

Werk

Titel: Physica

Jahr: 1960

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?312899653_0005|log5

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

[ACTA F. R. N. COMEN. V, 7, PHYSICA, 1961]

ACTA
FACULTATIS RERUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. V

FASC. VII

PHYSICA

PUBL. III

1961

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVO BRATISLAVA

REDAKČNÁ RADA:

Prof. dr. O. FERIANC
Doc. dr. J. FISCHER
Prof. Ing. M. FURDÍK

Doc. dr. A. GREGUŠ C. Sc.
Prof. dr. J. A. VALŠÍK

REDAKČNÝ KRUH:

Prof. dr. M. Dillinger
Doc. dr. R. Herich
Doc. Ing. J. Hladík
Doc. dr. A. Huťa
Doc. dr. M. Kolibiar
Člen korešp. SAV prof. dr. M. Konček
Doc. dr. L. Korbel

Doc. dr. J. Májovský
Doc. M. Mrciak
Člen korešp. SAV prof. dr. E. Pastýrik
Prof. dr. J. Srb
Prof. Ing. S. Stankoviánsky
Doc. dr. M. Sypták

Sborník Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Vydává Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasínkova 5, čís. tel. 458-51. Povolilo Povereníctvo kultúry číslom 2265/56-IV/1. — Tlač: TISK, knižní výroba, n. p., závod Brno, provozovna 11.

F 15 1248 — R

**Príspevok k optickému vyšetrovaniu stojatej ultrazvukovej vlny
v priehľadnej kvapaline**

S. KOLNÍK

Úvod

Optickým vyšetrovaním ultrazvukového poľa v priehľadných látkach, obzvlášť kvapalinách sa zaoberal už rad autorov, najmä však E. P. Tawil [1], P. Debye a F. W. Sears [2], R. Lucas a P. Biquard [3], Ch. Bachem, E. Hiedemann, H. R. Asbach [4], S. Parthasarathy [5], O. Nomoto [6], a iní, ktorých výsledky prehľadne uvádza napr. známa kniha L. Bergmanna [7].

Predložená práca podáva príspevok k riešeniu problému priameho zobrazenia stojatej ultrazvukovej vlny v kvapaline a uvádza rozbor možností takéhoto zobrazenia za použitia rôznych typov symetrického zásahu v ohniskovej rovine zobrazovacej sústavy. Pritom sa vychádza z nasledovných predpokladov:

α) Svetelnú vlnu, vytvorenú sústavou kolimátora s lineárnou štrbinou, pretínajúcou optickú os, možno v prvom priblížení považovať za rovinnú.

β) V kvapaline so zanedbateľnou viskozitou je možné harmonický priebeh zmeny indexu lomu vyvolať ultrazvukovou vlnou, pokiaľ jej intenzita nie je značná.

γ) Moduláciou indexu lomu vyvolané porušenie monochromatickosti svetla je zanedbateľné.

δ) Absorpciu svetla i ultrazvuku v kvapaline možno zanedbať.

ϵ) Pri riešení zobrazenia ako dôsledku ohybu svetla na objekte možno objekt nahradiť rovinnou objektovou funkciou.

Tieto predpoklady dovoľujú zamerať teoretické i experimentálne vyšetovanie tak, že umožňuje rad rôznych, doteraz známych metód zobrazovania posudzovať z jedného hľadiska a súčasne navrhnúť ďalšie nové metódy zobrazovania a vyšetovania ultrazvukových pólí.

I. Teoretická časť

A. Stanovenie zobrazovacej funkcie

Uvažujme monochromatickú rovinnú svetelnú vlnu, postupujúcu v smere osi Z . Predpokladajme ju v tvare

$$r = r_0 \sin \omega \left(t - \frac{z}{v} \right). \quad (1)$$

Nech táto vlna dopadá kolmo na planparalelnú priehľadnú vrstvu hrúbky d . Predpokladajme ďalej, že absolútny index lomu vo vrstve má charakter stojatej vlny tvaru

$$n = n_0 + n'' \cos \frac{2\pi x}{\Lambda} \cos \Omega t. \quad (2)$$

Takýto priebeh indexu lomu možno realizovať v prvom priblížení stojatou ultrazvukovou vlnou kruhovej frekvencie Ω , vlnovej dĺžky Λ v kvapaline o statickom indexe lomu n_0 , pričom n'' udáva amplitúdu zmeny indexu lomu.

Postavme si úlohu vyšetriť možnosť optického zobrazenia takéhoto „objektu“ objektívom bez aberácií pri uvedenom spôsobe osvetľovania. Pre zjednodušenie výpočtu namiesto vrstvy hrúbky d budeme uvažovať rovinný objekt, „štruktúru“, vytvárajúcu také fázové a amplitúdové ovplyvnenie svetla ako vrstva. (Tento predpoklad samozrejme znemožňuje vyšetrovať niektoré efekty súvisiace s prechodom svetla vrstvou prostredia s periodicky rozloženými nehomogenitami; pre riešenie našej úlohy je však výhodný.)

Keďže index lomu nezávisí na súradnici y , meranej kolmo k rovine XZ , je možné štruktúru považovať za jednorozmernú a charakterizovať ju komplexnou objektovou funkciou $O(x)$. Pre náš prípad, ak os Z položíme do optickej osi sústavy v smere chodu svetla, bude

$$O(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } |x| > \frac{G_0}{2}, \\ \bar{a}(x) e^{i \frac{2\pi d}{\lambda} n} & \text{pre } -\frac{G_0}{2} \leq x \leq \frac{G_0}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

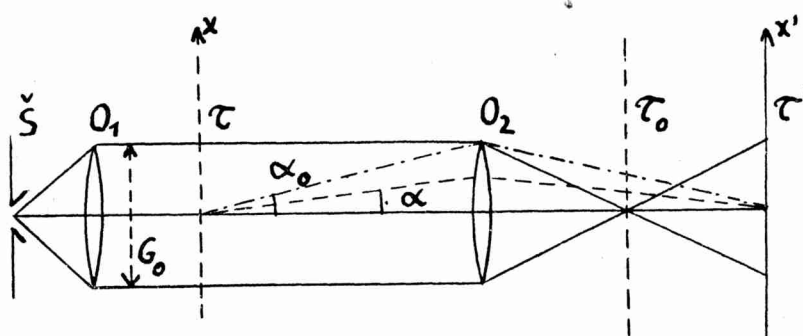
kde $0 \leq \bar{a}(x) \leq 1$ charakterizuje absorpciu objektu, t. j. udáva amplitúdový charakter štruktúry, G_0 odpovedá šírke osvetlenej časti objektu a λ je vlnová dĺžka svetla.

Možno pripomenúť, že monochromaticnosť vlny (1) sa na štruktúre (2) poruší. Príslušné frekvenčné spektrum svetla za štruktúrou dá sa získať analýzou (1), prevedenou napr. obdobne ako v prípadoch fázovej modulácie v rádiotechnike.

Obrazová funkcia $B(x')$, patriaca k $O(x)$ — ak v matematickom zápise vhodne vyjadríme zmenu orientácie súradných osí a mierku súradnice x' v obrazovom prie-

store — je identická svojou reálnou časťou s reálnou časťou $O(x)$, pravda, ak súčasne zanedbáme absorpciu svetla v zobrazovacej sústave a uplatnenie sa jej konečnej apertúry. (Zobrazovací objektív predpokladajme umiestený tak, že priečne zväčšenie je jednotkové.) Získané zobrazenie v tomto prípade je výsledkom uplatnenia sa amplitúdového charakteru štruktúry, daného $a(x)$. Fázový charakter objektu sa prejaví iba po vhodnom ovplyvnení svetelného zväzku za zobrazovacím objektívom. Otázky s týmto súvisiace budeme v ďalšom podrobnejšie sledovať.

Súvis medzi $O(x)$ a $B(x')$ pre prípad ovplyvnenia objektom prešlého svetla v obrazovej ohniskovej rovine objektívu (v nej sa realizuje Fourierova transformácia



Obrázok 1.

Základná schéma: S lineárna štrbina ako zdroj svetla, O_1 kolimátorový objektív, O_2 zobrazovací objektív, τ rovina objektovej funkcie $O(x)$, τ' rovina obrazovej funkcie $B(x')$, τ_0 rovina zásahovej funkcie $Q(\gamma)$; α , α_0 ohybové uhly, G_0 šírka osvetlenej časti objektu.

objektovej funkcie, odpovedajúca ohybovému obrazu zdroja svetla) clonou, vrstvičkou posúvajúcou fázou alebo absorbujúcou, nám umožňuje získať vzťah [8]

$$B(x') = K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\gamma) O(x) e^{i2\pi\gamma(x'-x)} dx d\gamma, \quad (4)$$

kde $Q(\gamma)$ je tzv. zásahová funkcia, ktorá charakterizuje spôsob ovplyvnenia ohybového spektra svetelného zdroja, vytvoreného objektom a γ je dané vzťahom

$$\gamma = \frac{\sin \alpha}{\lambda}, \text{ pričom } \alpha \text{ je ohybový uhol (obr. 1).}$$

Konštanta K má pre naše úvahy nepodstatný význam, preto budeme v ďalšom obrazovú funkciu vyjadrovať bez nej pri rovnakom označení $B(x')$. S ohľadom na (3), konečnosť uhlu α_0 (obr. 1) a odpovedajúci parameter γ_0 , stačí vo vyjadrení $B(x')$ uvažovať iba konečné hranice, t. j. ak vyznačíme i závislosť na čase, dostaneme (4) v tvare

$$B(x', t) = \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \int_{-\frac{G_0}{2}}^{\frac{G_0}{2}} Q(\gamma) \bar{a}(x) e^{i \frac{2\pi d}{\lambda} (n_0 + n' \cos \frac{2\pi x}{A} \cos \Omega t)} e^{i 2\pi \gamma (x' - x)} dx d\gamma, \quad (4')$$

resp. v skrátenej zápise

$$B(x', t) = \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} Q(\gamma) E(\gamma) e^{i 2\pi \gamma x'} d\gamma,$$

kde

$$E(\gamma) = \int_{-\frac{G_0}{2}}^{\frac{G_0}{2}} \bar{a}(x) e^{i \frac{2\pi d}{\lambda} (n_0 + n' \cos \frac{2\pi x}{A} \cos \Omega t)} e^{-i 2\pi \gamma x} dx. \quad (5)$$

Pre ďalší výpočet sa ukazuje vhodným určiť $E(\gamma)$ v prípade fázovej štruktúry s konštantnou absorpciou, teda pre $\bar{a}(x) = \text{konšt} = a$. Zavedme súčasne označenie $n' \cos \Omega t = n'$; potom

$$E(\gamma) = kA, \quad (5')$$

kde

$$k = \frac{a}{A} e^{i \frac{2\pi d}{\lambda} n_0}$$

a

$$A = \int_{-\frac{G_0}{2}}^{\frac{G_0}{2}} e^{i \left(\frac{2\pi d n'}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{A} - 2\pi \gamma x \right)} dx. \quad (6)$$

Pri výpočte integrálu A je výhodné prejsť k novej premennej φ vzťahom

$$\frac{2\pi x}{A} = \varphi \quad (7)$$

a zaviesť

$$\frac{2\pi d n'}{\lambda} = \xi, \quad (8)$$

takže

$$A = \int_{-\pi N}^{\pi N} e^{i(\xi \cos \varphi - v\varphi)} \frac{A}{2\pi} d\varphi = \frac{A}{2\pi} A'(v, \xi), \quad (9)$$

kde

$$N = \frac{G_0}{A} \text{ a } v = \gamma A. \quad (10)$$

Pripomeňme pritom: 1. parameter ξ môže nadobúdať kladné i záporné hodnoty z intervalu $\left\langle -\frac{2\pi dn''}{\lambda}, \frac{2\pi dn''}{\lambda} \right\rangle$; 2. parameter v všeobecne nemusí byť celým číslom; 3. parameter N takmer bez újmy na obecnosti možno považovať za celočíselný.

Známe vzťahy pre Besselove funkcie prvého druhu [9]:

$$\cos(\xi \cos \varphi) = J_0(\xi) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\xi) \cos 2m\varphi,$$

$$\sin(\xi \cos \varphi) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} J_{2m-1}(\xi) \cos(2m-1)\varphi,$$

umožňujú integrál A' písať v tvare:

$$A'(v, \xi) = \left[\frac{1}{v} J_0(\xi) - 2v \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\xi) \frac{1}{4m^2 - v^2} \right] 2 \sin vN\pi + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} J_{2m-1}(\xi) \frac{1}{(2m-1)^2 - v^2} 4vi \sin vN\pi. \quad (11)$$

Posledné vyjadrenie A' je výhodné vzhľadom na vlastnosti parametrov ξ , v a N .

Z (11) vidno, že pre celočíselné hodnoty parametra v a napr. pre $N = 1$ dá sa integrál A' vyjadriť jednoducho nasledovne:

$$A'(v, \xi) = 2\pi(-i)^{-v} J_v(\xi).$$

To tiež priamo vyplýva z vyjadrenia Besselových funkcií prvého druhu celočíselného rádu v

$$J_v(\xi) = \frac{1}{2\pi} (-i)^v \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\xi \cos \varphi - v\varphi)} d\varphi.$$

Pre obrazovú funkciu $B(x', t)$ dostávame potom s ohľadom na (4'), (5'), (9), (10) a (11)

$$B(x', t) = \frac{kA}{2\pi} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} Q(\gamma) J_0(\xi) \frac{2}{\gamma A} \sin \gamma AN\pi \cdot e^{i2\pi\gamma x'} d\gamma - \frac{kA}{2\pi} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} Q(\gamma) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\xi) \frac{4\gamma A}{4m^2 - \gamma^2 A^2} \sin \gamma AN\pi \cdot e^{i2\pi\gamma x'} d\gamma +$$

$$+ \frac{k\Lambda}{2\pi} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} Q(\gamma) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} J_{2m-1}(\xi) \frac{i4\gamma\Lambda}{(2m-1)^2 - \gamma^2\Lambda^2} \sin \gamma\Lambda N\pi \cdot e^{i2\pi\gamma x'} d\gamma. \quad (4'')$$

Dá sa ukázať, že integrály (4'') existujú, ak sa omedzíme na konečné hodnoty parametra ξ (pre ľubovoľný čas) a ako vidno z (8), iba tento prípad prichádza prakticky do úvahy.

Pre ďalší výpočet $B(x', t)$ zavedieme do (4'') konkrétnejšie analytické vyjadrenie zásahovej funkcie $Q(\gamma)$. Praktický význam majú a k jednoduchému výpočtu vedú najmä nasledovné prípady:

1. Zásahová funkcia je reálna. Potom ovplyvňuje ohybové spektrum svetelného zdroja iba amplitúdovo; môžeme ju v tomto prípade vyjadriť takto:

$$Q(\gamma) = \begin{cases} Q_r(\gamma), & \text{pre } |\gamma| \leq \gamma_0, \text{ pričom } 0 \leq Q_r(\gamma) \leq 1, \\ 0, & \text{pre } |\gamma| > \gamma_0. \end{cases}$$

2. Zásahová funkcia je komplexná. Potom ovplyvňuje ohybové spektrum svetelného zdroja ako amplitúdovo tak i fázovo. V tomto prípade ju môžeme vyjadriť takto:

$$Q(\gamma) = \begin{cases} Q_r(\gamma) e^{i\psi(\gamma)}, & \text{pre } |\gamma| \leq \gamma_0, \text{ pričom } 0 \leq Q_r(\gamma) \leq 1, \\ & \psi(\gamma) = p2\pi, p \text{ je ľubovoľné reálne číslo.} \\ 0, & \text{pre } |\gamma| > \gamma_0. \end{cases}$$

V ďalšom budeme uvažovať iba symetrické zásahové funkcie typu:

$$Q(\gamma) = \begin{cases} Q_1(\gamma), & \text{pre } -\gamma_0 \leq \gamma < -\gamma', \\ Q_0(\gamma), & \text{pre } -\gamma' \leq \gamma \leq \gamma', \\ Q_1(\gamma), & \text{pre } \gamma' < \gamma \leq \gamma_0, \\ 0, & \text{pre } |\gamma| > \gamma_0, \text{ pričom } |Q(\gamma)| \leq 1. \end{cases}$$

Pripomeňme si, že pre index lomu, nezávislý na mieste a čase, poskytuje (5) vzťah pre ohyb v rovnoobežnom svetle na štrbine šírky G_0 . Pritom šírke hlavného maxima ohybového obrazu svetelného zdroja prislúcha v zmysle obvykle používaných aproximácií uhol $2\alpha' = 2 \frac{1}{G_0}$ a teda parameter $\gamma' = \frac{1}{G_0}$. V takom zmysle budeme γ' ďalej používať.

Voľba, podľa ktorej sú Q_1 a Q_0 v príslušných intervaloch konštantné, pritom ale všeobecne $Q_1 \neq Q_0$ (odpovedá to napr. metóde symetrického tmavého poľa, metóde fázového kontrastu a iným) umožní stanoviť obrazovú funkciu $B(x', t)$ v neuzavretej síce, ale pre výpočet použiteľnej forme. Podrobnejším výpočtom (pozri Dodatok

D-16) získame vzťah

$$B(x', t) = B_0 + k \sum_{\mu=1}^{\infty} i^{\mu} J_{\mu}(\xi) \left(C_{\mu} \cos 2\pi \frac{x'}{A} \mu + C'_{\mu} \sin 2\pi \frac{x'}{A} \mu \right), \quad (12)$$

kde

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{k}{2} J_0(\xi) [Q_1 P_0(\gamma_0) + (Q_0 - Q_1) P_0(\gamma')] = \frac{k}{2} J_0(\xi) \mathfrak{A}_0, \\ C_{\mu} &= Q_1 P_{\mu}(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) P_{\mu}(\gamma'), \\ C'_{\mu} &= Q_1 G_{\mu}(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) G_{\mu}(\gamma'), \quad \mu = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

B. Dôsledky, vyplývajúce z vlastností pomocných funkcií

K tomu, aby sme dostatočne poznali charakter obrazovej funkcie $B(x', t)$ danej vyjadrením (12), musíme si podrobnejšie všimnúť vlastnosti pomocných funkcií C_{μ} a C'_{μ} . V zmysle použitého označenia je

$$\begin{aligned} P_{\mu}(\gamma) &= \Pi_{\mu}[+\gamma] - \Pi_{\mu}[-\gamma] = \Pi[\pi N(\mu + \gamma A), v] - \Pi[\pi N(\mu - \gamma A), v], \\ G_{\mu}(\gamma) &= \Gamma_{\mu}[+\gamma] - \Gamma_{\mu}[-\gamma] = \Gamma[\pi N(\mu + \gamma A), v] - \Gamma[\pi N(\mu - \gamma A), v]. \end{aligned} \quad (14)$$

Bude nás zaujímať priebeh týchto funkcií najmä pri hodnotách parametra $u = \pi N(\mu + \gamma A)$, pre ktoré $\alpha)$ $|u| \ll 1$, $\beta)$ $|u| \gg 1$, $\gamma)$ $|u| \sim 1$. Parameter $v = \frac{2x'}{\lambda N} = \frac{2x'}{G_0}$ nech pritom splňuje podmienku $0 \leq |v| < 1$, ktorá obmedzuje vyšetovanie len na vlastný obraz štruktúry (predpokladali sme jednotkové priečne zväčšenie). Nech súčasne je $\pi N \gg 1$. Pripomeňme tiež, že μ a N sú celočíselné a kladné.

S ohľadom na (D-3) a (14) je

$$\begin{aligned} P_{\mu}(\gamma) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \text{Si}[\pi N(\mu + \gamma A)(v + 1)] - \text{Si}[\pi N(\mu + \gamma A)(v - 1)] - \right. \\ &\quad \left. - \text{Si}[\pi N(\mu - \gamma A)(v + 1)] + \text{Si}[\pi N(\mu - \gamma A)(v - 1)] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Všimnime si teraz podrobnejšie jednotlivé prípady. Bude pritom vhodné vzhľadom na vlastnosti funkcií $J_{\mu}(\xi)$, ktoré v značne širokom intervale hodnôt ξ umožňujú vyšetovanie obmedziť na prvé členy nekonečného súčtu (12) — teda hodnoty $\mu \sim 1$, a vzťahovať tri vyššie uvedené prípady na hodnoty γA .

$\alpha)$ $\gamma A \ll \mu$. Táto podmienka sa splní pre „nulové“ ohybové uhly α . Ako z (15) vidieť, je potom $P_{\mu}(\gamma) \doteq 0$.

$\beta)$ $\gamma A \gg \mu$. Táto podmienka sa splní zas pre veľké ohybové uhly α . Podľa (15) je

$$P_{\mu}(\gamma) = \frac{2}{\pi} \{ \text{Si}[\pi N \gamma A(v + 1)] + \text{Si}[\pi N \gamma A(1 - v)] \}. \quad (16)$$

Keďže pre $v > 0$ je $\pi N\gamma\Lambda(v + 1) = \vartheta \gg 1$, môžeme prvý člen v krútenej zátvorke (16) vyjadriť prvými členmi asymptotického rozvoja v tvare [10]

$$Si[\vartheta] \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos \vartheta}{\vartheta} + R(\vartheta),$$

kde $\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} R(\vartheta) = 0$,

čo umožní nasledovné zjednodušenie (16)

$$P_{\mu}(\gamma) = 1 + \frac{2}{\pi} Si[\pi N\gamma\Lambda(1 - v)].$$

$Si[\pi N\gamma\Lambda(1 - v)]$ nadobúda hodnoty od nuly (pre $v \rightarrow 1$) po $Si[\pi N\gamma\Lambda]$ (pre $v = 0$). Zdôrazniť treba, že pre $\vartheta' = \pi N\gamma\Lambda(1 - v) > 10$ sa $Si[\vartheta']$ iba veľmi málo mení okolo hodnoty $\frac{\pi}{2}$. V intervale parametra v , stanovenom z tejto nerovnosti, môžeme $Si[\vartheta']$ považovať za konštantné (nezávislé od v , t. j. i od súradnice x'). Pre tento interval bude

$$0 \leq |v| < 1 - \frac{10}{\pi N\gamma\Lambda}.$$

Z poslednej nerovnosti plynie napr. pri voľbe $\pi N\gamma\Lambda = 100$ možnosť pre 0,9 šírky obrazového poľa považovať $P_{\mu}(\gamma)$ za konštantné a síce $P_{\mu}(\gamma) \doteq 2$. V časti $0,9 < |v| < 1$ klesá $P_{\mu}(\gamma)$ na hodnotu 1.

$\gamma) \gamma\Lambda \sim \mu$, (malé ohybové uhly α).

Podľa (15) máme

$$P_{\mu}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \{Si[\pi N(\mu + \gamma\Lambda)(v + 1)] - Si[\pi N(\mu + \gamma\Lambda)(v - 1)]\}.$$

Analogické úpravy ako v $\beta)$ vedú k vyjadreniu

$$P_{\mu}(\gamma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si[\pi N(\mu + \gamma\Lambda)(1 - v)] \quad (17)$$

a podobne umožňujú ukázať, že $P_{\mu}(\gamma)$ vyjadrené (17) môžeme v intervale

$$0 \leq |v| < 1 - \frac{10}{\pi N(\mu + \gamma\Lambda)}$$

považovať za konštantu a síce $P_{\mu}(\gamma) \doteq 1$, čo pri voľbe $\pi N(\mu + \gamma\Lambda) = 100$ platí v 0,9 šírky obrazového poľa. V ostatnej časti obrazového poľa $P_{\mu}(\gamma)$ klesá na hodnotu $\frac{1}{2}$.

Všimnime si teraz podrobnejšie druhú pomocnú funkciu $G_{\mu}(\gamma)$. Podľa (D-4) a (14) je

$$G_{\mu}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \{ \hat{C}i[\pi N(\mu + \gamma A)(v + 1)] - \hat{C}i[\pi N(\mu + \gamma A)(v - 1)] - \\ - \hat{C}i[\pi N(\mu - \gamma A)(v + 1)] + \hat{C}i[\pi N(\mu - \gamma A)(v - 1)] \}. \quad (18)$$

Vyšetrenie je vhodné previesť v rovnakých prípadoch ako pri funkcii $P_{\mu}(\gamma)$ a za rovnakých predpokladov. Dá sa ukázať, že:

- $\alpha)$ pre $\gamma A \ll \mu$ a $0 \leq |v| < 1$ je $G_{\mu}(\gamma) = 0$,
- $\beta)$ pre $\gamma A \gg \mu$ a $0 \leq |v| < 1$ je $G_{\mu}(\gamma) = 0$.
- $\gamma)$ Pre $\gamma A \sim \mu$ podľa (18) dostávame

$$G_{\mu}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \{ \hat{C}i[\pi N(\mu + \gamma A)(v + 1)] - \hat{C}i[\pi N(\mu + \gamma A)(v - 1)] \},$$

resp. s ohľadom na (D-5) a (D-6)

$$G_{\mu}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \left\{ \ln \left| \frac{v + 1}{v - 1} \right| - Ci[\pi N(\mu + \gamma A)(v + 1)] + \right. \\ \left. + Ci[\pi N(\mu + \gamma A)(1 - v)] + 2\pi i \right\}. \quad (19)$$

Potom pri

$$\pi N(\mu + \gamma A)(1 - v) > 10, \quad 0 \leq |v| < 1$$

je

$$G_{\mu}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{v + 1}{v - 1} \right| + 2i,$$

t. j. pre v z intervalu

$$0 \leq |v| < 1 - \frac{10}{\pi N(\mu + \gamma A)}$$

reálna časť $G_{\mu}(\gamma)$ pre $\pi N(\mu + \gamma A) = 100$ rastie z nuly (pri $v = 0$) na $\frac{1}{\pi} \ln 19 \doteq 1$ (pri $|v| = 0,9$).

V prípade $v \rightarrow 1$ môžeme tretí člen v (19) vyjadriť aproximatívnu formulu [10]

$$Ci[\mathcal{G}] \approx -\ln \frac{1}{\gamma_E \mathcal{G}}, \quad \text{kde} \quad \gamma_E = 1,781\,072$$

takže

$$G_{\mu}(\gamma) \doteq \frac{1}{\pi} \{ \ln \gamma_E \pi N(\mu + \gamma A)(v + 1) + 2\pi i \}.$$

V okrajovej oblasti obrazového poľa reálna časť $G_{\mu}(\gamma)$ narastá iba na konečnú hodnotu, odpovedajúcu reálnej zobrazovacej sústave, t. j. konečnému N .

Vykonaná analýza pomocných funkcií $P_\mu(\gamma)$ a $G_\mu(\gamma)$ ukazuje, že za C_μ a C'_μ možno vo výpočtoch klásť

$$C_\mu = Q_1 P_\mu(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) P_\mu(\gamma'),$$

$$C'_\mu = -(Q_1 - Q_0)[q(x') + 2i],$$

kde

$$q(x') = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{v+1}{v-1} \right|,$$

pripadne pre stred obrazového poľa

$$C'_\mu = -(Q_1 - Q_0) 2i.$$

Aby sme získali úplnejšiu predstavu o obrazovej funkcii $B(x', t)$, treba ešte uvážiť závislosť $J_\mu(\xi)$ od indexu μ a hodnoty parametra ξ . Predpokladajme pre jednoduchosť $n'' = n'$, t. j. index lomu, odpovedajúci okamihom, stanoveným vzťahom $\cos \Omega t = 1$.

Z vlastností Besselových funkcií prvého druhu vidno, že zväčšovanie parametra ξ od nuly vedie k presunu maxima amplitúdy harmonických zložiek obrazovej funkcie, t. j. $J_\mu(\xi)$ do vyšších rádov μ ako to ozrejmuje obr. 2 prevzatý z [10].

Všimnime si niekoľko prípadov:

$\alpha)$ $\xi \leq \frac{1}{10}$; potom je [11]

$$J_0\left(\frac{1}{10}\right) = 0,9976; \quad J_1\left(\frac{1}{10}\right) = 0,0499;$$

$$J_2\left(\frac{1}{10}\right) = 0,0012; \quad J_3\left(\frac{1}{10}\right) = 0,00002.$$

Nekonečný súčet, vyjadrujúci pre tento prípad $B(x', t)$ sa teda redukuje len na členy s indexami $\mu = 1, 2$ (ak požadujeme štyri platné desatinné miesta).

$\beta)$ $\xi = 1$; potom je $J_0(1) = 0,7652$; $J_1(1) = 0,4401$; $J_2(1) = 0,1149$; $J_3(1) = 0,0196$; $J_4(1) = 0,0025$; $J_5(1) = 0,0003$; $J_6(1) = 0,00002$, čo znamená, že z nekonečného súčtu treba už brať do úvahy prvých päť členov.

$\gamma)$ pri $J_0(\xi) = 0$, t. j. $\xi = 2,4048$ sa maximum $J_\mu(\xi)$ presunie do prvého rádu ($\mu = 1$), treba brať prvých osem členov.

$\delta)$ pri $\xi \doteq 3$ je maximum v druhom ráde ($\mu = 2$), treba brať prvých desať členov.

$\epsilon)$ pri $\xi \doteq 4$ dostávame dva „extrémy“ a síce v nultom a treťom ráde a treba už brať prvých 11 členov, čo predstavuje značne zdĺhavý výpočet.

C. Výpočet osvetlenia

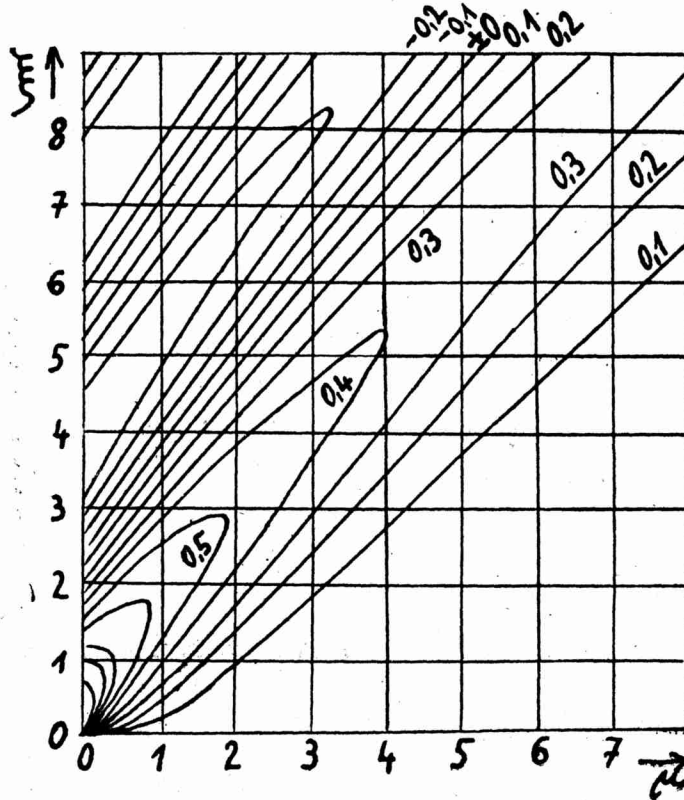
V praxi nás obyčajne viac ako obrazová funkcia zaujíma okamžité osvetlenie v obrazovej rovine. Keďže však toto je úmerné druhej mocnine absolútnej hodnoty obrazovej funkcie, je nutné v ďalšom výpočte tejto sa podrobnejšie zaoberať.

Je

$$|B(x', t)|^2 = B(x', t) \cdot B^*(x', t),$$

kde $B^*(x', t)$ je komplexne združené s $B(x', t)$. Po zavedení označenia

$$C_\mu \cos 2\pi \frac{x'}{A} \mu + C'_\mu \sin 2\pi \frac{x'}{A} \mu = \mathfrak{R}_\mu(x'), \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$



Obrázok 2.

Krivky $J_\mu(\xi) = \text{konšt}$ v rovine μ, ξ .

môžeme písať

$$B(x', t) = B_0 + k \sum_{\mu=1}^{\infty} i^\mu J_\mu(\xi) \mathfrak{R}_\mu(x'),$$

$$B^*(x', t) = B_0^* + k^* \sum_{\mu=1}^{\infty} (-i)^\mu J_\mu(\xi) \mathfrak{R}_\mu^*(x'). \quad (21)$$

resp. s ohľadom na rovnomernú konvergenciu našich radov

$$|B(x', t)|^2 = |B_0|^2 + \sum_{\mu=1}^{\infty} i^\mu k B_0^* J(\xi) \mathfrak{R}_\mu(x') +$$

$$+ \sum_{\mu'=1}^{\infty} (-i)^{\mu'} k^* B_0 J_{\mu'}(\xi) \mathfrak{A}_{\mu'}^*(x') + \\ + |k|^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} i^{\mu} J_{\mu}(\xi) \mathfrak{A}_{\mu}(x') \cdot \sum_{\mu'=1}^{\infty} (-i)^{\mu'} J_{\mu'}(\xi) \mathfrak{A}_{\mu'}^*(x').$$

Keďže ale

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} i^{\mu} J_{\mu}(\xi) \mathfrak{A}_{\mu}(x') \cdot \sum_{\mu'=1}^{\infty} (-i)^{\mu'} J_{\mu'}(\xi) \mathfrak{A}_{\mu'}^*(x') = \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{\mu}^2(\xi) |\mathfrak{A}_{\mu}(x')|^2 + \\ + 2 \sum_{\mu'=2}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu'-1} J_{\mu'}(\xi) J_{\mu}(\xi) |\mathfrak{A}_{\mu}(x')| \cdot |\mathfrak{A}_{\mu'}(x')| \cdot \cos \left[(\mu' - \mu) \frac{\pi}{2} + \varphi_{\mathfrak{A}_{\mu'}} - \varphi_{\mathfrak{A}_{\mu}} \right],$$

kde $\varphi_{\mathfrak{A}_{\mu}}$, $\varphi_{\mathfrak{A}_{\mu'}}$, sú fázy príslušné $\mathfrak{A}_{\mu}(x')$, $\mathfrak{A}_{\mu'}(x')$ dostávame ďalej

$$|B(x', t)|^2 = \\ = \frac{|k|^2}{4} J_0^2(\xi) |\mathfrak{A}_0|^2 + \frac{|k|^2}{2} \sum_{\mu=1}^{\infty} J_0(\xi) J_{\mu}(\xi) [i^{\mu} \mathfrak{A}_0^* \mathfrak{A}_{\mu}(x') + (-i)^{\mu} \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_{\mu}^*(x')] + \\ + |k|^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{\mu}^2(\xi) |\mathfrak{A}_{\mu}(x')|^2 + 2 |k|^2 \sum_{\mu'=2}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu'-1} J_{\mu'}(\xi) J_{\mu}(\xi) |\mathfrak{A}_{\mu}(x')| \cdot |\mathfrak{A}_{\mu'}(x')| \cdot \\ \cdot \cos \left[(\mu' - \mu) \frac{\pi}{2} + \varphi_{\mathfrak{A}_{\mu'}} - \varphi_{\mathfrak{A}_{\mu}} \right], \quad (21')$$

ak za B_0 kladieme jeho vyjadrenie podľa (13)

$$B_0 = \frac{k}{2} J_0(\xi) \mathfrak{A}_0.$$

Stredné osvetlenie $I(x')$ v obrazovej rovine môžeme vyjadriť vzťahom

$$I(x') = D \frac{1}{T} \int_0^T |B(x', t)|^2 dt, \quad (22)$$

ak D je príslušná konštanta úmernosti a $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Využitie vlastností $|B(x', t)|^2$ umožňuje zameniť poradie integrácie a sumovania, t. j.

$$I(x') = \frac{|k|^2}{4} D |\mathfrak{A}_0|^2 \frac{1}{T} \int_0^T J_0^2(\xi) dt + \\ + \frac{|k|^2}{2} D \sum_{\mu=1}^{\infty} [i^{\mu} \mathfrak{A}_0^* \mathfrak{A}_{\mu}(x') + (-i)^{\mu} \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_{\mu}^*(x')] \frac{1}{T} \int_0^T J_0(\xi) J_{\mu}(\xi) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + |k|^2 D \sum_{\mu=1}^{\infty} |\mathfrak{A}_{\mu}(x')|^2 \frac{1}{T} \int_0^T J_{\mu}^2(\xi) dt + 2 |k|^2 D \sum_{\mu'=2}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu'-1} |\mathfrak{A}_{\mu}(x')| \cdot |\mathfrak{A}_{\mu'}(x')| \cdot \\
& \cdot \cos \left[(\mu' - \mu) \frac{\pi}{2} + \varphi_{\mathfrak{A}_{\mu'}} - \varphi_{\mathfrak{A}_{\mu}} \right] \cdot \frac{1}{T} \int_0^T J_{\mu'}(\xi) J_{\mu}(\xi) dt. \quad (23)
\end{aligned}$$

Pre ďalší výpočet potrebujeme určiť integrál:

$$\frac{1}{T} \int_0^T J_{\mu}(\xi) J_{\mu'}(\xi) dt \quad (24)$$

pri ľubovoľných nezáporných (celých) indexoch μ a μ' .

Podľa (8) je

$$\xi = \frac{2\pi d n''}{\lambda} \cos \Omega t.$$

Zavedenie označenia $\frac{2\pi d n''}{\lambda} = h$ a novej premennej $\Omega t = \chi$ umožní integrál (24)

písať v tvare

$$I_{\mu, \mu'}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_{\mu}(h \cos \chi) J_{\mu'}(h \cos \chi) d\chi.$$

Pripomeňme pritom, že [9]

$$J_{\mu}(\xi) J_{\mu'}(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\xi}{2}\right)^{\mu+\mu'+2m} \Gamma(\mu + \mu' + 2m + 1)}{m! \Gamma(\mu + \mu' + m + 1) \Gamma(\mu + m + 1) \Gamma(\mu' + m + 1)}.$$

Hľadaný integrál, vzhľadom na takéto vyjadrenie súčinu Besselových funkcií, ich vlastností a vlastností gama funkcie (zámena s pomocnou funkciou $\Gamma[\gamma]$ nemôže nastať) a konečnosť parametra h — čo odpovedá konečnosti intenzity, resp. objemovej hustoty energie ultrazvukového poľa — môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\begin{aligned}
I_{\mu, \mu'}(h) & = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{h}{2}\right)^{\mu+\mu'+2m} \frac{\Gamma(\mu + \mu' + 2m + 1)}{m! \Gamma(\mu + \mu' + m + 1) \Gamma(\mu + m + 1) \Gamma(\mu' + m + 1)} \cdot \\
& \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{\mu+\mu'+2m} \chi d\chi \quad (25)
\end{aligned}$$

pre $\mu, \mu' = 0, 1, 2, \dots$

Ak uvážime ďalej, že [12]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^s \chi \, d\chi = \begin{cases} 1 & \text{pre } s = 0, \\ 0 & \text{pre } s \text{ nepárne,} \\ \frac{s-1}{s} \frac{s-3}{s-2} \dots \frac{1}{2} & \text{pre } s \text{ párne} \end{cases}$$

pre $s = 0, 1, 2, \dots$ je zrejmé, že nulové sú všetky $I_{\mu, \mu'}(h)$, pre ktoré $\mu + \mu'$ a teda aj $s = \mu + \mu' + 2m$ je nepárne. V ostatných prípadoch je

$$I_{0,0}(h) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{h}{2}\right)^{2m} \frac{[(2m-1)!!]^2}{[m!]^4}$$

a

$$I_{\mu, \mu'}(h) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{h}{2}\right)^{\mu + \mu' + 2m} \frac{[(\mu + \mu' + 2m - 1)!!]^2}{m!(\mu + \mu' + m)!(\mu + m)!(\mu' + m)!} \quad (26)$$

pre $\mu + \mu' = 2, 4, 6, \dots$. Potom

$$\begin{aligned} I(x') &= \frac{|k|^2}{4} D |\mathfrak{A}_0|^2 I_{0,0}(h) + \\ &+ \frac{|k|^2}{2} D \sum_{\mu=1}^{\infty} [i^\mu \mathfrak{A}_0^* \mathfrak{A}_\mu(x') + (-i)^\mu \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_\mu^*(x')] \cdot I_{0,\mu}(h) + \\ &+ |k|^2 D \sum_{\mu=1}^{\infty} |\mathfrak{A}_\mu(x')|^2 \cdot I_{\mu,\mu}(h) + \\ &+ 2|k|^2 D \sum_{\mu'=2}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu'-1} |\mathfrak{A}_\mu(x')| \cdot |\mathfrak{A}_{\mu'}(x')| \cos \left[(\mu' - \mu) \frac{\pi}{2} + \varphi_{\mathfrak{A}_{\mu'}} - \varphi_{\mathfrak{A}_\mu} \right] \cdot I_{\mu,\mu'}(h). \end{aligned} \quad (27)$$

Výsledná formula (27) vzhľadom na vlastnosti funkcií (21) určuje rozdelenie stredného osvetlenia v obrazovej rovine pre ľubovoľné h (konečné). Nezávislosť prvého člena $I(x')$ od súradnice x' odpovedá rovnomernému osvetleniu „pozadia“ obrazu.

Veľkosť tohoto osvetlenia určujú iba parameter h [prostredníctvom $I_{0,0}(h)$] a druh zásahovej clony (prostredníctvom \mathfrak{A}_0). Ostatné členy vo vyjadrení $I(x')$ už prejavujú závislosť od súradnice x' [prostredníctvom $\mathfrak{A}_\mu(x')$]. Táto závislosť (v našom prípade harmonického rozdelenia indexu lomu v zobrazovanej vrstve) je pre jednotlivé hodnoty sčítacích indexov μ , resp. μ' periodická; príslušné amplitúdy pritom závisia od zásahovej funkcie.

Vzťah (27) umožňuje však nielen stanoviť výsledné osvetlenie, ale hlavne umožňuje obecné určiť vplyv voľby zásahovej funkcie, posúdiť periodičnosť vytvoreného obrazu a najmä jej porovnanie s periodičnosťou objektu a tým stanovenie jednoznačného súvisu medzi objektovou (objektom) a obrazovou (obrazom) funkciou. Priamy vý-

počet výsledného osvetlenia dá sa vykonať bez ťažkostí iba pre $h < 1$. V tomto prípade vhodné aproximácie funkcií $I_{\mu, \mu}(h)$ výpočty neobyčajne skrátia a zjednodušia. V prípade $h > 1$ vykonať úplné kvantitatívne vyhodnotenie podľa (27) je značne obťažné a zdĺhavé, preto sa uspokojíme i s kvalitatívnym vyhodnotením, ktoré nám základný charakter zobrazenia umožní dostatočne obecné posúdiť a určiť všetky jeho zvláštnosti.

Ak pri počítaní podľa (27) potrebujeme použiť číselné hodnoty parametra h , odpovedajúceho konkrétnemu prípadu, je možné ich určovať aspoň orientačne pomocným meraním intenzity J_{UZ} v ultrazvukovom poli postupnej vlny podľa vzorca [7]

$$J_{UZ} = \frac{\rho c^3 \lambda^2 \cdot 10^{-7}}{8\pi^2(n_0 - 1)d^2} h^2 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2} \quad (28)$$

a príslušným prepočítaním získať hodnoty charakterizujúce stojatú ultrazvukovú vlnu. Vo vzťahu (28) pritom λ udáva vlnovú dĺžku použitého svetla, ρ špecifickú hmotu prostredia, c rýchlosť ultrazvuku v ňom a n_0 statický index lomu. Hrúbka d , ktorou svetlo v ultrazvukovom poli prechádza, ako vidno z (28), sa pri výpočte výrazne uplatňuje.

D. Niektoré jednoduché prípady

Teraz si podrobnejšie všimneme niektoré špeciálne prípady výpočtu osvetlenia pri $h < 1$.

Použitie aproximácie $h^4 \ll 1$ umožňuje zanedbať vo vyjadrení (27) členy s vyššími mocninami h ako dve. Keďže podľa (26) je

$$I_{0,0}(h) = 1 - \frac{h^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^8} h^4 - \frac{5^2}{3^2 \cdot 2^{10}} h^6 + \dots$$

$$I_{0,2}(h) = \frac{h^2}{2^4} - \frac{h^4}{2^6} + \frac{5^2}{2^{14}} h^6 - \dots$$

$$I_{0,4}(h) = \frac{h^4}{2^{10}} - \frac{h^6}{2^{12}} + \dots$$

$$I_{0,6}(h) = \frac{h^6}{3^2 \cdot 2^{14}} - \frac{h^8}{3^2 \cdot 2^{16}} + \dots$$

$$I_{1,1}(h) = \frac{h^2}{2^3} - \frac{3}{2^7} h^4 + \frac{5^2}{3 \cdot 2^{12}} h^6 - \dots$$

$$I_{1,3}(h) = \frac{h^4}{2^8} - \frac{5}{2^{13}} h^6 + \dots$$

$$I_{1,5}(h) = \frac{h^6}{3 \cdot 2^{13}} - \frac{7h^8}{3^2 \cdot 2^{17}} + \dots$$

pre $I(x')$ dostávame

$$I(x') \doteq \frac{|k|^2}{4} D |\mathfrak{A}_0|^2 I_{0,0}(h) + \frac{|k|^2}{2} D [i^2 \mathfrak{A}_0^* \mathfrak{A}_2(x') + (-i)^2 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2^*(x')] \cdot I_{0,2}(h) + \\ + |k|^2 D |\mathfrak{A}_1(x')|^2 \cdot I_{1,1}(h).$$

Ak pre zjednodušenie výpočtu v ďalšom použijeme podľa (13) a vzhľadom na vlastnosti C_μ a C'_μ

$$\mathfrak{A}_0 = Q_1 P_0(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) P_0(\gamma'),$$

$$\mathfrak{A}_\mu = [Q_1 P_\mu(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) P_\mu(\gamma')] \cos \frac{2\pi x'}{\Lambda} \mu - (Q_1 - Q_0) 2i \sin \frac{2\pi x'}{\Lambda} \mu,$$

$$\mathfrak{A}_\mu^* = [Q_1^* P_\mu(\gamma_0) - (Q_1^* - Q_0^*) P_\mu(\gamma')] \cos \frac{2\pi x'}{\Lambda} \mu + (Q_1^* - Q_0^*) 2i \sin \frac{2\pi x'}{\Lambda} \mu$$

pre $\mu = 1, 2$ dostaneme

$$|\mathfrak{A}_0|^2 = |Q_1 P_0(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) P_0(\gamma')|^2, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_0^* \mathfrak{A}_2(x') + \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2^*(x') &\equiv W(x') = \\ &= \{2Q_1 Q_1^* [P_0(\gamma_0) P_2(\gamma_0) - P_0(\gamma') P_2(\gamma_0) - P_0(\gamma_0) P_2(\gamma')] + \\ &\quad + 2|Q_1 - Q_0|^2 P_0(\gamma') P_2(\gamma') + \\ &\quad + (Q_0^* Q_1 + Q_0 Q_1^*) [P_0(\gamma_0) P_2(\gamma') + P_0(\gamma') P_2(\gamma_0)]\} \cos \frac{4\pi x'}{\Lambda} + \\ &\quad + 2i P_0(\gamma_0) [Q_0 Q_1^* - Q_0^* Q_1] \sin \frac{4\pi x'}{\Lambda}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_1(x')|^2 &= |Q_1 P_2(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) P_2(\gamma')|^2 \cos^2 \frac{2\pi x'}{\Lambda} + 4|Q_1 - Q_0|^2 \sin^2 \frac{2\pi x'}{\Lambda} + \\ &\quad + i P_2(\gamma_0) [Q_0 Q_1^* - Q_0^* Q_1] \sin \frac{4\pi x'}{\Lambda}. \end{aligned} \quad (32)$$

Dosadenie rôznych typov zásahových funkcií $Q(\gamma)$ vedie samozrejme k rozličným hodnotám pre výrazy, dané vzťahmi (30), (31) a (32), v dôsledku čoho aj príslušné $I(x')$ sú rôzne.

Ako význačné vezmeme najmä nasledovné prípady:

1. $Q_0 = Q_1 = 1$, čo odpovedá nepoužitiu zásahovej clony. Potom podľa (30), (31) a (32) je

$$|\mathfrak{A}_0|^2 = P_0^2(\gamma_0), \quad W(x') = 2P_0(\gamma_0) P_2(\gamma_0) \cos \frac{4\pi x'}{\Lambda},$$

$$|\mathfrak{A}_1(x')|^2 = P_2^2(\gamma_0) \cos^2 \frac{2\pi x'}{\Lambda},$$

takže s ohľadom na vlastnosti funkcie $P_\mu(\gamma)$ je podľa (29)

$$I(x') \doteq |k|^2 D \left[I_{0,0}(h) + \frac{1}{4} h^2 \right]. \quad (33)$$

Zo vzťahu (33) vidno, že „slabé“ ultrazvukové polia bez použitia zásahovej clony nie je možné zobraziť. V obrazovej rovine sa získa rovnomerné osvetlenie bez náznakov periodickej štruktúry, súvisiacej s ultrazvukovým poľom. Použitie ultrazvukových polí, charakterizovaných parametrom $h \gg 1$ vedie už k vytvoreniu periodickej štruktúry obrazu; pozoruje sa tiež jej symetričnosť vzhľadom k strednej časti.

2. $Q_1 = 1$, $Q_0 = 0$. Tento prípad odpovedá metóde „symetrického tmavého poľa“. Potom podľa (30), (31) a (32) je

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_0|^2 &= |P_0(\gamma_0) - P_0(\gamma')|^2, \\ W(x') &= 2[P_0(\gamma_0)P_2(\gamma_0) - P_0(\gamma')P_2(\gamma_0) - P_0(\gamma_0)P_2(\gamma') + P_0(\gamma')P_2(\gamma')] \cos \frac{4\pi x'}{\Lambda}, \\ |\mathfrak{A}_1(x')|^2 &= |P_2(\gamma_0) - P_2(\gamma')|^2 \cos^2 \frac{2\pi x'}{\Lambda} + 4 \sin^2 \frac{2\pi x'}{\Lambda}, \end{aligned}$$

takže

$$I(x') \doteq \frac{|k|^2}{4} DI_{0,0}(h) + 4|k|^2 DI_{1,1}(h) \sin^2 \frac{2\pi x'}{\Lambda}. \quad (34)$$

Prvý člen nezávisí od súradnice x' a udáva rovnomerné osvetlenie „pozadia“ obrazu. Tvorbu vlastnej štruktúry obrazu spôsobuje druhý člen, odpovedajúci harmonickému rozdeleniu osvetlenia. Perióda obrazu je pritom $\frac{\Lambda}{2}$, čo znamená, že zobrazenie stojatej ultrazvukovej vlny javí periódu, odpovedajúcu obrazu polovice vlnovej dĺžky ultrazvuku v danom prostredí.

Amplitúda štruktúry pritom vzrastá s druhou mocninou parametra h . Fotometrické vyšetrenie miním resp. maxím osvetlenia dáva možnosť merať i veľmi malé výkony zdrojov ultrazvuku. Pri hodnotách $h > 1$ sa charakter zobrazenia ako to vidno z (27), v dôsledku uplatnenia sa členov s $\mu > 2$, stáva stále zložitejším, čo sa prejavuje mikroštruktúrou obrazu.

3. $Q_1 = 0$, $Q_0 = 1$. Potom podľa (30), (31) a (32) je

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_0|^2 &= P_0^2(\gamma'), \quad W(x') = 2P_0(\gamma')P_2(\gamma') \cos \frac{4\pi x'}{\Lambda}, \\ |\mathfrak{A}_1(x')|^2 &= P_2^2(\gamma') \cos^2 \frac{2\pi x'}{\Lambda} + 4 \sin^2 \frac{2\pi x'}{\Lambda}. \end{aligned}$$

takže

$$I(x') \doteq |k|^2 D \left[\frac{1}{4} I_{0,0}(h) + 4I_{1,1}(h) \right] - 2|k|^2 DI_{0,2}(h) \cos \frac{4\pi x'}{\Lambda}. \quad (35)$$

Vzťah (35) ukazuje, že začlenenie všetkých vyšších ohybových rádov (okrem nultého) v ohniskovej rovine zobrazovacej sústavy vedie k vytvoreniu obrazu, odpovedajúceho periodickej štruktúre objektu, pričom perióda ako i v predošlom prípade je $\frac{\Lambda}{2}$.

Tento výsledok je zaujímavý najmä s ohľadom na dôsledky, plynúce z Abbeovej teórie optického zobrazovania mikroskopom [18], preto sa k nemu ešte vrátíme v experimentálnej časti. Na rozdiel od predošlého prípadu, zložke osvetlenia, nezávislej od súradnice x' , prispieva i funkcia $I_{1,1}(h)$.

4. $Q_1 = 1$, $Q_0 = ae^{i\psi}$, pričom $0 < a < 1$ odpovedá konštantnej absorpcii zásohovej clony a ψ je konštantný fázový uhol. Tento prípad možno nazvať obecným fázovým kontrastom. S ohľadom na (30), (31) a (32) je

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_0|^2 &= [P_0(\gamma_0) - P_0(\gamma') + a \cos \psi \cdot P_0(\gamma')]^2 + [aP_0(\gamma') \sin \psi]^2, \\ W(x') &= 2\{[P_0(\gamma_0)P_2(\gamma_0) - P_0(\gamma')P_2(\gamma_0) - P_0(\gamma_0)P_2(\gamma')]\} + \\ &+ [(1 - a \cos \psi)^2 + a^2 \sin^2 \psi]P_0(\gamma')P_2(\gamma') + \\ &+ a \cos \psi [P_0(\gamma_0)P_2(\gamma') + P_0(\gamma')P_2(\gamma_0)] \cos \frac{4\pi x'}{\Lambda} - 4a \sin \psi \cdot P_0(\gamma_0) \cdot \sin \frac{4\pi x'}{\Lambda}, \\ |\mathfrak{A}_1(x')|^2 &= \{[P_2(\gamma_0) - P_2(\gamma') + aP_2(\gamma') \cos \psi]^2 + [aP_2(\gamma') \sin \psi]^2\} \cos^2 \frac{2\pi x'}{\Lambda} + \\ &+ 4[(1 - a \cos \psi)^2 + a^2 \sin^2 \psi] \sin^2 \frac{2\pi x'}{\Lambda} - 2aP_2(\gamma_0) \sin \psi \cdot \sin \frac{4\pi x'}{\Lambda}, \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} I(x') &\doteq \frac{|k|^2}{4} D(1 + 2a \cos \psi + a^2) I_{0,0}(h) - \\ &- 2|k|^2 D a \left[(a + \cos \psi) \cos \frac{4\pi x'}{\Lambda} - 2 \sin \psi \sin \frac{4\pi x'}{\Lambda} \right] I_{0,2}(h) + \\ &+ 4|k|^2 D \left[a^2 + (1 + 2a \cos \psi) \sin^2 \frac{2\pi x'}{\Lambda} - a \sin \psi \sin \frac{4\pi x'}{\Lambda} \right] I_{1,1}(h). \quad (36) \end{aligned}$$

Výsledné zobrazenie, dané vzťahom (36) má (ako i v predošlých prípadoch) konštantnú, od súradnice x' nezávislú zložku a zložky s periódou $\frac{\Lambda}{2}$. Na rozdiel od predošlých prípadov môžeme kontrastnosť zobrazenia ovplyvňovať voľbou absorpcie a a fázového uhlu ψ . Podrobný výpočet umožňuje určiť pre danú absorpciu a fázový uhol ψ , resp. opačne pri danom fázovom uhle absorpciu tak, aby kontrastnosť príslušnej zložky obrazu bola extrémna.

K ukončeniu diskusie vzťahu (27) po vyšetrení predošlých štyroch prípadov s $h < 1$ treba ešte uvážiť aspoň hlavné výsledky pre $h > 1$. Vzhľadom na vlastnosti funkcií $I_{\mu,\mu}(h)$ sa pri vytváraní obrazu uplatňujú už výraznejšie členy, ktorých

perióda odpovedá $\frac{1}{2^\mu} \frac{A}{2}$ kde $\mu = 1, 2, 3 \dots$. To má za dôsledok, že pri istej hodnote h_1 sa najviac uplatňuje zložka $I(x')$ s periodou $\frac{A}{4}$, pri $h_2 > h_1$ zas zložka s periodou $\frac{A}{8}$ a pod. takže výsledné zobrazenie, môžeme povedať, je čo do periódy deformované (napr. pre h_1 dvojnásobne).

Charakter priebehu osvetlenia $I(x')$ na dĺžke, odpovedajúcej jednej periode obrazu, t. j. $\frac{A}{2}$, môže byť pritom veľmi zložitý. Najčastejší je ten prípad, že zobrazenie tvorí akúsi „mikroštruktúru“ čo do periódy nedeformovaného zobrazenia, podobnú obrazu, aký by vznikol, ak by sme preložili cez seba niekoľko obrazov, z ktorých každý má inú periódu, odpovedajúcu vyšším harmonickým a iný kontrast (napr. pomer medzi osvetlením v maxime a minime). Vcelku možno povedať, že pri vzraste h (v danom usporiadaní experimentu) zložitost' zobrazenia — mikroštruktúra — bude tiež vzrastať.

Ďalej treba pripomenúť, že vzťah (27) sme dostali za cenu radu aproximácií a predpokladov, ktoré však jednako je v praxi často obťažné, prípadne nemožné splniť. Jedným z nich je napr. vzťah, podľa ktorého je možné harmonické rozloženie indexu lomu i pri h veľkých ($h \gg 1$).

Ako dôsledok nedodržania predpokladov sa nám prejavujú odchýlky od vzťahu (27). Tak napr. by sme pre $Q_0 = Q_1 = 1$ v strede obrazového poľa nemali získať zobrazenie. Experiment však ukazuje možnosť takéhoto zobrazenia pri veľkých výkonoch zdroja ultrazvuku. Pravda, tu sa okrem súhrnne spomenutých príčin uplatňuje i tá okolnosť, že pre časť svetla prešlého zobrazovaným objektom je ohybový uhol $\alpha > \alpha_0$, takže sa toto svetlo do zobrazovacej sústavy nedostáva, v dôsledku čoho možno zobrazovaný objekt považovať za amplitúdový a teda jeho zobrazenie za samozrejmé.

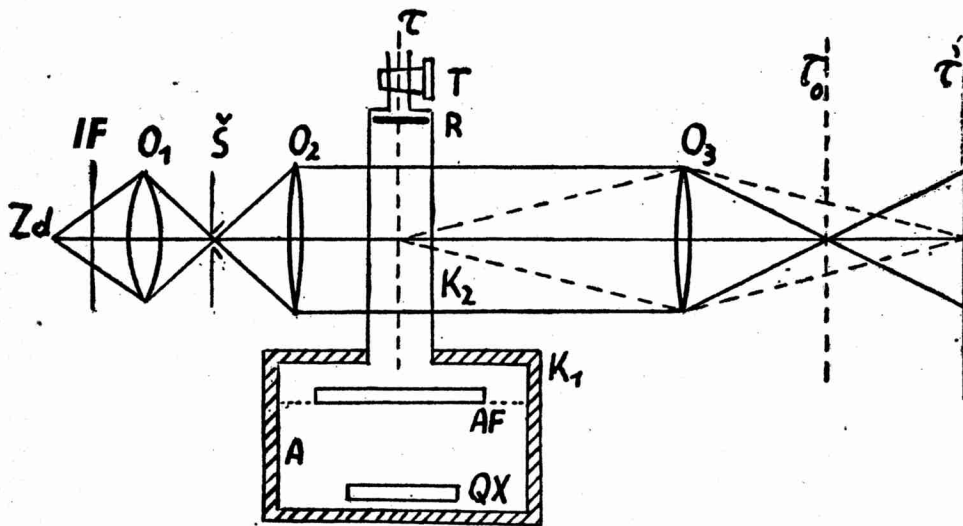
Praktický výpočet osvetlenia pre $h > 1$ nie je vždy vhodné konať podľa (27). Vtedy vychádzame zo vzťahu pre obrazovú funkciu (12), v ktorom môžeme vykonať rad zjednodušení tým, že využijeme vlastnosti Besselových funkcií vyšších rádov a nekonečné súčty vyjadríme aproximatívne konečnými, čo umožní potom známym spôsobom určiť hľadané okamžité, prípadne stredné osvetlenie podľa vzťahov (21) a (22).

II. Experimentálna časť

A. Popis experimentálneho zariadenia

Experimentálne zariadenie znázorňuje obraz č. 3. Ako zdroj ultrazvuku sa používal kruhový kremenný X výbrus QX , o priemere 50 mm, s rezonančnou frekvenciou 984 kHz, umiestený v nádobe K_1 v transformátorovom oleji. Napájanie vy-

brusu zaobstarával oscilátor, pričom budiace napätie bolo možné regulovať od niekoľkých voltov až po 2 kV (efektívne). Pri jednostrannom vyžiarovaní bola teda možnosť nastaviť v ultrazvukovom poli postupnej vlny (v blízkosti QX) prakticky ľubovoľnú intenzitu od nuly až po asi $4 \frac{W}{\text{cm}^2}$, resp. $2 \frac{W}{\text{cm}^2}$ pri dvojstrannom vyžiarovaní. Príslušné hodnoty parametra h bolo možné určiť zo vzťahu (28).



Obrázok 3.

Schéma experimentálneho usporiadania: Zd zdroj svetla, IF filter, O_1 kondenzor, \check{s} štrbina, O_2 kolimátorový objektív, O_3 zobrazovací objektív, τ_0 rovina zásahovej funkcie $Q(\gamma)$, QX zdroj ultrazvuku, A absorpčná vrstva, AF filter, K_1 nádoba s pracovnou kvapalinou, K_2 pracovná kyveta, R reflektor, T kohút.

Ultrazvuková vlna prechádzala v oleji umiesteným akustickým polvlnovým dosťčkovým filtrom AF , do vlastnej pracovnej kyvety K_2 , v ktorej bolo možné hladinu kvapaliny (transformátorový olej) vzduť až na úroveň reflektoru R podtlakom, privádzaným z pomocného zariadenia napojeného kohútom T na „vákuovú“ sústavu.

Nastaviť rovinu reflektoru R do vhodnej polohy a vzdialenosti vzhľadom k AF , resp. ku QX a tým získať stojatú vlnu umožnilo pomocné justičné zariadenie, na ktorom bola sústava kyvety K_2 uchytená. Náhrada reflektoru R vhodne volenou absorpčnou vložkou umožnila vytvoriť podmienky pre vznik postupnej vlny. Vnútorne steny nádoby K_1 boli opatrené absorpčnou vrstvou A , ktorá mala za úlohu zamedziť vytváranie sa nežiadúcich stojatých vln. Vzhľadom na veľkú tepelnú kapacitu celého zariadenia a pomerne malý celkový výkon v prevádzke sa zvláštne

chladiace zariadenie nepoužívalo, keďže nevelké teplotné zmeny nevyvolávali efekty, ktoré by vyšetovanie mohli rušivo ovplyvňovať.

Optická sústava používala ako zdroj svetla vysokotlakovú ortuťovú výbojku Zd s filtrom IF pre oblasť $540 \text{ m}\mu$. Napájanie výbojky striedavým prúdom pri frekvencii 50 Hz sa rušivo neuplatnilo, keďže frekvencia ultrazvukovej vlny je takmer $2 \cdot 10^4$ krát vyššia, t. j. môžeme takéto osvetľovanie považovať vzhľadom na vyššie uvedený výpočet za plynulé. Trojšošovková osvetľovacia sústava (schématicky označená O_1), používaná obvykle na osvetľovanie štrbiny spektrografu i v našom prípade tvorila „kondenzor“ na osvetľovanie štrbiny S (regulovateľnej šírky), umiestenej v ohniskovej rovine objektívu O_2 . Z paralelného svetelného zväzku, dopadajúceho kolmo na pracovnú kvvetu K_2 , vyclonená stredná časť (odpovedajúca celému číslu N) prechádzala kvapalinou s ultrazvukovým poľom a po prechode objektívom O_3 vytvárala osvetlenie $I(x')$ v rovine τ' , príslušné použitej zásahovej clone $Q(\gamma)$.

Od sklených stien kvvety K_2 sa vyžadovala rovinnosť, keďže odchýlky od rovinnosti spôsobujú deformáciu rovinného čela svetelnej vlny a tým rad závad (najmä nehomogenity) v zobrazení $I(x')$. Neplanparalelnosť stien kvvety a prípadná neplanparalelnosť kvapalinovej vrstvy spôsobujú iba zmenu smeru chodu svetla (ultrazvukovým poľom nerušeného), neuplatňujú sa však natoľko rušivo ako odchýlky od rovinnosti. Hrúbku stien kvvety je vhodné voliť tak, aby bola menšia ako kritická hrúbka vrstvy skla pre pozdĺžne vlny, teda taká, aby ultrazvukové vlny v stenách kvvety nerušili výsledné zobrazenie. Uvedená úprava umožňuje získať v celej hrúbke kvapalinovej vrstvy homogénne rozloženú ultrazvukovú vlnu. Celková hrúbka kvapalinovej vrstvy sa pritom volila tak, aby predstavovala pre dané zaclo-nenie zobrazovacej sústavy a jej polohu, celú hĺbku objektového poľa pre prípustnú neostrosť zobrazenia.

Pre úplnosť treba ešte poznamenať, že koeficient odrazu pre rozhranie transformátorový olej — sklo je dosť vysoký, v dôsledku čoho z transformátorového oleja do skla dolnou základňou steny kvvety vniká ultrazvuk so značne zníženou intenzitou. Taktiež amplitúda zmien indexu lomu n'' je v skle vzhľadom na značne vyššiu rýchlosť ultrazvukových vln v skle pri rovnakých intenzitách ultrazvuku takmer iba desatina amplitúdy zmien indexu lomu v transformátorovom oleji. Vzhľadom na tieto pripomienky nie je dodržanie podkritickej hrúbky sklených stien kvvety bezpodmienečne nutné. Uplatnenie sa povrchových vln v stenách kvvety a ohyb ultrazvukovej vlny pri vstupe do kvvety K_2 pritom zanedbávame.

V ohniskovej rovine zobrazovacieho objektívu O_3 bolo možné vymieňať zásahové clony, justovateľne uchytené v držáku a tým realizovať rozličné zásahové funkcie $Q(\gamma)$. Ako zásahové clony sa použili napr. nepriehľadné pásy, ktorých šírka odpovedala obrazu štrbiny S , symetricky rozovierateľné štrbiny a vrstvičky posúvajúce fázu.

Pri práci vzhľadom na jej účel vyšetriť najmä niektoré možnosti priameho zobrazenia stojatej ultrazvukovej vlny, nebolo nutné úzkostlivo zaisťovať dlhodobú

frekvenčnú stabilitu oscilátora. Naproti tomu väčšia starostlivosť sa venovala vyetreniu „monochromaticnosti“ ultrazvukovej vlny, najmä vzhľadom na vybudzovanie nielen základnej, ale i nepárnych harmonických i pri použití harmonického priebehu budiaceho napätia [7]. Tieto vyššie harmonické v prípade ich výrazného zastúpenia by sa mohli rušivo uplatniť, preto bolo treba použiť úpravu, ktorá by ich umožnila vyšetriť, prípadne zoslabiť alebo úplne vylúčiť. Vyskytla sa možnosť použiť polvlnový dosťčkový akustický filter, vhodne umiestený pred vyžiarujúcim kremenným výbrusom. Cez takýto filter prechádza a za ním ultrazvukové pole vytvára tá z harmonických, pre ktorú platí:

$$(2k - 1) \frac{\lambda_k}{2} = D_0,$$

kde $k = 1, 2, 3, \dots$ je celé číslo, λ_k vlnová dĺžka príslušnej harmonickej a D_0 hrúbka dosťčkového filtra [13]. Pravda, ak sa nepoužije dosť veľká hrúbka D_0 , výsledné akustické pole ovplyvňujú aj ohybové kmity dosťčky filtra. Nevýhodou takéhoto postupu je, že polvlnový filter pre zvolenú harmonicú prepúšťa od nej vyššie nepárne harmonické, v dôsledku čoho je možné pracovať len s postupným vylučovaním jednotlivých harmonických sadou filtrov. Ako filtre sa používali planparalelné dosťčky z duralu, umiestené kolmo na smer postupu ultrazvukovej vlny.

Inú možnosť vyšetriť obsah harmonických v ultrazvukovom poli (pri použití postupnej vlny) poskytla metóda, spočívajúca vo vyšetrení nesymetrie difrakčného obrazu v ohniskovej rovine zobrazovacieho objektívu, uvedená napr. v [14], [15] a závislosť tejto nesymetrie na vzdialenosti medzi vyžiarujúcim kryštalom a miestom, v ktorom sa vytvára difrakcia paralelného svetelného zväzku na ultrazvukovej vlne.

Kontrolné snímky difrakčného spektra na postupnej vlne ukázali, že uvažovateľná nesymetria vo vzdialenosti 15 cm od výbrusu sa pozorovala až pri objavení sa vyšších ohybových rádov ako piateho a ohybový obraz cez seba preložených harmonických vln sa nepozoroval.

Kyveta K_2 bola umiestená tak, že jej stredná rovina τ splyvala s predmetovou zápornou hlavnou rovinou objektívu O_3 , čím sa v obrazovej rovine τ' umožnilo pozorovanie obrazu pri jednotkovom priečnom zväčšení.

B. Výsledky experimentálneho vyšetovania

Jednotlivé vyšetovania zobrazenia sa konali pre zásahové funkcie ako sú uvedené pre špeciálny prípad $h < 1$ v teoretickej časti a popisujú sa v rovnakom poradí.

Pripomenúť treba, že je nesnadné merať hodnoty, z ktorých možno stanoviť h a súčasne vytvárať obraz $I(x')$. Preto na hodnotenie veľkosti parametra h sa používali zvlášť konané vyšetrenia ohybového obrazu zdroja svetla (štrbiny) v ohniskovej rovine objektívu O_3 , príslušné rovnakým podmienkam ako pri vytváraní obrazu $I(x')$. Pritom sa bral zreteľ i na prípady, keď $h > 1$.

1. $Q_0 = Q_1 = 1$ (prípado podobný metóde sekundárnej interferencie). Bez použitia zásahovej clony nebolo možné ani pri dostatočne vysokom h , odpovedajúcom vytvoreniu ohybového spektra štvrtého rádu získať v obrazovej rovine ani náznaky periodickej štruktúry (zobrazenie stojatej vlny), kým vo väčšej vzdialenosti v oboch smeroch od nej na fotografickej doske bolo možné zachytiť periodickú štruktúru svetelného zväzku. Vcelku teda možno povedať, že svetelný zväzok v oblasti obrazovej roviny τ' prejavuje v danom prípade minimum kontrastu štruktúry. Poloha tohoto minima sa pri zmenách výkonu generátora, aké boli v našom prípade k dispozícii, nemenila. Tento výsledok je v súhlase i s výkladom, podľa ktorého pri použití stojatej vlny sa konvergenčné čiary (čiary, v ktorých sa pretínajú svetelné lúče v dôsledku ich zakrivenia v ultrazvukovom poli) posúvajú v smere chodu svetla z nekonečna až po vzdialenosť l_0 meranú od kyvety a danú vzťahom [7]

$$l_0 = \frac{A}{2\pi} 1,57 \sqrt{\frac{n_0}{n''}},$$

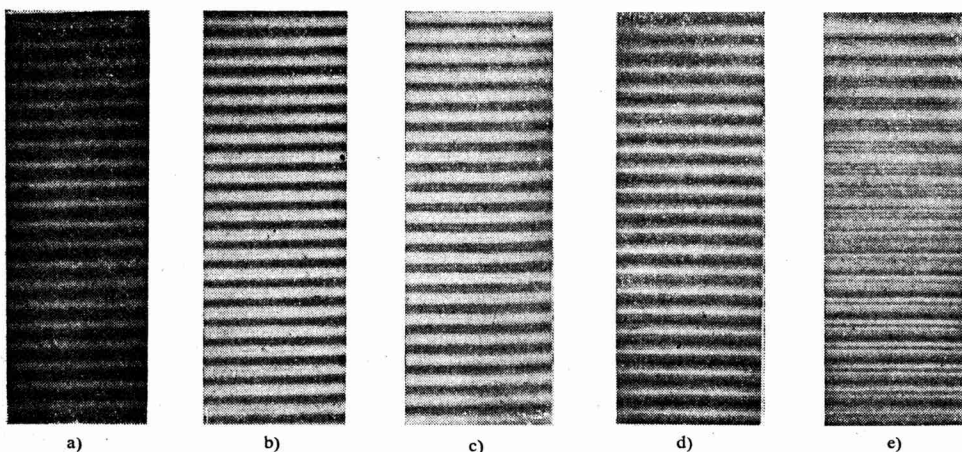
v dôsledku toho, že zhustenia a zriedenia v kvapaline sa periodicky objavujú a zanikajú. Obraz oblasti (vzhľadom na konečnosť apertúry zobrazovacej sústavy), do ktorej sa konvergenčné čiary nedostávajú, odpovedá zistenému minimu. Treba poznamenať, že oblasť obrazovej roviny τ' sa pri použití usporiadaní nekryla s oblasťou Nomotovho minima [16] (bez použitia objektívu O_3).

V oblasti medzi kyvetou K_2 a objektívom bolo možné pozorovať periodickú štruktúru svetelného zväzku, čo sa normálne považuje za dôkaz amplitúdovej štruktúry [17]. Hovoriť o amplitúdovej štruktúre sa ale zdá vhodné s ohľadom na skutočné zníženie celkovej intenzity prechádzajúceho svetla až v prípade, keď ultrazvukové pole je takého charakteru, že nezanedbateľná časť svetla je ultrazvukovou vlnou ohnutá do tej miery, že už nemôže prechádzať objektívom O_3 . Amplitúdovosť štruktúry takto viažeme na relatívny otvor objektívu O_3 . V prípade takéhoto zavedenia amplitúdovej štruktúry sa ukazuje, že v oblasti roviny τ' možno získať zobrazenie periodického charakteru a môžeme ho považovať za dôsledok apertúrneho obmedzenia svetelného zväzku. Pozorovanú periodickú štruktúru v oblasti za kyvetou K_2 treba považovať za interferenčné pole svetelného zväzku.

2. $Q_1 = 1, Q_0 = 0$. Ako experimentálne vyšetrenie zobrazenia ukázalo, kontrastnosť štruktúry obrazu závisí od dodržania presnosti, s akou sa prekrýva ultrazvukovým poľom nerušený obraz štrbiny so zásahovou clonou a od veľkosti parametra h . I keď podrobnejšie teoretické vyšetrenie sa obmedzilo len na prípad $h < 1$ ukazuje sa, že i pri $h > 1$ má výsledné zobrazovanie rovnaký charakter, avšak objavuje sa v ňom mikroštruktúra, ako ju možno očakávať vzhľadom na vzťah (27). Výraznosť tejto mikroštruktúry rastie s h . Typické zobrazenie týmto spôsobom ukazuje obr. 4.

Analogické zobrazenie sa získava pri použití tieňovej metódy, pravda s tým rozdielom, že ultrazvukovým poľom sa vedie konvergentný svetelný zväzok.

3. $Q_1 = 0$, $Q_0 = 1$. Experimentálne sa vyšetril prípad, v ktorom bez použitia zásahovej clony, (t. j. $Q_0 = Q_1 = 1$) nebolo možné zistiť štruktúru v obrazovej rovine. Ukázalo sa, že použitie zásahu $Q_1 = 0$, $Q_0 = 1$ viedlo k vytvoreniu výrazného zobrazenia, čo pre $h < 1$ odpovedá vzťahu (35). Zväčšovanie parametra h vedie k znižovaniu výraznosti zobrazenia. Tento výsledok, ako sa vyššie uvádza je zaujímavý, najmä vzhľadom na dôsledky, plynúce z Abbeovej teórie optického zobrazovania v mikroskope [18]. Podľa nej obraz odpovedá štruktúre objektu tým



Obrázok 4.

Zobrazenie stojatej ultrazvukovej vlny v kvapaline pri $Q_1 = 1$, $Q_0 = 0$:

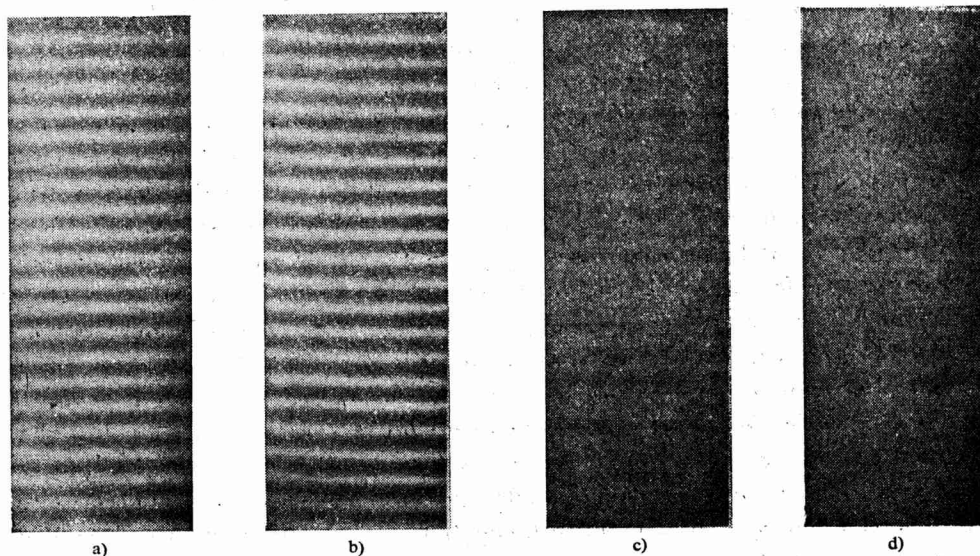
- a) zobrazenie bez mikroštruktúry ($h \sim 1$),
- b) zobrazenie s podružným maximom v minimách osvetlenia,
- c) zobrazenie s podružným minimom v maximách osvetlenia,
- d, e) mikroštruktúra zobrazenia pri $h \gg 1$.

lepšie, čím väčšia časť svetla ohybových maxim vyšších rádov (ohybových obrazov zdroja svetla v obrazovej ohniskovej rovine objektívu O_3), sa na jeho vytváraní podieľa.

Ak sa použije iba svetlo príslušné smeru hlavného ohybového maxima ako je to v našom prípade, by „obraz“ nemal javiť ani náznaky periodičnosti štruktúry (spôsobenej ultrazvukovým poľom a nie prípadnými nehomogenitami indexu lomu, resp. hrúbky) t. j. osvetlenie by malo byť rovnomerné. Ako sa ukázalo, postupné, vzhľadom k hlavnému ohybovému maximu symetrické odkrývanie ohybového obrazu zdroja svetla (otváranie zásahovej štrbinovej clony — štrbiny, obvykle používanej v kolimátore spektrografu) viedlo najprv k zvyšovaniu kontrastnosti periodickej štruktúry, potom cez široké maximum k jej znižovaniu až zániku na jasnom obrazovom poli pri úplnom odstránení zásahu, t. j. pri uplatnení sa všetkých ohybo-

vých spektier zdroja svetla. Obráz 5 ukazuje zobrazenie pri použití hlavného ohybového maxima a tri prípady zobrazenia pri rôznom odkrytí vedľajších maxím.

Je otázka, prečo experiment dáva výsledok, ktorý sa zdá byť v rozpore s Abbeovou teóriou. Pripomeňme však vopred, že používame sínusovú štruktúru a nie „právouhlú“ amplitúdovú mriežku — štruktúru — akú vo svojej teórii predpokladal a v experimentoch používal Abbe. Vzhľadom na túto okolnosť sa zdá, že možno pripustiť nasledovný výklad: sinusovosť zobrazovanej štruktúry spôsobuje, že kým



Obrázok 5.

Závislosť zobrazenia stojatej ultrazvukovej vlny v kvapaline od odkrytia ohybového obrazu zdroja svetla.

- a) zobrazenie pri $Q_1 = 0, Q_0 = 1$,
- b) zobrazenie pri odkrytí pre maximum kontrastu,
- c) zobrazenie pri ďalšom odkrytí má nižší kontrast,
- d) neúplné odkrytie vedie takmer k vymiznutiu štruktúry obrazu.

len objektívom O_3 prechádza svetlo zo smeru aspoň jedného (alebo i jeho nepatrnej časti) z vedľajších ohybových maxím a zo smeru hlavného ohybového maxima, je rozloženie intenzity svetla za zobrazovacím objektívom periodického charakteru. V obrazovej rovine τ' môžeme potom získať periodicky rozložené osvetlenie s periódou, odpovedajúcou polvlnovej dĺžke ultrazvukovej vlny. Získaný výsledok tiež ukazuje, že hovorí o amplitúdovej štruktúre v poli stojatej ultrazvukovej vlny je vhodné až v prípade ako sa uvádza v bode 1., t. j. viazať amplitúdovosť na relatívny otvor zobrazovacej sústavy. Predsa však sa zdá, že úplne uzavrieť túto otázku možno až po podrobnejšom vyšetrení.

4. $Q_1 = 1$, $Q_0 = a e^{i\psi}$. Vyšetrovanie zobrazenia s použitím štvrtvlnovej fázovej dosičky, zásahovej clony s $\psi = \frac{\pi}{2}$, čo odpovedá metóde fázového kontrastu, vykonal pre stojatú ultrazvukovú vlnu Heinemann [19] a pre postupnú vlnu s použitím stroboskopického osvetlenia Torikai a Negishi [20]. Výsledky oboch prác ukazujú, že zobrazenie ultrazvukového poľa vykazuje závislosť kontrastu od parametra h , ako to odpovedá aj výsledkom (36) resp. (27). Táto metóda dáva pri malých hodnotách h pre stojatú vlnu lepšie výsledky ako tieňová metóda. V prípade postupnej vlny možno zlepšiť kontrastnosť obrazu vhodnou voľbou absorpcie a . V práci [20] sa súčasne upozorňuje na objavenie sa jemnej štruktúry — mikroštruktúry — pri zvyšovaní hodnoty parametra h .

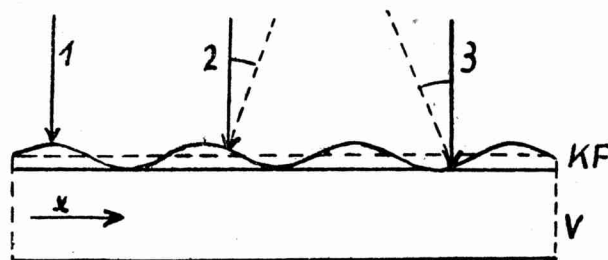
Zo vzťahov (36) resp. (27), odvodených pre harmonický priebeh indexu lomu v ultrazvukovom poli, mikroštruktúra vychádza ako dôsledok ohybu svetla na harmonickej fázovej štruktúre. Vykonať však experiment, ktorý by používal harmonickej štruktúry pri hodnotách parametru h z dosť širokého intervalu, je značne obťažné, preto treba pripustiť i čiastočné uplatnenie sa vyšších harmonických ultrazvukového poľa i keď vyšetrenie ohybového obrazu v ohniskovej rovine τ' ich prítomnosti nenasvedčuje. Nerovnomernosť kontrastu a výraznosti periodičnosti mikroštruktúry zobrazenia, odpovedajúca pomocným funkciám C_μ a C'_μ , nasvedčuje tomu, že vznik mikroštruktúry je spôsobený hlavne ohybom svetla. Ako vidno z obr. 4, možno získať túto mikroštruktúru i pri zásahu $Q_1 = 1$, $Q_0 = 0$. Taktiež zobrazenie ultrazvukovej vlny s nerovnomerným rozdelením parametra h , prípadne s porušeným čelom dopadajúcej i odrazenej vlny, ukazuje vznik mikroštruktúry v miestach, odpovedajúcich vyšším hodnotám h . Je vhodné pripomenúť, že analogickú mikroštruktúru v rovinách „najlepšej viditeľnosti“ v interferenčnom poli svetelnej vlny za stojatou ultrazvukovou vlnou (bez použitia objektívu O_3) zistil a teoreticky zdôvodnil Nomoto [6]. Úplné uzavretie otázky vzniku mikroštruktúry obrazu bude vyžadovať ešte ďalšie experimentálne sledovanie.

Poznámka

Vzhľadom na predpoklady, za ktorých sa odvodili formuly (12) a (27) dá sa čakať, že ich bude možné použiť na približný popis zobrazenia stojatých ultrazvukových vln, vytvorených v priehľadných pevných vrstvách s hrúbkou, blízkou hrúbke kritickej, opatrených na jednej alebo oboch stranách veľmi tenkou vrstvou kvapaliny, kvapalinovým filmom. Takýto kvapalinový film tvorí pri svislom uložení pevnej vrstvy približne planparalelnú vrstvu s jedným voľným rozhraním. Stojaté ultrazvukové vlny v pevnej vrstve vytvoria z kvapalinového filmu „vrstvu“, ktorej hrúbka sa periodicky mení, pričom maximá hrúbky odpovedajú uzlom stojatej vlny v pevnej vrstve, minimá hrúbky zasa kmitnám (obr. 6).

Takto sa z filmu vytvorí „kópia“ stojatej ultrazvukovej vlny v pevnej vrstve,

ktorá je opticky oveľa účinnejšia ako vlastná fázová štruktúra v pevnej látke. To súvisí s tým, že amplitúda zmeny indexu lomu v pevnej vrstve napr. sklenej je asi desaťkrát menšia ako amplitúda indexu lomu v kvapaline, pri tej istej intenzite ultrazvuku. Čelo rovinatej svetelnej vlny sa prechodom takýmto „sinusovým“ kvapalinovým filmom deformuje rovnako, ako prechodom vrstvou s harmonickým rozložením indexu lomu podľa vzťahu (2). Istý rozdiel v oboch prípadoch však väzí v tom, že pri prechode filmom s harmonicky sa meniacou hrúbkou uhol dopadu



Obrázok 6.

Kvapalinový film na planoparalelnej vrstve. V pevná vrstva, KF kvapalinový film; 1, 2, 3 dopad svetla pod rôznymi uhlami.

svetelnej vlny závisí od súradnice x , ako vidno z obr. 6. V presnom výpočte pre takýto prípad bude treba túto závislosť primerane rešpektovať. Kvapalinový film veľmi dobre splňuje predpoklad takmer rovinatej fázovej štruktúry, keďže jeho hrúbka môže byť až niekoľko stotín mm, t. j. hrúbka $d \rightarrow 0$. Vzhľadom na vzťah (5) by sa pri prechode svetla okrem obrazu v rovine τ' malo ohniskovej roviny zobrazovacieho objektívu O_3 vytvárať ohybové spektrum zdroja svetla — štrbiny \mathcal{S} . Získať tento ohybový obraz sa pre veľkú vlnovú dĺžku ultrazvuku v skle pri použití nášho zariadenia zatiaľ nepodarilo.

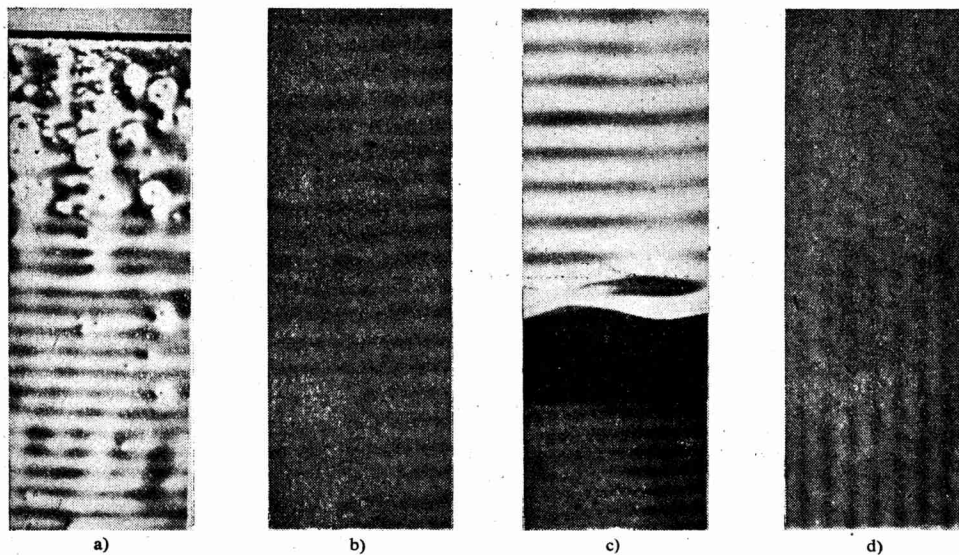
Zobrazovanie v svetle odrazenom od kvapalinového filmu umožňuje rozšíriť optické metódy vyšetrovania šírenia sa ultrazvuku a meranie charakteristických makroskopických konštánt aj na nepriehľadné pevné látky. Pravda, kvapalinový film treba vytvoriť na ich dokonale vyleštenej rovinatej ploche.

Uvedená metóda kvapalinových filmov umožňuje konať najmä vyšetrovanie ultrazvukových polí v oblasti kritickej prípadne i podkritickej hrúbky pevných vrstiev, vyšetrovanie povrchových vln rôznych typov, jednoduchých i mnohonásobných odrazov a absorpcie ultrazvuku.

Istú ťažkosť predstavuje vytvorenie stabilných rovnomerných kvapalinových filmov. Je potrebné pritom použiť dokonale čisté kvapaliny s primeranou viskozitou. Vhodným sa ukázal transformátorový olej. Plochu, na ktorej chceme film vytvoriť, je treba postaviť do svislej polohy. Stekaním kvapaliny sa vytvorí klinová vrstva

s veľmi malým uhlom klinu, ktorú možno v prvom priblížení považovať za plan-paralelnú.

Príklady zobrazenia kvapalinového filmu s „kópiou“ ultrazvukového poľa v sklenej dosičke ukazuje obr. 7.



Obrázok 7.

Zobrazenie stojatej ultrazvukovej vlny v sklenej dosičke s použitím kvapalinového filmu.

- a) zobrazenie „rovinnej“ vlny nesprávne vytvoreným kvapalinovým filmom so vzduchovými bublinami,
- b) zobrazenie „rovinnej“ vlny,
- c) v dolnej časti rovinná vlna vo vrstve kvapaliny; v hornej časti obraz do kvapaliny zasahujúcej dosičky s filmom,
- d) kvapalinový film, zobrazujúci ultrazvukové pole vo voľnej sklenej doske.

Záver

Práca podáva na základe zjednodušujúcich predpokladov rozbor možností optického zobrazovania stojatej ultrazvukovej vlny v priehľadnej kvapaline pri použití symetrického zásahu. Ukazuje sa, že pri zobrazovaní sa podstatne uplatňuje ohyb svetla na fázovej „mriežke“ — štruktúre — danej rozložením indexu lomu v kvapaline a amplitúda zmien indexu lomu. Získané vzťahy dovoľujú stanoviť podmienky, pri ktorých rozloženie osvetlenia obrazu priamo udáva priebeh indexu lomu vo fázovej štruktúre a umožňujú posúdiť charakter vlny (jej „monochromaticnosť“, amplitúdu a geometriu) podľa obrazov, vytvorených s použitím rôznych symetrických zásahov;

tieto vzťahy možno použiť i pre fotometrické zisťovanie energetických pomerov v ultrazvukovom poli.

Zvláštny zreteľ sa venuje otázke fázového, resp. amplitúdového charakteru ultrazvukového poľa v kvapaline; pritom sa ukazuje, že i použitie svetla z maxima ohybového spektra nultého rádu (príslušného zdroju svetla) vedie k vytvoreniu periodického zobrazenia, odpovedajúceho stojatej ultrazvukovej vlne. Podrobnejšie sa sleduje otázka závislosti mikroštruktúry zobrazenia od amplitúdy zmien indexu lomu, pričom sa ukazuje, že hlavný podiel na jej vytváraní má ohyb svetla na zobrazovanej fázovej štruktúre ultrazvukového poľa. Práca uvádza niektoré výsledky a stručne rozoberá možnosti zobrazovania ultrazvukových polí v priehľadných i nepriehľadných pevných látkach. Experimentálne sledovania vo vyšetrovaných prípadoch ukázali súhlas s teóriou.

Záverom treba pripomenúť, že niektoré výsledky práce bude možné výhodne použiť na sledovanie podmienok prechodu ultrazvuku rozhraniami prostredí (akustické filtre, ultrazvuková defektoskopia) a najmä na vyšetrovanie povrchových vln v oblasti ultrazvukových frekvencií. Toto posledné sledovanie povrchových vln možno za istých, ohraničujúcich podmienok, považovať za modelové sledovanie pre oblasť infrazvukov, čo sľubuje využitie najmä v seizmike.

Dodatok

Pri určovaní $B(x', t)$, daného (4'') použijeme označenie

$$B(x', t) = B_1(x', t) + B_2(x', t) + B_3(x', t), \quad (\text{D-1})$$

kde

$$B_1(x', t) = \frac{k\Lambda}{2\pi} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} Q(\gamma) J_0(\xi) \frac{2}{\gamma\Lambda} \sin \gamma\Lambda N\pi \cdot e^{i2\pi\gamma x'} d\gamma$$

$$B_2(x', t) = -\frac{k\Lambda}{2\pi} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} Q(\gamma) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\xi) \frac{4\gamma\Lambda}{4m^2 - \gamma^2\Lambda^2} \sin \gamma\Lambda N\pi \cdot e^{i2\pi\gamma x'} d\gamma,$$

$$B_3(x', t) = \frac{k\Lambda}{2\pi} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} Q(\gamma) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} J_{2m-1}(\xi) \frac{i4\gamma\Lambda}{(2m-1)^2 - \gamma^2\Lambda^2} \sin \gamma\Lambda N\pi \cdot e^{i2\pi\gamma x'} d\gamma.$$

Výpočet jednotlivých integrálov (D-1) umožní vzťah [8]

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{u_0} \frac{\sin u}{u} e^{ivu} du = \Pi[u_0, v] + i\Gamma[u_0, v], \quad (\text{D-2})$$

v ktorom

$$\pi\Pi[u, v] = Si[u(v+1)] - Si[u(v-1)], \quad Si[\vartheta] = \int_0^{\vartheta} \frac{\sin t}{t} dt \quad (D-3)$$

a

$$\pi\Gamma[u, v] = \hat{Ci}[u(v+1)] - \hat{Ci}[u(v-1)], \quad \hat{Ci}[\vartheta] = \int_0^{\vartheta} \frac{1 - \cos t}{t} dt; \quad (D-4)$$

$Si[\vartheta]$ je integrálsínus; $\hat{Ci}[\vartheta]$ je funkcia, obdobná integrálkosínu, avšak pre výpočet pohodlnejšia, keďže je všade regulárna. Zo súvisu medzi integrálkosínom $Ci[\vartheta]$ a $\hat{Ci}[\vartheta]$ daným vzťahom [10]

$$Ci[\vartheta] = - \int_{\vartheta}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \ln \gamma_E \vartheta - \int_0^{\vartheta} \frac{1 - \cos t}{t} dt, \quad (D-5)$$

kde $\gamma_E = 1,781\ 072$, vzhľadom na známe vlastnosti logaritmickej funkcie a

$$Si[-\vartheta] = -Si[\vartheta], \quad Ci[\vartheta e^{\pm i\pi}] = Ci[\vartheta] \pm i\pi \quad (D-6)$$

dá sa ukázať, že

$$\begin{aligned} \Pi[-u, v] &= -\Pi[u, v], & \Pi[u, -v] &= \Pi[u, v], \\ \Gamma[-u, v] &= \Gamma[u, v], & \Gamma[u, -v] &= -\Gamma[u, v]. \end{aligned} \quad (D-7)$$

1. Výpočet $B_1(x', t)$.

Ťažisko výpočtu $B_1(x', t)$ spočíva v určení integrálu

$$y_1 = \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} Q(\gamma) \frac{\sin \gamma \Delta N \pi}{\gamma \Delta} \cdot e^{i2\pi\gamma x'} d\gamma,$$

pre

$$Q(\gamma) = \begin{cases} Q_1 (= \text{konšt}) & \text{pre } -\gamma_0 \leq \gamma < -\gamma', \\ Q_0 (= \text{konšt}) & \text{pre } -\gamma' \leq \gamma \leq \gamma', \\ Q_1 (= \text{konšt}) & \text{pre } \gamma' < \gamma \leq \gamma_0, \\ 0 & \text{pre } |\gamma| > \gamma_0. \end{cases} \quad (D-8)$$

Bezprostredné použitie vzorca (D-1) umožní nasledovné vyjadrenie

$$y_1 = Q_1 \left(-\int_0^{-\gamma_0} + \int_0^{-\gamma'} \right) + Q_0 \left(-\int_0^{-\gamma'} + \int_0^{\gamma'} \right) + Q_1 \left(-\int_0^{\gamma'} + \int_0^{\gamma_0} \right).$$

Po zavedení

$$u = \gamma \Delta N \pi \quad \text{a} \quad v = \frac{2x'}{\Delta N},$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
 y_1 = & Q_1 \frac{\pi}{2A} \{-(\Pi[-u_0, v] + i\Gamma[-u_0, v]) + (\Pi[-u', v] + i\Gamma[-u', v])\} + \\
 & + Q_0 \frac{\pi}{2A} \{-(\Pi[-u', v] + i\Gamma[-u', v]) + (\Pi[u', v] + i\Gamma[u', v])\} + \\
 & + Q_1 \frac{\pi}{2A} \{-(\Pi[u', v] + i\Gamma[u', v]) + (\Pi[u_0, v] + i\Gamma[u_0, v])\}.
 \end{aligned}$$

Posledný výraz možno upraviť vzhľadom na vlastnosti (D-7) do tvaru

$$y_1 = Q_1 \frac{\pi}{A} (\Pi[u_0, v] - \Pi[u', v]) + Q_0 \frac{\pi}{A} \Pi[u', v], \quad (\text{D-9})$$

z ktorého podľa (D-1) dostaneme

$$B_1(x', t) = kJ_0(\xi) \{ \Pi[u', v] (Q_0 - Q_1) + \Pi[u_0, v] Q_1 \}. \quad (\text{D-10})$$

2. Výpočet $B_2(x', t)$ a $B_3(x', t)$.

Počítajme najprv $B_2(x', t)$.

Využitie vlastností Besselových funkcií prvého druhu a konečnosť parametra ξ umožňuje zmenu poradia integrácie a sumovania, takže

$$B_2(x', t) = -\frac{kA}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\xi) [y_{21} - y_{22}], \quad (\text{D-11})$$

kde

$$y_{21} = \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} Q(\gamma) \frac{\sin \gamma AN \pi}{2m - \gamma A} e^{i2\pi\gamma x'} d\gamma,$$

a

$$y_{22} = \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} Q(\gamma) \frac{\sin \gamma AN \pi}{2m + \gamma A} e^{i2\pi\gamma x'} d\gamma.$$

pričom $Q(\gamma)$ udáva vzťah (D-8).

Substitúcie $N\pi(2m - \gamma A) = w$, $N\pi(2m + \gamma A) = s$ umožnia výpočet konať analogicky ako pri $B_1(x', t)$, ak sa omedzíme na $N = \frac{G_0}{A}$ celé (táto podmienka sa dá i v experimente ľahko splniť). Ak potom uvážime, že napr.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\gamma_0} \frac{\sin \gamma AN \pi}{2m - \gamma A} e^{i2\pi\gamma x'} d\gamma &= \frac{1}{A} \int_0^{w_0} \frac{\sin w}{w} e^{-i\pi w} e^{i4\pi \frac{x'}{A} m} dw = \\
 &= \frac{\pi}{2A} e^{i4\pi \frac{x'}{A} m} \{ \Pi[w_0, v] - i\Gamma[w_0, v] \},
 \end{aligned}$$

je

$$y_{21} = \frac{\pi}{2A} e^{i4\pi \frac{x'}{A} m} \{Q_1(-\Pi[+\gamma_0] + \Pi[-\gamma_0] + \Pi[+\gamma'] - \Pi[-\gamma']) + \\ + iQ_1(\Gamma[+\gamma_0] - \Gamma[-\gamma_0] + \Gamma[-\gamma'] - \Gamma[+\gamma']) + \\ + Q_0(\Pi[-\gamma'] - \Pi[+\gamma'] + i\Gamma[+\gamma'] - i\Gamma[-\gamma'])\},$$

kde pre jednoduchosť sa používa skrátenejší zápis, rešpektujúci pripočítavanie (odpočítavanie) hodnôt $\gamma_0 A$, $\gamma' A$ spôsobom, ktorý ozrejmuje nasledovné príklady (závislosť na x' tu nezdôrazňujeme).

$$\begin{aligned} \Pi[\pi N(2m + \gamma_0 A), v] &\equiv \Pi_{2m}[+\gamma_0] = \Pi[+\gamma_0], \\ \Pi[\pi N(2m - \gamma_0 A), v] &\equiv \Pi_{2m}[-\gamma_0] = \Pi[-\gamma_0], \\ \Gamma[\pi N(2m + \gamma' A), v] &\equiv \Gamma_{2m}[+\gamma'] = \Gamma[+\gamma'], \\ \Gamma[\pi N(2m - \gamma' A), v] &\equiv \Gamma_{2m}[-\gamma'] = \Gamma[-\gamma']. \end{aligned} \quad (D-12)$$

(Index $2m$ je nutné použiť až pri sumovaní.)

Podobne s ohľadom na

$$\begin{aligned} \int_0^{\gamma_0} \frac{\sin \gamma A N \pi}{2m + \gamma A} e^{i2\pi \gamma x'} d\gamma &= \frac{1}{A} \int_0^{s_0} \frac{\sin s}{s} e^{ivs} \cdot e^{-i4\pi \frac{x'}{A} m} ds = \\ &= \frac{\pi}{2A} e^{-i4\pi \frac{x'}{A} m} \{\Pi[s_0, v] + i\Gamma[s_0, v]\}, \end{aligned}$$

je

$$y_{22} = \frac{\pi}{2A} e^{-i4\pi \frac{x'}{A} m} \{Q_1(-\Pi[-\gamma_0] + \Pi[+\gamma_0] + \Pi[-\gamma'] - \Pi[+\gamma']) + \\ + iQ_1(-\Gamma[-\gamma_0] + \Gamma[-\gamma'] - \Gamma[+\gamma'] + \Gamma[+\gamma_0]) + \\ + Q_0(-\Pi[-\gamma'] + \Pi[+\gamma'] + i\Gamma[+\gamma'] - i\Gamma[-\gamma'])\}.$$

Dosadením y_{21} a y_{22} do (D-11) dostaneme

$$B_2(x', t) = k \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\xi) \left\{ [Q_1 P_{2m}(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) P_{2m}(\gamma')] \cos 4\pi \frac{x'}{A} m + \right. \\ \left. + [Q_1 G_{2m}(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) G_{2m}(\gamma')] \sin 4\pi \frac{x'}{A} m \right\}, \quad (D-13)$$

kde sa pre prehľadnosť používa označenie

$$\begin{aligned} P_{2m}(\gamma_0) &= \Pi_{2m}[+\gamma_0] - \Pi_{2m}[-\gamma_0], & P_{2m}(\gamma') &= \Pi_{2m}[+\gamma'] - \Pi_{2m}[-\gamma'], \\ G_{2m}(\gamma_0) &= \Gamma_{2m}[+\gamma_0] - \Gamma_{2m}[-\gamma_0], & G_{2m}(\gamma') &= \Gamma_{2m}[+\gamma'] - \Gamma_{2m}[-\gamma']. \end{aligned}$$

Analogický výpočet vedie k vyjadreniu tretej časti integrálu (D-1) v tvare

$$B_3(x', t) = ki \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} J_{2m-1}(\xi) \left\{ [Q_1 P_{2m-1}(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) P_{2m-1}(\gamma)] \cdot \right. \\ \left. \cdot \cos 2\pi \frac{x'}{A} (2m-1) + [Q_1 G_{2m-1}(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) G_{2m-1}(\gamma')] \sin 2\pi \frac{x'}{A} (2m-1) \right\}. \quad (D-14)$$

Pre obrazovú funkciu (D-1) po dosadení (D-10), (D-13) a (D-14) a príslušnej úprave dostávame

$$B(x', t) = \frac{k}{2} J_0(\xi) [Q_1 P_0(\gamma_0) + (Q_0 - Q_1) P_0(\gamma)] + \\ + k \sum_{\mu=1}^{\infty} i^{\mu} J_{\mu}(\xi) \left\{ [Q_1 P_{\mu}(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) P_{\mu}(\gamma')] \cos 2\pi \frac{x'}{A} \mu + \right. \\ \left. + [Q_1 G_{\mu}(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) G_{\mu}(\gamma')] \sin 2\pi \frac{x'}{A} \mu \right\}. \quad (D-15)$$

Vzťah (D-15) je vhodné používať v prehľadnom tvare

$$B(x', t) = B_0 + k \sum_{\mu=1}^{\infty} i^{\mu} J_{\mu}(\xi) \left(C_{\mu} \cos 2\pi \frac{x'}{A} \mu + C'_{\mu} \sin 2\pi \frac{x'}{A} \mu \right), \quad (D-16)$$

kde

$$B_0 = \frac{k}{2} J_0(\xi) [Q_1 P_0(\gamma_0) + (Q_0 - Q_1) P_0(\gamma')] = \frac{k}{2} J_0(\xi) \mathfrak{A}_0, \\ C_{\mu} = Q_1 P_{\mu}(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) P_{\mu}(\gamma'), \\ C'_{\mu} = Q_1 G_{\mu}(\gamma_0) - (Q_1 - Q_0) G_{\mu}(\gamma'); \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (D-17)$$

Literatúra

- [1] Tawil E. P., Compt. Rend., 191, 92, 168 (1930).
- [2] Debye P., Sears F. W., Proc. Nat. Acad. Sci. Wash., 18, 409 (1932).
- [3] Lucas R., Biquard P., Journ. de phys. et rad., 5, 119 (1934).
- [4] Bachem Ch., Hiedemann E., Asbach H. R., Zs. f. Phys. 87, 734 (1934).
- [5] Parthasarathy S., Proc. Indian Acad. Sci., A4, 555 (1936).
- [6] Nomoto O., Journ. Phys. Soc. Japan, 2, 1 (1947).
- [7] Bergmann L., Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik, ruský preklad, Moskva (1956).
- [8] Wolter H., Schlieren-, Phasenkontrast und Lichtschnittverfahren, Handbuch der Physik, Springer-Verlag (1956).
- [9] Watson G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, ruský preklad, Moskva (1949).

- [10] Jahnke—Emde, Tafeln höherer Funktionen, B. G. Teubner — Leipzig (1952).
- [11] Фаддеева В. Н., Гавурин М. К., Таблицы функций Бесселя цепных номеров, Москва—Ленинград, (1950).
- [12] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А., Справочник по математике, Москва, (1956).
- [13] Михайлов И. Г., Шутилов В. А., Акустический журнал, 5, 77 (1959).
- [14] Zankel K. L., Hiedemann E. A., Naturwissenschaften, 45, 157 (1958).
- [15] Михайлов И. Г., Шутилов В. А., Акустический журнал, 4, 174 (1958).
- [16] Nomoto O., Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 19, 337 (1937).
- [17] Bär R., Helv. phys. Acta, 9, 265 (1936).
- [18] Michel K., Die Grundlagen der Theorie des Mikroskops, ruský preklad, Moskva (1955).
- [19] Heinemann E., Optik, 9, 379 (1952).
- [20] Torikai Y., Negishi K., Journ. Phys. Soc. Japan, 8, 119 (1953).

Adresa autora: Bratislava, Šmeralova 2, Katedra fyziky.

Do redakcie dodané 15. 5. 1960

К оптическому исследованию стоячей ультразвуковой волны в прозрачной жидкости

С. Колник

Резюме

Предлагаемая работа представляет вклад к решению прямого оптического изображения стоячей ультразвуковой волны в прозрачной жидкости и приводит анализ возможностей такого изображения при применении разнообразных типов симметрического вмешательства в соответствующей фокальной плоскости ообразжающей системы.

Ряд упрощающих предположений позволяет использовать для расчета функции изображения отношение (4), которое ведет прямо к отношению (12). Для установления освещения изображения нужно решительно знать временное среднее значение квадрата абсолютного значения функции изображения. Эта функция дана соотношением (27), которое позволяет вместе установить и характер изображения в зависимости от выбора симметрического вмешательства как и от значения параметра h , характеризующего амплитуду изменений показателя преломления в стоячей ультразвуковой волне. Для отдельных случаев оформленное соотношение (27) можно использовать для фотометрических

измерений, из которых можно определить энергетические соотношения в ультразвуковом поле.

Особое внимание обращается к проблеме фазового или амплитудного характера ультразвукового поля в жидкости. Также указывается, что этот амплитудный характер можно связывать с относительным отверстием изображающей системы. Интересным является, что использование света из максимума дифракционного спектра (источника света) нулевого порядка ведет к периодическому изображению, соответствующему стоячей ультразвуковой волне. Также следует вопрос о зависимости микроструктуры изображения от амплитуды изменений показателя преломления. При этом указывается, что главную долю для ее создания имеет дифракция света на изображаемой фазовой структуре ультразвукового поля. Работа приводит некоторые результаты и анализирует возможности изображения ультразвуковых полей в твердых телах, как прозрачных так и непрозрачных при использовании фильма на них созданного из жидкости.

Экспериментальные исследования указывают согласие с теорией. Результаты работы можно использовать для исследования условий перехода ультразвука системой слоев и особенно для исследования поверхностных волн в области ультразвуковых частот. Последнее можно при некоторых условиях считать как модельное исследование для области инфразвука, что обещает применение в сейсмике.

Zur optischen Untersuchung der stehenden Ultraschallwelle in durchsichtiger Flüssigkeit

S. Kolník

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur Lösung des Problems der direkten Abbildung einer stehenden Ultraschallwelle in durchsichtiger Flüssigkeit. Darin sind die Möglichkeiten die Abbildungen dieser Art bei Benutzung von verschiedenen symmetrischen Eingriffe in die Beugungsebene des Abbildungssystems zu analysieren.

Die Anwendungen einiger Voraussetzungen ermöglicht zur Berechnung der Bildfunktion die Formel (4), die gerade zu (12) führt, zu verwenden. Zur Bestimmung der Bildbeleuchtung ist in entscheidender Weise notwendig den zeitlichen Mittelwert der zweiten Potenz des Absolutwertes der Bildfunktion zu kennen. Er ist durch die Formel (27) gegeben. Diese Formel ermöglicht zugleich den Abbildungscharakter in Abhängigkeit von der Wahl des symmetrischen Eingriffes, wie auch vom Werte des Parameters h , der die Amplitude des Brechungsindex in stehender Ultraschall-

welle charakterisiert, zu bestimmen. Die Formel (27), modifizierte für einzelne Fälle ist auch bei photometrischen Messungen, aus welchen die energetischen Verhältnisse im Ultraschallfeld zu bestimmen möglich ist, verwendbar.

Besondere Aufmerksamkeit wird auch der Frage des Phasen- resp. Amplitudencharakters des Ultraschallfeldes in der Flüssigkeit gewidmet. Dabei wird gezeigt, daß es möglich ist, den Amplitudencharakter auf die relative Öffnung des Abbildungssystems zu binden. Als beachtenswertes Resultat ist weiter gezeigt, daß auch bei Benutzung des Lichtes aus dem Beugungsmaximum (der Lichtquelle) nulter Ordnung eine, der stehenden Ultraschallwelle entsprechende, periodische Abbildung, entsteht. Es wird auch die Abhängigkeit der Mikrostruktur der Abbildung von der Amplitude der Brechungsindexveränderungen verfolgt. Dabei wird klar, daß die Lichtbeugung auf der abgebildeten Phasenstruktur des Ultraschallfeldes von Hauptanteil bei der Bildung dieser Mikrostruktur ist. Die Arbeit gibt auch einige Ergebnisse über die Abbildungsmöglichkeiten der Ultraschallfelder in festen durchsichtigen und auch undurchsichtigen Medien bei Verwendung auf diesen Materialien erzeugten flüssigen Filmen.

Die experimentale Untersuchung ergab Übereinstimmung mit der Theorie. Die Ergebnisse der Arbeit sind beim Verfolgen der Ultraschallübergangsbedingungen durch die Schichtsysteme und besonders bei Untersuchung der Oberflächewellen im Gebiet der Ultraschallfrequenzen verwendbar. Die letztere Untersuchung der Oberflächewellen kann man unter bestimmten Bedingungen für Modelluntersuchung im Infrarotgebiet halten, was eine Verwendung, besonders in der Seismik verspricht.

Normálny prípad Poinsotovej precesie

J. CHRAPAN

Uvažujme tuhé teleso, ktorého Eulerove dynamické rovnice [1; str. 177 (29)] sú

$$\begin{aligned} A\dot{p} - (B - C)qr &= 0; \\ B\dot{q} - (C - A)rp &= 0; \\ C\dot{r} - (A - B)pq &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

kde A ; B ; C znamenajú centrálné hlavné momenty zotrvačnosti telesa, p ; q ; r sú ortogonálne anholonomné zložky vektora uhlovej rýchlosti $\bar{\omega}$ telesa vzhľadom na pozitívny kartézsky ortogonálny normovaný vzájomný systém pevný v telese, s počiatkom v hmotnom strede telesa, pevnom v inerciálnom priestore a s osami v smeroch osí plochy centrálného tenzora zotrvačnosti telesa. Hodnoty p ; q ; r sú funkcie času t a \dot{p} ; \dot{q} ; \dot{r} sú ich časové derivácie.

Substitúciami

$$\begin{aligned} p(t) &= p'\pi(t); \\ q(t) &= q'\varkappa(t); \\ r(t) &= r'\varrho(t); \\ u(t) &= n(t + \tau) \end{aligned}$$

prejde diferenciálny systém (1) do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{du} &= \frac{(B - C)q'r'}{Ap'n} \varkappa\varrho; \\ \frac{d\varkappa}{du} &= \frac{(C - A)r'p'}{Bq'n} \varrho\pi; \\ \frac{d\varrho}{du} &= \frac{(A - B)p'q'}{Cr'n} \pi\varkappa, \end{aligned}$$

v ktorom medzi zavedenými konštantami p' ; q' ; r' ; n môžeme zvoliť vzťahy

$$\begin{aligned}\frac{(B - C) q' r'}{A p' n} &= -1; \\ \frac{(C - A) r' p'}{B q' n} &= 1; \\ \frac{(A - B) p' q'}{C r' n} &= -k^2,\end{aligned}\tag{2}$$

na základe ktorých riešenie diferenciálneho systému (1) poskytujú rovnice [2; str. 283; 6.159]

$$\begin{aligned}p &= p' \operatorname{cn}(u; k); \\ q &= q' \operatorname{sn}(u; k); \\ r &= r' \operatorname{dn}(u; k).\end{aligned}\tag{3}$$

Z relácií (3) pre čas $t = 0$ vychádza

$$\begin{aligned}p_0 &= p' \operatorname{cn}(n\tau; k); \\ q_0 &= q' \operatorname{sn}(n\tau; k); \\ r_0 &= r' \operatorname{dn}(n\tau; k),\end{aligned}\tag{4}$$

z čoho vzhľadom na (2)

$$\begin{aligned}p'^2 &= p_0^2 + \frac{B(C - B)}{A(C - A)} q_0^2; \\ q'^2 &= q_0^2 + \frac{A(C - A)}{B(C - B)} p_0^2; \\ r'^2 &= r_0^2 + \frac{B(B - A)}{C(C - A)} q_0^2\end{aligned}\tag{5}$$

a ďalej

$$n^2 = \frac{(C - A)(C - B)}{AB} r'^2;\tag{6a}$$

$$k^2 = \frac{A(B - A)}{C(C - B)} \frac{p'^2}{r'^2},\tag{6b}$$

resp.

$$\tau = \frac{1}{n} F(\eta; k);\tag{7a}$$

$$\eta = \arcsin \frac{q_0}{q'}.\tag{7b}$$

Hodnoty A ; B ; C sú konštanty telesa a hodnoty p_0 ; q_0 ; r_0 sú konštanty pohybu, dané počiatočným kinematickým stavom telesa.

Normálny prípad Poinsovej precesie definujeme podmienkou

$$0 < k^2 < 1, \quad (8)$$

z ktorej vzhľadom na (6b) vychádza

$$0 < \frac{A(B-A)}{C(C-B)} \frac{p'^2}{r'^2} < 1. \quad (9)$$

V súhlase s reláciou (9) zavedme predpoklad, ktorý možno vždy splniť, aby bolo

$$C > B > A \quad (10)$$

a podmienku (9) formulujme v tvare

$$\frac{p'^2}{r'^2} < \frac{C(C-B)}{A(B-A)}. \quad (11)$$

Znamienka konštánt p' ; q' ; r' ; n ; τ zvolme nasledovne.

Vzhľadom na (2) a (10) je

$$\begin{aligned} \frac{q'r'}{p'n} &> 0; \\ \frac{r'p'}{q'n} &> 0; \\ \frac{p'q'}{r'n} &> 0, \end{aligned} \quad (12)$$

resp.

$$\begin{aligned} \frac{|q'| |r'|}{|p'| |n|} &= \frac{A}{C-B} > 0; \\ \frac{|r'| |p'|}{|q'| |n|} &= \frac{B}{C-A} > 0; \\ \frac{|p'| |q'|}{|r'| |n|} &= \frac{Ck^2}{B-A} > 0, \end{aligned} \quad (13)$$

preto

$$\text{sign } n = \text{sign}(p' q' r'). \quad (14)$$

Vzhľadom na (7b) zvolme

$$\text{sign } q' = \text{sign } q_0, \quad (15)$$

aby bolo

$$0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}; \quad (16)$$

vzhľadom na (7a) zvolíme

$$\text{sign } \tau = \text{sign } n, \quad (17)$$

aby bolo

$$0 \leq F(\eta; k) \leq K. \quad (18)$$

Pretože funkcie cn ; dn v intervale $0 \leq n\tau \leq K$ sú kladné,

$$\begin{aligned} \text{sign } p' &= \text{sign } p_0; \\ \text{sign } r' &= \text{sign } r_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Z diferenciálneho systému (1) vidíme, že vektor momentu hybnosti \bar{G} telesa je konštantný v inerciálnom priestore. Môžeme preto písať

$$\bar{G} = \text{const.} = \bar{k}^0 l,$$

kde $l = |\bar{G}|$ znamená absolútnu hodnotu vektora momentu hybnosti telesa a \bar{k}^0 je jeho konštantný jednotkový vektor.

Zaveďme pozitívny inerciálny kartézsky ortogonálny normovaný referenčný systém s počiatkom v hmotnom strede telesa a s osou z súhlasne orientovanou v smere jednotkového vektora \bar{k}^0 , potom platí relácia

$$\bar{k}^0 = (\bar{\Omega}^{-1} \bar{k}^{0'}),$$

v ktorej symbol $\bar{\Omega}^{-1}$ znamená inverzný Eulerov verzor ortogonálnej transformácie [3; str. 125 (4.46)] a $\bar{k}^{0'}$ je jednotkový vektor osi z' referenčného systému, zavedeného v diferenciálnom systéme (1).

Vzhľadom na vzťah [3; str. 164 (5.8)]

$$\bar{G} = (\bar{h}\bar{\omega}), \quad (20)$$

medzi vektorom momentu hybnosti telesa, tenzorom zotrvačnosti \bar{h} telesa a vektorom jeho uhlovej rýchlosti, platí

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= (p \ q \ r) = (\bar{h}^{-1} \bar{G}) = \\ &= (\bar{h}^{-1} \bar{\Omega}^{-1} \bar{k}^{0'}) l = \\ &= l(A^{-1} \sin \varphi \sin \vartheta \ B^{-1} \cos \varphi \sin \vartheta \ C^{-1} \cos \vartheta), \end{aligned} \quad (21)$$

kde $\varphi(t)$; $\vartheta(t)$ sú Eulerove parametre vlastnej rotácie a nutácie telesa. Pre tieto parametre poskytuje relácia (21) výsledky

$$\varphi(t) = \arctg \frac{Ap}{Bq}; \quad (22a)$$

$$\vartheta(t) = \arccos \frac{C}{l} r, \quad (22b)$$

z ktorých pre počiatočné hodnoty parametra vlastnej rotácie a parametra nutácie máme

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \operatorname{arctg} \frac{Ap_0}{Bq_0}; \\ \vartheta_0 &= \arccos \frac{C}{l} r_0.\end{aligned}\quad (23)$$

Za vzťahu (20) vzhľadom na (5) vychádza

$$|\bar{G}| = l = \sqrt{A^2 p_0^2 + B^2 q_0^2 + C^2 r_0^2} = \sqrt{A^2 p'^2 + C^2 r'^2}. \quad (24)$$

Pomocou Eulerových klinogonálnych holonomných zložiek vektora uhlovej rýchlosti telesa [3; str. 152 (4.103)] môžeme napísať reláciu

$$\begin{aligned}(p \ q \ r) &= \\ &= \dot{\vartheta}(\cos \varphi \ -\sin \varphi \ 0) + \dot{\varphi}(0 \ 0 \ 1) + \dot{\psi}(\sin \varphi \sin \vartheta \ \cos \varphi \sin \vartheta \ \cos \vartheta) = \\ &= (\dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \vartheta \ -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta \ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta),\end{aligned}\quad (25)$$

v ktorej hodnota $\psi(t)$ znamená Eulerov parameter Poinsotovej precesie telesa.

Časová derivácia parametra $\psi(t)$ je podľa vzťahu (25) určená reláciou, ktorú možno postupne upraviť takto

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (r - \dot{\varphi}) = \frac{l}{C} \left(1 - \frac{\dot{\varphi}}{r}\right) = \\ &= \frac{l}{C} \left\{1 + \frac{Ap'}{Br'} \cos^2 \varphi \frac{\dot{u}}{\operatorname{sn}^2(u; k)}\right\} = \\ &= \frac{l}{C} \left\{1 + \frac{Bq'}{Ap'r'} \frac{\dot{u}}{\operatorname{cn}^2(u; k) + \frac{B^2 q'^2}{A^2 p'^2} \operatorname{sn}^2(u; k)}\right\} = \\ &= \frac{l}{C} \left\{1 + \frac{Bq'}{Ap'r'} \frac{\dot{u}}{1 + \frac{C(B-A)}{A(C-B)} \operatorname{sn}^2(u; k)}\right\} = \\ &= \frac{l}{C} \left\{1 + \frac{Bq'}{Ap'r'} \frac{\dot{u}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(v; k) \operatorname{sn}^2(u; k)}\right\}.\end{aligned}\quad (26)$$

Vo formulácii (26) sme použili substitúciu

$$-k^2 \operatorname{sn}^2(v; k) = \frac{C(B-A)}{A(C-B)}, \quad (27)$$

z ktorej vzhľadom na (10) vyplýva, že argument funkcie sn v relácii (27) je imaginárny,

$$v = i\alpha \quad (28)$$

a že vzhľadom na (6b) a (24) platia rovnice

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(\alpha; k') &= \frac{C}{l} |r'|; \\ \operatorname{cn}(\alpha; k') &= \frac{A}{l} |p'|; \\ \operatorname{dn}(\alpha; k') &= \frac{B}{l} |q'|, \end{aligned} \quad (29)$$

v ktorých absolútne hodnoty $|r'|$; $|p'|$; $|q'|$ súvisia s požiadavkou, aby hodnota

$$\alpha = F(\xi; k'), \quad (30)$$

kde

$$\xi = \arcsin \frac{C}{l} |r'|, \quad (31)$$

spĺňala nerovnosť

$$0 < \alpha < K'.$$

Podľa možných hodnôt argumentu α treba rozoznávať dva prípady. Ak sa splní podmienka

$$\frac{p'^2}{r'^2} \geq \frac{C^3(B-A)}{A^3(C-B)},$$

resp.

$$k \geq \frac{C(B-A)}{A(C-B)}, \quad (32)$$

hodnoty α sú z intervalu

$$0 < \alpha \leq \frac{K'}{2}; \quad (33)$$

potom však súčasne musí byť

$$B < \frac{2AC}{A+C}.$$

Pri podmienke

$$\frac{p'^2}{r'^2} < \frac{C^3(B-A)}{A^3(C-B)},$$

resp.

$$k < \frac{C(B-A)}{A(C-B)}, \quad (34)$$

argument α má hodnoty z intervalu

$$\frac{K'}{2} < \alpha < K'. \quad (35)$$

Integrovaním výsledku (26) dostaneme

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{l}{C} \left\{ t + \tau + \frac{Bq'}{Ap'r'} \int_0^u \frac{du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(v; k) \operatorname{sn}^2(u; k)} \right\} = \\ &= \frac{l}{A} (t + \tau) + i \frac{n}{|n|} \Pi_0(u; v; k),\end{aligned}\quad (36)$$

kde

$$\Pi_0(u; v; k) = \int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn}(v; k) \operatorname{cn}(v; k) \operatorname{dn}(v; k) \operatorname{sn}^2(u; k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(v; k) \operatorname{sn}^2(u; k)} du,$$

je Π -funkcia s indexom nula [4; str. 103 (6); resp. 5; str. 33 (3, 8)].

Relácia (36) predstavuje všeobecné vyjadrenie pre parameter $\psi(t)$ normálneho prípadu Poinsovej precesie, ako funkcie času. Aby sa formulácia (36) mohla použiť na opis normálneho prípadu Poinsovej precesie pri konkrétnych hodnotách argumentu u a parametra v funkcie Π_0 , musíme urobiť rozbor výsledku (36) a formulovať výsledky platné pre možné prípady hodnôt argumentu a parametra funkcie Π_0 .

V prípade (33) pre hodnoty argumentu

$$0 \leq |u| \leq \frac{K}{2}$$

transformáciou

$$\begin{aligned}\Pi_0(u; v; k) &= \Pi_3(u; v; k) + iuk^2 \frac{\operatorname{sn}(\alpha; k')}{\operatorname{cn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(\alpha; k')} - \\ &- i \operatorname{arctg} \frac{k^2 \operatorname{sn}(\alpha; k') \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{cn}(u; k)}{\operatorname{cn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(u; k)},\end{aligned}$$

kde

$$\Pi_3(u; v; k) = uZ_3(v; k) + \Omega_3(u; v; k),$$

je Π -funkcia s indexom tri, definovaná Jacobiho transcendentou druhého druhu s indexom tri Z_3 a Jacobiho transcendentou tretieho druhu s indexom tri Ω_3 [5; str. 24; 1. a); str. 26 (1,4); str. 27; 2. a); str. 31 (3,1)], po dosadení hodnôt (3); (6b); (13); (28) a (29) do výrazu (36) dostaneme

$$\psi(t) = \frac{l}{B} (t + \tau) + \operatorname{arctg} \frac{(B - A) lpq}{A(C - A) p'^2 r} + i \frac{n}{|n|} \Pi_3(u; v; k).\quad (37)$$

Ak sú hodnoty argumentu dané vzťahom

$$\frac{K}{2} < |u| \leq K,$$

použijeme substitúciu

$$|u| = -u_0 + K,$$

na základe ktorej bude

$$0 \leq u_0 < \frac{K}{2}$$

a vyjadrenie (36) prejde pomocou transformácie [2; str. 280; 6.151.2]

$$\Pi_0(-u_0 + K; v; k) = -\Pi_3(u_0; v; k) + KZ_3(v; k) + i|u|k^2 \frac{\operatorname{sn}(\alpha; k')}{\operatorname{cn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(\alpha; k')}$$

do tvaru

$$\psi(t) = \frac{l}{B}(t + \tau) \pm i \frac{n}{|n|} \{KZ_3(v; k) - \Pi_3(u_0; v; k)\}, \quad (38)$$

kde dolné znamienko platí pre záporné hodnoty argumentu u .

Keď pre argument platí

$$K < |u| < \infty,$$

pomocou relácie

$$|u| = u_1 + 2NK,$$

kde

$$N = 1; 2; 3; \dots,$$

môžeme dosiahnuť, aby bolo

$$0 \leq |u_1| \leq K.$$

V tomto prípade sú dve možnosti. Ak je

$$0 \leq |u_1| \leq \frac{K}{2},$$

použitím vzťahov [2; str. 280; 6.151.2]

$$\Pi_0(u_1 + 2NK; v; k) = \Pi_0(u_1; v; k) + 2NK \left\{ Z_3(v; k) + ik^2 \frac{\operatorname{sn}(\alpha; k')}{\operatorname{cn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(\alpha; k')} \right\};$$

$$\begin{aligned} \Pi_0(u_1; v; k) &= \Pi_3(u_1; v; k) + i(|u| - 2NK)k^2 \frac{\operatorname{sn}(\alpha; k')}{\operatorname{cn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(\alpha; k')} - \\ &- i \operatorname{arctg} \frac{k^2 \operatorname{sn}(\alpha; k') \operatorname{sn}(|u| - 2NK; k) \operatorname{cn}(|u| - 2NK; k)}{\operatorname{cn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(|u| - 2NK; k)}, \end{aligned}$$

po úprave bude

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{l}{B}(t + \tau) + \operatorname{arctg} \frac{(B - A)lpq}{A(C - A)p'^2r} \pm \\ &\pm i \frac{n}{|n|} \{2NKZ_3(v; k) + \Pi_3(u_1; v; k)\}, \quad (39) \end{aligned}$$

kde dolné znamienko platí pre záporné hodnoty argumentu u .

Keď platí

$$\frac{K}{2} < |u_1| \leq K,$$

na základe relácie

$$|u_1| = -u_2 + K$$

dostaneme

$$0 \leq u_2 < \frac{K}{2}$$

a uplatnením vzťahu [2; str. 280; 6.151.2]

$$\begin{aligned} \Pi_3(|u_1|; v; k) &= \Pi_3(u_2; v; k) + \\ &+ KZ_3(v; k) \pm i \operatorname{arctg} \frac{k^2 \operatorname{sn}(\alpha; k') \operatorname{sn}(|u|; k) \operatorname{cn}(|u|; k)}{\operatorname{cn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(|u|; k)}, \end{aligned}$$

v ktorom dolné znamienko platí pre záporné hodnoty u_1 , vychádza pre kladné hodnoty argumentu u

$$\psi(t) = \frac{l}{B}(t + \tau) + i \frac{n}{|n|} \{(2N \pm 1) KZ_3(v; k) \mp \Pi_3(u_2; v; k)\}, \quad (40)$$

kde dolné znamienka platia pre záporné hodnoty u_1 .

Ak sú hodnoty argumentu u záporné, platí

$$\psi(t) = \frac{l}{B}(t + \tau) - i \frac{n}{|n|} \{(2N \pm 1) KZ_3(v; k) \mp \Pi_3(u_2; v; k)\}, \quad (41)$$

kde dolné znamienka sa vzťahujú na záporné hodnoty u_1 .

V prípade (35) musíme použiť transformáciu

$$v = -v_1 + iK',$$

kde

$$v_1 = i\alpha_1. \quad (42)$$

Pomocou nej bude

$$0 < \alpha_1 < \frac{K'}{2}.$$

Na základe relácie [2; str. 280; 6.151.2]

$$\begin{aligned} \Pi_0(u; -v_1 + iK'; k) &= -\Pi_3(u; v_1; k) + iu \frac{\operatorname{sn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(\alpha; k')}{\operatorname{cn}(\alpha; k')} - \\ &- i \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(\alpha; k') \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{dn}(u; k)}{\operatorname{cn}(\alpha; k') \operatorname{cn}(u; k)} \end{aligned}$$

prejde rezultat (36) do tvaru

$$\psi(t) = \frac{\varepsilon}{l}(t + \tau) + \operatorname{arctg} \frac{BCqr}{Alp} - i \frac{n}{|n|} \Pi_3(u; v_1; k), \quad (43)$$

kde hodnota [3; str. 168 (5.15)]

$$\varepsilon = (\overline{\omega h \omega}) = Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 = Ap'^2 + Cr'^2 \quad (44)$$

znamená dvojnásobok kinetickej energie telesa.

Výsledok (43) predstavuje konečné vyjadrenie, ak platí

$$0 \leq |u| \leq \frac{K}{2}.$$

Keď je

$$\frac{K}{2} < |u| \leq K,$$

musíme použiť substitúciu

$$|u| = -u_0 + K,$$

pomocou ktorej bude

$$0 \leq u_0 < \frac{K}{2}.$$

Potom na základe vzťahu [2; str. 280; 6.151.2]

$$\begin{aligned} \Pi_3(-u_0 + K; v_1; k) &= -\Pi_3(u_0; v_1; k) + \\ &+ KZ_3(v_1; k) + i \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{cn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(\alpha; k') \operatorname{sn}(|u|; k) \operatorname{cn}(|u|; k)}{\operatorname{sn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(|u|; k)} \end{aligned}$$

môžeme písať

$$\psi(t) = \frac{\varepsilon}{l}(t + \tau) + \operatorname{arctg} \frac{Blq}{ACpr} \pm i \frac{n}{|n|} \{\Pi_3(u_0; v_1; k) - KZ_3(v_1; k)\}, \quad (45)$$

kde dolné znamienko platí pre záporné hodnoty argumentu u .

Ak pre argument platí

$$K < |u| < \infty,$$

použitím relácie

$$|u| = u_1 + 2NK,$$

kde

$$N = 1; 2; 3; \dots,$$

možno dosiahnuť, aby bolo

$$0 \leq |u_1| \leq K.$$

Tento prípad vedie na dve možnosti. Keď je

$$0 \leq |u_1| \leq \frac{K}{2},$$

pomocou vzťahu [2; str. 280; 6.151.2]

$$\Pi_3(u_1 + 2NK; v_1; k) = \Pi_3(u_1; v_1; k) + 2NKZ_3(v_1; k)$$

dostaneme

$$\psi(t) = \frac{\varepsilon}{l}(t + \tau) + \operatorname{arctg} \frac{BCqr}{Alp} \pm N\pi \mp i \frac{n}{|n|} \{\Pi_3(u_1; v_1; k) + 2NKZ_3(v_1; k)\}, \quad (46)$$

kde dolné znamienka platia pre záporné hodnoty argumentu u .

Ak platí

$$\frac{K}{2} < |u_1| \leq K,$$

substitúciou

$$|u_1| = -u_2 + K$$

vychádza

$$0 \leq u_2 < \frac{K}{2}$$

a uplatnením relácie [2; str. 280; 6.151.2]

$$\Pi_3(|u_1|; v_1; k) = -\Pi_3(u_2; v_1; k) + KZ_3(v_1; k) \pm \pm i \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{cn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(\alpha; k') \operatorname{sn}(|u|; k) \operatorname{cn}(|u|; k)}{\operatorname{sn}(\alpha; k') \operatorname{dn}(|u|; k)},$$

v ktorej dolné znamienko platí pre záporné hodnoty u_1 , dostaneme pre kladné hodnoty argumentu u

$$\psi(t) = \frac{\varepsilon}{l}(t + \tau) + \operatorname{arctg} \frac{Blq}{ACpr} + N\pi - i \frac{n}{|n|} \{(2N \pm 1) KZ_3(v_1; k) \mp \Pi_3(u_2; v_1; k)\}, \quad (47)$$

kde dolné znamienka platia pre záporné hodnoty u_1 .

Keď sú hodnoty argumentu u záporné, platí

$$\psi(t) = \frac{\varepsilon}{l}(t + \tau) + \operatorname{arctg} \frac{Blq}{ACpr} - N\pi + i \frac{n}{|n|} \{(2N \pm 1) KZ_3(v_1; k) \mp \Pi_3(u_2; v_1; k)\}, \quad (48)$$

kde dolné znamienka sa vzťahujú na záporné hodnoty u_1 .

Vo všetkých výsledkoch {(37); (38); (39); (40); (41); (43); (45); (46); (47); (48)}, ktoré sme dostali rozborom všeobecnej formulácie (36) pre parameter $\psi(t)$ normálneho prípadu Poinsovej precesie, je tento parameter vyjadrený bežne používanými a tabelovanými funkciami, s výnimkou funkcie Π_3 , ktorá sa však v svojej nelineárnej (transcendentnej) časti mení v pomerne úzkom intervale argumentu

$$0 \leq |u| \leq \frac{K}{2}$$

a parametra

$$0 < \alpha \leq \frac{K'}{2}.$$

Hodnoty tejto transcendentnej časti funkcie Π_3 závisia okrem toho od modulu, ktorý sa mení v intervale

$$0 < k < 1.$$

Spomenuté pomerne úzke ohraňenie definičných elementov transcendentnej časti funkcie Π_3 dovoľuje tabelovať hodnoty funkcie Π_3 a tak pomocou odvodených vzťahov {(37) až (48)} konkrétne sledovať časový priebeh hodnôt parametra $\psi(t)$ normálneho prípadu Poinsovej precesie.

Numerický rozbor priebehu transcendentnej časti funkcie Π_3 , pri zavedenom ohraňení jej definičných parametrov, poskytuje výsledky [5; str. 29 (2,4)], podľa ktorých sa táto časť pri pomerne veľkej hodnote modulu

$$k = 0,99\dots$$

mení v svojich absolútnych hodnotách v intervale

$$\langle 0; 0,370\dots \rangle. \quad (49)$$

Pre hodnoty modulu

$$0 < k \leq 0,99\dots$$

ležia absolútne hodnoty transcendentnej časti funkcie Π_3 v intervale (49).

Z podmienky (9) vidíme, že v normálnom prípade Poinsovej precesie musí byť

$$p' \neq 0; \quad r' \neq 0 \quad (50)$$

a na základe vzťahu

$$q'^2 = \frac{A(C-A)}{B(C-B)} p'^2, \quad q' \neq 0. \quad (51)$$

Vzhľadom na relácie (5); (50) a (51) možno normálny prípad Poinsovej precesie uskutočniť trojakým spôsobom.

Pri počiatočných podmienkach

$$p_0 \neq 0; \quad q_0 \neq 0; \quad r_0 \neq 0 \quad (52)$$

a pri počiatkových podmienkach

$$p_0 \neq 0; \quad q_0 = 0; \quad r_0 \neq 0 \quad (53)$$

musí byť splnený vzťah

$$\frac{p_0^2}{r_0^2} < \frac{C(C-B)}{A(B-A)}.$$

Pri počiatkových podmienkach

$$p_0 = 0; \quad q_0 \neq 0; \quad r_0 \neq 0 \quad (54)$$

možno normálny prípad Poinsovej precesie realizovať bez obmedzenia. Počiatkové podmienky (54) predstavujú prirodzené podmienky normálneho prípadu Poinsovej precesie.

Ak je $q_0 = 0$, je $n\tau = 0$, resp. $\tau = 0$, pretože $n \neq 0$; ďalej $u = nt$; $p' = p_0$; $q'^2 = \frac{A(C-A)}{B(C-B)} p_0^2$; $r' = r_0$; $\varphi_0 = \pi/2$; $\psi_0 = 0$, kde ψ_0 znamená počiatkovú hodnotu parametra precesie. Znamienko q' je vzhľadom na nulovú hodnotu q_0 ľubovoľne voliteľné. Pre jednoduchosť volíme znamienko q' tak, aby bolo $n > 0$.

Keď je $p_0 = 0$, je $n\tau = K$; $u = nt + K$; $q' = q_0$; $r'k' = r_0$; $p'^2 = \frac{B(C-B)}{A(C-A)} q_0^2$; $\varphi_0 = 0$; $\psi_0 = K \left\{ \frac{l}{Bn} + i \frac{n}{|n|} Z_3(v; k) \right\}$, ak platí $0 < \alpha \leq K'/2$, resp. $\psi_0 = K \left\{ \frac{\varepsilon}{ln} - i \frac{n}{|n|} Z_3(v_1; k) \right\} + \pi/2$, keď platí $K'/2 < \alpha < K'$. Vzhľadom na nulovú hodnotu p_0 je znamienko p' ľubovoľné. Pre jednoduchosť ho volíme tak, aby bolo $n > 0$.

Počiatkové hodnoty parametra precesie ψ_0 pri podmienkach $p_0 \neq 0$; $q_0 \neq 0$; $r_0 \neq 0$ dostaneme zo vzťahov (37); (38); (43) a (45), uplatnením hodnoty $t = 0$. Pre $0 < \alpha \leq K'/2$; $0 < n\tau \leq K/2$,

$$\psi_0 = \frac{l}{B} \tau + \operatorname{arctg} \frac{(B-A)lp_0q_0}{A(C-A)p'^2r_0} + i \frac{n}{|n|} \Pi_3(n\tau; v; k).$$

Pre $0 < \alpha \leq K'/2$; $K/2 < n\tau < K$,

$$\psi_0 = \frac{l}{B} \tau + i \frac{n}{|n|} \{KZ_3(v; k) - \Pi_3(K - n\tau; v; k)\}.$$

Pre $K'/2 < \alpha < K'$; $0 < n\tau \leq K/2$,

$$\psi_0 = \frac{\varepsilon}{l} \tau + \operatorname{arctg} \frac{BCq_0r_0}{Alp_0} - i \frac{n}{|n|} \Pi_3(n\tau; v_1; k).$$

Pre $K'/2 < \alpha < K'$; $K/2 < n\tau < K$,

$$\psi_0 = \frac{\varepsilon}{l} \tau + \operatorname{arctg} \frac{Blq_0}{ACp_0r_0} + i \frac{n}{|n|} \{\Pi_3(K - n\tau; v_1; k) - KZ_3(v_1; k)\}.$$

Zaujímavé sú prípady, v ktorých modul k a parameter α závisí len od konštant telesa. Ak $p_0 = 0$, $|q_0| = |r_0| \neq 0$, platí

$$k^2 = \frac{1}{1 + \frac{C(C-A)}{B(B-A)}} < \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{dn}(\alpha; k') = \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}} < \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Keď $q_0 = 0$; $|p_0| = |r_0| \neq 0$, vychádza

$$k^2 = \frac{A(B-A)}{C(C-B)};$$

$$\operatorname{sn}(\alpha; k') = \frac{C}{\sqrt{A^2 + C^2}}.$$

Ak $|p_0| = |q_0| = |r_0| \neq 0$, platí

$$k^2 = \frac{1 + \frac{A(C-A)}{B(C-B)}}{1 + \frac{C(C-A)}{B(B-A)}};$$

$$\operatorname{sn}(\alpha; k') = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{B(B-A)}{C(C-A)}}.$$

Z rovnosti (26) vidieť, že rýchlosť precesie je kladná hodnota

$$\dot{\psi} = \frac{l}{C} \left\{ 1 + \left(\frac{C}{A} - 1 \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{C}{A} \frac{B-A}{C-B} \frac{q^2}{q'^2}} \right\} > 0. \quad (55)$$

Táto rýchlosť má najmenšiu hodnotu

$$\dot{\psi}_{\min} = \frac{l}{B} \quad (56)$$

pre

$$|u| = (2N + 1)K,$$

kde

$$N = 0; 1; 2; \dots$$

Najväčšia hodnota rýchlosti precesie

$$\dot{\psi}_{\max} = \frac{l}{A} \quad (57)$$

je v polohách

$$|u| = 2NK,$$

kde

$$N = 0; 1; 2; \dots$$

V polohách s najväčšou rýchlosťou precesie je parameter nutácie najmenší, ak je reprezentovaný ostrým uhlom; pri tupom uhle je tento parameter pri maximálnej rýchlosti precesie najväčší. V polohách, v ktorých je rýchlosť precesie minimálna, parameter nutácie je najväčší, ak je daný ostrým uhlom; pri tupom uhle má tento parameter v polohách s najmenšou rýchlosťou precesie minimálnu hodnotu (22b).

Podľa relácie (3c) a (22b) je perióda nutácie

$$T = \frac{2K}{|n|}. \quad (58)$$

Zo vzťahov (37); (38); (39); (40); (41); (43); (45); (46); (47) a (48) vyplýva, že počas polovice periódy nutácie sa zmení parameter precesie o hodnotu

$$\Delta\psi = K \left\{ \frac{l}{B|n|} + iZ_3(v; k) \right\}, \quad (59)$$

ak platí

$$0 < \alpha \leq \frac{K'}{2};$$

resp. o hodnotu

$$\Delta\psi = K \left\{ \frac{\varepsilon}{l|n|} - iZ_3(v_1; k) \right\} + \frac{n}{|n|} \frac{\pi}{2}, \quad (60)$$

keď je splnená nerovnosť

$$\frac{K'}{2} < \alpha < K'.$$

Výrazy (59) a (60) sú vzhľadom na (55) kladné; precesia je pozitívna vzhľadom na orientáciu vektora momentu hybnosti.

Zhrnutie: Tuhé teleso, ktorého Eulerove dynamické rovnice sú tvaru (1), koná pri podmienke (8), v súvislosti s časovým priebehom hodnôt (36) parametra $\psi(t)$, Poinsovú precesiu normálneho typu. Aby sa všeobecná formulácia (36) pre parameter precesie mohla použiť pri konkrétnych hodnotách argumentu a parametra funkcie Π_0 , v práci sa analyzuje relácia (36) a formulujú sa vzťahy (37); (38); (39); (40); (41); (43); (45); (46); (47) a (48), platné pre možné prípady hodnôt príslušného argumentu a parametra. Rozborom relácie (36) získané výsledky {(37) až (48)} sú formulované pomocou bežne používaných a tabelovaných funkcií, s výnimkou funkcie Π_3 , ktorá sa však v týchto výsledkoch obmedzuje na pomerne úzke intervaly svojich premenných, takže sa môže tabelovať. Rozsah možných hodnôt transcen-

dentnej časti tejto funkcie ilustruje výraz (49). Relácie (52); (53) a (54) vymedzujú počiatkové podmienky, pri ktorých možno normálny prípad Poinsovej precesie realizovať. Počiatkové podmienky (54) predstavujú prirodzené podmienky tohto pohybu. Pri všetkých troch možných počiatkových podmienkach sa uvádzajú prípady, v ktorých modul k a parameter α závisí len od konštant telesa.

Rovnosť (55) vyjadruje rýchlosť normálneho prípadu Poinsovej precesie; vzťahmi (56) a (57) sa udávajú extrémne hodnoty tejto rýchlosti, súvisiace s krajnými hodnotami parametra nutácie. Relácie (59) a (60) určujú zmeny parametra precesie, pripadajúce na polovicu periódy nutácie (58).

Počiatkové hodnoty Eulerových parametrov poskytujú vzťahy (23) a príslušné relácie pre ψ_0 , formulované v prípadoch (52); (53) a (54).

LITERATÚRA

- [1] R. Grammel, *Girooskop, ego teorija i primenenija*, I, Moskva, 1952.
- [2] I. M. Ryshik—I. S. Gradstein, *Summen-, Produkt- und Integral- Tafeln*, Berlin, 1957. (Preklad z ruštiny.)
- [3] H. Goldstein, *Klassičeskaja mehanika*, Moskva, 1957.
- [4] N. I. Achiezer, *Elementy teorii elliptičeskich funkcij*, Moskva—Leningrad, 1948.
- [5] J. Chrapan, *Matematicko-fyzikálny sborník SAVU*, roč. II, čís. 1—2; str. 23—51, Bratislava, 1952. (Indexy pri funkciách súvisia nasledovne: 01 → 0; 00 → 3.)

V Bratislave dňa 12. XII. 1960.

Došlo 14. decembra 1960.

Нормальный случай прецесии Пуансо

Й. Храпан

Резюме

Твердое тело, для которого динамическое уравнение Эйлера имеет вид (1), при условии (8) исполняет в связи с временной зависимостью величин (36) параметра $\psi(t)$, прецессию Пуансо нормального типа. Для возможности применения общей формулировки (36) для параметра прецессии при конкретных величинах аргумента и параметра функции P_0 , в работе проанализирована реляция (36) исформулированы соотношения (37); (38); (39); (40); (41); (43); (45); (46); (47) и (48), действительные для возможных случаев величин соответствующего аргумента и параметра. Рассмотрением реляции (36) полученные результаты {(37) до (48)}, сформулированы при помощи обыкновенно употребляемых и табелированных функций, за исключением функции P_3 , которая однако в этих результатах ограничивается на релятивно узкие промежутки своих переменных, а поэтому ее можно табелировать. Объем возможных величин трансцендентной части этой функции показывает (49). Руляции (52); (53) и (54) определяют

исходные условия, при которых возможно нормальный случай прецессии Пуансо осуществить. Исходные условия (54) представляют собой естественные условия этого движения. При всех трех возможных исходных условиях приведены случаи, в которых модуль k и параметр α зависимы только от постоянных тела.

Равенство (55) выражает скорость нормального случая прецессии Пуансо; соотношениями (56) и (57) определены крайние величины этой скорости, зависящие от крайних величин параметра нутации. Реляциями (59) и (60) определяются изменения параметра прецессии, приходящиеся на половину периода нутации (58).

Исходные величины параметров Эйлера дают соотношения (23) и соответствующие реляции для ψ_0 , сформулированные в случаях (52); (53) и (54).

Normalfall der Poinsoischen Präzession

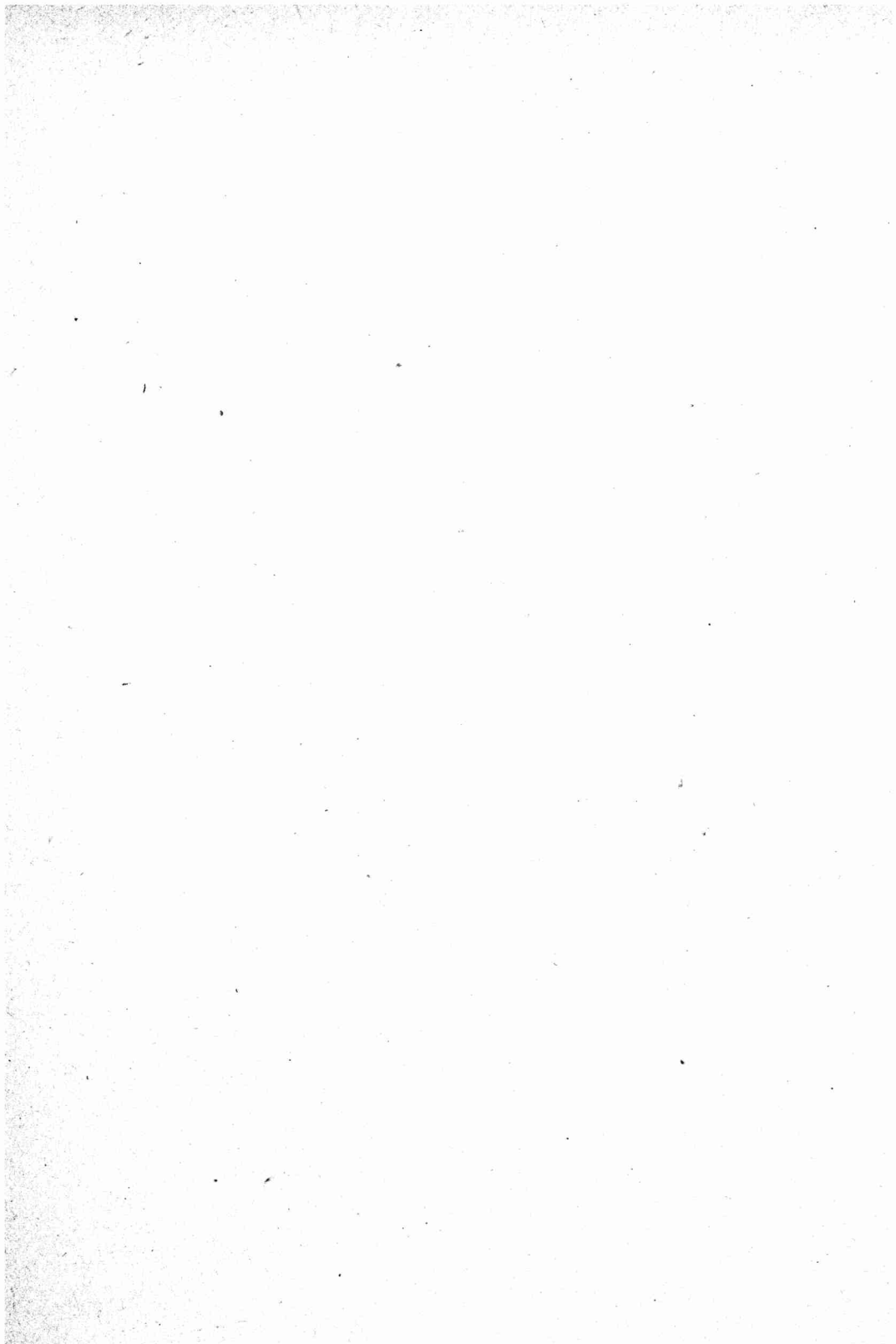
J. Chrapan

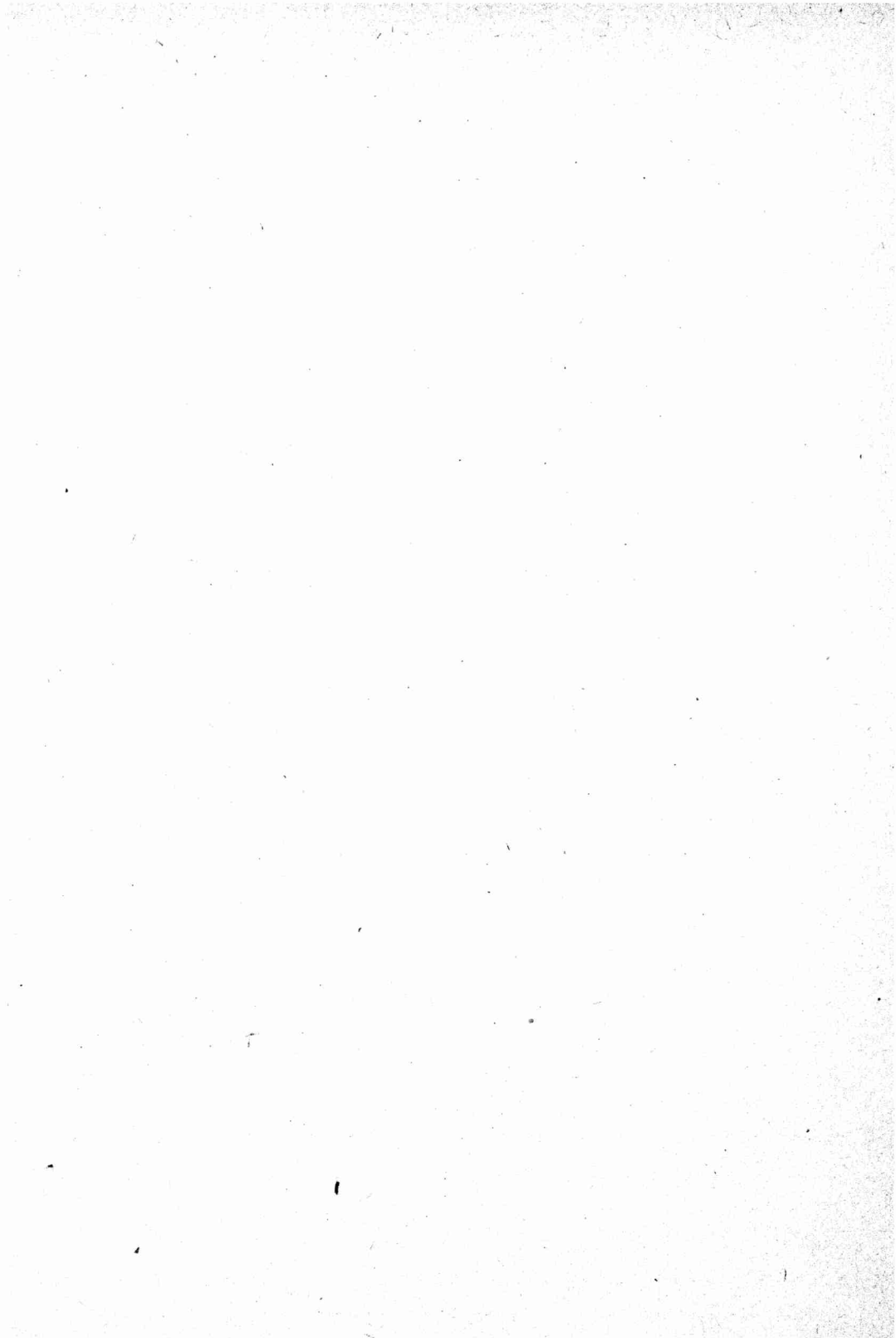
Zusammenfassung

Ein starrer Körper, dessen Eulersche dynamische Gleichungen die Form (1) haben, leistet bei Bedingung (8) in Zusammenhang mit dem zeitlichen Verlauf der Werte (36) des Parameters $\psi(t)$ die Poinsoische Präzession von normalem Typus. Damit die allgemeine Formulierung (36) für den Parameter der Präzession bei konkreten Werten des Argumentes und des Parameters der Funktion II_0 angewendet werden kann, wird die Relation (36) in der Arbeit analysiert und die Beziehungen (37), (38), (39), (40), (41), (43), (45), (46), (47) und (48) werden formuliert, die für die möglichen Werte des entsprechenden Argumentes und Parameters gültig sind. Die durch die Analyse der Relation (36) gewonnenen Resultate {(37) bis (48)} werden mit Hilfe der laufend verwendeten und tabellierten Funktionen formuliert, mit Ausnahme der Funktion II_3 , die allerdings in diesen Resultaten auf verhältnismässig enge Intervalle ihrer Veränderlichen beschränkt ist, sodass sie tabelliert werden kann. Der Umfang der möglichen Werte des transzendenten Teils dieser Funktion illustriert der Ausdruck (49). Die Relationen (52), (53) und (54) bestimmen die Anfangsbedingungen, bei denen der Normalfall der Poinsoischen Präzession realisiert werden kann. Die Anfangsbedingungen (54) stellen die natürlichen Bedingungen dieser Bewegung dar. Bei allen drei möglichen Anfangsbedingungen werden Fälle angeführt, bei denen der Modul k und der Parameter α nur von der Konstanten des Körpers abhängen.

Die Gleichheit (55) drückt die Geschwindigkeit des Normalfalles der Poinsoischen Präzession aus; die Relationen (56) und (57) geben die extremen Werte dieser Geschwindigkeit an, die mit den Grenzwerten des Parameters der Nutation zusammenhängen. Die Relationen (59) und (60) bestimmen die Veränderungen des Parameters der Präzession, die auf die Hälfte der Priode der Nutation entfallen (58).

Die Anfangswerte der Eulerschen Parameter ergeben die Relationen (23) und die entsprechenden Relationen für ψ_0 , die in den Fällen (52), (53) und (54) formuliert sind.





ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

sú fakultný zborník určený k publikáciám vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých aspirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracovávajú materiál získaný za dobu pobytu na našej fakulte. Redakčná rada vyhradzuje si právo z tohto pravidla urobiť výnimku.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom alebo anglickom, francúzskom alebo nemeckom. Práce podané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, ob riadok, tak aby jeden riadok tvorilo 60 úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na účet autora.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšete názov práce, pod to meno autora. Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, sa uvádzajú všetky pracoviská. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba ich obidve uviesť.

Fotografie načím podať na čiernom lesklom papieri a uviesť zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba previesť tušom na priehľadnom papieri (pauzák) alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať rezumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam, publikovaným v cudzom jazyku, načím pripojiť rezumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom v prípade publikácie v ruskom jazyku, alebo v ruskom jazyku v prípade publikácie v jazyku západnom. Nezapudnite pri rezumé uviesť vždy názov práce a meno autora v rovnakom poradí ako v základnom texte. Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a zlámané korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny behom korektúry idú na farchu autorského honoráru. Každý autor dostane okrem príslušného honoráru 1 00 separátov. Redakčná rada.

K o l n í k S.: Príspevok k optickému vyšetřovaniu stojatej ultra-
zvukovej vlny v priehľadnej kvapaline 343

C h r a p a n J.: Normálny prípad Poinsovej precencie 379

К о л н и к С.: К оптическому исследованию стоячей ультразвуковой
волны в прозрачной жидкости 376

Х р а п а н Й.: Нормальный случай прецессии Пуансо. 394

K o l n í k S.: Zur optischen Untersuchung der stehenden Ultra-
schallwelle in durchsichtiger Flüssigkeit 377

C h r a p a n J.: Normalfall der Poinso'schen Präzession 395