α, β sú $\frac{1}{2}$ rovnakouhlé, potom je ${}^1\phi = {}^2\phi =$ obecný uhol

f) Ak α, β sú $\frac{1}{2}$ v obecnej polohe, potom je ${}^1\phi =$ obecný uhol, ${}^2\phi =$ obecný uhol.



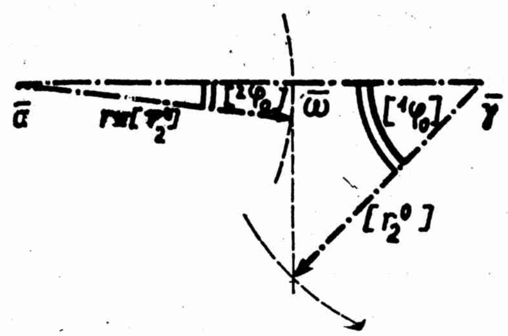
Obr. 8a.

Ak α a β sa pretínajú v bode R, s výhodou zvolíme tento za stred spomenutej kružnice. V prácach [12*], str. 130 a [11*] str. 946–947 Klíma uvažuje len o uhle roviny α a priemetne π a prípad, ak α a β sú v obecnej polohe vzhľadom na π, ν prevádza na predošlý prípad transformáciou priemetne π do roviny α. Toto konštruktívne zjednodušenie naznačil v práci [19] na str. 116–121 i Schoute. Klíma v uvedených prácach rieši problém tak, že premieta roviny α, β do priestoru $\Pi \perp \alpha$ a tento potom premieta do π, ν. Tým α zobrazí do bodu a kružnicu $k \subset \beta$ do elipsy o poloosiach a, b; potom je

$$\operatorname{tg} {}^1\phi = \frac{b}{r}, \qquad \operatorname{tg} {}^2\phi = \frac{a}{r} \tag{2}$$

kde ${}^1\phi$ je najmenší a ${}^2\phi$ zas najväčší z hľadaných uhlov. My sa zatiaľ obmedzíme tiež na prípad, keď $\beta \equiv \nu$ podľa tejto

Konštr. 2,1. *Nájsť uhly* ${}^1\phi$, ${}^2\phi$ *roviny* α *a priemetne* ν (obr. 8a, b).



Obr. 8b.

Prevedenie. Združené obrazy roviny α zvoľme údajmi s_i^α, D_1, D_2 (1) (obr. 8a). V priemetni ν zvoľme kružnicu $l_2 \equiv l$ o strede v bode $S_2 \equiv s_2^\alpha \cap x_{12}$ a polomere $S_2^\alpha A_2 = S_2^\alpha B_2 = S_2^\alpha C_2 = S_2^\alpha L_2$. Jej združené priemery AB, CL premietneme kolmo do α do priemerov $A^\alpha B^\alpha$, $C^\alpha L^\alpha$ elipsy l^α, ktorá je kolmým priemetom kružnice l do α. Pritom použijeme polokolmé a súčasne polorovnobežné roviny ξ, ξ' (pozri konštr. 2,4, kap. I). Rovinu α pomocou konštr. 2,1, kap. II. otočíme do ν, kde dostaneme a skutočné veľkosti $[{}^oA_2^\alpha][{}^oB_2^\alpha]$, $[{}^oC_2^\alpha][{}^oL_\alpha^2]$, združených priemerov elipsy l^α. Z nich pomocou Rytzovej konštrukcie zostrojíme hlavnú a vedľajšiu os $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\gamma\delta}$ elipsy $[{}^ol_2^\alpha]$. Zo vzťahov (1) určíme (v obr. 19b) z príslušných pravouhlých trojuholníkov hľadané uhly ${}^1\phi$, ${}^2\phi$.

Poznámka 2,1. Keby sme mali určiť uhly ${}^1\phi$, ${}^2\phi$ dvoch rovín α, β daných v obecnej polohe vzhľadom na Π, π, ν, postupovali by sme obdobne. Museli by sme však naviac ešte najprv zostrojiť kružnicu $l^{\alpha} \subset \beta$ a obrazy združených priemerov elíps l_i, do ktorých sa táto premieta, a to pomocou otočenia roviny β.

Poznámka 2,2. Na základe konštr. 2,1 by sme mohli riešiť úlohu o uhloch roviny α s priestorom Σ. Tieto dva uhly definujeme ako uhly roviny α s jej ortogonálnym priemetom do priestoru Σ. Pretože obe roviny majú spoločnú priamku, totožnú s priesečnicou roviny α s priestorom Σ, jeden z dvoch možných uhlov je nulový.

IV. SÚVIS KÓTOVANE-MONGEOVHO ZOBRAZOVANIA S INÝMI ZOBRAZOVANIAMI – ZÁVER

Predložená zobrazovacia metóda sa dá uviesť do súvisu so známymi zobrazovacími metódami. Ak miesto pripísania kóty t_A k bodu A_2 túto nanesieme od bodu A^+ v smere z, dostaneme bod A_2'' a tým aj upravené Klímovo zobrazenie (porovnaj obrazy č. 2 v [18*], resp. v práci [12]). Kóta t_A, vystupujúca v našom premietaní, je tu vynesená graficky. Ak súradnice z_A, t_A pripíšeme ku A_1, dostaneme dvojnásobne kótované premietanie Marlettovo (pozri 14). Ak položíme $y \equiv X$, $x \equiv Y$, $z \equiv Z$, $x \equiv T$ a kótu t_A bodu A nanesieme na rovnobežku s x, idúcej cez A_2 od jej priesečíka s osou z, dostaneme pôvodné Klímovo zobrazenie (porovnaj obraz 2 v práci [18*] s obr. 844 v [11*]). Z tohoto snadno podľa [8], obr. 15 prejdeme na Harantovu kótovane-axonometrickú metódu, resp. na ortogonálnu axonometriu v E_4 (pozri [8], obr. 16). Záverom treba podotknúť, že ak pri určovaní združených obrazov podpriestorov budeme užívať len kót $t = o$ alebo $t =$ konšt., t. j. vedľa priestoru Π budeme uvažovať o priestore $\Pi' \parallel \Pi$, pričom $vzd(\Pi \dashv \Pi') = kon\check{s}.$, dostávame sa k distančnej metóde, ktorej ídeu uviedol taliansky geometer Veronese v práci [20*].

Pomocou uvedenej zobrazovacej metódy sa ďalej dajú zostrojiť obrysy *hyperkvadrík* v E_4 a riešiť niektoré problémy s nimi spojené. Predložená zobrazovacia metóda je ďalej vhodná k riešeniu niektorých úloh o guľových plochách, – tzv. zobecnené úlohy Apolloniove na guľové plochy – pomocou *cyklografického premietania v* E_4. Ďalej podobne, ako sme zobrazili do Gaussovej roviny komplexné čísla, môžeme za model *hyperkomplexných čísiel* zobrať E_4 a tento v našom premietaní zobraziť, čím môžeme nájsť geometrickú interpretáciu problémov, ktoré sa týkajú hyperkomplexných čísiel. Konečne, ak súradnice t budú imaginárne, t. j. ak $t = ict'$, môžeme uvedenou zobrazovaciou metódou zobraziť model Minkowského štvorrozmerného časopriestoru. Tým je ovšem daný súvis nášho zobrazenia s Einsteinovou teóriou relativity.

Literatúra

[1] Baumgartner L., Geometrie im Raum von vier Dimensionen, München–Düsseldorf, 1952.

[2] Bertini, Introduzzione alla geometria projectiva degli iperspazi, 1923. Die deutsche Übersetzung ist von Duschek, Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionalen Räume, 1924, Wien.

[3] Čech E., Základy analytické geometrie, Praha, 1951.

[4] Čech E., Základy analytické geometrie, Praha, 1952.

[5] Eckhardt, Der vierdimensionale Raum, 1929.

[6] Gyarmathi L., A négydimenziós lineáris tér metrikus feladatainak megoldása a Maurin-féle leképzés alapján, Az elsö magy. matem. kongresszus közleményei, Budapest, 1951.

[7] Gyarmathi L., A vetítö térelemek alkalmazása a négydimenziós lineáris tér Maurin-féle leképzésében, Matem. Lapok, V. évf., 4. sz., Budapest, 1954.

[8] Harant M., Kótovano-axonometrická zobrazovacia metóda vo štvorrozmernom Euklidovskom priestore, Spisy, vyd. Prír. fak. MU, č. 379. Brno, 1956.

[9] Harant M., Klinagonálne zobrazovacia metóda v E_4, Acta facul. rerum nat., tom II, fasc. V–VII, Bratislava, 1957.

[9*] Harant M., Analytická geometria lineárnych útvarov II, skriptá, Bratislava, 1957.

[10] Hilbert D., Grundlagen der Geometrie, 7. Auflage, Leipzig–Berlin, 1930. (Русский перевод от Градштейна, Основениа геометрии, Москва–Ленинград,) 1948.

[11] Hlavatý V., Projektívní geometrie II, Praha, 1946.

[12] Klíma J., Deskriptívní geometrie čtyřrozměrného prostoru, Sborník SVŠT, spis 44, Brno, 1938.

[12*] Klíma J., K určení úhlu dvou rovin v prostoru čtyřrozměrném a některé úlohy s tím související, Čas. pro pěst. mat. a fys., roč. 62, Praha, 1933.

[13] Láska V., Užití kótovaného promítání v nomografii, Čas. pro pěst. mat. a fys., Praha, 1923.

[14] Marletta, Sulla projezzione quotata sopra un piano dello S_4, 1904.

[15] Maurin, Lecons de la position par une projection ortogonale dans E_4, Comptes Rendus Acad. Sci., p. 560–562, Paris, 1947

[16] Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen, 1907.

[17] Mehmke, Darstellende Geometrie der Räume von vier und mehreren Dimensionen, Württenberg. Math. nat. Mittgl., 6., 1904.

[18] Müller E., Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. I, bearbeitet von Kruppa, Die linearen Abbildungen, Leipzig–Wien, 1923.

[18*] Nagy L., Úlohy polohy v kótovane-Mongeovom zobrazení v E_4, Acta fac. rerum nat., tom. IV., fasc. III–V, 1959, Bratislava.

[19] Schoute, Mehrdimensionale Geometrie, Teil I, Die linearen Räume, Leipzig, 1902.
[20] Методы начертательной геометрии и его приложения, (сборник статей под редакцией Четверухина, Москва) 1955.
[20*] Veronese, Sulla geometria descrittiva a quatro dimensioni, Atti del seale Instituto Veneto, 1882.
[21] Vries H. de, Die vierte Dimension, Leipzig—Berlin, 1926.
[21*] Vries H. de, Zentralprojektionen im vierdimensionale Raume, Leipzig, 1905.
[22] Young W., Projective Geometry, 1938. (Русский перевод под редакцией КАГАНа, Проективная гешметрия, Москва) 1949.
[23] Weitzenböck, Der vierdimensionale Raum, Braunschweig, 1929.

Adresa autora: Výskumný ústav závlahového hospodárstva, Bratislava, Karloveská cesta 9.

Do redakcie dodané 15. 12. 1959

Метрические задачи в альтитудо-монжовом изображении в E_4

Л. Надь

Резюме

При решении задач положения в приведенном изображении в E_4 автор в работе [18+] указал на зависимость этих задач с метрическими. Решение последних является содержанием настоящей работы.

Работа разделена на три части. Первая часть посвящена *гадачам о перпендикулярности и растоянии подпространств*. В 1. определением 1.1, введено понятие проектирующего треугольника. На черт. 1.1 построена *истинная величина отрезка* при помощи констр. 1.1. В 2. автор занимается *прямой, перпендикулярной к пространству*. В теореме 2,2 доказывается, что если $k \perp \Sigma \not\equiv \Pi$, то $k_1 \perp p_1^\sigma$, $k_2 \perp n_2^\sigma$, $k_i \equiv o_i^\Sigma$. Конструкция 2.1, касающаяся построения прямой $\begin{Bmatrix} k \\ k' \end{Bmatrix}$ перпендикулярной к Σ $\left\{\begin{matrix}\text{в точке } E \\ \text{проходящую через } E\end{matrix}\right\}$ проведена на черт. 2. На том же чертеже проведена также констр. 2.2 — построение расстояния точки К от пространства Σ. В 3. — „*Дальнейщие гадачи о перпендикуляности и растоянии*" — проведены следующие конструкции: констр. 2,1 — точкой $E \not\ni k$ вести пространство Σ, перпендикулярное к данной прямой k — проведена на черт. 3; на чертеже 8 проведены конструкции 2,2—2,4: — точкой $B \in \alpha$ вести плоскость $\kappa \perp \alpha$; определить ортогональную проекцию B^α точки B в α; наконец, прямой

$x \ni S \equiv \alpha \cap \beta$ вести плоскость ξ, одновременно полопараллельную к α и β причем α, $\beta \not\subset \Sigma$.

В второй части автор занимается с истинными величинами фигур, *лежяших в подпространствах;* 1. говорит о *вращении пространства Σ в Π.* Определением 1.1 отличены понятия вращения и совмещения. В теор. 1.1 говорится о пространственном аффинном соответствии между Σ_0 и Σ; в теор. 1.2 опять о совместном перспективном аффинном соответствии между сопряженными изображениями фигуры и соответствующими сопряженными изображениями его поворoченного положении в плоскостьях π и ν. На черт. 4. поворочено общое пространство Σ вокруг σ в Π и при помощи этого вращения определен его угол с Π при помощи констр. 1.1. На том же чертеже проведена конст. 1.2. Совмещить пространство $\Omega \perp \Pi$ в Π. На черт. 5. построен при помощи констр. 1.3 правильный пятьсимплех $D\,F\,G\,K\,R$. 2. говорит о *вращении плоскости.* На черт. 6. совмещена общая плоскость α в π. На том же чертеже изображена констр. 2.2: потсроить истинную величину треугольника $E\,F\,G \subset \alpha$ и линию найбольшого ската $o^{\alpha} \in F$ общей плоскости α. Теор. 2.1 говорит о том, что между плоскостьями α_1 и $[\alpha_1^o]$ существует соответствие общих аффинных полей.

Часть III. называется *,,Задачи о углох подпространств".* В 1. автор занимается *углом прямой p и подпространсв E_r* $(0 < r < 4)$. Констр. 1.1 определения угла γ двух пересекающихся прямых проведена на черт. 6. На черт. 7. переведена констр. 1.2: Становить угол ϕ прямой $\Gamma \equiv EF$ и пространства $\Sigma = (\sigma, E)$. В 2. автор занимается *углами двух плоскостей.* На черт. 19а, б.) построена констр. 2.1, найти углы ${}^1\phi$, ${}^2\phi$ плоскости α и плоскости проекцией ν.

В последной части указано на *связъ приведенного изображения с двугими изображениями*, главным образом с изображением Климовим, так оригинальным, как обработанным, с изображением Марлеттовым, Гарантовым, Веронезеовым. В дальнейшем обоснованоприменение метода альтитудо-Монжа нацыклографическое изображение в E_4, на изображение гиперкомплексных чисел и на изображение временного пространства Минковского.

Massaufgaben in Kotierte-Monge Abbildung in E_4

L. Nagy

(Zusammenfassung)

Bei der Lösung der Lagenaufgaben in der angeführten Abbildung in E_4 der Autor hat in der Arbeit [18*] auf Zusammenhang dieser Lösungen mit Maßaufgaben hingewesen. Ihre Lösungen sind das Ziel dieser Arbeit.

Im 1. Kapitel, *„Aufgaben über die Ortogonalität und Abstand der Unterräume“* im 1. Abschnitt *die wahre Länge der Strecke* führt man mittels Def. 1,1 den Begriff des projizierendes Dreieck ein und in Abb. 1 konstruiert man mittels Konstr. 1,1 diese Länge. Der 2. Abschnitt behandelt *die Normale zum Raume.* In Satze 2,2 behauptet man, daß wenn $k \perp \Sigma \not\equiv \Pi$ ist, dann $k_1 \perp p_1^{\sigma}$, $k_2 \perp n_2^{\sigma}$, $k_i \equiv o_i^{\Sigma}$. Die Konstr. 2,1: es wird die Normale $\begin{Bmatrix} k' \\ k \end{Bmatrix}$ zu Σ $\begin{Bmatrix} \text{in Punkte } E \in \Sigma \\ \text{aus dem Punkte } E \notin \Sigma \end{Bmatrix}$ konstruiert, ist in Abb. 2. gelößt. In dieser Abb. ist auch die Konstr. 2,2: es wird der Abstand des Punktes K vom Raume Σ bestimmt, eingeführt. In Abschnitt *„Weitere Aufgaben über die Ortogonalität und Abstand“* sind die folgenden Konstruktionen eingeführt Konstr. 2,1: es wird durch den Punkt $E \notin k$ ein Raum Σ, die zu gegebene Gerade k normal ist, führen, ist in Abb. 3. durchgeführt; in Abb. 8. sind die Konstr. 2,2–2,4 durchgeführt: durch den Punkt $B \in \alpha$ wird die Ebene $\kappa \perp \alpha$ geführt; es wird die Ortogonalprojektion B^{α} des Punktes B in α bestimmt; schließlich durch die Gerade $x \ni S \equiv \alpha \cap \beta$ wird die Ebene ξ geführt, die halbnormal zu α und gleichzeitig halbparallel zu α, β (wo $\alpha, \beta \not\subset \Sigma$) ist.

In Kapitel II. behandelt man *die wahre Größe der Figur,* die in Unterräumen liegen. Der 1. Abschnitt spricht über *die Rotation des Raumes Σ in Π.* Mittels der Def. 1,1 sind die Begriffe der Rotation und Umklappung unterschieden. Im Satze 1,1 spricht man über die räumliche Affinität zwischen der Σ_0 und Σ; im Satze 1,2 wider über die perspektive Affinität in Doppelebene zwischen den zugeordneten Abbildungen der Figur und zugehörigen zugeordneten Abbildungen ihrer rotierten Lage in den Ebenen π und ν. In Abb. 4. ist der allgemeine Raume Σ um σ in Π rotiert und mittels dieser Rotation ist der Winkel ξ mit Π mittels der Konstr. 1,1 bestimmt. In dieser Abbildung ist auch die Konstr. 1,2 durchgeführt: es wird der Raum $\Omega \perp \Pi$ in Π umklappen. In Abb. 5. ist mittels Konstr. 1,3 die reguläre Fünfsymplex *DFGKR* konstruiert. Im Abschnitt 2. spricht man über *die Rotation der Ebene.* In Abb. 6. ist eine allgemeine Ebene α in π rotiert. In dieser Abbildung ist auch die Konstr. 2,2 dargestellt: es wird die wahre Größe des Dreiecks $EFG - \alpha$ und die Fallgerade $o^{\alpha} \ni F$ einer allgemeiner Ebene α konstruiert. Der Satz 2,1 spricht davon, daß zwischen der Ebenen α_1 und (α_1^{o}) die Beziehung der allgemeinen afinen Felder im Doppelsraum existiert.

Das Kapitel III hat die Überschrift *„Aufgaben über die Winkeln der Unterräume"*. Im 1. Abschnitt behandelt man *den Winkel der Gerade p mit den Unterräumen* $E_r(0 < r < 4)$. Die Konstr. 1,1: es wird der Winkel γ zweier sich schneidender Geraden $f \wedge g$ bestimmt, ist in Abb. 6. durchgeführt. In Abb. 7. ist die Konstr. 1,2 gelößt: es wird der Winkel ϕ der Gerade $l \equiv EF$ mit dem Raume $\Sigma \equiv (\sigma, E)$ bestimmt. Im 2. Abschnitt behandelt man *die Winkeln zweier Ebenen*. In Abb. 8a, b. ist die Konstr. 2,1 dargestellt: es sind die Winkeln $^1\phi$, $^2\phi$ der Ebene α und der projizierende Ebene v zu finden.

Im Schlußkapitel IV. ist *der Zusammenhang der angeführten Abbildung mit anderen Abbildungen gegeben*, hauptsachlich mit der Abbildung von Klíma (und das so wie mit der urspringlichen so auch mit der verbesserten), von Marletta, von Harant, von Veronese. Im Weiteren begründet man die Aplikabilität der kotierte-Monge-Abbildung auf die zyklographische Abbildung in E_4, auf die Abbildung der hyperkomplexen Zahlen und auf die Abbildung des Minkowskischen Zeitraumes.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. V, 8–10 MATEMATICA, 1961]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. V., FASC. VIII-X. MATHEMATICA 1961

Transformácie lineárnych projektívnych bodových sústav a niektoré dôsledky pre kužeľosečky

Vl. Piják

I. Nech v euklidovskej rovine sú dané dve lineárne projektívne bodové sústavy

$$p(A, B, C, \ldots) \overline{\wedge}\, q(A', B', C', \ldots), \tag{1}$$

ktorých nositeľky p, q v kartézskej súradnicovej sústave sú dané parametrickými rovnicami

$$x = t, y = 0; x = lt, y = mt, m \neq 0; \tag{2}$$

projektívnosť sústav (1) nech je vyjadrená vzťahom

$$t' = \frac{at+b}{ct+d}, \quad \begin{vmatrix} ab \\ cd \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3}$$

kde t, t' sú parametre prislúchajúce ľubovoľnej dvojici korešpondujúcich si bodov sústav (1) a kde t nadobúda všetky hodnoty z intervalu $(-\infty, +\infty)$, pre ktoré $ct + d \neq 0$.

Spojnica korešpondujúcich si bodov o parametroch t, t' má rovnicu

$$(ma-cy)\,t^2+\Big((al-d)\,y-amx+mb\Big)t+lby-mbx = 0. \tag{4}$$

V prípade $b = 0$ tvoria všetky spojnice zväzok priamok; ak $b \neq 0$ je, podľa známej vety, obálkou všetkých spojníc (4) kužeľosečka

$$a^2m^2x^2+\Big((al-d)^2+4bcl\Big)y^2-2m\Big(a(al-d)+2bc\Big)xy+2abm^2x-$$
$$-2bm(al+d)\,y+b^2m^2 = 0. \tag{5}$$

Ak $c = 0$ má (5) tvar

$$a^2m^2x^2 + (al - d)^2 y^2 - 2am(al - d)\,xy + 2abm^2x -$$
$$- 2bm(al + d)\,y + b^2m^2 = 0, \tag{6}$$

čo je rovnica paraboly, pretože

$$\begin{vmatrix} a^2m^2 & -am(al-d) \\ -am(al-d) & (al-d)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Kužeľosečka (5) dotýka sa priamky p v bode

$$R\left(-\frac{b}{a},\ 0\right) \tag{7}$$

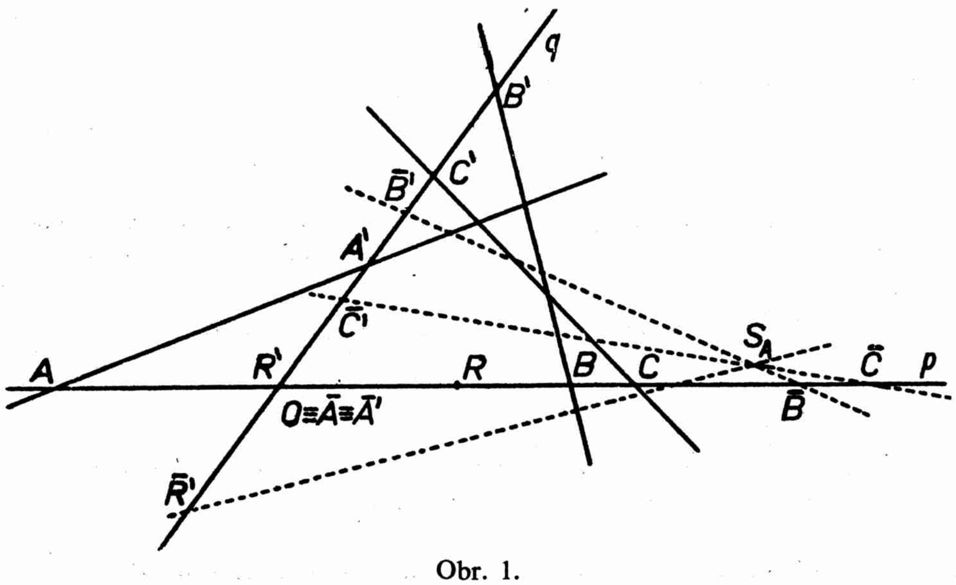
a priamky q v bode

$$Q'\left(l\,\frac{b}{d},\ m\,\frac{b}{d}\right). \tag{8}$$

Ak $a = 0$ ($d = 0$) je kužeľosečka (5) hyperbolou a priamka $p(q)$ je jej asymptotou.

II. Nech $\mathbf{P}_A$ je také posunutie bodovej sústavy $p(A, B, C, \ldots)$, ktoré prevádza bod A do bodu $O \equiv (p \,.\, q)$; $\mathbf{P}'_{A'}$ také posunutie bodovej sústavy $q(A', B', C', \ldots)$, ktoré prevádza bod A' do bodu O. Ak sa vykonajú posunutia $\mathbf{P}_A$, $\mathbf{P}'_{A'}$ prejdú sústavy (1) do sústav

$$p(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \ldots)\ \bar{\bar{\wedge}}\ q(\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}', \ldots),$$



Obr. 1.

ktoré pretože majú jeden samodružný bod $\bar{A} \equiv \bar{A}'$ sú perspektívne. Spojnice korešpondujúcich si bodov prechádzajú teraz jedným bodom — stredom perspektivnosti S_A alebo sú rovnobežné (obr. 1).

Nazvime posunutia $\mathbf{P}_A$, $\mathbf{P}'_{A'}$ posunutiami *priradenými* k dvojici v (1) si korešpondujúcich bodov A, A'. Potom platí veta

Veta 1. *Ak obálkou spojníc korešpondujúcich si bodov sústav (1) nie je parabola, je množinou stredov perspektívností perspektívných bodových sústav, vzniklých zo sústav (1) posunutiami $\mathbf{P}_X$, $\mathbf{P}'_{X'}$ priradenými ku všetkým dvojiciam X, X' v (1) si korešpondujúcich bodov, hyperbola, ktorej asymptotami sú priamky p, q.*

Dôkaz. Nech vo vzťahu (3) je $c \neq 0$ a nech body $X(t, 0)$, $X'\left(l\dfrac{at+b}{ct+d}, m\dfrac{at+b}{ct+d}\right)$, kde t nadobúda všetky hodnoty z intervalu $(-\infty, +\infty)$ $\left(t \neq -\dfrac{d}{c}\right)$, sú korešpondujúce si dvojice bodov sústav (1). Preveďme pre sústavy (1) posunutia $\mathbf{P}_X$, $\mathbf{P}'_{X'}$ priradené dvojici v (1) si korešpondujúcich bodov, príslušných hodnote parametra $t = t_X$ $\left(\text{t. j. posunutia priradené k dvojici } (t_X, 0), \left(l\dfrac{at_X+b}{ct_X+d}, m\dfrac{at_X+b}{ct_X+d}\right)\right)$. Posunutiami $\mathbf{P}_X$, $\mathbf{P}'_{X'}$ prejdú body X, X' do bodov $\bar{X}(t - t_X, 0)$, $\bar{X}'\left(l\dfrac{(t_X-t)(bc-ad)}{(ct+d)(ct_X+d)}, m\dfrac{(t_X-t)(bc-ad)}{(ct+d)(ct_X+d)}\right)$, ktorých spojnica má rovnicu

$$m(bc-ad)\,x-\Big(l(bc-ad)+d(ct_X+d)\Big)y+m(bc-ad)\,t_X-$$

$$-t\Big((ct_X+d)\,cy+m(bc-ad)\Big)=0. \tag{9}$$

Ak je $ct_X + d \neq 0$ je pre konštantné t_X (9) rovnicou zväzku priamok. Stred S_X tohto zväzku t. j. stred perspektivnosti posunutých bodových sústav (1) má súradnice

$$x = -\frac{l(bc-ad)+(ct_X+d)^2}{c(ct_X+d)}, \quad y = -\frac{m(bc-ad)}{c(ct_X+d)}, \tag{10}$$

ktoré sa vypočítajú riešením rovníc

$$m(bc-ad)\,x-\Big(l(bc-ad)+d(ct_X+d)\Big)\,y+m(bc-ad)\,t_X=0,$$

$$(ct_X + d)\,cy + m(bc - ad) = 0.$$

Ak $ct_X + d = 0$ je $t_X = -\dfrac{d}{c}$ a k bodom $Q\left(-\dfrac{d}{c}, 0\right)$ $(d = 0)$, $U\left(-\dfrac{d}{c}, 0\right)$ $(d \neq 0)$ neexistujú korešpondujúce body Q', U' – teda ani posunutia $\mathbf{P}'_{Q'}$, $\mathbf{P}'_{U'}$. V prípade $d \neq 0$ druhá dotyčnica kužeľosečky (5) idúca bodom U je rovnobežná s nositeľkou q. Prípad $d = 0$ bol spomenutý v I. Pre $t_X = -\dfrac{d}{c}$ je (9) rovnicou sústavy priamok rovnobežných s q.

Pre posunutia $\mathbf{P}_X, \mathbf{P}'_{X'}$ priradené ku všetkým dvojiciam X, X' v (1) si korešpondujúcich bodov, nadobúda parameter t_X všetky hodnoty z intervalu $(-\infty, +\infty)$ $\left(t_X \neq -\dfrac{d}{c}\right)$ a rovnice (10) sú parametrickými rovnicami množiny stredov S_X.

Vylúčením parametra t_X z (10) obdrží sa pre stredy perspektívností S_X rovnica

$$lc^2y^2 - mc^2xy - m^2(bc - ad) = 0, \tag{11}$$

ktorá je ekvivalentná s rovnicami (10), ak t_X nadobúda všetky hodnoty z intervalu $(-\infty, +\infty)$ $\left(t_X \neq -\dfrac{d}{c}\right)$. Rovnica (11) je rovnicou hyperboly, a to regulárnej, pretože

$$\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{m}{2}c^2 \\ -\dfrac{m}{2}c^2 & lc^2 \end{vmatrix} = -\frac{m^2}{4}c^4 < 0$$

a jej diskriminant

$$D = -\frac{m^4c^4}{4}(bc - ad) \neq 0.$$

Rovnice asymptot hyperboly (11) dostanú sa z rovnice

$$-\frac{m^2c^6l}{4}y^2 + \frac{m^3c^6}{4}xy - \frac{m^4c^4}{4}(bc-ad) + \frac{m^4c^4}{4}(bc-ad) = 0.$$

Po úprave je

$$y(ly - mx) = 0,$$

z čoho

$$y = 0, \; ly - mx = 0$$

sú rovnice jednotlivých asymptot. Sú to zrejme aj rovnice priamok p, q.

Veta 2. *Ak obálkou spojníc korešpondujúcich si bodov sústav (1) je parabola, sú spojnice korešpondujúcich si bodov perspektívných bodových sústav, vzniklých zo sústav (1) posunutiami $\mathbf{P}_X$, $\mathbf{P}'_{X'}$ priradenými ku všetkým dvojiciam X, X' v (1) si korešpondujúcich bodov, rovnobežné s osou tejto paraboly.*

Dôkaz. Ak sa v (9) položí $c = 0$ je

$$amx - (al - d)y + am(t_X - t) = 0 \tag{12}$$

rovnicou spojnice korešpondujúcich si bodov $\overline{X}, \overline{X}'$ perspektívnych bodových sústav, vzniklých zo sústav (1) ($c = 0$) posunutiami $\mathbf{P}_X, \mathbf{P}'_{X'}$ priradenými ku dvojici v (1) si korešpondujúcich bodov, príslušných hodnote parametra $t = t_X$.

Rovnica (12) vyjadruje pre každé konštantné t_X a meniace sa t sústavu rovnobežných priamok o smernici

$$k = \frac{am}{al-d}, \quad al-d \neq 0. \tag{13}$$

Smernica osi paraboly (6) sa dostane z rovnice

$$(a^2m^2 - \varrho)\cos\alpha - am(al - d)\sin\alpha = 0,$$

kde $\varrho = 0$ je nulový koreň charakteristickej rovnice kužeľosečky, danej rovnicou (6). Je teda

$$a^2m^2\cos\alpha - am(al - d)\sin\alpha = 0,$$

z čoho

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = k = \frac{am}{al-d}, \quad al-d \neq 0.$$

Je to zrejme smernica (13). Tým je veta 2 dokázaná.

Veta 3. *Dotykové body dotyčníc kužeľosečky* (5) ($c \neq 0$) *rovnobežných s nositeľkami sústav* (1) *sú bodmi hyperboly* (11).

Dôkaz. Nech v rovnici (5) je $c \neq 0$; potom je zrejmé, že kužeľosečka (5) je regulárnou elipsou, resp. hyperbolou a že, ak $p(q)$ nie je asymptotou, existujú k nej dotyčnice ${}^1p//p$ a ${}^1q//q$ s dotykovými bodmi ${}^1R$ a ${}^1Q'$. Súradnice dotykových bodov ${}^1R$ a ${}^1Q'$ vypočítajú sa riešením rovníc

$$a^2mx - \Big(a(al-d) + 2bc\Big)y + abm = 0, \ a \neq 0, \tag{14}$$

$$m(ad - 2bc)x - \Big(l(ad - 2bc) - d^2\Big)y - bdm = 0, \ d \neq 0 \tag{15}$$

s rovnicou (5) ($c \neq 0$), kde (14) je rovnica priemeru združeného k dotyčnici $p//{}^1p$ a (15) rovnica priemeru združeného k dotyčnici $q//{}^1q$. Riešenie rovnice (14) a (5) ($c \neq 0$) dáva

$$x = -\frac{b}{a}, \quad y = 0,$$

čo sú súradnice bodu daného (7) a

$$x = \frac{a(al-d) + bc}{ac}, \quad y = \frac{am}{c}, \tag{16}$$

čo sú súradnice dotykového bodu ${}^1R$.

Obdobne riešenie (15) a (5) ($c \neq 0$) dáva

$$x = l\frac{b}{d}, \quad y = m\frac{b}{d},$$

čo sú súradnice bodu daného (8) a

$$x = -\frac{l(bc-ad)+d^2}{cd}, \quad y = -\frac{m(bc-ad)}{cd}, \tag{17}$$

čo sú súradnice dotykového bodu ${}^1Q'$.

Dosadením za x, y do rovnice (11) z výrazov (16) a (17) sa ľahko ukáže, že dotykové body ${}^1R$ a ${}^1Q'$ ležia na hyperbole (11).

Veta 4. *Stredom perspektivity bodových sústav na priamkach p a q, ktoré vzniknú posunutím dotykového bodu priamky p(q) s kužeľosečkou (5) ($c \neq 0$) do priesečníka $O \equiv (p \,.\, q)$, je dotykový bod kužeľosečky (5) ($c \neq 0$) s dotyčnicou rovnobežnou s p(q).*

D ô k a z. Podľa (7) a (8) kužeľosečka (5) dotýka sa nositeliek p, q sústav (1) v bodoch R, Q'. Nech $\boldsymbol{P}_R$ je posunutie bodovej sústavy na p, pri ktorom dotykový bod R na p prejde do bodu $O \equiv (p \,.\, q)$ (posunutie $\boldsymbol{P}'_{R'}$ je nulové, pretože bodu R korešponduje bod $R' \equiv O$); po vykonaní posunutia $\boldsymbol{P}_R$, ktorému prislúcha parameter $t_R = -\frac{b}{a}$, $a \neq O$, prejdú sústavy (1) do sústav perspektívnych a za predpokladu $c \neq 0$ stredom tejto perspektivity je bod S_R, ktorý ako sa ukáže, je totožný s dotykovým bodom ${}^1R$, ktorého súradnice sú dané (16).

Súradnice bodu S_R sa obdržia, ak do rovníc (10) dosadí sa $t_X = -\frac{b}{a}$, $a \neq 0$. Bude teda

$$x = -\frac{l(bc-ad)+\left(-\frac{bc}{a}+d\right)^2}{c\left(-\frac{bc}{a}+d\right)} = \frac{a(al-d)+bc}{ac},$$

$$y = -\frac{m(bc-ad)}{c\left(-\frac{bc}{a}+d\right)} = \frac{am}{c},$$

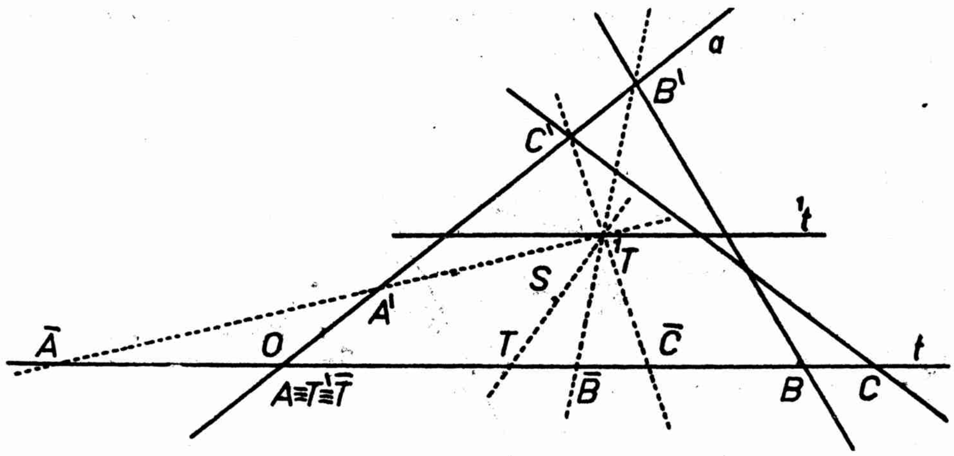
čo je (16).

Obdobne posunutie $\boldsymbol{P}'_{Q'}$ ($\boldsymbol{P}_Q$ je nulové) bodovej sústavy na q, pri ktorom prejde dotykový bod Q' na q do bodu $O \equiv Q$, uvedie sústavy (1) do polohy perspektívnej. Stredom tejto perspektivity bude bod S_Q. Jeho súradnice sa obdržia ak do rovníc (10) dosadí sa $t_X = 0$, za predpokladu, že $d \neq 0$. Dosadenie dáva zrejme (17).

III. Uvedené vety, najmä však vetu 2 a vetu 4, možno použiť pri riešení kužeľosečiek v úlohách, ktoré sa obvykle riešia pomocou vety Brianchonovej. V niektorých prípadoch je postup riešenia značne jednoduchší, ako postup pri ktorom sa používa veta Brianchonová. Okrem iných, obzvlášť jednoducho a rychlo dajú sa riešiť nasledujúce úlohy:

Príklad 1. Kužeľosečka $k \equiv (t, T, a, b, c)$. Úlohou je zostrojiť jej stred.

Riešenie. Nech dotyčnica t s bodom dotyku T a jedna z dotyčníc napr. a sú nositeľky projektívných bodových sústav, ktoré zvyšné dotyčnice kužeľosečky k na nich indukujú (obr. 2). Potom bude $t(T, B, C, \ldots) \;\overline{\wedge}\; a\,(T', B', C', \ldots)$.

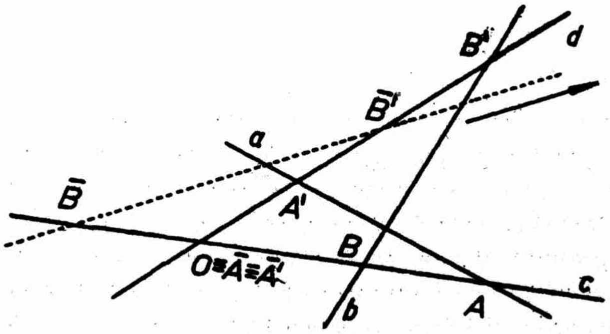


Obr. 2.

Podľa vety 4 posunutie $\boldsymbol{P}_T$ bodovej sústavy na t pri ktorom bod T prejde do bodu $T' \equiv (t \,.\, a)$ vedie k stredu perspektivity ${}^1T$, ktorý je bodom dotyku kužeľosečky k s dotyčnicou ${}^1t // t$. Stred S úsečky $T\,{}^1T$ je stredom kužeľosečky k. Bod $A' \equiv (\bar{A}\,{}^1T \,.\, a)$ je bodom dotyku kužeľosečky k s dotyčnicou a.

Príklad 2. Parabola p je daná dotyčnicami a, b, c, d (vo všeobecnej polohe); úlohou je najsť smer osi paraboly p.

Riešenie. Nech napr. c, d sú nositeľky podobných bodových sústav $c\,(A, B, \ldots)$, $d\,(A', B', \ldots)$, ktoré zvyšné dotyčnice paraboly p na nich indukujú (obr. 3).

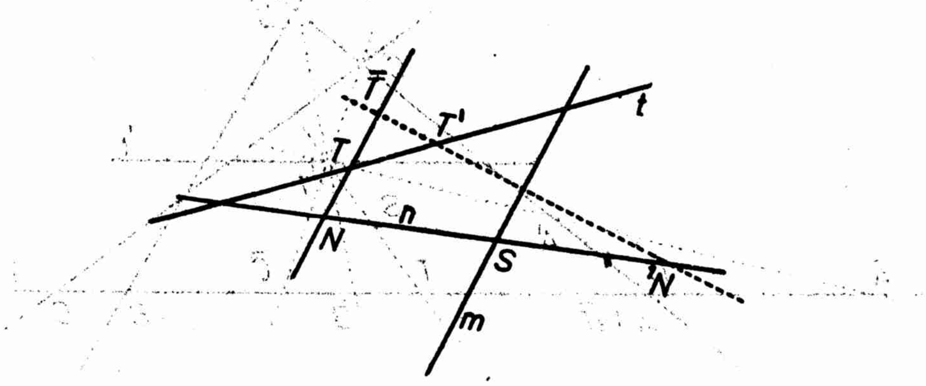


Obr. 3.

Ak sa vykonajú napr. posunutia P_A, $P'_{A'}$ týchto sústav potom podľa vety 2, spojnica $\bar{B}\bar{B}'$ bude rovnobežná s osou paraboly p.

Príklad 3. Kužeľosečka k je daná združenými priemermi m, $n \equiv N\,{}^1N$ a dotyčnicou t. Je potrebné zostrojiť dotykový bod na t.

Riešenie. Konštrukcia vyplýva z vety 4 a je zrejmá z obr. 4. Je totiž $T\overline{T} = NT$ a $T' \equiv (\overline{T}{}^1N \,.\, t)$ hľadaný bod dotyku.



Obr. 4.

Do redakcie dodané: 31. 1. 1960

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2

Преобразования прямолинейных проективных рядов точек и некоторые следствия для конических сечений

В. Пияк

Резюме

В статье рассмотрены некоторые преобразования двух разных проективных прямолинейных рядов точек, которыми ряды точек переходят в перспективное положение. Центры этих перспективностей находится на гиперболе, для которой носители данных рядов точек являются асимптотами. Если огибающая прямых, соединяющих соответствующие точки данных рядов точек является параболой, то прямые соединяющие соответствующие точки преобразованых рядов точек параллельны оси этой параболы. В дальнейшем получены некоторые применения для построения конических сечений.

Die Transformationen der linearen projektiven Punktreihen und einige Folgerungen für die Kegelschnitte

Vl. Piják

Zusammenfassung

In diesem Artikel behandelt man bestimmte Transformationen der zwei verschiedenen linearen projektiven Punktreihen, welche die gegebenen Punktreihen in perspektive Lage überführen. Die Zentren dieser Perspektivitäten liegen auf einer Hyperbel, für die die Träger der gegebenen Punktreihen Asymptoten sind. Wenn die Biegungskurve der Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte der gegebenen Punktreihen eine Parabel ist, sind die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte transformierter Punktreihen parallel mit der Achse dieser Parabel. Folgend findet man einige Anwendungen für die Konstruktion der Kegelschnitte.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

sú fakultný sborník určený k publikáciam vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých ašpirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracovávajú materiál získaný za dobu pobytu na našej fakulte. Redakčná rada vyhradzuje si právo z tohto pravidla urobiť výnimku.

Práce musia byť doporučené katedrou. Práce študentov musia byť doporučené študentskou vedeckou spoločnosťou a príslušnou katedrou.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom alebo anglickom, francúzskom alebo nemeckom. Práce podané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, ob riadok, tak aby jeden riadok tvorilo 60 úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na účet autora.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšete názov práce, pod to meno autora. Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, sa uvádzajú všetky pracoviská. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba ich obidve uviesť.

Fotografie načim podať na čiernom lesklom papieri a uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba previesť tušcm na priehladnom papieri (pauzák) alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť meno autora, zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať resumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam, publikovaným v cudzom jazyku, načim pripojiť resumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom v prípade publikácie v ruskom jazyku, alebo v ruskom jazyku v prípade publikácie v jazyku západnom. **Nezabudnite pri resumé uviesť vždy názov práce a meno autora v rovnakom poradí ako v základnom texte.** Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a zlámané korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny behom korektúry idú na ťarchu autorského honoráru. Každý autor dostane okrem príslušného honoráru i 50 separátov.

Redakčná rada.

Práce pôvodné

Бенадо М.: К общей теории частично упорядоченных множеств 397
Бенадо М.: Теория мультирешеток и ее значение в алгебре и геометрии 431
Szász G.: Translationen der Verbände 449
Kolibiar M.: Bemerkungen über Translationen der Verbände 455
Šik F.: Über die Kommutativität einer Klasse archimedisch geordneter Halbgruppen 459
Barvínek E.: O rozložení nulových bodů řešení lineární diferenciální rovnice $y'' = Q(t)y$ a jejich derivací 465
Svitek V.: Syntetický dôkaz vety o incidencii bodu a nadroviny v m-rozmernom priestore P 475
Šajda J.: O niektorých vlastnostiach iterovaných jadier Fredholmových integrálnych rovníc 483
Ficker V.: Une amélioration de la méthode de Runge—Kutta—Nyström pour la résolution numérique des équations différentielles du deuxième ordre 503
Nagy L.: Metrické úlohy v kótovane-Mongeovom zobrazení v E_4 553
Piják Vl.: Transformácie lineárnych projektívnych bodových sústav a niektoré dôsledky pre kužeľosečky 577

Resumé

Benado M: K všeobecnej teórii čiastočne usporiadaných množín 429
Benado M.: Teória multisväzov a jej význam v algebre a geometrii 448
Szász G.: Translácia sväzov 453
Kolibiar M.: Poznámky k transláciám sväzov 458
Šik F.: Komutativita jedné třídy archimedovsky uspořádaných pologrup 463
Барвинек Э.: О размещении нулевых и экстремальных значений решений дифференциального уравнения $y'' = Q(t)y$ 472
Свитек В.: Синтетическое доказательство теоремы об инцидентности точки и гиперплоскости в m-размерном пространстве P 481
Шайда Й.: О некоторых свойствах итерированных ядер интегральных уравнений типа Фредгольма 500
Ficker V.: Zostrenie Runge—Kutta—Nyströmovej metódy pre numerické riešenie diferenciálnej rovnice druhého řádu 552
Надь Л.: Метрические задачи в альтитудо-монжовом изображении в E_4 573
Пияк В.: Преобразования прямолинейных проективных рядов точек и некоторые следствия для конических сечений 584

Benado M.: Sur la théorie générale des ensebles partiellement ordonnés 429
Benado M.: La théorie des multitreillis et son rôle en Algèbre et en Géometrie 448
Сас Г.: Трансляции решеток 453
Колибиар М.: Заметки к трансляциям решеток 458
Шик Ф.: О коммутативности одного класса архимедовых упорядоченных полугрупп 464
Barvínek E.: Über die Verteilung der Nullstellen der Lösungen und ihrer Ableitungen der linearen Differentialgleichung $y'' = Q(t)y$ 473
Svitek V.: Ein synthetischer Beweis des Satzes von der Incidenz des Punktes und der Überebene im m-Dimensionalen Raume P_m 481
Šajda J.: Über einige Eigenschaften der iterierten Kerne der Integralgleichungen des Fredholmschen Typus 501
Фиккер В.: Улучшение метода Рунге—Кутта—Нистрёма для численного решения дифференциального уравнения второго порядка 552
Nagy L.: Maßaufgaben in Kotierte-Monge Abbildung in E_4 575
Piják Vl.: Die Transformationen der linearen projektiven Punktreihen und einige Folgerungen für die Kegelschnitte 585