[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV-1. 3—5, MATHEM., 1959]

ACTA

FACULTATIS RERUM NATURALIUM

UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IV. FASC. III—V

MATHEMATICA

PUBL. VI.

1959

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

Sborník Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Vydáva Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasinkova 5, čís. tel. 458-51. Povolilo povereníctvo kultúry číslom 25.056/59-VO — Tlač: TISK, knižní výroba, n. p., závod Brno, provozovna 11

A 59852

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV – 3–5, MATHEM., 1959]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

Die doppelten Integrale der Fundamentalsysteme zwischen den singulären Punkten einiger Differentialsysteme

J. HRONEC

Bei der Behandlung dieses Problems gehen wir von dem allgemeinen Differentialsystem, welches keine Punkte der Unbestimmtheit hat und von dem adjungierten Differentialsystem aus. Die Fundamentalsysteme dieser Differentialsysteme sind äquivalent, wir können sodann ein Fundamentalsystem bei der Veränderlichen x und das andere bei der Veränderlichen z nehmen. Mit solchen Fundamentalsystemen bilden wir die Matrixgleichung (C), in welcher die ganzen rationellen Funktionen $U_i\,(x, z)$ noch vorkommen.

Wenn wir diese Matrixgleichung zwischen zwei und zwei singulären Punkten so integrieren, daß die Integrale keine gemeinsamen Grenzen haben, dann hat der doppelte Integral den Wert Null, dabei müssen wir voraussetzen, daß die reellen Teile der Wurzeln der zu den singulären Punkten gehörenden determinierenden Gleichungen in dem Intervalle $-1 < R(\gamma_{ik}^{(\nu)}) < 0$ liegen. Diese Voraussetzung wird in der ganzen Arbeit vorbehalten.

Wenn die doppelten Integrale eine oder zwei gemeinsame Grenzen haben, welche singuläre Punkte sind, so kommen wir zum Resultat nur dann, wenn das Differentialsystem schlechthin kanonisch ist.

Das Resultat wird mit den Fundamentalsubstitutionen gegeben, die zu den singulären Punkten der gemeinsamen Grenzen gehören.

Vertauschen wir das Integrationsverfahren, welches bei der geschlossenen Kurve durchgeführt wird, dann ändert sich das Resultat um $4\pi\sqrt{-1}\,\delta_{ik}$, wo $\delta_{ik} = 1$ bei $i = k$ und 0 bei $i \neq k$ ist.

Die Resultate werden mit den Integralgleichungen mit zwei Integralen gegeben, in welchen die Fundamentalsysteme, die singulären Punkte und die zu den singulären Punkten gehörenden Fundamentalsubstitutionen vorkommen.

Wenn es diese Integralgleichungen zu lösen gelänge, so wäre auch die Lösung des Problemes von Riemann möglich, welches sich auf das Differentialsystem bezieht.

I.

Das adjungierte Differentialsystem

Wir nehmen das Differentialsystem

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

dann, wenn wir

$$(y_{ik})^{-1} = (\zeta_{ik})$$

setzen, ist

$$\frac{d\zeta_{ik}}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda}\zeta_{\lambda k}$$

oder, wenn wir

$$\zeta_{ik} = z_{ki}$$

nehmen, ist

$$\frac{dz_{ki}}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} z_{k\lambda}a_{i\lambda}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

und von dem wird

$$\frac{dz_k}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda a_{k\lambda}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Dieses Differentialsystem ist das adjungierte Differentialsystem zum (1).

Wenn das Fundamentalsystem des originellen Differentialsystems bekannt ist, dann ist auch das Fundamentalsystem des adjungierten Differentialsystems bestimmt. Diese zwei Fundamentalsysteme sind äquivalent.

Das Differentialsystem (1) hat keine Punkte der Unbestimmtheit, wenn

$$a_{\lambda k}(x) = \frac{G_{\lambda k}(x)}{[\varphi(x)]^{s_{\lambda k}}} \tag{3}$$

sind, wo $\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_\sigma)$, $s_{\lambda k} = 1$ bei $\lambda = k$ und $s_{\lambda k}$ bei $i \neq k$ willkürliche ganze Zahlen sind. $G_{\lambda k}(x)$ sind ganze rationelle Funktionen vom Grade höchstens $(\sigma + 1)\, s_{\lambda k} - 2 = p_{\lambda k}$. Ist $\lambda = k$, dann sind $p_{\lambda k} = \sigma - 1$.

Bei (3) ist das Differentialsystem (1)

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \frac{G_{\lambda k}(x)}{[\varphi(x)]^{s_{\lambda k}}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{A}$$

und das adjungierte Differentialsystem

$$\frac{dz_k}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \frac{G_{k\lambda}(x)}{[\varphi(x)]^{s_{k\lambda}}}.$$

Bedeutet m den größten reellen Wert der reellen Teile von den Zahlen $s_{\lambda k}$, ($m \geqq 1$), dann hat das Differentialsystem (A) die Form

$$\text{(A')} \qquad [\varphi(x)]^m \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda P_{\lambda k}(x),$$

und das adjungierte Differentialsystem wieder die Form

$$[(\varphi x)]^m \frac{dz_k}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda P_{k\lambda}(x),$$

wo

$$P_{\lambda k}(x) = G_{\lambda k}(x)\,[\varphi(x)]^{m-s_{\lambda k}}, \qquad P_{k\lambda}(x) = G_{k\lambda}(x)\,[\varphi(x)]^{m-s_{k\lambda}}$$

sind.

$P_{\lambda k}(x)$ sind ganze rationelle Funktionen vom Grade höchstens $m\sigma + s_{\lambda k} - 2 = q_{\lambda k}$ und $P_{k\lambda}(x)$ wieder höchstens $m\sigma + s_{\lambda k} - 2 = q_{k\lambda}$.

Setzen wir

$$\text{(4)} \qquad z_k(x) = [\varphi(x)]^m \mu_k(x)$$

das adjungierte Differentialsystem hat die Form

$$\text{(B)} \qquad \frac{d\,[\varphi(x)]^m \mu_k(x)}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} \mu_k(x)\,P_{k\lambda}(x)$$

oder

$$[\varphi(x)]^m \frac{d\mu_k}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} \mu_\lambda \{P_{k\lambda}(x) + \delta_{\lambda k} m [\varphi(x)]^{m-1} \varphi'(x)\},$$

wo

$$\delta_{\lambda k} = \begin{cases} 1 & \text{bei } \lambda = k, \\ 0 & \text{bei } \lambda \neq k \end{cases}$$

ist.

Man sieht, daß das adjungierte Differentialsystem (B) dieselben singulären Punkte hat wie (A). Wenn das Differentialsystem (A) der Bedingung genügt, daß die singulären Punkte nicht die Punkte der Unbestimmtheit sind, dann genügt dieser Bedingung auch das adjungierte Differentialsystem.

Wir nehmen an, daß das Differentialsystem (A) die unabhängige Veränderliche z und das adjungierte Differentialsystem (B) wieder die Veränderliche x hat. Diese Veränderlichen ändern sich in zwei verschiedenen Ebenen, welche in den Punkten a_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, \sigma$, gemeinsame Punkte haben. Diese Ebenen bilden die Fläche von Riemann mit zwei Blättern.

Bei diesen Festsetzungen für die zwei Differentialsysteme gilt die Identität

$$\frac{d}{dx}\left\{[\varphi(x)]^m \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k(z)}{z-x} \mu_k(x)\right\} - \frac{d}{dz}\left\{[\varphi(z)]^m \sum_{k=1}^{n} y_k(z) \frac{\mu_k(x)}{x-z}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} y_k(z)\,\mu_k(x) \left\{\frac{[\varphi(x)]^m - [\varphi(z)]^m}{(x-z)^2} - \frac{m[\varphi(z)]^{m-1}\varphi'(z)}{x-z}\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} y_k(z)\,\mu_k(x)\,\frac{P_{k\lambda}(x) - P_{k\lambda}(z)}{x-z}.$$

Wir setzen

$$\frac{P_{k\lambda}(x) - P_{k\lambda}(z)}{x - z} = U_{k\lambda}(x, z), \qquad k \neq \lambda$$

$$\frac{P_{k\lambda}(x) - P_{k\lambda}(z)}{x - z} + \frac{[\varphi(x)]^m - [\varphi(z)]^m}{(x - z)^2} - \frac{m[\varphi(z)]^{m-1}\varphi'(z)}{x - z} = U_{k\lambda}(x, z), \qquad k = \lambda.$$

Wenn wir die ganzen rationellen Funktionen $P_{k\lambda}(x)$ und $P_{k\lambda}(z)$ in die Reihe von Mac-Laurin entwickeln, bekommen wir, daß es bei $k \neq \lambda$

$$\frac{P_{k\lambda}(x) - P_{k\lambda}(z)}{x - z} = \sum_{\alpha=1}^{q_{k\lambda}} \frac{1}{\alpha!} \frac{P_{k\lambda}^{(\alpha)}(0)\,(x^\alpha - z^\alpha)}{x - z} = \sum_{\alpha=0}^{q_{k\lambda}-1} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{1}{(\alpha + 1)!} P_{k\lambda}^{(\alpha+1)}(0)\, x^{\alpha-\beta} z^\beta = \\ = U_{k\lambda}(x, z)$$

ist, wo

$$P_{k\lambda}^{(\alpha+1)}(0) = \left[\frac{\mathrm{d}^{\alpha+1} P_{k\lambda}(x)}{\mathrm{d}x^{\alpha+1}}\right]_{x=0}$$

sind.

Ist $k = \lambda$, die Summierung für α geht bis $q_{kk} = m\sigma - 2$. Bei dem schlechthin kanonischen Differentialsysteme ist $m = 1$ und die Summierung für α geht bis $\sigma - 2$.

Entwickeln wir in die Mac-Laurintsche Reihe die Funktionen $[\varphi(x)]^m$, $[\varphi(z)]^m$ und $[\varphi(z)]^{m-1}\varphi'(z)$ bekommen wir

$$\frac{1}{(x - z)^2} \{[\varphi(x)]^m - [\varphi(z)]^m - m(x - z)\,[\varphi(z)]^{m-1}\varphi'(z)\} = \\ = \sum_{\alpha=0}^{m\sigma-2} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \left[\frac{\mathrm{d}^{\alpha+2}[\varphi(x)]^m}{\mathrm{d}x^{\alpha+2}}\right] \frac{1}{(\alpha + 2)!} (\beta + 1)\, x^{\alpha-\beta} z^\beta.$$

Bei $k = \lambda$ also ist es

$$U_{k\lambda}(x, z) = \sum_{\alpha=0}^{m\sigma-2} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \left\{ \frac{1}{(\alpha + 1)!} \left[\frac{\mathrm{d}^{\alpha+1} P_{k\lambda}(x)}{\mathrm{d}x^{\alpha+1}}\right]_{x=0} + \\ + \left[\frac{\mathrm{d}^{\alpha+2}[\varphi(x)]^m}{\mathrm{d}x^{\alpha+2}}\right]_{x=0} \frac{1}{(\alpha + 2)!} (\beta + 1) \right\} x^{\alpha-\beta} z^\beta. \tag{6a}$$

Im Falle des schlechthin kanonischen Differentialsystems wieder ist es

$$U_{k\lambda}(x, z) = \sum_{\alpha=0}^{\sigma-2} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \left\{ \frac{1}{(\alpha + 1)!} P_{k\lambda}^{(\alpha-1)}(0) + \delta_{k\lambda} \frac{\beta + 1}{(\alpha + 2)!} \varphi^{(\alpha+2)}(0) \right\} x^{\alpha-\beta} z^\beta,$$

wo

$$\delta_{k\lambda} = \begin{cases} 1 \text{ bei } k = \lambda, \\ 0 \text{ bei } k \neq \lambda, \end{cases} \qquad k, \lambda = 1, 2, \ldots, n,$$

ist, oder wenn wir

$$\frac{1}{(\alpha+1)!} P_{k\lambda}^{(\alpha+1)}(0) + \delta_{k\lambda} \frac{\beta+1}{(\alpha+2)!} \varphi^{(\alpha+2)}(0) = B_{k\lambda}^{(\alpha,\beta)} \tag{5}$$

setzen,

$$U_{k\lambda}(x, z) = \sum_{\alpha=0}^{\sigma-2} \sum_{\beta=0}^{\alpha} B_{k\lambda}^{(\alpha,\beta)} x^{\alpha-\beta} z^{\beta}, \tag{6}$$

ist, wo $B_{k\lambda}^{(\alpha,\beta)}$ die Konstanten sind, welche man aus dem Koeffizienten des Differentialsystems mit den Derivationen und mit der Summierung bestimmen kann.

Nach (6) und (6a) sind die Funktionen $U_{k\lambda}(x, z)$ ganze rationelle Funktionen in x und z. Im Falle des schlechthin kanonischen Differentialsystems sind die Funktionen höchstens vom Grade $\sigma - 2$. Im Falle des allgemeinen Differentialsystems bei $k \neq \lambda$ sind die Funktionen höchstens vom Grade $q_{k\lambda} - 1 = \sigma m + s_{k\lambda} - 3$ und bei $k = \lambda$ sind sie wieder höchstens vom Grade $q_{kk} - 1 = m\sigma - 2$.

Nachdem ist

$$\frac{d}{dx}\left\{[\varphi(x)]^m \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k(z)}{z-x} \mu_k(x)\right\} - \frac{d}{dz}\left\{[\varphi(z)]^m \sum_{k=1}^{n} y_k(z) \frac{\mu_k(x)}{x-z}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} y_k(z)\, U_{k\lambda}(x, z)\, \mu_\lambda(x)$$

oder es ist

$$\frac{d}{dx}\left\{[\varphi(x)]^m \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{ik}(z)}{z-x} \mu_{jk}(x)\right\} - \frac{d}{dz}\left\{[\varphi(z)]^m \sum_{k=1}^{n} y_{ik}(z) \frac{\mu_{jk}(x)}{x-z}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} y_{ik}(z)\, U_{k\lambda}(x, z)\, \mu_{j\lambda}(x) \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Wir setzen $\mu_{jk} = Y_{kj}$, $\mu_{j\lambda} = Y_{\lambda j}$ und es ist

$$\frac{d}{dx}\left\{[\varphi(x)]^m \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{ik}(z)}{z-x} Y_{kj}(x)\right\} - \frac{d}{dz}\left\{[\varphi(z)]^m \sum_{k=1}^{n} y_{ik}(z) \frac{Y_{kj}}{x-z}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} y_{ik}(z)\, U_{k\lambda}(x, z)\, Y_{\lambda j}(x) \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

oder, wenn wir zu den Matrixen übergehen, bekommen wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)\Big([\varphi(x)]^m Y_{ik}(x)\Big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big([\varphi(z)]^m y_{ik}(z)\Big)\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right) =$$

$$\text{(C)} \qquad = \Big(y_{ik}(z)\Big)\Big(U_{ik}(x, z)\Big)\Big(Y_{ik}(x)\Big).$$

II.

Die Wurzeln der zu den singulären Punkten gehörenden determinierenden Gleichungen

Die zu dem singulären Punkt $x = a_\nu$ gehörende Normalform des Differentialsystems (A) ist:

$$(x - a_\nu)\, P_{0k}^{(\nu)} \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda P_{\lambda k}^{(\nu)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

wo

$$P_{0k}^{(\nu)} = \frac{[\varphi(x)]^m}{x - a_\nu}, \qquad P_{\lambda k}^{(\nu)} = [\varphi(x)]^{m - s_{\lambda k}} G_{\lambda k}(x)$$

sind und wo m der größte Wert von den $s_{\lambda k}$ $(\lambda \neq k)$ ist.

Die Reihen dieser Funktionen sind:

$$P_{0k}^{(\nu)} = \sum_{\varrho_k=0}^{q_k} b_{0\varrho_k}^{(\nu, k)} (x - a_\nu)^{\varrho_k}, \qquad P_{\lambda k}^{(\nu)} = \sum_{\mu_k=0}^{q_{\lambda k}} b_{\lambda\mu_k}^{(\nu, k)} (x - a_\nu)^{\varrho_k},$$

$$P_{kk}^{(\nu)} = \sum_{\varrho_k=0}^{q_k} b_{k\varrho_k}^{(\nu, k)} (x - a_\nu)^{\varrho_k},$$

wo

$$q_k = \sigma m - 1, \qquad q_{\lambda k} = \sigma m + s_{\lambda k} - 2$$

sind.

Bedeutet (η_{ik}) eine Integralmatrix des Differentialsystems (A), dann ist die allgemeine Integralmatrix des Differentialsystems (A)

$$\text{(7)} \qquad (y_{ik}) = (c_{ik})(\eta_{ik}), \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

wo c_{ik} willkürlich gewählte Konstanten sind, es muß aber $\| c_{ik} \| \neq 0$ sein.

Die Matrix $(\eta_{ik}(x))$ hat in der Umgebung des singulären Punktes $x = a_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, \sigma$, die Form

$$\text{(8)} \qquad \Big(\eta_{ik}^{(\nu)}(x)\Big) = \Big((x - a_\nu)^{r_{ik}^{(\nu)}} \varphi_{ik}^{(\nu)}(x)\Big),$$

wo $r_{ik}^{(\nu)}$ die Wurzeln der zu den singulären Punkt $x = a_\nu$ gehörenden determinierenden Gleichungen sind und $\varphi_{ik}^{(\nu)}(x)$ im singulären Punkt holomorphe Funktionen sind. Für diese gilt noch

$$\| \varphi_{ik}^{(\nu)}(a_\nu) \| \neq 0, \qquad \varphi_{ik}^{(\nu)}(a_\nu) \neq 0.$$

Das System zu dem singulären Punkt $x = a_\nu$ gehörender determinierender Gleichungen[1]) ist

$$(9)\qquad \left.\begin{array}{c} \prod_{k=1}^{n} (r_k^{(\nu)} b_{00}^{(\nu,k)} - b_{k0}^{(\nu,k)}) - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{n} b_{\lambda 0}^{(\nu,k)} = 0, \\ r_\lambda^{(\nu)} - r_k^{(\nu)} + 1 = s_{\lambda k}. \end{array}\right\}, \quad \lambda \neq k$$

Aus diesem System bekommen wir bei jedem Wert von k eine Algebraische Gleichung n-ten Grades. So erhalten wir zu jedem singulären Punkt $x = a_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ algebraische Gleichungen n-ten Grades, die determinierende Gleichungen sind. Aus diesen ist es möglich die Wurzeln $r_{ik}^{(\nu)}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, \ldots, \sigma$, zu bestimmen. Diese alle können voneinander verschieden oder manche sogar auch alle mehrfache sein.

Bei schlechthin kanonischem Differentialsystem ist $s_{\lambda k} = 1$ also auch bei $\lambda \neq k$ sind $r_\lambda^{(\nu)} = r_k^{(\nu)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Bei jedem bestimmten Wert von λ erhalten wir für $r^{(\nu)}$ nur eine determinierende Gleichung n-ten Grades.

Wenn die Wurzeln der determinierenden Gleichungen voneinander verschieden sind, haben die Lösungen des Differentialsystems keine Punkte der Unbestimmtheit. Die Singularitäten sind die Pole, wenn

$$(10)\qquad R(r_{ik}^{(\nu)}) < 0$$

sind. Sind $R(r_{ik}^{(\nu)}) \geqq 0$, die Lösungen sind in $x = a_\nu$ von endlichen Werten.

Wenn die Wurzeln der determinierenden Gleichungen mehrfache sind oder wenn sie sich in ganzen reellen Zahlen unterscheiden, können die Lösungen logarithmische also wesentliche Singularitäten haben.

III.

Einige Identitäten

Nach I kann man erreichen, daß

$$(11)\qquad \left(\eta_{ik}(x)\right)^{-1} = \left(\zeta_{ik}(x)\right) = \left((x - a_\nu)^{-r_{ik}^{(\nu)}} \Phi_{ik}(x)\right)$$

sind, wo $\Phi_{ik}(x)$ holomorphe Funktionen in $x = a_\nu$ sind.

Bei den Voraussetzungen, welche wir in II. bezüglich der Wurzeln der determinierenden Gleichungen gemacht haben, gilt die Gleichung

$$(12)\qquad \left[\left([\varphi(z)]^m \eta_{ik}(z)\right)\right]_{z=a_\nu} = \left[\left((z - a_\nu)^{r_{ik}^{(\nu)}+m} \varphi_{ik}^*(z)\right)\right]_{z=a_\nu} = (0),$$

da die Funktionen $\varphi_{ik}^*(z)$ in $z = a_\nu$ homomorphe sind.

Nach (11) wieder ist

$$(13)\qquad \left[\left((x - a_\nu)^{-r_{ik}^{(\nu)}} \Phi_{ik}(x)\right)\right]_{x=a_\nu} = (0).$$

---

[1]) J. Hronec, Diferenciálne rovnice I. 1956. S. 316.

Es ist

$$\Big([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\Big) = \Big(z_{ki}(x)\Big) = \Big(y_{ik}(x)\Big)^{-1} = \Big(\eta_{ik}(x)\Big)^{-1}(c_{ik})^{-1}$$

oder nach (11) ist

$$\Big([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\Big) = \Big((x-a_\nu)^{-r_{ik}^{(\nu)}}\, \Phi_{ik}(x)\Big)\,(c_{ik})^{-1}$$

und aus diesem nach (13) ist wieder

$$\Big[\Big([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\Big)\Big]_{x=a_\nu} = (0), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \sigma. \tag{14}$$

Aus der Gleichung (7) erhalten wir

$$\Big([\varphi(z)]^m\, y_{ik}(z)\Big) = (c_{ik})\Big([\varphi(z)]^m\, \eta_{ik}(z)\Big),$$

und wenn wir (10) in Betracht nehmen, bekommen wir

$$\Big[\Big([\varphi(z)]^m\, y_{ik}(z)\Big)\Big]_{z=a_\nu} = (0), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \sigma. \tag{15}$$

IV.

Die Integrale haben keine gemeinsamen Grenzen

Wir integrieren die Gleichung (C) bezüglich der komplexen Variabeln x auf der Kurve $\widehat{a_\mu a_\varrho}$, welche Kurve in der Ebene x durchläuft. Bezüglich der Variabeln z integrieren wir auf der Kurve $\widehat{a_\varkappa a_\lambda}$, welche in der Ebene z bleibt. Jede $\mu, \varrho, \varkappa, \lambda$ kann einen Wert von $1, 2, \ldots, \sigma$ annehmen, aber immer so, daß sie voneinander verschieden sind. Die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ sind so geordnet, daß sie in der Richtung nach rechts gemäß der Größe der Indizes folgen. Die Richtung der Integration ist positiv, wenn wir vom singulären Punkte mit der kleineren Indizes zum singulären Punkte mit größerer Indizes integrieren. Anderseits ist die Richtung negativ. Wir bekommen

$$\int_{a_\mu}^{a_\varrho} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz \Big(y_{ik}(z)\Big)\Big(U_{ik}(x,z)\Big)\Big(Y_{ik}(x)\Big) = \left\{\Big(\int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,dz\Big)\Big([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\Big)\right\}_{x=a_\mu}^{x=a_\varrho} - \left\{\Big([\varphi(z)]^m y_{ik}(z)\Big)\Big(\int_{a_\mu}^{a_\varrho} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx\Big)\right\}_{z=a_\varkappa}^{z=a_\lambda}.$$

Wenn wir voraussetzen, daß

$$-1 < R(r_{ik}^{(\nu)}) < 0 \tag{16}$$

ist, dann haben die Integrale

$$\left[\int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,dz\right]_{x=a_\mu}^{x=a_\varrho} \tag{17}$$

endliche Werte. Nach (4) und (11) ist es

$$\left([\varphi(x)]^m Y_{ik}(x)\right) = \left((x - a_\nu)^{-r_{ik}^{(\nu)}} \Phi_{ik}(x)\right).$$

Aus dieser Gleichung folgt weiter

$$Y_{ik}(x) = \frac{\Phi_{ik}^*(x)}{(x - a_\nu)^{m + r_{ik}^{(\nu)}}}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \sigma, \tag{18}$$

wo $\Phi_{ik}^*(x)$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorphe Funktionen und $\Phi_{ik}^*(a_\nu) \neq 0$ sind; deshalb haben die Integrale

$$\left[\int_{a_\mu}^{a_\varrho} \frac{Y_{ik}(x)}{x - z}\, \mathrm{d}x\right]_{z=a_\varkappa}^{z=a_\lambda} \tag{19}$$

nur dann einen endlichen Wert, wenn

$$0 < m + r_{ik}^{(\nu)} < 1 \qquad \text{oder} \qquad -m < R(r_{ik}^{(\nu)}) < 1 - m$$

sind.

Aus diesem folgt, daß die Integrale (17) und (19) nur dann einen endlichen Wert haben, wenn $m = 1$ ist, die Bedingung (16) bleibt also in Gültigkeit. Ist $m = 1$, das Differentialsystem (A) ist schlechthin kanonisch. Im Falle des schlechthin kanonischen Differentialsystems bei der Bedingung (16) nach (14) und (15) gilt die Gleichung

$$\int_{a_\mu}^{a_\varrho} \mathrm{d}x \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} \mathrm{d}z \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) = (0),$$

$\mu, \varrho, \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, \sigma$, wobei diese voneinander verschieden sind.

V.

Die Integrale haben eine gemeinsame Grenze

Wir integrieren die Gleichung (C) bezüglich der komplexen Variabeln x auf der Kurve $\widehat{a_\mu a_\nu}$ und bezüglich der komplexen Variabeln z auf der Kurve $\widehat{a_\nu a_\lambda}$, $\mu, \nu, \lambda = 1, 2, \ldots, \sigma, \mu \neq \lambda$, dann erhalten wir

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} \mathrm{d}x \int_{a_\nu}^{a_\lambda} \mathrm{d}z \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) = \int_{a_\mu}^{a_\nu} \mathrm{d}x \int_{a_\nu}^{a_\lambda} \mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z - x}\right)\left([\varphi(x)]^m y_{ik}(x)\right) -$$

$$- \int_{a_\mu}^{a_\nu} \mathrm{d}x \int_{a_\nu}^{a_\lambda} \mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left([\varphi(z)]^m y_{ik}(z)\right)\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x - z}\right).$$

Einfachheitshalber schreiben wir $a_\mu = a$, $a_\nu = b$, $a_\lambda = c$, dann ist

$$\text{(D)} \qquad \int_a^c \mathrm{d}x \int_c^b \mathrm{d}z \Big(y_{ik}(z)\Big)\Big(U_{ik}(x, z)\Big)\Big(Y_{ik}(x)\Big) =$$

$$= \int_a^c \mathrm{d}x \int_c^b \mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z - x}\right)\Big([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\Big) -$$

$$- \int_a^c \mathrm{d}x \int_c^b \mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big([\varphi(x)]^m\, y_{ik}(z)\Big)\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x - z}\right).$$

Auf der Integrationskurve $\widehat{ac}$ in der Ebene x nehmen wir einen Punkt a' und auf der Integrationskurve $\widehat{cb}$ in der Ebene z wieder einen Punkt b'. Der Punkt a' wie auch der Punkt b' fällt mit keinem singulären Punkt von $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ zusammen.

Es ist

$$\int_a^b \mathrm{d}x = \int_a^{a'} \mathrm{d}x + \int_{a'}^c \mathrm{d}x, \qquad \int_c^b \mathrm{d}z = \int_c^{b'} \mathrm{d}z + \int_{b'}^b \mathrm{d}z$$

und dann

$$\text{(a)} \qquad \int_a^c \mathrm{d}x \int_c^b \mathrm{d}z = \int_a^{a'} \mathrm{d}x \int_c^{b'} \mathrm{d}z + \int_a^{a'} \mathrm{d}x \int_{b'}^b \mathrm{d}z + \int_{a'}^c \mathrm{d}x \int_c^{b'} \mathrm{d}z + \int_{a'}^c \mathrm{d}x \int_{b'}^b \mathrm{d}z.$$

ist. Wenn wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_{ik}(x)}{z - x}\right)\Big([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\Big) = V$$

setzen, dann

$$\int_a^{a'} \mathrm{d}x \int_c^{b'} \mathrm{d}z\, V = \left[\left(\int_c^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z - x}\,\mathrm{d}z\right)\Big([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\Big)\right]_{x=a}^{x=a'},$$

$$\int_a^{a'} \mathrm{d}x \int_{b'}^b \mathrm{d}z\, V = \left[\left(\int_{b'}^b \frac{y_{ik}(z)}{z - x}\,\mathrm{d}z\right)\Big([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\Big)\right]_{x=a}^{x=a'},$$

$$\int_{a'}^c \mathrm{d}x \int_{b'}^b \mathrm{d}z\, V = \left[\left(\int_{b'}^b \frac{y_{ik}(z)}{z - x}\,\mathrm{d}z\right)\Big([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\Big)\right]_{x=a'}^{x=c}$$

sind. Nehmen wir in Betracht (14) und das, daß die Integralmatrixen

$$\left[\left(\int_c^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z - x}\,\mathrm{d}z\right)\right]_{x=a}^{x=a'}, \qquad \left[\left(\int_{b'}^b \frac{y_{ik}(z)}{z - x}\,\mathrm{d}z\right)\right]_{x=a}^{x=a'}, \qquad \left[\left(\int_{b'}^b \frac{y_{ik}(z)}{z - x}\,\mathrm{d}z\right)\right]_{x=a'}^{x=c}$$

bei der Bedingung (16) endliche Werte haben, dann erhalten wir

$$\left[\left(\int_{c}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\left([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=a} = (0),$$

$$\left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\left([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=0} = (0),$$

$$\left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\left([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\right)\right]^{x=b} = (0),$$

deshalb ist es notwendig nur die folgenden Integrale auszurechnen

$$\text{(b)}\qquad \int_{a}^{a'} \mathrm{d}x \int_{c}^{b'} \mathrm{d}z\, V = \left[\left(\int_{c}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\left([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\right)\right]^{x=a'},$$

$$\int_{a}^{a'} \mathrm{d}x \int_{b'}^{b} \mathrm{d}z\, V = \left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\left([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\right)\right]^{x=a'},$$

$$\int_{a'}^{c} \mathrm{d}x \int_{b'}^{b} \mathrm{d}z\, V = \left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\left([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=a'}.$$

Die Summe der zwei letzten Gleichungen ist

$$\text{(c)}\qquad \int_{a}^{a'} \mathrm{d}x \int_{b'}^{b} \mathrm{d}z\, V + \int_{a'}^{c} \mathrm{d}x \int_{b'}^{b} \mathrm{d}z\, V = (0).$$

Auf der Integrationskurve $\widehat{a_\mu a_\nu} = \widehat{ac}$ zwischen a' und c nehmen wir einen Punkt $\xi = c - s$, wo $\lim\limits_{s\to 0} \xi = c$ ist und auf der Integrationskurve $\widehat{a_\nu a_\lambda} = \widehat{cb}$ zwischen c und b wieder einen Punkt $\zeta = c + t$ wo $\lim\limits_{t\to 0} \zeta = 0$ ist, dann ist das dritte doppelte Integral von (a)

$$\int_{a'}^{c} \mathrm{d}x \int_{c}^{b'} \mathrm{d}z\, V = \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \int_{a'}^{c-s} \mathrm{d}x \int_{c+t}^{b'} \mathrm{d}z\, \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)\left([\varphi(x)\,]^m\, Y_{ik}(x)\right) =$$

$$= \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\left([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s} +$$

$$+ \left[\left(\int_{c}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\left([\varphi(x)]^m\, Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=a'}.$$

Wenn wir diese Gleichung zu der Gleichung (b) addieren, haben wir

$$\int_a^{a'} \mathrm{d}x \int_c^{b'} \mathrm{d}z V + \int_{a'}^{c} \mathrm{d}x \int_c^{b'} \mathrm{d}z V = \lim_{\substack{s \to 0 \\ t \to 0}} \left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z - x} \mathrm{d}z \right) \left([\varphi(x)]^m Y_{ik}(x) \right) \right]^{x=c-s}.$$

Nach dem

$$(20) \qquad \int_a^{c} \mathrm{d}x \int_c^{b} \mathrm{d}z \frac{d}{\mathrm{d}x} \left(\frac{y_{ik}(x)}{z - x} \right) \left([\varphi(x)]^m Y_{ik}(x) \right) =$$

$$= \lim_{\substack{s \to 0 \\ t \to 0}} \left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z - x} \mathrm{d}z \right) \left([\varphi(x)]^m Y_{ik}(x) \right) \right]^{x=c-s}$$

ist.

Gerade so wird das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung (D) ausgerechnet. Einfachheitshalber setzen wir

$$\frac{d}{\mathrm{d}z} \left([\varphi(z)]^m y_{ik}(z) \right) \left(\frac{Y_{ik}(x)}{x - z} \right) = W.$$

Dieses Glied zerlegt sich in die Integrale

$$\int_a^{c} \mathrm{d}x \int_c^{b} \mathrm{d}z W = \int_a^{a'} \mathrm{d}x \int_c^{b'} \mathrm{d}z W + \int_a^{a'} \mathrm{d}x \int_{b'}^{b} \mathrm{d}z W + \int_{a'}^{c} \mathrm{d}x \int_c^{b'} \mathrm{d}z W + \int_{a'}^{c} \mathrm{d}x \int_{b'}^{b} \mathrm{d}z W,$$

wo das erste, zweite und vierte doppelte Integral

$$\int_a^{a'} \mathrm{d}x \int_b^{b'} \mathrm{d}z W = \left[\left([\varphi(x)]^m y_{ik}(z) \right) \left(\int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x - z} \mathrm{d}x \right) \right]_{z=c}^{z=b'},$$

$$\int_a^{a'} \mathrm{d}x \int_{b'}^{b} \mathrm{d}z W = \left[\left([\varphi(z)]^m y_{ik}(z) \right) \left(\int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x - z} \mathrm{d}x \right) \right]_{z=b'}^{z=b},$$

$$\int_{a'}^{c} \mathrm{d}x \int_{b'}^{b} \mathrm{d}z W = \left[\left([\varphi(z)]^m y_{ik}(z) \right) \left(\int_{a'}^{c} \frac{Y_{ik}(x)}{x - z} \mathrm{d}x \right) \right]_{z=b'}^{z=b},$$

ist. Die Integrale

$$\left[\left(\int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x - z} \mathrm{d}x \right) \right]_{z=c}^{z=b'}, \qquad \left[\left(\int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x - z} \mathrm{d}x \right) \right]_{z=b'}^{z=b}, \qquad \left[\left(\int_{a'}^{c} \frac{Y_{ik}(x)}{x - z} \mathrm{d}x \right) \right]_{z=b'}^{z=b}$$

haben nach (18) die endlichen Werte nur dann, wenn $m = 1$ ist, d. h. wenn das Differentialsystem (A) schlechthin kanonisch ist. In diesem Falle, wenn wir (15) in Betracht nehmen, sind

$$\int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz W = \left[\Big(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\Big)\Big(\int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\, dx\Big)\right]^{z=b'},$$

$$\int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz W = \left[\Big(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\Big)\Big(\int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\, dx\Big)\right]_{z=b'},$$

$$\int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^{b} dz W = \left[\Big(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\Big)\Big(\int_{a'}^{c} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\, dx\Big)\right]_{z=b'}$$

und so ist

$$\int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz W + \int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz W = (0).$$

Wenn wir die Bezeichnung mit ξ und ζ benutzen, dann wird

$$\int_{a'}^{c} dx \int_c^{b'} dz W = \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \left[\Big(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\Big)\Big(\int_{a'}^{c-s} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\, dx\Big)\right]_{z=c+t}^{z=b'} =$$

$$= \left[\Big(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\Big)\Big(\int_{a'}^{c} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\, dx\Big)\right]^{z=b'} + \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \left[\Big(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\Big)\Big(\int_{a'}^{c-s} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\, dx\Big)\right]_{z=c+t}$$

und so ist

$$\int_a^{c} dx \int_c^{b} dz W = \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \left[\Big(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\Big)\Big(\int_{a'}^{c-s} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\, dx\Big)\right]_{z=c+t}.$$

Wenn wir dies und (20) in (D) einsetzen, haben wir

$$\int_a^{c} dx \int_c^{b} dz \Big((y_{ik}(z)\Big)\Big(U_{ik}(x, z)\Big)\Big(Y_{ik}(x)\Big) = \tag{21}$$

$$= \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \left\{\left[\Big(\int_{c+t}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\Big)\Big(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\Big)\right]^{x=c-s} - \left[\Big(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\Big)\Big(\int_{a'}^{c-s} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\, dx\Big)\right]_{z=c+t}\right\}.$$

Die allgemeine Lösung des Differentialsystems (A) gibt die Matrix

$$(y_{ik}) = (c_{ik})\,(\eta_{ik}) \tag{22}$$

an, wo (c_{ik}) eine konstante Matrix mit willkürlichen Gliedern ist, wobei $\| C_{ik} \| \neq 0$ ist.
Weiter ist

$$\Big(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\Big) = \Big(y_{ik}(x)\Big)^{-1} = \Big(\eta_{ik}(x)\Big)^{-1}(c_{ik})^{-1}.$$

Bezeichnen wir

$$\left(\eta_{ik}(x)\right)^{-1} = \left(H_{ik}(x)\right),$$

dann ist

$$\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right) = \left(\varphi(x)\, H_{ik}(x)\right)(c_{ik})^{-1}$$

oder ist

$$\left(Y_{ik}(x)\right) = \left(H_{ik}(x)\right)(c_{ik})^{-1}.$$

Wenn wir diese in Betracht ziehen, dann nimmt die Gleichung (21) die Form

$$\text{(E)} \qquad \int_a^c dx \int_c^b dz \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) =$$

$$= (c_{ik}) \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \left\{\left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{\eta_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\, H_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s} -\right.$$

$$\left. - \left[\left(\varphi(z)\, \eta_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c-s} \frac{H_{ik}(x)}{x-z}\, dx\right)\right]_{z=c+t}\right\}(c_{ik})^{-1}$$

an.

Die Vereinfachung der Glieder auf der rechten Seite der Gleichung E. Zerlegen wir die Matrix $\left(\eta_{ik}(z)\right)$ in die Summe der Matrixen

$$\left(\eta_{ik}(z)\right) = \left((z-c)^{r_{ik}}\, \varepsilon_{ik}\right) + \left((z-c)^{r_{ik}+1}\, \overline{\varphi}_{ik}(z)\right),$$

gleichfalls die Matrix

$$\left(\varphi(x)\, H_{ik}(x)\right) = \left((x-c)^{-r_{ik}}\, \varphi'(c)\, E_{ik}\right) + \left((x-c)^{-r_{ik}+1}\, \overline{\Phi}_{ik}(x)\right),$$

wo $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)}$, $\varphi'(c)\, E_{ik} = E_{ik}^{(0)}$ Konstanten sind und wo r_{ik} anstatt $r_{ik}^{(\nu)}$ geschrieben wird. Die Funktionen $\varphi_{ik}(z)$ und $\Phi_{ik}(x)$ sind in der Umgebung $z = x = c = a_\nu$ holomorph und $\overline{\varphi}_{ik}(c) \neq 0$, $\Phi_{ik}(c) \neq 0$ sind.
Dann ist

$$\left(\frac{\eta_{ik}(z)}{z-x}\right)\left(\varphi(x)\, H_{ik}(x)\right) = \left(\frac{(z-x)^{r_{ik}}}{z-x}\, \varepsilon_{ik}\right)\left((x-c)^{-r_{ik}}\, \varphi'(c)\, E_{ik}\right) +$$

$$+ \left(\frac{(z-c)^{r_{ik}}}{z-x}\right)\left((x-c)^{-r_{ik}+1}\overline{\Phi}_{ik}(x)\right) + \left(\frac{(z-c)^{r_{ik}+1}}{z-x}\, \overline{\varphi}_{ik}(z)\right)\left((x-c)^{-r_{ik}}\varphi'(c) E_{ik}\right) +$$

$$+ \left(\frac{(z-c)^{r_{ik}+1}}{z-x}\, \overline{\varphi}_{ik}(z)\right)\left((x-c)^{-r_{ik}+1}\, \overline{\Phi}_{ik}(x)\right).$$

Von dem folgt

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}}\left[\left(\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{\eta_{ik}(z)}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\Big(\varphi(x)\,H_{ik}(x)\Big)\right]^{x=c-s}=$$

$$=\lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}}\left[\left(\varepsilon_{ik}\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_{ik}}}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\Big((x-c)^{-r_{ik}}\,\varphi'(c)\,E_{ik}\Big)\right]^{x=c-s}+$$

$$+\lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}}\left[\left(\varepsilon_{ik}\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_{ik}}}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\Big((x-c)^{-r_{ik}+1}\,\overline{\Phi}_{ik}(x)\Big)\right]^{x=c-s}+$$

$$+\lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}}\left[\left(\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_{ik}+1}}{z-x}\,\overline{\varphi}_{ik}(z)\,\mathrm{d}z\right)\Big((x-c)^{-r_{ik}}\,\varphi'(c)\,E_{ik}\Big)\right]^{x=c-s}+$$

$$+\lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}}\left[\left(\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_{ik}+1}}{z-x}\,\overline{\varphi}_{ik}(z)\,\mathrm{d}z\right)\Big((x-c)^{-r_{ik}}\,\overline{\Phi}_{ik}(x)\Big)\right]^{x=c-s}.$$

Auf der rechten Seite ist das zweite, dritte und vierte Glied Null bei $x=c$, deshalb

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}}\left[\left(\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{\eta_{ik}(z)}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\Big(\varphi(x)\,H_{ik}(x)\Big)^{x=c-s}=\right.\tag{24}$$

$$=\lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}}\left[\left(\varepsilon_{ik}\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_{ik}}}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\Big((x-c)^{-r_{ik}}\,\varphi'(c)\,E_{ik}\Big)\right]^{x=c-s}.$$

Um die Vereinfachung des zweiten Gliedes zerlegen wir

$$\Big(\varphi(x)\,\eta_{ik}(z)\Big)=\Big((z-c)^{r_{ik}+1}\,\varphi'(c)\,\varepsilon_{ik}\Big)+\Big((z-c)^{r_{ik}+2}\,\overline{\varphi}^*_{ik}(z)\Big),$$

$$\Big(H_{ik}(x)\Big)=\Big((x-c)^{-r_{ik}-1}E_{ik}\Big)+\Big((x-c)^{-r_{ik}}\,\overline{\Phi}^*_{ik}(x)\Big).$$

$\overline{\varphi}^*_{ik}(z)$, $\overline{\Phi}^*(x)$ sind holomorphe Funktionen in der Umgebung $z=x=c=a_\nu$ und $\overline{\varphi}^*_{ik}(c)\neq 0$, $\Phi^*_{ik}(c)\neq 0$ sind, dann ist

$$\Big(\varphi(z)\,\eta_{ik}(z)\Big)\left(\frac{H_{ik}(x)}{x-z}\right)=\Big((z-c)^{r_{ik}+1}\,\varphi'(c)\,\varepsilon_{ik}\Big)\Big((x-c)^{-r_{ik}-1}\,E_{ik}\Big)+$$

$$+\Big((z-c)^{r_{ik}+1}\,\varphi'(c)\,\varepsilon_{ik}\Big)\Big((x-c)^{-r_{ik}}\,\overline{\Phi}^*_{ik}(x)\Big)+$$

$$+\Big((z-c)^{r_{ik}+2}\overline{\varphi}^*_{ik}(z)\Big)\Big((x-c)^{-r_{ik}-1}\,E_{ik}\Big)+\Big((z-c)^{r_{ik}+2}\,\overline{\varphi}^*_{ik}(z)\Big)\Big((x-c)^{-r_{ik}}\Phi^*_{ik}(x)\Big).$$

Diese Gleichung integrieren wir bezüglich x von a' bis $c - s$, dabei wird das Integral in der unteren Grenze bei $z = c + t$ genommen. Wir nehmen weiter die Gleichung bei $\lim s \to 0$, $\lim t \to 0$ und wir erhalten

$$(24a) \qquad \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \left[\Big(\varphi(z)\,\eta_{ik}(z)\Big)\Big(\int_{a'}^{c-s} \frac{H_{ik}(x)}{x-z}\,\mathrm{d}x\Big)\right]_{z=c+t} =$$

$$= \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \left[\Big((z-c)^{r_{ik}+1}\,\varphi'(c)\,\varepsilon_{ik}\Big)\Big(E_{ik}\int_{a'}^{c-s} \frac{(x-c)^{-r_{ik}-1}}{x-z}\,\mathrm{d}x\Big)\right]_{z=c+t}.$$

Wir setzen in (E) die (24) und (24a) und wir erhalten

$$(25) \qquad \int_a^c \mathrm{d}x \int_c^b \mathrm{d}z \Big(y_{ik}(z)\Big)\Big(U_{ik}(x,z)\Big)\Big(Y_{ik}(x)\Big) =$$

$$= (c_{ik}) \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \left\{\left[\Big(\varepsilon_{ik}\int_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_{ik}}}{z-x}\,\mathrm{d}z\Big)\Big((x-c)^{-r_{ik}}\,\varphi'(c)\,E_{ik}\Big)\right]^{x=c-s} -\right.$$

$$\left. - \left[\Big((z-c)^{r_{ik}+1}\,\varphi'(c)\,\varepsilon_{ik}\Big)\Big(E_{ik}\int_{a'}^{c-s} \frac{(x-c)^{-r_{ik}-1}}{x-z}\,\mathrm{d}x\Big)\right]_{z=c+t}\right\}(c_{ik})^{-1}.$$

Wenn die Integrationskurve $\widehat{cb} = \widehat{a_\nu a_\lambda}$ in der Ebene x und die Integrationskurve $\widehat{ac} = \widehat{a_\mu a_\nu}$ wieder in der Ebene z liegt, d. i. wenn wir bei $m = 1$ die Gleichung (C) bezüglich x von c bis b und bezüglich z von a bis c integrieren, erhalten wir

$$\int_a^c \mathrm{d}z \int_c^b \mathrm{d}x \Big(y_{ik}(z)\Big)\Big(U_{ik}(x,z)\Big)\Big(Y_{ik}(x)\Big) =$$

$$= \int_a^c \mathrm{d}z \int_c \mathrm{d}x \frac{d}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{y_{ik}(x)}{z-x}\Big)\Big(\varphi(x)\,Y_{ik}(x)\Big) - \int_a^c \mathrm{d}z \int_c^b \mathrm{d}x \frac{d}{\mathrm{d}z}\Big(\varphi(z)\,y_{ik}(z)\Big)\Big(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\Big),$$

weiter bei selbigem Vefahren erhalten wir

$$(25a) \qquad \int_a^c \mathrm{d}z \int_c^b \mathrm{d}x \Big(y_{ik}(z)\Big)\Big(U_{ik}(x,z)\Big)\Big(Y_{ik}(x)\Big) =$$

$$= (c_{ik}) \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \left\{\left[\Big((x-c)^{-r_{ik}}\,\varphi'(c)\,E_{ik}\Big)\Big(\varepsilon_{ik}\int_{a'}^{c-s} \frac{(z-c)^{r_{ik}}}{z-x}\,\mathrm{d}z\Big)\right]_{x=c+t} -\right.$$

$$\left. - \left[\Big((z-c)^{r_{ik}+1}\,\varphi'(c)\,\varepsilon_{ik}\Big)\Big(E_{ik}\int_{c+t}^{b'} \frac{(x-c)^{-r_{ik}-1}}{x-z}\,\mathrm{d}x\Big)\right]^{z=c-s}\right\}(c_{ik})^{-1}.$$

Nach I ist

$$(y_{ik})\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right) = \delta_{ik}.$$

Aber sind

$$\left(y_{ik}(x)\right) = (c_{ik})(\eta_{ik}) = (c_{ik})\left((x - c)^{r_{ik}}\, \varphi_{ik}(x)\right),$$

$$\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right) = (y_{ik})^{-1} = (\eta_{ik})^{-1}(c_{ik})^{-1} = \left((x - c)^{-r_{ik}}\, \Phi_{ik}(x)\right)(c_{ik})^{-1},$$

deshalb ist

$$(c_{ik})\left((x - c)^{r_{ik}}\, \varphi_{ik}(x)\right)\left((x - c)^{-r_{ik}}\, \Phi_{ik}(x)\right)(c_{ik})^{-1} = (\delta_{ik}),$$

aus diesem ist

$$\left((x - c)^{r_{ik}}\, \varphi_{ik}(x)\right)\left((x - c)^{-r_{ik}}\, \Phi_{ik}(x)\right) = (\delta_{ik})$$

und aus diesem folgt es, daß es bei $i = k$ ist

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \varphi_{i\lambda}(x)\, \Phi_{\lambda k}(x) = 1$$

und daß es für $i \neq k$ bei jedem Wert x sein muß

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (x - c)^{r_{i\lambda}}\, (x - c)^{-r_{\lambda k}}\, \varphi_{i\lambda}(x)\, \Phi_{\lambda k}(x) \equiv 0,$$

dies gilt nur dann, wenn

(26) $$\varphi_{i\lambda}(x)\, \Phi_{\lambda k}(x) \equiv 0, \qquad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

ist. Die Funktionen $\varphi_{ik}(x)$, $\Phi_{ik}(x)$ sind in der Umgebung $x = c$ mit den Reihen

$$\varphi_{ik}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{ik}^{(\nu)}(x - c)^{\nu}$$

$$\Phi_{ik}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi'(c)\, E_{ik}^{(\nu)}(x - c)^{\nu}$$

gegeben, wo $\varepsilon_{ik}^{(0)}$ und $\varphi'(c)\, E_{ik}^{(0)}$ vom Null verschieden sind. Aus dem folgt, daß

(27) $$(\varepsilon_{ik}^{(0)})\left(\varphi'(c)\, E_{ik}^{(0)}\right) = (\delta_{ik})$$

im Punkt $x = c$ ist und aus (26) folgt

(28) $$\varepsilon_{ik}^{(0)}\, \varphi'(c)\, E_{ik}^{(0)} = 0, \qquad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wenn wir alles in Betracht nehmen, erhalten wir

$$\left(\varepsilon_{ik}^{(0)} \int\limits_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_{ik}}}{z-x}\,\mathrm{d}z\right)\left((x-c)^{-r_{ik}}\,\varphi'(c)\,E_{ik}^{(0)}\right) =$$

$$=\left(\sum_{\lambda=1}^{n} \varepsilon_{ik}^{(0)}\,\varphi'(c)\,E_{\lambda k}^{(0)} \int\limits_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_{ik}}}{z-x}\,\mathrm{d}z\,(x-c)^{-r_{ik}}\right)=\left(\delta_{ik}(x-c)^{-r_{ik}} \int\limits_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_{ik}}}{z-x}\,\mathrm{d}z\right).$$

Gerade so bekommen wir

$$\left((z-c)^{r_{ik}+1}\,\varphi'(c)\,\varepsilon_{ik}^{(0)}\right)\left(E_{ik}^{(0)} \int\limits_{c+t}^{b'} \frac{(x-c)^{-r_{ik}-1}}{x-z}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \left(\delta_{ik}(z-c)^{r_{ik}+1} \int\limits_{c+t}^{b'} \frac{(x-c)^{-r_{ik}-1}}{x-z}\,\mathrm{d}x\right).$$

Setzen wir diese in (25) und (25a) haben wir

$$\text{(F)} \qquad \int\limits_{a}^{c} \mathrm{d}x \int\limits_{c}^{b} \mathrm{d}z \left((y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x,z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) =$$

$$= (c_{ik}) \left(\delta_{ik} \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \left\{\left[(x-c)^{-r_{ik}} \int\limits_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_{ik}}}{z-x}\,\mathrm{d}z\right]^{x=c-s} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[(z-c)^{r_{ik}+1} \int\limits_{a'}^{c-s} \frac{(x-c)^{-r_{ik}-1}}{x-z}\,\mathrm{d}x\right]_{z=c+t}\right\}\right) (c_{ik})^{-1},$$

$$\text{(F}_1\text{)} \qquad \int\limits_{a}^{c} \mathrm{d}z \int\limits_{c}^{b} \mathrm{d}x \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x,z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) =$$

$$= (c_{ik}) \left(\delta_{ik} \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \left\{\left[(x-c)^{-r_{ik}} \int\limits_{a'}^{c-s} \frac{(z-c)^{r_{ik}}}{z-x}\,\mathrm{d}z\right]_{x=c+t} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[(z-c)^{r_{ik}+1} \int\limits_{c+t}^{b'} \frac{(x-c)^{-r_{ik}-1}}{x-z}\,\mathrm{d}x\right]^{z=c-s}\right\}\right)(c_{ik})^{-1}.$$

Die Ausrechnung der Ausdrücke mit dem Limes in der Gleichung (F) und (F_1)

Es gilt die Identität

$$\text{(29)} \qquad (z-c)^{r_{ik}} \frac{d}{\mathrm{d}x} \frac{(x-c)^{-r_{ik}}}{z-x} = (x-c)^{-r_{ik}-1} \frac{d}{\mathrm{d}z} \frac{(z-c)^{r_{ik}+1}}{x-z}.$$

Wir integrieren diese Identität bezüglich x von a bis $c - s$ und bezüglich z von $c + t$ bis b', und wir nehmen den Limes bei $s \to 0$, $t \to 0$, dann erhalten wir

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ t \to 0}} \left\{ \left[(x - c)^{-r_{ik}} \int_{c+t}^{b'} \frac{(z - c)^{r_{ik}}}{z - x} \, dz \right]^{x=c-s} - \right.$$

$$\left. - \left[(z - c)^{r_{ik}+1} \int_{a'}^{c-s} \frac{(x - c)^{-r_{ik}-1}}{x - z} \, dx \right]_{z=c+t} \right\} =$$

$$= (b' - c)^{r_{ik}+1} \int_{a'}^{c} \frac{(x - c)^{-r_{ik}-1}}{x - b'} \, dx + (a' - c)^{-r_{ik}} \int_{c}^{b'} \frac{(z - c)^{r_{ik}}}{z - a'} \, dz.$$

Die Punkte a' und b' wählen wir so, daß

$$\frac{b' - c}{a' - c} = e^{\pi \sqrt{-1}}$$

sei und bei der Ausrechnung des zweiten Integrals auf der rechten Seite benützen wir die Substitution

$$z - c = -(a' - c)\,\zeta,$$

von wo

$$z - a' = -(a' - c)\,(1 + \zeta)$$

ist und so erhalten wir

$$(a' - c)^{-r_{ik}} \int_{c}^{b'} \frac{(z - c)^{r_{ik}}}{z - a} \, dz = e^{r_{ik}\pi\sqrt{-1}} \int_{0}^{1} \frac{\zeta^{r_{ik}}}{1 + \zeta} \, d\zeta.$$

Bei der Ausrechnung der ersten Integrals auf der rechtem Seite setzen wir

$$x - c = \frac{a' - c}{\zeta}$$

von wo

$$x - b' = -\frac{(a' - c)\,(1 + \zeta)}{\zeta}$$

ist und dann erhalten wir

$$(b' - c)^{r_{ik}+1} \int_{a'}^{c} \frac{(x - c)^{-r_{ik}-1}}{x - b'} \, dx = e^{r_{ik}\pi\sqrt{-1}} \int_{1}^{\infty} \frac{\zeta^{r_{ik}}}{1 + \zeta} \, d\zeta,$$

nachdem ist

(30)
$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ t \to 0}} \left\{ \left[(x - c)^{-r_{ik}} \int_{c+t}^{b'} \frac{(z - c)^{r_{ik}}}{z - x} \, dz \right]^{x=c-s} - \right.$$

$$\left. - \left[(z - c)^{r_{ik}+1} \int_{a'}^{c-s} \frac{(x - c)^{-r_{ik}-1}}{x - z} \, dx \right]_{z=c+t} \right\} = e^{r_{ik}\pi\sqrt{-1}} \int_{0}^{\infty} \frac{\zeta^{r_{ik}}}{1 + \zeta} \, d\zeta =$$

$$= e^{r_{ik}\pi\sqrt{-1}} \frac{\pi}{\sin r_{ik}\pi} = 2\pi\sqrt{-1}\, \frac{\omega_{ik}}{\omega_{ik} - 1} = 2\pi\sqrt{-1} \left\{ 1 + \frac{1}{\omega_{ik} - 1} \right\},$$

wo

$$\omega_{ik} = e^{2 r_{ik} \pi \sqrt{-1}} \tag{31}$$

ist.

Wenn wir wieder die Ausrechnung des Ausdruckes in (F_1) mit dem Limes durchführen wollen, integrieren wir die Identität (29) bezüglich x von $c + t$ bis b' und bezüglich z von a bis $c - s$ und wir nehmen den Limes bei $s \to 0$, $t \to 0$, wir bekommen

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ t \to 0}} \left\{ \left[(x - c)^{-r_{ik}} \int_{a'}^{c-s} \frac{(z - c)^{r_{ik}}}{z - x} \, dz \right]_{x=c+t} - \left[(z - c)^{r_{ik}+1} \int_{c+t}^{b'} \frac{(x - c)^{-r_{ik}-1}}{x - z} \, dx \right]^{z=c-s} \right\} =$$

$$= -(a' - c)^{r_{ik}+1} \int_{c}^{b'} \frac{(x - c)^{-r_{ik}-1}}{x - a'} \, dx - (b' - c)^{-r_{ik}} \int_{a'}^{c} \frac{(z - c)^{r_{ik}}}{z - b'} \, dz.$$

Bei dem ersten Integral wählen wir die Substitution

$$x - c = - \frac{a' - c}{\zeta},$$

bei dem zweiten wieder

$$z - c = (a' - c)\, \zeta$$

und so erhalten wir

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ t \to 0}} \left\{ \left[(x - c)^{-r_{ik}} \int_{a'}^{c-s} \frac{(z - c)^{r_{ik}}}{z - x} \, dx \right]_{x=c+t} - \right. \tag{32}$$

$$\left. - \left[(z - c)^{r_{ik}+1} \int_{c+t}^{b'} \frac{(x - c)^{-r_{ik}-1}}{x - z} \, dx \right]^{z=c-s} \right\} = e^{-r_{ik} \pi \sqrt{-1}} \int_{0}^{\infty} \frac{\zeta^{r_{ik}}}{1 + \zeta} \, d\zeta =$$

$$= \pi \frac{e^{-r_{ik} \pi \sqrt{-1}}}{\sin r_{ik} \pi} = 2\pi \sqrt{-1} \, \frac{1}{\omega_{ik} - 1}.$$

Setzen wir (30) in (F) und (32) in (F_1), erhalten wir die zweite Gruppe der Relationen

$$\int_{a}^{c} dx \int_{c}^{b} dz \Big(y_{ik}(z)\Big) \Big(U_{ik}(x, z)\Big) \Big(Y_{ik}(x) = 2\pi \sqrt{-1} \left\{ \left((\delta_{ik}) + \frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}} \right) \right\}, \tag{G}$$

$$\int_{a}^{c} dz \int_{c}^{b} dx \Big(y_{ik}(z)\Big) \Big(U_{ik}(x, z)\Big) \Big(Y_{ik}(x)\Big) = 2\pi \sqrt{-1} \left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}} \right). \tag{G_1}$$

Bei der Vertauschung der Reihenfolge der Integrale ändert sich der Wert der Integrale. Die Wurzeln r_{ik} der determinierenden Gleichung gehören zu dem singulären Punkt $x = z = a_\nu$ und werden mit $r_{ik}^{(\nu)}$. bezeichnet. Wir setzen

$$e^{2\pi r_{ik}^{(\nu)}\sqrt{-1}} = \omega_{ik}^{(\nu)}. \tag{33}$$

Gerade so bekommen wir

$$\int_{a_\lambda}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\mu} dz \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) = 2\pi\sqrt{-1}\left\{(\delta_{ik}) + \left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}}\right)\right\}, \tag{H}$$

$$\int_{a_\lambda}^{a_\nu} dz \int_{a_\nu}^{a_\mu} dx \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) = 2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}}\right). \tag{H$_1$}$$

Wenn wir die Gleichungen (G) und (H), respektive die Gleichungen (G_1) und (H_1) addieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dz \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) + \\ + \int_{a_\lambda}^{a_\mu} dx \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dz \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) = 4\pi\sqrt{-1}\left\{(\delta_{ik}) + \frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}}\right)\right\},\end{aligned} \tag{K}$$

$$\begin{aligned}\int_{a_\mu}^{a_\nu} dz \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dx \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) + \\ + \int_{a_\lambda}^{a_\nu} dz \int_{a_\nu}^{a_\mu} dx \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) = 4\pi\sqrt{-1}\left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}}\right).\end{aligned} \tag{K$_1$}$$

Im ersten und zweiten Falle integrieren wir auf der selben geschlossenen Kurve, welche teilweise in dem Blatt x und teilweise in dem Blatt z der Fläche von Riemann liegt. Diese gechlossene Kurve geht im singulären Punkte von einem Blatt in das andere. Die Integrale haben in $x = z = a_\nu$ gemeinsame Grenze. Wir erhalten so zwei verschiedene Werte je nachdem in welcher Reihenfolge wir integrieren. Diese Werte sind mit der Einheitsmatrix und mit den Werten (33) gegeben. Die letzten Werte sind wieder mit den Wurzeln des Systems der zu dem singulären Punkt der gemeinsamen Grenze gehörenden determinierenden Gleichung gegeben.

VI.

Die Integrale mit zwei gemeinsamen Grenzen

Wir integrieren die Gleichung (C) bezüglich x von $a\mu$ bis a_ν und bezüglich z von $a_\varkappa$ bis a_λ, wo $\mu < \nu$, $\varkappa < \nu < \lambda$ sind. Wir gehen so vor, daß wir

$$\int_{a\mu}^{a\nu} dx = \int_{a\mu}^{a\varkappa} dx + \int_{a\varkappa}^{a\nu} dx, \qquad \int_{a\varkappa}^{a\lambda} dz = \int_{a\varkappa}^{a\nu} dz + \int_{a\nu}^{a\lambda} dz$$

nehmen und dann

$$\int_{a\mu}^{a\nu} dx \int_{a\varkappa}^{a\lambda} dz\, V = \int_{a\mu}^{a\varkappa} dx \int_{a\varkappa}^{a\nu} dz\, V + \int_{a\varkappa}^{a\nu} dx \int_{a\varkappa}^{a\lambda} dz\, V + \int_{a\mu}^{a\varkappa} dx \int_{a\nu}^{a\nu} dz\, V + \int_{a\varkappa}^{a\nu} dx \int_{a\nu}^{a\lambda} dz\, V$$

ist, wo

$$V = \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right)$$

ist, aber nach (G) sind

$$\int_{a\mu}^{a\lambda} dx \int_{a\varkappa}^{a\nu} dz V = 2\pi \sqrt{-1} \left\{(\delta_{ik}) + \left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik}}\right)\right\},$$

$$\int_{a\varkappa}^{a\nu} dx \int_{a\nu}^{a\lambda} dz V = 2\pi \sqrt{-1} \left\{(\delta_{ik}) + \left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}}\right)\right\}$$

und nach (D) sind wieder

$$\int_{a\mu}^{a\nu} dx \int_{a\varkappa}^{a\lambda} dz V = (0), \qquad \int_{a\mu}^{a\varkappa} dx \int_{a\nu}^{a\lambda} dz V = (0)$$

und deshalb

$$\int_{a\varkappa}^{a\nu} dx \int_{a\varkappa}^{a\nu} dz \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) =$$

$$= -4\pi \sqrt{-1}\, (\delta_{ik}) - 2\pi \sqrt{-1} \left\{\left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik}}\right) + \left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}}\right)\right\}$$

ist, oder

(K₂)
$$\int_{a\varkappa}^{a\nu} dx \int_{a\nu}^{a\varkappa} dz \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) =$$

$$= 4\pi \sqrt{-1}\, (\delta_{ik}) + 2\pi \sqrt{-1} \left\{\left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik}}\right) + \left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}}\right)\right\}$$

ist. Wenn wir die Folge der Integrale vertauschen und (K_1) in Betracht ziehen, bekommen wir

$$(K_3) \qquad \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz \int_{a_\nu}^{a_\varkappa} dx \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x,z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) =$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}\left\{\left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik}}\right) + \left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}}\right)\right\}.$$

Bei der Vertauschung der Folge der Integrale ändert sich auch hier der Wert des doppelten Integrals trozdem, daß wir auf derselben geschlossenen Integralskurve integrieren.

VII.

Doppelte Integrale der Elemente des Fundamentalsystems

Es ist

$$\left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x,z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) = \left(\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} y_{i\lambda}(z)\, U_{\lambda\nu}(x,z)\, Y_{\nu k}(x)\right),$$

wo $y_{ik}(z)$ die Elemente des Fundamentalsystems des Differential systems (A) sind. Die $Y_{ik}(x)$ sind mit der Gleichung

$$\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right) = \left(y_{ik}(x)\right)^{-1}$$

gegeben. $\varphi(x)\, Y_{ik}(x)$ bilden die Elemente des Fundamentalsystems des adjungierten Differentialsystems (B), wo $\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_\sigma)$ ist.

$U_{ik}(x, z)$ sind mit (6) gegeben. Wenn wir diese Formel in Betracht nehmen, dann

$$\left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x,z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) = \left(\sum_{\alpha=0}^{\sigma-2}\sum_{\beta=0}^{\alpha}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} z^\beta y_{i\lambda}(z)\, B_{\lambda\nu}^{(\alpha,\beta)} x^{\alpha-\beta} Y_{\nu k}(x)\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\sigma-2}\sum_{\beta=0}^{\alpha}\left(z^\beta y_{ik}(z)\right)\left(B_{ik}^{(\alpha,\beta)}\right)\left(x^{\alpha-\beta} Y_{ik}(x)\right)$$

ist, wo $B_{ik}^{(\alpha,\beta)}$ die Konstanten sind, welche aus den Koeffizienten des Differentialsystems (A) bestimmt werden können. Wenn wir das in Betracht nehmen, bekommen wir

$$\sum_{\alpha=0}^{\sigma-2}\sum_{\beta=0}^{\alpha}\left\{\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dz\, z^\beta y_{is}(z)\, B_{sv}^{(\alpha,\beta)} x^{\alpha-\beta} Y_{vk}(x)\right) +\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\int_{a_\lambda}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\mu} dz\, z^\beta y_{is}(z)\, B_{sv}^{(\alpha,\beta)} x^{\alpha-\beta} Y_{vk}(x)\right)\right\} = 4\pi\sqrt{-1}\left\{(\delta_{ik}) + \left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}}\right)\right\}$$

und aus diesen

$$\text{(J)} \qquad \sum_{\alpha=0}^{\sigma-2} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \sum_{s=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} B_{sv}^{(\alpha,\beta)} \left\{ \int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dz\, z^\beta y_{is}(z) x^{\alpha-\beta} Y_{vk}(x) + \right.$$

$$\left. + \int_{a_\lambda}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\mu} dz\, z^\beta y_{is}(z)\, x^{\alpha-\beta} Y_{vk}(x) \right\} = 4\pi \sqrt{-1} \left\{ \delta_{ik} + \frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}} \right\},$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n$$

folgt.

Gerade so, wenn $U_{ik}(x, z)$ aus (6) in (K_1), (K_2) und (K_3) eingesetzt wird, bekommen wir

$$(J_1) \qquad \sum_{\alpha=0}^{\sigma=2} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \sum_{s=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} B_{sv}^{(\alpha,\beta)} \left\{ \int_{a_\mu}^{a_\nu} dz \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dx\, z^\beta y_{is}(z) x^{\alpha-\beta} Y_{sk}(x) + \right.$$

$$\left. + \int_{a_\lambda}^{a_\nu} dz \int_{a_\nu}^{a_\mu} dx\, z^\beta y_{is}(z)\, x^{\alpha-\beta} Y_{vk}(x) \right\} = 4\pi \sqrt{-1}\, \frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \sigma,$$

$$(J_2) \qquad \sum_{\alpha=0}^{\sigma=2} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \sum_{s=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} B_{sv}^{(\alpha,\beta)} \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\varkappa} dz\, z^\beta y_{is}(z)\, x^{\alpha-\beta} Y_{vk}(x) =$$

$$= 4\pi \sqrt{-1}\, \delta_{ik} + 2\pi \sqrt{-1} \left\{ \frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik}} + \frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}} \right\},$$

$$(J_3) \qquad \sum_{\alpha=0}^{\sigma=2} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \sum_{s=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} B_{sv}^{(\alpha,\beta)} \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz \int_{a_\nu}^{a_\varkappa} dx\, z^\beta y_{is}(z)\, x^{\alpha-\beta} Y_{vk} =$$

$$= 2\pi \sqrt{-1} \left\{ \frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik}} + \frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}} \right\},$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n, \qquad \lambda, \nu = 1, 2, \ldots, \sigma, \qquad \varkappa \neq \nu.$$

In diesen Relationen kommen die Elemente der Matrik des Fundamentalsystems (A) multipliziert mit z^β vor. Diese Elemente haben in der Umgebung des singulären Punktes $z = x = a_\nu$ die Form

$$y_{ik}(x) = (x - a_\nu)^{r_{ik}^{(\nu)}} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{ik}^{(m)} (x - a_\nu)^m,$$

Auf der linken Seite erscheinen die Elemente

$$Y_{ik}(x) = \frac{\zeta_{ik}(x)}{\varphi(x)},$$

wo $\zeta_{ik}(x)$ die Elemente der inversen Matrix der Matrix des Fundamentalsystems sind sowie die Konstantelemente $B_{sv}^{(\alpha,\beta)}$, welche Konstanten aus den Koeffizienten des Differentialsystems (A) bestimmt werden können.

Auf der rechten Seite haben wir einfache Konstantwerke, wo

$$\frac{\delta_{ik}}{\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}}, \qquad \omega_{ik}^{(\nu)} = e^{2\pi\sqrt{-1}\, r_{ik}^{(\nu)}}$$

sind. $r_{ik}^{(\nu)}$ sind die Wurzeln der zu dem singulären Punkt $x = a_\nu$ gehörenden determinierenden Gleichungen. Für diese haben wir vorausgesetzt, daß

$$-1 < R(r_{ik}^{(\nu)}) < 0$$

gilt, deshalb $\omega_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik} \neq 0$ ist.

Wir integrieren auf der geschlossenen Kurve, welche teilweise in der Ebene x und teilweise wieder in der Ebene z liegt und welche in den singulären Punkten von einer in die andere Ebene durchgeht. So bekommen wir zwei verschiedene Konstantwerke je nachdem in welcher Reihenfolge wir integrieren und sie unterscheiden sich in dem Wert $4\pi\sqrt{-1}\,\delta_{ik}$. Die ersten Werte bekommen wir, wenn wir erst nach z und dann nach x integrieren. Diese sind mit den Wurzeln der zu der gemeinsamen Integrationsgrenze gehörenden determinierenden Gleichungen bestimmt.

Nehmen wir die Elemente des Fundamentalsystems (8), dann, wenn die Variabeln x um den singulären Punkt $x = a_\nu$ geschlossene Kurve schreibt, multiplizieren sich die Elemente mit

$$\omega_{ik}^{(\nu)} = e^{2\pi r_{ik}^{(\nu)}\sqrt{-1}}$$

und die Matrix $(\eta_{ik}^{(\nu)}(x))$ multipliziert sich mit der Matrix $(\omega_{ik}^{(\nu)})$. So bekommen wir ein neues zu dem singulären Punkt $x = a_\nu$ gehörendes Fundamentalsystem

$$\left(y_{ik}^{(\nu)}(x)\right) = (\omega_{ik}^{(\nu)})\left(\eta_{ik}^{(\nu)}(x)\right),$$

deshalb sind $\omega_{ik}^{(\nu)}$ die Elemente der Fundamentalsubstitution, welche zu dem singulären Punkt $x = a_\nu$ gehört.

Die Gleichungen (K), (K_1), (K_2) und (K_3) bezeugweise (J), (J_1), (J_2) und (J_3) bestimmen die Relationen zwischen dem zu den singulären Punkten gehörenden Fundamentalsystem und der Fundamentalsubstitution. Diese Relationen sind mit homogenen Integralgleichungen mit zwei Integralen gegeben. Wenn es diese zu lösen gelänge, dann könnten wir auch das Problem von Riemann lösen oder zu dieser Lösung näher kommen.

Do redakcie dodané 15. XI. 1958

Dvojité integrály fundamentálnych systémov vzaté medzi singulárnymi bodmi diferenciálnych systémov

J. Hronec

Súhrn

V tejto práci vyjdeme zo všeobecného diferenciálneho systému (A), ktorý nemá body neurčitosti, a z diferenciálneho systému (B), ktorý je pridružený k diferenciálnemu systému (A). Fundamentálne systémy týchto diferenciálnych systémov sú ekvivalentné, preto fundamentálny systém (A) vezmeme pri premennej z a fundamentálny systém pridruženého dif. systému vezmeme zase pri premennej x. Na základe určitej identity vytvoríme matičnú rovnicu (C), v ktorej vystúpia obidva fundamentálne systémy a racionálne a symetrické funkcie celistvé $U_{ik\cdot(x,z)}$., dané rovnicami (6a) a (6).

V stati II práca sa zaoberá koreňmi determinujúch rovníc, patriacich k jednotlivým singulárnym bodom. Tieto korene sú určené systémom (9). Berie sa do ohľadu ten prípad, keď sú všetky tieto korene rôzne a nelíšia sa v celých reálnych číslach. Predpokladá, že sú $R(r_{ik}^{(\nu)}) < 0$, (č. 10). V stati III určí niektoré identity, ktoré vyplývajú z predošlých predpokladov. V stati IV rovnicu (C) integruje medzi dvoma singulárnymi bodmi Riemannovej plochy o dvoch listoch a bodoch rozvetvenia $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ vzhľadom na premennú x, medzi inými dvoma singulárnymi bodmi zase vzhľadom na premennú z. V tomto prípade prichádza k prvej skupine relácii (D), keď je diferenciálny systém (A) absolútne kanonický.

V stati V integruje rovnicu (C) vzhľadom na premennú x medzi singulárnymi bodmi a_μ a a_ν, a vzhľadom na premennú z medzi sing. bodmi a_ν a a_λ, $\mu < \nu < \lambda$. Teda dvojité integrály majú jednu spoločnú hranicu. Aj v tomto prípade po dlhom rozbore dostaneme výsledky len vtedy, keď je dif. systém (A) absolútne kanonický a na korene determinujúcich rovníc, patriacich k jednotlivým singulárnym bodom platí vzťah $-1 < R(r_{ik}^{(\nu)}) < 0$. Tieto výsledky sú dané fundamentálnymi substitúciami (31), patriacimi k singulárnym bodom ako k spoločným hraniciam. [Rovnice (G) a (G_1).]

Rovnice (K) a (K_1) určia tieto vzťahy pri integrácii po uzavretej krivke Riemannovej plochy o dvoch listoch. Táto krivka v singulárnych bodoch integrálnych hraníc prechádza z jedného listu na druhý list. Výsledok sa zmení, ak zmeníme smer integrácie a líši sa o $4\pi\sqrt{-1}\,\delta_{ik}$, kde $\delta_{ik} = 1$ pri $i \neq n$ a zase $\delta_{ik} = 0$ pri $i - K$.

V stati VI sú určené dvojité integrály rovnice (C) po uzavretej krivke Riemannovej plochy, keď majú tieto integrály dve spoločné hranice, ktorými sú singulárne body dif. systému (A). Tieto výsledky sú dané rovnicami (K_2) a (K_3).

V stati VII sú určené dvojité integrály prvkov fundamentálneho systému diferenciálneho systému (A) po uzavretých krivkách Riemannovej plochy. Tieto výsledky sú dané rovnicami (J), (J_1), (J_2) a (J_3), ktoré znamenajú vlastne systémy integrálnych rovníc o dvoch integráloch. Tieto sa vzťahujú na fundamentálne systémy dif. systému. V hraniciach vystupujú singulárne body dif. systému. Na druhej strane týchto integrálnych rovníc zjavujú sa fundamentálne substitúcie, ktoré patria k jednotlivým singulárnym bodom.

Keby sa podarilo riešiť tieto systémy integrálnych rovníc o dvoch integráloch, vtedy by bol riešený aj Riemannov problém, vzťahujúci sa na určitý dif. systém.

Двойные интегралы фундаментальных систем между особыми точками дифференциальных систем

Ю. Гронец

Резюме

В этой работе автор исходит из общей дифференциальной системы (A), которая не содержит точек неопределенности и из дифференциальной системы (B), сопряженной к дифференциальной системе (A). Фундаментальные системы этих дифференциальных систем эквивалентны, поэтому в фундаментальной системе (A) в качестве переменного принимается z и в фундаментальной системе сопряженной дифференциальной системе опять x. На основании определенного тождества составим матричное уравнение (C), в котором имеются обе фундаментальные системы, рациональные и симметрические целые функции данные уравнениями (6а) и (6).

Во второй части рассматриваем корни детерминующих уравнений, относящиеся к отдельным особым точкам. Эти корни определены системой (9), учитывая тот случай, когда все корни различны и не отдичаются целыми вещественными числами. Предполагается, что $R(r_{ik}^{(\nu)} < 0$ (Н° 10). В III части определяются некоторые тождества, вытекающие из предшествующих предположений. В IV части интегрировано уравнение (C) между двумя особыми точками на двухлистной поверхности Римана с точками разветвления a_1, a_2, ... a_0 относительно переменной x, и между другими двумя особыми точками опять относительно переменной z. В этом случае получаем первую группу соотношений (D) и тогда дифференциальная система (A) является абсолютно каноинческой.

В V части интегрировано уравнение (C) отосительно ипеременной x между особыми точками a_μ и a_ν и относительно переменной z между особыми точками a_ν и a_λ, $\mu < \nu - \lambda$, и так двойные интегралы имеют одну общую грань. В этом случае после продолжительного анализа приходим также к результату только тогда, если дифференциальная система (A) является абсолютно канонической и для корней детерминующих уравнений, относящихся к отдельным особым точкам имеет место соотношение $-1 < R(r_{ik}^{(\nu)}) < 0$. Эти результаты даны фундаментальными подстановками (31), относящимися к особым точкам как к общим граням уравнений (G) и (G_1).

Эти соотношения определяются уравнениями (K) и (K_1) после интегрирования по замкнутой кривой двухлистной поверхности Римана, где кривая в особых точках граней интеграла переходит из одного листа на второй. Результат изменится, если изменить направление интегрирования и отличаются именно о $4\pi\sqrt{-1}\,\delta_{ik}$ где $\delta_{ik} = 1$ для $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ для $i = k$.

В VI части определены двойные интегралы уравнения (C) по замкнутой кривой поверхности Римана, если эти интегралы имеют две общие грани, являющиеся особыми точками дифференциальной системы (A). Эти результаты даны уравнениями (K_2) и (K_3).

В VII части определены двойные интегралы элементов фундаментальной системы дифференциальной системы (A) по замкнутых кривых поверхности Римана. Эти результаты даны уравнениями (J), (J_1)) (J_2) и (J_3), означающими собственно системы интегральных уравнений с двумя интегралами. Они относятся к фундаментальным системам дифференциальной системы. На гранях имеются особые точки дифференциальной системы. В правой части этих интегральных уравнений объявляются фундаментальные подстановки, принадлежапие к отдельным особым точкам.

Если бы удалось разрешить эти системы интегральных уравнений с двумя интегралами, тем самым была бы решена и проблема Римана, относящаяся к определенной дифференциальной системе.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV — 3–5, MATHEM., 1959]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

Über das formale Ausdrücken des partikulären Integrals einer Differentialgleichung durch die Koeffizienten der gegebenen Gleichung

A. HUŤA

Der Zweck dieser Studie ist, ein partikuläres Integral einer Differentialgleichung formal anzugeben, in der Form einer Funktion, die nur die Koeffizienten der gegebenen Gleichung und ihre Ableitungen enthaltet. Falls solche Funktion schon konstruiert wird, ist es möglich mittels dieser Funktion das Integral der gegebenen Differentialgleichung „in geschlossener Form" zu finden.

Diese, hier angegebene Methode ist besonders geeignet bei der formalen Lösung der algebraischen Differentialgleichungen. Bei manchen Differentialgleichungen (als z. B. bei der Riccati-schen Gleichung, der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung usw.) ist es möglich sogar das allgemeine Integral dieser Gleichungen formal zu finden. Die Voraussetzung zur Lösung dieser Gleichungen ist, damit die Koeffizienten der zu lösenden Gleichung, analytische Funktionen seien.

§ 1. Die Einführung der Funktionen h(f) und H(f)

In diesem Artikel beschränken wir uns vorläufig nur auf Differentialgleichungen, deren Koeffizienten nur von einer Funktion $f(x)$ abhängen. Setzen wir voraus, daß das Integral der Differentialgleichung sich in nächster Form schreiben läßt:

$$h[f(x)] = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(x) \tag{1}$$

wo

$$w_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{(0^{k(0)}\, 1^{k(1)}\, 2^{k(2)} \dots \dots j^{k(j)})} \prod_{\alpha=0}^{j} [f^{(\alpha)}_{(x)}]^{k(\alpha)} \tag{2}$$

$$\text{und} \sum_{\alpha=0}^{i} k(\alpha) = i \text{ für alle } k(j) \geqq 0 \text{ (ganze Zahl)}$$

dabei dem Index bei C ist so zu verstehen, daß der Buchstabe i kommt $k(i)$-mal vor. Es ist also $w_i(x)$ eine Funktion i-ten Grades in der Funktion $f(x)$ und seiner Ableitungen.

Es ist zweckmäßig den Begriff der Dimension und der Wage folgendermaßen einzuführen: Das Glied $\prod_{\alpha=0}^{j} [f^{(\alpha)}]^{k(\alpha)}$ hat die Dimension r, wenn $\sum_{\alpha=0}^{j} k(\alpha) = r$, und es hat die Wage R wenn $\sum_{\alpha=0}^{i} \alpha \, . \, k(\alpha) = R$.

Außer der Reihe (1) werden wir auch Reihen der Form

$$H[f(x)] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_i(x) \tag{3}$$

betrachten, bei denen die Exponenten bei der Funktion $f(x)$ können auch negativen ganzen Zahlen sein.

§ 2. Die Lösung der Riccati-schen Differentialgleichung

Im nächsten werden wir durch Anwendung der Funktionen $h[f(x)]$ und $H[f(x)]$ die Riccati-sche Differentialgleichung

$$z' + z^2 = f(x) \tag{4}$$

lösen, wo $f(x)$ eine analytische Funktion ist.

Wenn wir in die rechte Seite der Gleichung (4) die Substitution

$$f(x) = \frac{1}{u^2(x)} \tag{5}$$

einführen, bekommen wir die Gleichung

$$z' + z^2 = \frac{1}{u^2(x)} \tag{6}$$

und diese durch Einführung einer weiteren Substitution

$$z(x) = \frac{t(x)}{u(x)} \tag{7}$$

in die nächste Gleichung

$$ut' - u't + t^2 - 1 = 0 \tag{8}$$

übergeht. Die Gleichung (8) hat ein Integral der Form

$$t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{9}$$

wo die Glieder a_k Ausdrücke der Dimension k in den Veränderlichen u sind, die den Bezug

$$\sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} = u' a_{k-1} - u a'_{k-1} \tag{10}$$

erfüllen.

Durch Einsetzen (9) in (8) bekommen wir

$$\text{(11)} \qquad ua_0' + ua_1' + ua_2' + \ldots - u'a_0 - u'a_1 - u'a_2 - \ldots + a_0^2 + \\ + 2a_0a_1 + (a_1^2 + 2a_0a_2) + (2a_0a_3 + 2a_1a_2) + \ldots - 1 = 0$$

und durch Vergleichen der Ausdrücke mit gleichen Dimensionen bekommen wir das nächste System der Gleichungen

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} a_0^2 &= 1 \\ 2a_1 &= u' \\ 2a_2 &= u'a_1 - ua_1' - a_1^2 \\ 2a_3 &= u'a_2 - ua_2' - 2a_1a_2 \\ 2a_4 &= u'a_3 - ua_3' - 2a_1a_3 - a_2^2 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung dieses Systems folgt $a_0 = +1$ und $a_0 = -1$. Durch die Lösung des Systems (12) bekommen wir für $a_0 = +1$ die Ausdrücke

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}u' \\ a_2 &= \frac{1}{8}u'^2 - \frac{1}{4}uu'' \\ a_3 &= \frac{1}{8}u^2u''' \\ a_4 &= -\frac{1}{128}u'^4 + \frac{1}{32}uu'^2u'' - \frac{1}{32}u^2u''^2 - \frac{1}{8}u^2u'u''' - \frac{1}{16}u^3u^{IV} \end{aligned}$$

und für $a_0 = -1$ wieder die folgende Ausdrücke

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}u' \\ a_2 &= -\frac{1}{8}u'^2 + \frac{1}{4}uu'' \\ a_3 &= \frac{1}{8}u^2u''' \\ a_4 &= \frac{1}{128}u'^4 - \frac{1}{32}uu'^2u'' + \frac{1}{32}u^2u''^2 + \frac{1}{8}u^2u'u''' + \frac{1}{16}u^3u^{IV} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (13) resp. (14) in (9) bekommen wir

$$\text{(15)} \quad t_1(x) = 1 + \frac{1}{2}u' + \frac{1}{8}u'^2 - \frac{1}{4}uu'' + \frac{1}{8}u^2u''' - \frac{1}{128}u'^4 + \frac{1}{32}uu'^2u'' - \\ - \frac{1}{32}u^2u''^2 - \frac{1}{8}u^2u'u''' - \frac{1}{16}u^3u^{IV} + \ldots$$

resp.

$$t_2(x) = -1 + \frac{1}{2}u' - \frac{1}{8}u'^2 + \frac{1}{4}uu'' + \frac{1}{8}u^2u''' + \frac{1}{128}u'^4 - \tag{16}$$

$$- \frac{1}{32}uu'^2u'' + \frac{1}{32}u^2u''^2 + \frac{1}{8}u^2u'u''' + \frac{1}{16}u^3u^{\mathrm{IV}} + \dots$$

Wie man sieht, die Ausdrücke auf den rechten Seiten von (15) und (16) sind abhängig nur von der Funktion u und von ihren Ableitungen; sie können deswegen auch folgendermaßen geschrieben werden

$$t_1(x) = \gamma_1(u); \qquad t_2(x) = \gamma_2(u). \tag{17}$$

Wenn wir noch die nächsten Bezeichnungen einführen

$$\begin{aligned} m_1(u) &= 1 + \frac{1}{8}u'^2 - \frac{1}{4}uu'' - \frac{1}{128}u'^4 + \frac{1}{32}uu'^2u'' - \\ &\quad - \frac{1}{32}u^2u''^2 - \frac{1}{8}u^2u'u''' - \frac{1}{16}u^3u^{\mathrm{IV}} + \dots \\ m_2(u) &= \frac{1}{2}u' + \frac{1}{8}u^2u''' + \dots \end{aligned} \tag{18}$$

können wir schreiben

$$\gamma_1(u) = m_1(u) + m_2(u), \qquad \gamma_2(u) = -m_1(u) + m_2(u) \tag{19}$$

und mit Rücksicht auf (7) haben wir

$$z_1(x) = \frac{\gamma_1(u)}{u} = g_{2(1)}(u) \quad \text{resp.} \quad z_2(x) = \frac{\gamma_2(u)}{u} = g_{2(2)}(u). \tag{20}$$

Die Ausdrücke (19) sind Lösungen der Gleichung (6) und da nach (5) man hat

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \tag{21}$$

können wir endlich schreiben

$$z_1(x) = g_{2(1)}\left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right] \tag{22}$$

resp.

$$z_2(x) = g_{2(1)}\left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right] \tag{23}$$

Durch die Formeln (22) und (23) gegebene Funktionen sind zwei unabhängige partikuläre Lösungen der Gleichung (4) und deswegen die allgemeine Lösung dieser Gleichung wird

$$z = \frac{z_2 + kz_1(z_2 - z_1)\exp(2\int z_1\,dx)}{1 + k(z_2 - z_1)\exp(2\int z_1\,dx)} \tag{24}$$

Als Beispiel für praktisches Rechnen soll eine klasissche Differentialgleichung

$$x^4(y' + y^2) + a = 0 \quad \text{wo} \quad a = \alpha^2 > 0 \quad \text{eine Konstante ist,}$$

gelöst werden. Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$y = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{x} + C\right)$$

(Kamke: Differentialgleichungen, Lösungen und Lösungsmethoden, Bd. 1, Leipzig 1951, s. 303. Bp. 1.181.)

Lösung: Es handelt sich um die Gleichung $y' + y^2 = -\frac{a}{x^4}$, die eine Gleichung der Form (4) ist, wo $f(x) = -\frac{a}{x^4}$. Nach (5) es wird $u = \frac{x^2}{\sqrt{-a}}$, woraus $u' = \frac{2x}{\sqrt{-a}}$, $u'' = \frac{2}{\sqrt{-a}}$ und $u^{(k)} = 0$ für $k = 3, 4, \ldots$. Also laut (15), (16) und (20) nach dem Einsetzen haben wir

$$y_1 = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{-a}}{x^2} \qquad \text{und} \qquad y_2 = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{-a}}{x^2}$$

Diese Ausdrücke sind zwei unabhängige partikuläre Lösungen der ursprünglichen Gleichung. Das allgemeine Integral der Gleichung (4) bei 2 bekannten unabhängigen Lösungen ist durch die Formel (24) gegeben, die in unserem Falle die nächste Form besitzt

$$y = \frac{y_2 + ky_1(y_2 - y_1)\exp(2\int y_1\,dx)}{1 + k(y_2 - y_1)\exp(2\int y_1\,dx)}$$

oder

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2} \cdot \frac{1 + k(y_1 - y_2)\exp(2\int y_1\,dx)}{1 - k(y_1 - y_2)\exp(2\int y_1\,dx)}.$$

Die Ausdrücke für y_1 und y_2 in diese Formel eingesetzt, geben uns endlich

$$y = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{-a}}{x^2} \cdot \frac{1 - k \cdot 2\frac{\sqrt{-a}}{x^2} x^2 \exp 2i\frac{\alpha}{x}}{1 + k \cdot 2\frac{\sqrt{-a}}{x^2} x^2 \exp 2i\frac{\alpha}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} + i\frac{\sqrt{a}}{x^2} \cdot \frac{1 - \exp\left(2i\frac{\alpha}{x} + i\frac{\pi}{2} + \log 2 + \frac{1}{2}\log a + \log k\right)}{1 + \exp\left(2i\frac{\alpha}{x} + i\frac{\pi}{2} + \log 2 + \frac{1}{2}\log a + \log k\right)} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} i \frac{\exp\left(i\frac{\alpha}{x} + c'\right) - \exp\left(-i\frac{\alpha}{x} - c'\right)}{\exp\left(i\frac{\alpha}{x} + c'\right) + \exp\left(-i\frac{\alpha}{x} - c'\right)} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{x} + C\right)$$

ein Resultat, das mit dem Ergebnis im oben zit. Buche, identisch ist.

§ 3. Die Lösung der Gleichung $y'' - f(x)\, y = 0$

Bei der Lösung der Gleichung

$$y'' - f(x)\, y = 0 \tag{25}$$

führen wir die Substitution

$$y = \exp\left(\int z \, dx\right) \tag{26}$$

ein, womit wir die Gleichung (4) $z' + z^2 = f(x)$ bekommen, die zwei partikuläre Integrale (22) und (23) hat, d. h.

$$z_1 = g_{2(1)}(u) \qquad z_2 = g_{2(2)}(u).$$

Setzen wir voraus, daß die zwei partikuläre Integrale der Gleichung (25) sind folgende

$$y_1 = \exp\left[\int g_{2(1)}(u)\, dx\right] = G_{2(1)}[u(x)] \tag{27}$$

$$y_2 = \exp\left[\int g_{2(2)}(u)\, dx\right] = G_{2(2)}[u(x)] \tag{28}$$

Satz: Ist $y_1 = G_{2(1)}[u(x)]$ ein partikuläres Integral der Gleichung (25) so $y_2 = G_{2(2)}[u(x)]$ ist ein zweites linear unabhängiges partikuläres Integral der Gleichung (25).

Beweis: Die Form der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten, welche zwei partikuläre Integrale y_1, y_2 hat, ist folgende

$$\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2'' & y_2' & y_2 \end{vmatrix} \equiv (y_1'y_2 - y_1y_2')\, y'' - (y_1''y_2 - y_1y_2'')\, y' + (y_1''y_2' - y_1'y_2'')\, y = 0 \tag{29}$$

Bei der Gleichung (25) ist

$$y_2''y_1 - y_2y_1'' = 0 \tag{30}$$

oder nach Integration

$$y_2'y_1 - y_2y_1' = k \tag{31}$$

davon folgt die bekannte Gleichung zwischen y_1 und y_2

$$y_2 = ky_1 \int \frac{dx}{y_1^2} \tag{32}$$

Weiter durch Einführung des Bezuges (26) in (31) bekommen wir

$$z_2 - z_1 = k \,.\, \exp\left(-\int z_1\, dx\right) . \exp\left(-\int z_2\, dx\right) \tag{33}$$

Anderseits die Gleichung (4) mit einer bekannten partikulären Lösung y_1 kann in folgender Weise geschrieben werden

$$z' + z^2 - z_1' - z_1^2 = 0 \tag{34}$$

deren Lösung, welche wir mit z_2 bezeichnen wollen, ist

$$z_2 = z_1 + \frac{d}{dx} \log\left[C + \int \exp\left(-2\int z_1 \, dx\right) dx\right] \tag{35}$$

Durch Integrieren und Antilogarithmieren dieser Gleichung erhalten wir

$$\exp\int (z_2 - z_1)\, dx = C + \int \left[\exp\left(-2\int z_1 \, dx\right)\right] dx$$

woraus unmittelbar folgt

$$z_2 - z_1 = \exp\left(-\int z_1 \, dx\right) . \exp\left(-\int z_2 \, dx\right) \tag{36}$$

Die Gleichung (31) für $k = 1$ ist identisch mit der Gleichung (36), woraus folgt, daß $G_{2(2)}[u(x)]$ ist ein anderes linear unabhängiges Integral der Gleichung (25). Deswegen das allgemeine Integral der Gleichung (30) ist durch folgende Formel gegeben

$$y = c_1 \exp\int g_{2(1)}\left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right] dx + c_2 \exp\int g_{2(2)}\left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right] dx \tag{37}$$

was man mit Rücksicht auf (27) und (28) auch schreiben kann

$$y = c_1 G_{2(1)}\left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right] + c_2 G_{2(2)}\left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right] \tag{38}$$

§ 4. Die Lösung der Gleichungen, die sich auf die Gleichung (25) zurückführen lassen

a) Die Gleichung

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \tag{39}$$

geht durch die Substitution

$$y = z \exp\left[-\frac{1}{2}\int p(x)\, dx\right] \tag{40}$$

in die Gleichung

$$z'' - \left[\frac{1}{4} p^2(x) + \frac{1}{2} p'(x) - q(x)\right] z = 0 \tag{41}$$

über. Die Gleichung (41) hat die Lösung

$$\begin{aligned} z = {} & c_1 G_{2(1)}\left\{\left[\frac{1}{4} p^2(x) + \frac{1}{2} p'(x) - q(x)\right]^{-\frac{1}{2}}\right\} + \\ & + c_2 G_{2(2)}\left\{\left[\frac{1}{4} p^2(x) + \frac{1}{2} p'(x) - q(x)\right]^{-\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned} \tag{42}$$

und daher die Lösung der Gleichung (39) ist

$$(43)\quad y = \sum_{i=1}^{2} c_i G_{2(i)} \left\{ \left[\frac{1}{4} p^2(x) + \frac{1}{2} p'(x) - q(x) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \exp \left[- \frac{1}{2} \int p(x)\, \mathrm{d}x \right]$$

b) Die Gleichung

$$(44)\qquad a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0$$

hat, laut (39) und (43) die Lösung

$$(45)\quad y = \sum_{i=1}^{2} c_i G_{2(i)} \left\{ \left[\frac{a_1^2 - 4a_0a_2 + 2(a_0a_1' - a_0'a_1)}{4a_0^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \exp \left[- \frac{1}{2} \int \frac{a_1}{a_0}\, \mathrm{d}x \right]$$

§ 5. Die Lösung der Normalform der Abelschen Differentialgleichung

Die Normalform der Abelschen Differentialgleichung

$$(46)\qquad z' + z^3 = f(x)$$

geht durch die Substitution

$$(47)\qquad f(x) = \frac{1}{u^3(x)}$$

in die Gleichung

$$(48)\qquad z' + z^3 = \frac{1}{u^3(x)}$$

über. Durch eine weitere Substitution (7) erhalten wir die folgende Gleichung

$$(49)\qquad u^2t' - uu't + t^3 = 1$$

die für

$$(50)\qquad u^2 = 2v$$

in die Gleichung

$$(51)\qquad 2vt' - v't + t^3 - 1 = 0$$

übergeht. Die Gleichung (51) hat wieder ein Integral der Form (9) $t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, wo, für die Glieder a_k der Bezug

$$(52)\qquad \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} \sum_{i=0}^{j} a_i a_{j-i} = 1 - 2v \sum_{j=0}^{k-1} a_j' + v' \sum_{j=0}^{k-1} a_j$$

gilt.

Durch Einsetzen der Reihe (9) in die Gleichung (51) und durch Vergleichen der Ausdrücke gleicher Dimensionen bekommt man bei $a_0 = 1$ ein partikuläres Integral der Gleichung (51) in der Form

$$t = 1 + \frac{1}{3} v' - \frac{2}{9} vv'' - \frac{1}{81} (v'^3 - 18 vv'v'' - 12 v^2 v''') + \ldots \tag{53}$$

Also die Gleichung (49) hat eine Lösung

$$t(x) = 1 + \frac{1}{3} uu' - \frac{1}{9} (u^2 u'^2 + u^3 u'') + \frac{1}{81} (8 u^3 u'^3 + 18 u^4 u' u'' + 3 u^5 u''') + \ldots \tag{54}$$

und deswegen das partikuläre Integral der Gleichung (48) ist

$$z(x) = \frac{1}{u} \left[1 + \frac{1}{3} uu' - \frac{1}{9} (u^2 u'^2 + u^3 u'') + \frac{1}{81} (8 u^3 u'^3 + 18 u^4 u' u'' + 3 u^5 u''') + \ldots \right] = A(u) \tag{55}$$

wo $A(u)$ bedeutet eine nur von $u(x)$ abhängige Funktion.

Aus (55) und (47) folgt endlich für die Lösung der ursprünglichen Gleichung die Formel

$$z(x) = A \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)}} \right] \tag{56}$$

§ 6. Die Lösung der linearen binomischen Differentialgleichung dritter Ordnung

In diesem Absatze werden wir nur die Lösungsfolge bei der Differentialgleichung

$$y''' - f(x)\, y = 0 \tag{57}$$

zeigen. Durch die Substitutionen

$$y = \exp \int z(x)\, dx \qquad \text{und} \qquad f(x) = \frac{1}{u^3(x)}$$

geht die Gleichung (57) in die Gleichung

$$z'' + 3zz' + z^3 = \frac{1}{u^3(x)} \tag{58}$$

über, die nach weiterer Substitution (7) die folgende Form annimt

$$u^2 t'' + 3utt' - 2uu't' + (2u'^2 - uu'')\, t - 3u't^2 + t^3 - 1 = 0 \tag{59}$$

Die Gleichung (59) hat ein partikuläres Integral der Form $h(u)$, und zwar

$$(60)\quad t(x) = 1 + u' + \frac{1}{3}(u'^2 - 2uu'') + \frac{1}{3}u^2u''' - \frac{1}{9}(2u^2u'u''' + u^3u^{\mathrm{IV}}) + \ldots$$

also die Gleichung (58) eine Lösung

$$(61)\quad z(x) = \frac{1}{u}\left[1 + u' + \frac{1}{3}(u'^2 - 2uu'') + \frac{1}{3}u^2u''' - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{9}(2u^2u'u''' + u^3u^{\mathrm{IV}}) + \ldots\right] = g_3(u) = g_3\left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)}}\right]$$

und die ursprüngliche Gleichung (57) hat dann eine partikuläre Lösung

$$(62)\quad y_1 = \exp\int g_3[u(x)]\,\mathrm{d}x = \exp\int g_3\left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)}}\right]\mathrm{d}x = G_3[u(x)] = G_3\left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)}}\right]$$

Da y_1 eine partikuläre Lösung der Gleichung (57) ist, kann die Ordnung dieser Gleichung reduziert werden. Durch Einsetzen der Substitution

$$(63)\quad y = y_1\int v(x)\,\mathrm{d}x$$

in die Gleichung (57) erhaltet man

$$(64)\quad y_1v'' + 3y_1'v' + 3y_1''v = 0$$

Laut (45) sind zwei partikuläre Integrale dieser Gleichung

$$(65)\quad v_i = \frac{1}{\sqrt{y_1^3}}\,G_{2(i)}\left\{\left[\frac{3}{4}\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2 - \frac{3}{2}\,\frac{y_1''}{y_1}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\} \quad \text{für} \quad i = 1, 2$$

so, daß

$$(66)\quad y_{i+1} = y_1\int \frac{1}{\sqrt{y_1^3}}\,G_{2(i)}\left\{\left[\frac{3}{4}\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2 - \frac{3}{2}\,\frac{y_1''}{y_1}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}\mathrm{d}x \ \text{für} \quad i = 1, 2;$$

also das allgemeine Integral der Differentialgleichung (57) ist

$$(67)\quad y = c_1y_1 + y_1\sum_{i=1}^{2} c_{i+1}\int \frac{1}{\sqrt{y_1^3}}\,G_{2(i)}\left\{\left[\frac{3}{4}\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2 - \frac{3}{2}\,\frac{y_1''}{y_1}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}\mathrm{d}x$$

wo y_1 durch die Formel (62) gegeben wird.

§ 7. Einige Erweiterungen der vorangehenden Formel

a) Die Methoden und Formel der § 5 und § 6 lassen sich in bestimmten Sinne verallgemeinern. Analogischer Weise wie bei der Gleichung (46) können wir auch die Gleichung

$$(68)\quad y' + y^n = f(x)$$

lösen. Durch die Substitutionen $f(x) = \dfrac{1}{u^n(x)}$ und $y(x) = \dfrac{z\,(x)}{u\,(x)}$ geht die Gleichung (68) in die folgende Gleichung

$$u^{n-1}z' - u^{n-2}u'z + z^n - 1 = 0 \tag{69}$$

über, welche durch eine weitere Substitution

$$u^{n-1} = (n-1)\,v \tag{70}$$

die folgende Form annimt

$$(n-1)\,vz' - v'z + z^n - 1 = 0 \tag{71}$$

Eine partikuläre Lösung der Gleichung (71) ist

$$z = 1 + \frac{1}{n} v' - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}(n-3)\,v'^2 - \frac{1}{n^2}(n-1)\,vv'' + \tag{72}$$
$$+ \frac{1}{3n^3}(n-2)(n-4)\,v'^3 + \frac{3}{n^3}(n-1)(n-2)\,vv'v'' + \frac{1}{n^3}(n-1)^2v^2v'' + \ldots$$

oder durch Zurücksubstituieren laut (70) haben wir

$$z = 1 + \frac{1}{n} u^{n-2}u' - \frac{1}{2n^2}(3n-7)\,u^{2n-4}u'^2 - \frac{1}{n^2}u^{2n-3}u'' + \tag{73}$$
$$+ \frac{1}{3n^3}(n-2)(13n-31)\,u^{3n-6}u'^3 + \frac{6}{n^3}(n-2)\,u^{3n-5}u'u'' + \frac{1}{n^3}u^{3n-4}u''' + \ldots$$

und endlich, nach Einführung der Bezeichnung

$$A_n(u) = \frac{1}{u}\Bigg[1 + \frac{1}{n}u^{n-2}u' - \frac{1}{2n^2}(3n-7)\,u^{2n-4}u'^2 - \frac{1}{n^2}u^{2n-3}u'' + \tag{74}$$
$$+ \frac{1}{3n^3}(n-2)(13n-31)\,u^{3n-6}u'^3 + \frac{6}{n^3}(n-2)\,u^{3n-5}u'u'' + \frac{1}{n^3}u^{3n-4}u''' + \ldots\Bigg]$$

können wir schreiben als partikuläres Integral der Gleichung (68) den Audruck

$$y = A_n\left[\frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}}\right] \tag{75}$$

b) Bei der Lösung der Gleichung

$$y^{\mathrm{IV}} - f(x)\,y = 0 \tag{76}$$

bekommen wir für die unbekannte Funktion z eine, mit (58) analogische Gleichung

$$z''' + 4zz'' + 6z^2z' + 3z'^2 + z^4 = \frac{1}{u^4} \tag{77}$$

und für t eine, mit (59) analogische Gleichung

$$u^3t''' + 4u^2tt'' - 3u^2u't'' + 3u^2t'^2 + 6ut^2t' - 14uu'tt' + \\ + (6uu'^2 - 3u^2u'')t' + t^4 - 6u't^3 + (11u'^2 - 4uu'')t^2 + \\ + (6uu'u'' - u^2u''' - 6u'^3)\,t - 1 = 0 \tag{78}$$

mit der partikulären Lösung

$$t = 1 + \frac{3}{2}u' + \frac{5}{8}u'^2 - \frac{5}{4}uu'' + \frac{5}{8}u^2u''' + \dots \tag{79}$$

es gilt also für z

$$z = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{3}{2}u' + \frac{5}{8}u'^2 - \frac{5}{4}uu'' + \frac{5}{8}u^2u''' + \dots\right) = \\ = g_4(u) = g_4\left[\frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}}\right] \tag{80}$$

und ein partikuläres Integral der Gleichung (76) hat die Form

$$y_1 = \exp\int g_4\left[\frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}}\right]\mathrm{d}x = G_4(u) = G_4\left[\frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}}\right] \tag{81}$$

c) Zum Abschlusse soll hier wenigstens das Endresultat der Lösung der Gleichung

$$y^{(n)} - f(x)\,.\,y = 0 \tag{82}$$

angegeben werden.

Die Gleichung (82) hat eine partikuläre Lösung

$$y_1 = G_n\left[\frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}}\right] = \exp\int g_n\left[\frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}}\right]\mathrm{d}x \tag{83}$$

wo, wenn man ersetzt

$$\frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}} = u \tag{84}$$

können wir schreiben

$$g_n(u) = \frac{1}{u}\left[1 + \frac{n-1}{2}u' + \frac{n^2-1}{24}(u'^2 - 2uu'') + \dots\right] \tag{85}$$

A. Huťa

O formálnom vyjadrení partikulárneho integrálu diferenciálnej rovnice pomocou koeficientov danej rovnice

Súhrn

Účelom tohto článku je podať formálne partikulárny integrál diferenciálnej rovnice ako funkciu, obsahujúcu len koeficienty danej rovnice a ich derivácie. Pri niektorých diferenciálnych rovniciach ako napr. pri Riccatiho rovnici, lineárnej diferenciálnej rovnici druhého rádu atď.) je možné pomocou tejto funkcie nájsť formálne všeobecný integrál týchto rovníc. Predpokladom je, aby boli koeficienty diferenciálnej rovnice, ktorú máme riešiť, analytické funkcie.

V tomto článku sú riešené diferenciálne rovnice, ktorých koeficienty sú závislé len od jednej funkcie. Predpokladáme, že uvedený integrál možno vyjadriť pomoťou funkcie danej nekonečným radom (1), pričom členy tohto radu sú dané výrazom (2). Ako rozšírenie radu (1) máme aj rady tvaru (3), ktoré sú veľmi dôležité, pretože niektoré diferenciálne rovnice (ako napr. Riccatiho diferenciálna rovnica, Abelova diferenciálna rovnica atď.) majú partikulárne integrále práve v tomto tvare.

V tomto článku pomocou funkcie h definovanej vzorcom (1) a (2) a funkcie H definovanej vzorcom (3) je riešených niekoľko diferenciálnych rovníc. Výsledky týchto riešení sú tieto:

1. Partikulárne integrále Riccatiho diferenciálnej rovnice (4) sú dané vzorcami (22) a (23), kde vysvetlenie funkcie g je dané vzorcami (15) až (21). Zostrojenie funkcie transformovanej rovnice (8) je dané vzorcami (9) a (10). Táto rovnica (8) má integrál tvaru h, naproti čomu rovnica (4) má integrál tvaru H. Všeobecný integrál rovnice (4) je vo vzorci (24).

2. Partikulárne integrály binomickej diferenciálnej rovnice druhého rádu (25) sú dané výrazmi (27) a (28) a všeobecný integrál vzorcami (37) a (38).

3. Všeobecný integrál lineárnej diferenciálnej rovnice (39) je daný výrazom (43) a integrál rovnice (44) je daný vzorcom (45).

4. Partikulárny integrál normálneho tvaru Abelovej diferenciálnej rovnice (46) je daný vzorcom (56). Pri odvodení sa rieši transformovaná rovnica (49), ktorá má integrál tvaru h. Zostrojenie funkcie, ktorá je týmto integrálom, je dané vzorcami (9) a (52).

5. Partikulárny integrál binomickej diferenciálnej rovnice 3. rádu (57) je daný výrazom (62) a všeobecný integrál vzorcom (67).

6. Partikulárny integrál rovnice (68) (ktorej špeciálnym prípadom pre $n = 2$ je Riccatiho rovnica a pre $n = 3$ Abelova rovnica) je daný vzorcom (75).

Napokon sú dané smernice pre riešenie binomickej diferenciálnej rovnice 4. rádu (76). Je odvodená transformovaná rovnica (78) s partikulárnym integrálom (79) a ďalej je podaný partikulárny integrál (81) rovnice (76).

Záverom sa uvádza konečný výsledok partikulárneho integrálu (bez odvodenia) binomickej lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu (82). Tento partikulárny integrál (83) je daný len aproximatívne a na koniec práce sa pridal len ako ilustrácia k vôli predstave integrálu diferenciálnych rovníc tvaru (82).

О формальном выражении частного интеграла дифференциального уравнения через коэффициенты данного уравнения

А. Гутя

Резюме

Целью этой работы является представление формального частного интеграла в качестве функции, содержащей только коэффициенты данного уравнения и их производные. У некоторых дифференциальных уравнений (как напр. у дифференциального уравнения Риккати, линейного дифференциального уравнения и т. д.) возможно при помощи этой функции найти формально их общий интеграл. Однако предполагается, чтобы коэффициенты рассматриваемого дифференциального уравнения были аналитическими функциями.

В этой статье решены дифференциальные уравнения, коэффициенты которых зависят только от одной функции. Предполагается, что вышеприведенный интеграл возможно выразить через функцию данную бесконечным рядом (1), причем члены этого ряда даны выражением (2). Имеются также ряды вида (3), являющиеся расширением ряда (1), которые очень важны именно потому, что частный интеграл некоторых дифференциальных уравнений (как напр. дифференциального уравнения Риккати, дифференциального уравнения Абеля и т. д.) принимает именно этот вид.

В этой статьи решены при помощи функции h определенной формулами (1) и (2) и функции H определенной формулой (3) некоторые дифференциальные уравнения. Результаты этих решений следующие:

1) Частные интегралы дифференциального уравнения Риккати (4) даны формулами (22) и (23), где построение функции g дано формулами (15)—(21). Построение функции преобразованного уравнения (8) дано формулами (9) и (10). Это уравнение (8) имеет интеграл типа h между тем как уравнение (4) имеет интеграл типа H. Общий интеграл уравнения (4) представлен формулой (24).

2) Частные интегралы биномического дифференциального уравнения второго порядка (25) даны выражениями (27) и (28) а общий интеграл формулами (37) и (38)

3) Общий интеграл линейного дифференциального уравнения (39) дан выражением (43) и интеграл уравнения (44) опять формулой (45).

4) Частный интеграл нормального вида дифференциального уравнения Абеля (46) дан формулой (56). Чтобы построить этот интеграл нужно решить преобразованное уравнение (49), имеющее интеграл вида h. Построение функции, являющейся этим интегралом, дано формулами (9) и (52).

5) Частный интеграл биномического дифференциального уравнения третьего порядка (57) дан выражением (62) и общий интеграл формулой (67).

6) Частный интеграл уравнения (68) (частным случаем которого является уравнение Риккаит для $n = 2$ и уравнение Абеля для $n = 3$) дан формулой (75).

Наконец даны директивы для решения биномического дифференциального уравнения четвертого порядка (76). Выведено преобразованное уравнение (78) с частным интегралом (79) и в дальнейшем дан частный интеграл (81) уравнения (76).

В заключении приведен окончательный результат частного интеграла (без доказательства) биномического дифференциального уравнения n-того порядка (82). Этот частный интеграл (83) дан только приблизительно и был прибавлен в конце статьи только в качестве илюстрации для представления интеграла дифференциальных уравнений типа (82).

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

Ortogonálno-axonometrická zobrazovacia metóda v E_4

(Venované prof. dr. J. Srbovi k jeho 60. narodeninám)

M. HARANT

Na riešenie problémov vo štvorrozmernom euklidovskom priestore používame viaceré zobrazovacie metódy. Ich prehľad sme uviedli v práci [4]. V literatúre venovanej zobrazovacím metódam v E_n sú len malé zmienky o axonometrických zobrazovacích metódach. Najviac pozornosti sa venuje problematike zovšeobecnenia Pohlkeho vety, a to pre klinogonálne, aj pre centrálno-axonometrické metódy v E_n. Spomenieme niektorých autorov, ktorí tejto problematike venovali pozornosť: Küpper [13]; Schoute [16]; Kruppa [15]; Stiefel [19]; Beskin [1]; Džaparidze [2]; Pervikov [14]; Nauman [15]; Havel [9], (10) atď.

Samým konštrukčným riešeniam problémov venuje sa len veľmi malá pozornosť. Ide len o stručné zmienky o ortogonálnej axonometrii: Veronese [20]; Schoute [16], Kadeřavek—Klíma—Kounovský [11].

V tomto pojednaní sústredíme pozornosť na *ortogonálno-axonometrickú zobrazovaciu metódu* v E_4. Ukážeme, ako možno všeobecnú teóriu o ortogonálne-axonometrickej metóde v E_4 realizovať. Budeme sa zapodievať zobrazením základných útvarov — bodu, priamky, roviny a trojrozmerného lineárneho priestoru — úlohami polohy aj metrickými. Poukážeme na *súvislosť s axonometricko-kótovanou metódou* (Harant [4]), ktorej výsledky budeme aplikovať najmä pri riešeniach metrických problémov. Napokon uvedenú zobrazovaciu metódu a jej výsledky budeme aplikovať na rozriešenie dvoch problémov — na určenie bodov preniku priamky a nadgule, ako aj na určenie preniku hypersféry a priestoru. Potom ešte poukážeme na rad ďalších problémov, ktoré možno výhodne rozriešiť uvedenou metódou. V ďalších pojednaniach budeme venovať pozornosť konštrukčnému riešeniu problémov v klinogonálnej a centrálnej axonometrii v E_4.

I.

Axonometrické zobrazovacie metódy prvého druhu v E_4

1. Úvod

Vo štvorrozmernom operačnom euklidovskom priestore E_4 uvažujeme o ortogonálnej báze $[O; {}^1\vec{x}, {}^2\vec{x}, {}^3\vec{x}, {}^4\vec{x}]$ a vlastnej rovine α neincidentnej zatiaľ ani s bodom O, ani s niektorou osou. Ďalej nech je daná priamka s, ktorá nie je incidentná s rovinou α.

Predpokladajme nasledujúce polohy priamky s a roviny α:

a) Priamka $s \equiv s^{\varkappa}$ je úbežnou priamkou roviny $\varkappa$ totálne kolmej na rovinu α.

b) Priamka $s \equiv s^{\sigma}$ je úbežnou priamkou roviny σ nie totálne kolmej ani rovnobežnej vzhľadom na rovinu α.

c) Priamka s je vlastná priamka, všeobecne vzhľadom na bázu $[O; {}^1\vec{x}, {}^2\vec{x}, {}^3\vec{x}, {}^4\vec{x}]$ položená a disjunktná s rovinou α.

Ďalej označme $E_3' \equiv [O; {}^1\vec{x}, {}^2\vec{x}, {}^3\vec{x}]$; $E_3'' \equiv [O; {}^1\vec{x}, {}^2\vec{x}, {}^4\vec{x}]$ ako priemetné priestory.

Nech A je lineárny trojrozmerný priestor, neincidentný so začiatočným bodom ortogonálneho simplexu. Potom určuje na súradnicových osiach ${}^i x$ body ${}^i X$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Tieto tvoria v priestore A tetraéder. Budeme hovoriť o *súradnicovom axonometrickom simplexe* — v priestore E_4, pričom $O\,X$ sú určujúce elementy simplexu. Vzhľadom na tento simplex budeme vzťahovať geometrické útvary, ktoré budeme v E_4 skúmať.

Zavedieme nasledujúcu

Def. 1,1: *Ak premietneme súradnicovú bázu $[O; {}^1\vec{x}, {}^2\vec{x}, {}^3\vec{x}, {}^4\vec{x}]$ aj s pridruženým simplexom o hranách O^iX z priamky $s^{\varkappa}$, resp. s^{σ}, alebo z s, na rovinu α, budeme hovoriť o ortogonálno —, resp. klinogonálno —, alebo centrálno-axonometrickej zobrazovacej metóde prvého druhu v E_4. Rovina $\alpha \equiv \pi$ je axonometrická priemetňa.*

Uvažujme znova o operačnom priestore E_4 a priemetnom priestore E_3' (resp. E_3''). Nech S je bod mimo priestoru E_3' (resp. E_3''). Predpokladajme aj možnosť, že S je nevlastný bod, či už v smere kolmom na E_3' (resp. E_3'') alebo vo všeobecne položenom smere.

Def. 1,2: *Ak premietame útvary U v priestore E_4 z bodu S do priemetného priestoru E_3' (resp. E_3'') a v tomto tieto priemety zobrazíme niektorou z axonometrických metód (známych z E_3), hovoríme o axonometrických zobrazovacích metódach druhého druhu.*

V [4] je daný základ *kótovano-axonometrickej metóde*. Ak zvolíme na miesto ortogonálnej axonometrie v $E_3' \equiv E_3^{\varrho}$ klinogonálnu axonometriu alebo špeciálne šikmú premietanie — dostávame kótovano — klin. axonometrickú metódu, prípadne kótovano-klinogonálnu zobrazovaciu metódu v E_4. Riešenie problémov v týchto je v zásade také isté ako v práci [4]. Tak isto môžeme uvažovať o *centrálno-centrálne axonometrickej metóde* — skrátene *centrálnej axonometrii druhého druhu*. Rôznym kombinovaním zobrazenia z E_4 na E_3^{ϱ} a zobrazovacej metódy v E_3^{ϱ} dostávame celý *rad ďalších zobrazovacích metód* v E_4. Každá z nich má určité výhody pri riešení niektorých problémov.

II.

Zobrazenie základných geometrických útvarov

2. Popis ortogonálno-axonometrickej zobrazovacej metódy

Uvažujme o priestore E_4 a trojrozmernom lineárnom priestore A, v ktorom si vhodne zvolíme axonometrickú priemetňu $\alpha \equiv \pi$. Budeme premietať z priamky $s^{\varkappa}$, kde $\varkappa$ je rovina totálne kolmá na α.

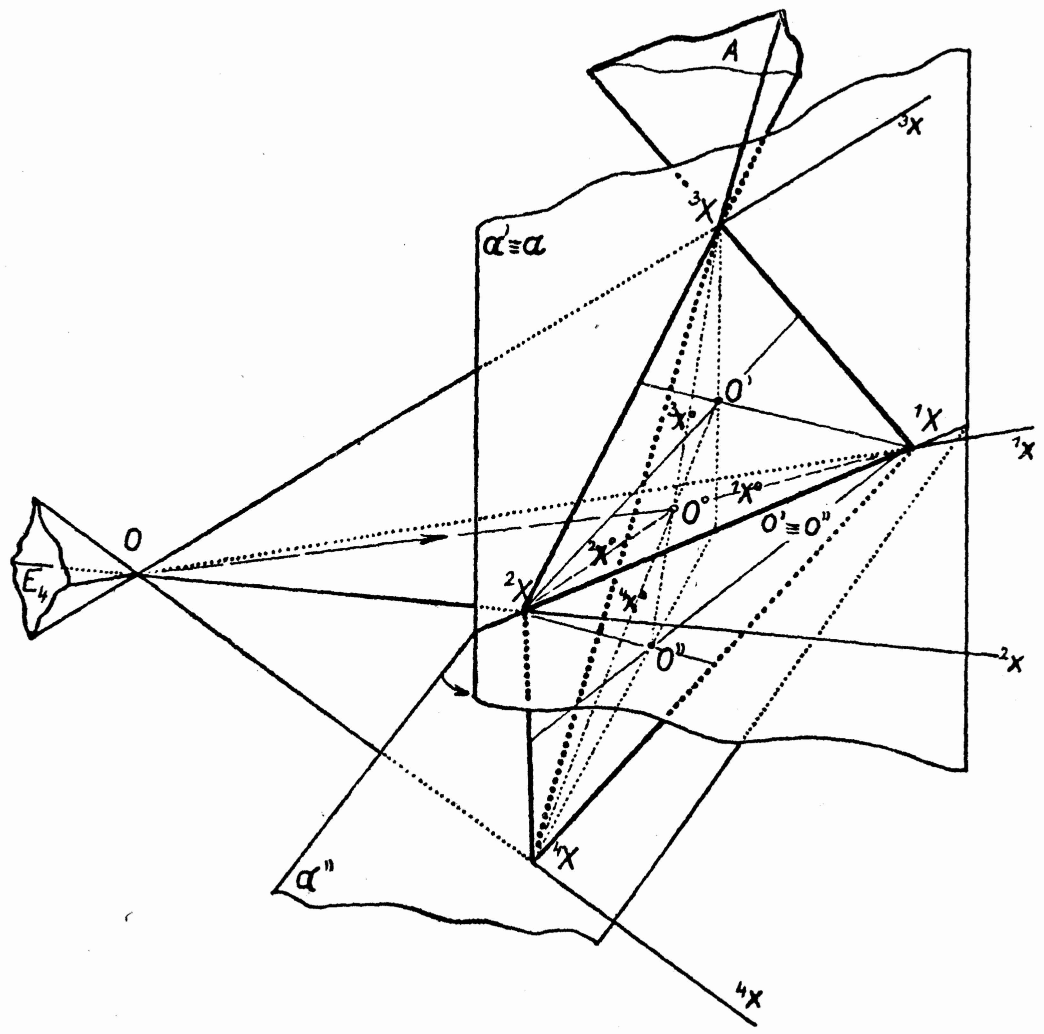
Dohovor: Označíme $\varkappa^O, \varkappa^B, \varkappa^X, \dots$ kolmo-premietajúce roviny bodov $O, B, X, \dots$; $\mathbf{K}^x, \mathbf{K}^p, \mathbf{K}^m, \dots$ zase kolmo premietajúce priestory priamok $x, p, m, \dots$ na priemetňu α.

Podľa tohto dohovoru je teda $\varkappa^0 \equiv (s^\varkappa, O), \dots$; $\mathbf{K}^x \equiv (s^\varkappa, x), \dots$ a aj $O^\alpha \equiv \varkappa^0 \cap \alpha$, $X^\alpha_c \equiv \varkappa^X \cap \alpha$ sú ortogonálne priemety bodov $O, X, \dots$, podobne $x^\alpha = \mathbf{K}^x \cap \alpha$, $m^\alpha = \mathbf{K} \cap \alpha, \dots$ sú zase ortogonálne priemety priamok $x, m, \dots$ z priamky $s^\varkappa$ na rovinu α.

Nech je prenikom priestoru $\mathbf{A}$ a súradného simplexu tetraéder o vrcholoch ${}^iX$, pričom ${}^iX = {}^ix \cap \mathbf{A}$. ($i = 1, 2, 3, 4$) Zvoľme $\alpha \equiv \alpha' \equiv ({}^1X, {}^2X, {}^3X)$ za priemetňu. Ukáže sa, že takáto voľba roviny α je najvhodnejšia. Hľadajme ortogonálny priemet $O^{\alpha'}$ bodu O. Získame ho takto: Premietnime ortogonálne O do bodu O° do priestoru $\mathbf{A}$ a v tomto znovu O° ortogonálne do roviny α'. Zrejme: $O^{\alpha'}$ je prenik rovín $\varkappa^0$ a α'. Smery $O^\circ O$; $O^\circ O^{\alpha'}$ sú lineárne nezávislé, ale pretože $\alpha' \subset \mathbf{A}$, a $OO^\circ \perp \mathbf{A}$, $\Rightarrow OO^\circ \perp \alpha'$. Ale aj $O^\circ O^{\alpha'} \perp \alpha^i$, teda dvojsmer $(OO^\circ, O^\circ O^{\alpha'})$ je v zameraní roviny $\varkappa$ totálne kolmej na α'. Preto je $O^{\alpha'}$ hľadaný ortogonálny priemet (obr. 1).

O polohe bodu $O^{\alpha'}$ v rovine α' nás poučuje

Veta 2,1: *Ortogonálny priemet $O^{\alpha'}$ začiatočného bodu O súradnicovej bázy $[O, {}^1\vec{x}, {}^2\vec{x}, {}^3\vec{x}, {}^4\vec{x}]$ do roviny $\alpha' \equiv ({}^1X, {}^2X, {}^3X)$ je ortocentrum stopného trojuholníka* ${}^1X{}^2X{}^3X$.



Obr. 1.

D ô k a z: Body ${}^1X, {}^2X, {}^3X$ vzhľadom na nezávislosť osí súradnicového simplexu tvoria trojuholník, ktorý ležiac v priemetni, javí sa v skutočnej veľkosti. Rovina $(OO^\circ\,{}^1X)$ je totálne kolmá na rovinu $({}^2X{}^3X{}^4X)$, a to preto, lebo $OO^\circ \perp \mathbf{A}$; $({}^2X{}^3X{}^1X) \subset \mathbf{A}$; $O\,X \perp \mathbf{E}_3''$ a $({}^2X{}^3X{}^4X) \subset \mathbf{E}_3''$. Preto je $O^\circ\,{}^1X$ výškou tetraédra $({}^1X{}^2X{}^3X{}^4X)$. Podobne platí o priemetoch $O^\circ\,{}^iX$ dĺžok $O\,X$ $(i = 2, 3, 4)$. Ak teraz v $\mathbf{A}$ premietneme úsečky $\overline{O^\circ\,{}^iX}$ $(i = 1, 2, 3)$ ortogonálne do roviny α' a uvážime, že $O^\circ\,{}^1X \perp ({}^2X{}^3X{}^4X)$; $O^\circ\,{}^2X \perp ({}^1X{}^3X{}^4X)$; $O^\circ\,X^3 \perp ({}^1X{}^2X{}^4X)$ — máme známu vlastnosť z ortogonálnej axonometrie $\mathbf{E}_3$, že priemety kolmíc na roviny súradnicovej bázy (t. j. priemety súradnicových osí), sú výškami stopného trojuholníka ${}^1X'\,{}^2X'\,{}^3X'$, a preto $O^{\alpha'}$ je ortocentrum tohto trojuholníka.

Je zrejmé, že priemetom osi ${}^4x$, ktorá je na $\mathbf{E}_3'$ kolmá, a teda v smere roviny $\varkappa$ je bod $O^{\alpha'} = {}^4x^{\alpha'}$.

Z uvedeného vyplýva: *báza priestoru* $\mathbf{E}_3'$ *zobrazí sa v ortogonálnej axonometrii v* $\mathbf{E}_4$ *do roviny* α' *známymi elementami axonometrického trojuholníka a jeho výšok (z* $\mathbf{E}_3$*), pokiaľ súradnicová os* ${}^4x$ *a všetky smery kolmé na* $\mathbf{E}_3'$ *do bodov v rovine* $\alpha' \equiv \alpha$.

Uvedená vlastnosť nám nepostačuje na konštrukčné zvládnutie ortogonálno-axonometrickej metódy. Veď rôzne body tejže priamky rovnobežnej so ${}^4x$ majú za priemety na $\alpha' \equiv \alpha$ ten istý bod. Aby sme ich rozlíšili v kótovano-axonometrickej metóde sme pripisovali kóty zhodné so súradnicami ${}^4x$ týchto bodov. Našou úlohou bude obísť sa bez pripisovania kót. Zvoľme preto v tetraédri $({}^1X{}^2X{}^3X{}^4X) \subset \mathbf{A}$ stenovú rovinu $\alpha'' \equiv ({}^1X{}^2X{}^4X)$ za pomocnú priemetňu a premietnime ortogonálne (teda v smere $O\,{}^3X$ — výšky tetraédra k tejto stene) súradnicový simplex $[O;\, {}^1X, {}^2X, {}^3X, {}^4X]$.

D o h o v o r: V ďalšom na miesto $O^{\alpha'}, A^{\alpha'}, x^{\alpha'} \ldots$ budeme písať len $O', A', x', \ldots$ a podobne na miesto $O^{\alpha''}, A^{\alpha''}, x^{\alpha''}$ len $O'', A'', x'' \ldots$ atď.

Analogickou úvahou ako pri dôkaze *V. 2, 1* dokážeme:

Veta 2,2: *Ortogonálny priemet* O'' *bodu* O *do roviny* $\alpha'' \equiv ({}^1X{}^2X{}^4X)$ *je ortocentrum stopného trojuholníka* ${}^1X''\,{}^2X''\,{}^4X''$.

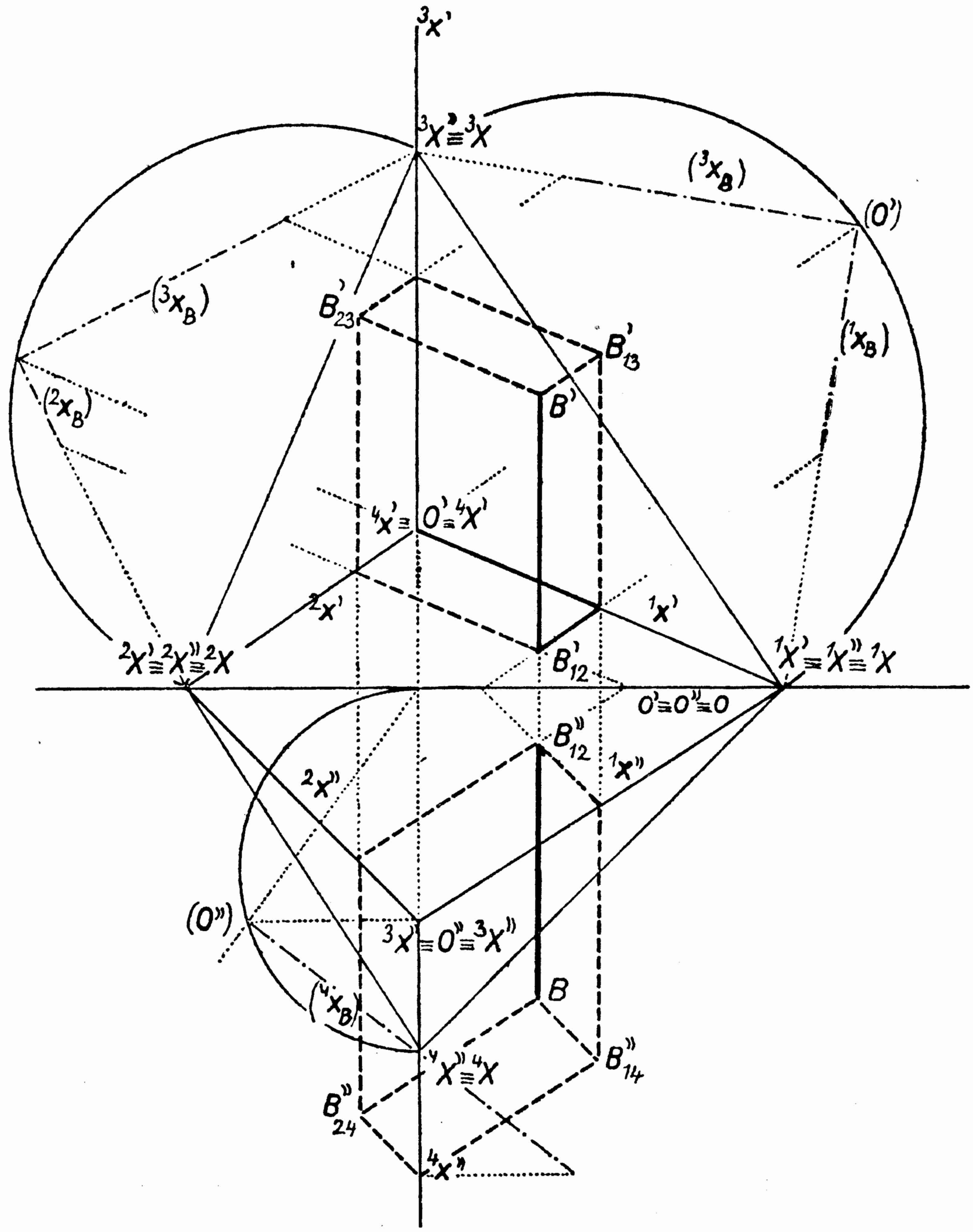
Z tejto vety vyplýva, že priemety ${}^1x'', {}^2x'', {}^3x''$ súradnicových osí do roviny α'' sú výškami stopného trojuholníka ${}^1X''\,{}^2X''\,{}^3X''$ a ďalej možno ukázať, že ${}^3x'' \equiv O''$.

Ak označíme ${}^1X{}^2X \equiv o'$, ${}^1X''\,{}^2X'' \equiv o''$, potom vzhľadom na to, že ${}^1X' \equiv {}^1X''$, ${}^2X' \equiv {}^2X''$, je aj $o' \equiv o''$. Otočme okolo osi $o' \equiv o''$ rovinu α'' v priestore $\mathbf{A}$ do roviny α', ktorú stotožníme s priemetňou α. Os otáčania $o' \equiv o''$ nazveme združovacia os, pretože sa nám podarilo zobrazené priestory $\mathbf{E}_3'$ a $\mathbf{E}_3''$ takýmto spôsobom združiť a všetky konštrukcie zostrojovať v jedinej rovine $\alpha \equiv \pi$. Je zrejmé, že priestor $\mathbf{E}_3''$ sa takto zobrazí do $\alpha'' \equiv \alpha$ zase do ortogonálnej axonometrie. Grafické riešenie je na *obr. 2*.

Z uvedeného a z vlastnosti otáčania roviny α'' do α okolo $o' \equiv o''$ je zrejmá aj

Veta 2,3: *Priemetné priestory* $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$ *sa zobrazia v ortogonálno-axonometrickej zobrazovacej metóde* $\mathbf{E}_4$ *na rovinu* $\alpha' \equiv \alpha \equiv \alpha''$ *do dvoch podľa združovacej osi* $o' \equiv o'$ *kolmo združených ortogonálnych axonometrií.*

P o z n á m k a: Je zrejmé, že sme mohli voliť $\alpha \equiv \alpha''$ v priestore $\mathbf{E}_3''$ a rovinu α' otočiť do roviny α v priestore $\mathbf{A}$. Konštrukčný výsledok je však ten istý.



Obr. 2.

3. Zobrazenie bodu

Nech bod B je daný v priestore $\mathbf{E}_4$ súradnicami $({}^1x_B, {}^2x_B, {}^3x_B, {}^4x_B)$ vzhľadom na ortogonálnu bázu $[O; {}^1\vec{x}, {}^2\vec{x}, {}^3\vec{x}, {}^4\vec{x}]$. Do roviny α ho zobrazíme takto: určíme ortogonálne priemety bodu B do priestorov $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$. Nech tieto sú B_0', B_0''. Tieto zobrazíme podľa známych zásad (aplikovaním viet 2,1; 2,2; 2,3) ortogonálnej axonometrie z $\mathbf{E}_3$ v priestoroch $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$ do pomocných axonometrických priemetní α, resp. α''. Dostávame ich axonometrické obrazy B', B''. S bodom B uvažujme súčasne aj jeho sprievodný nadkváder. Tento najskôr ortogonálne premietneme do priestoru $\mathbf{A}$. Zostrojíme obidva priemety do α' a α'', pričom $\alpha' \equiv \alpha$ (priemetňa) a α'' otočíme okolo $o' \equiv o''$ do α. Ak uvážime, že smery kolmé na $\mathbf{E}_3'$, resp. $\mathbf{E}_3''$ sa premietajú do rovín α', resp. α'' do bodov, potom ortogonálne priemety nadkvádra do priemetných priestorov $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$ budú len kvádre a tak isto aj ich obrazy do α', resp. α'' budú len obrazmi týchto kvádrov. S priemetmi sprievodného nadkvádra zostrojíme súčasne aj priemety bodov B_0', B_0'' do rovín súradnicového simplexu.

Na *obr. 2* je zobrazenie bodu B riešené graficky. B', B'' sú axonometrické obrazy bodov B_0', B_0''; B_{ik}', B_{ik}'' sú zase axonometrické obrazy bodov B_0', B_0'' do rovín súradnicového simplexu.

Skôr než pristúpime k odvodeniu základných viet zobrazenia bodu B, zavedieme

Def. 3,1: *Axonometrické obrazy B', B'' ortogonálnych priemetov B_0', B_0'' bodu B do $\mathbf{E}_3'$, resp. $\mathbf{E}_3''$ nazveme hlavné priemety bodu B. Axonometrické obrazy B_{ik}', B_{ik}'' zase pomocné priemety bodu B.*

Z priemetov sprievodného nadkvádra pre zobrazenie bodu B v ortogonálnej axonometrii v $\mathbf{E}_4$ vyplýva

Veta 3,1: *Bod B sa (1,1) — značne zobrazuje trojicou združených priemetov (B', B'', B_{12}'), alebo (B', B'', B_{12}''), pričom $\overline{B'\,B_{12}'B''B_{12}''} \parallel O'O''$*

Dôkaz: Ak poznáme združené obrazy (B', B'', B_{12}'), alebo (B, B'', B_{12}'') (t. j. také, ktoré ležia na jedinej združovacej priamke kolmej na združovaciu os $o' \equiv o'' \equiv o$), vieme určiť nielen B_{12}'', resp. B_{12}', ale aj obrazy sprievodného nadkvádra a podľa známych zásad z ortogonálnej axonometrie z $\mathbf{E}_3$ aj súradnice bodu B. Ale aj obrátene, ak sú dané súradnice bodu B, vieme zostrojiť jeho združené obrazy. Vlastnosť $\overline{B'B_{12}'B_{12}''B''} \parallel O'O''$ vyplýva z *V. 2,3.*

Treba poznamenať, že skupinami (B', B_{12}', B_{12}''), (B'', B_{12}', B_{12}'') nie je bod *(1,1)* — značne určený, pretože obrazy B_{12}' a B_{12}'' sú závislé. Ak poznáme jeden, druhý vieme zostrojiť. Tak isto stojí za pripomienku, že popri dvoch hlavných obrazov B', B'' bodu B, postačí k *(1,1)* — značnému určeniu ešte ďalší pomocný obraz B_{ik}', lebo B_{ik}''. No z praktických príčin obmedzujeme sa len na obrazy B_{12}', B_{12}''.

Zo zobrazovacích metód $\mathbf{E}_3$ je známa jedna zo základných konštrukcií.

Konštr. 3,1: *Bod B je daný združenými obrazmi určiť jeho súradnice.*

Riešenie: Je zrejmé z *obr. 2.*

V ďalších úvahách je dôležitý poznatok o zobrazení bodu B, ak leží v niektorom priemetnom priestore. O tom nás poučuje

Veta 3,2: *Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou preto, aby*

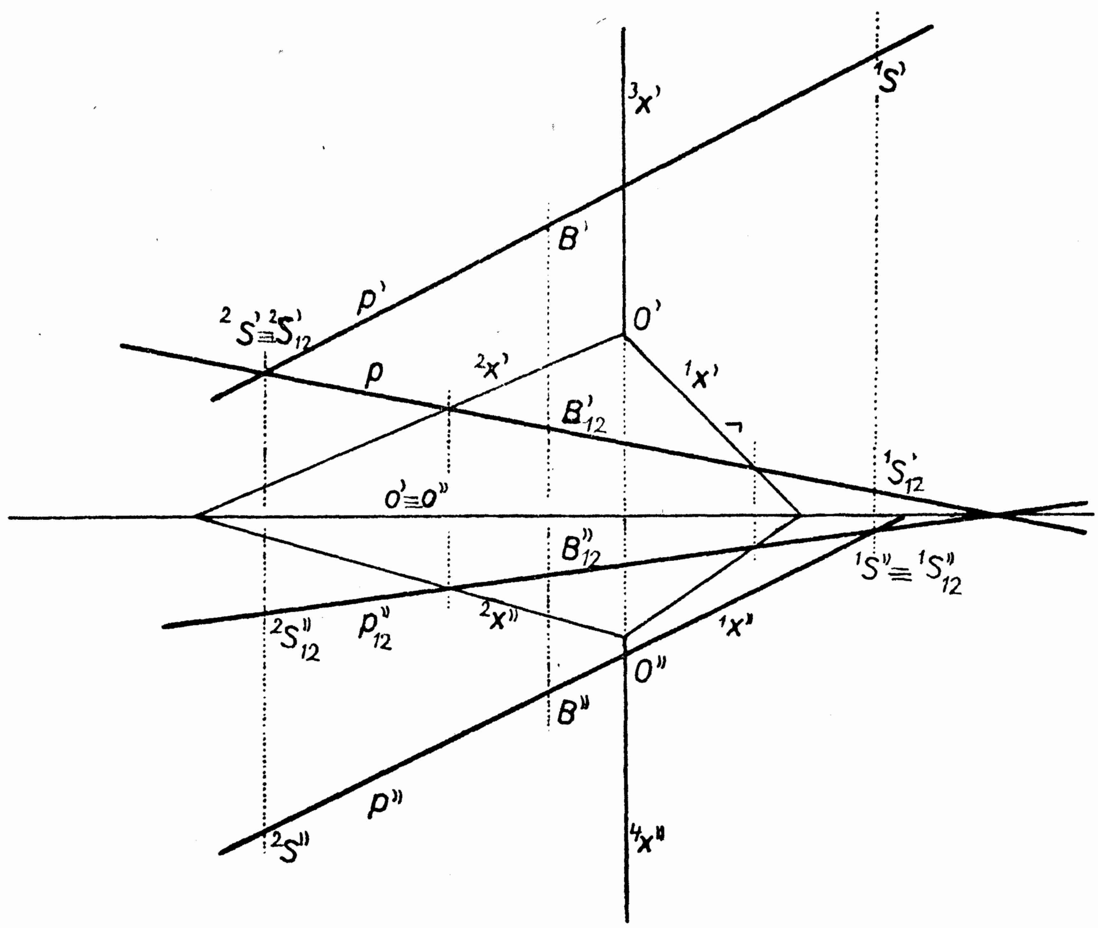
a) $B \in ({}^1x{}^2x)$ *je, aby* $B' \equiv B_{12}'$; $B'' \equiv B_{12}''$;
b) $B \notin ({}^1x{}^2x)$ *ale* $B \in \mathbf{E}_3'$ *je, aby* $B' \not\equiv B_{12}'$, $B'' \equiv B_{12}''$;
c) $B \notin ({}^1x{}^2x)$, *ale* $B \in \mathbf{E}_3''$ *je, aby* $B' \equiv B_{12}$, $B'' \not\equiv B_{12}''$.

Dôkaz: Vyplýva z výsledku konštrukcie *3,1* a z vlastnosti súradníc bodu B; ak tento leží v rovine (${}^1x$, ${}^2x$) je ${}^3x_B = {}^4x_B = 0$, v priestore $\mathbf{E}_3'$ je ${}^4x_B = 0$, alebo v $\mathbf{E}_3''$ je ${}^3x_B = 0$. O iných špeciálnych polohách nebudeme hovoriť.

Poznámka: Ľahko stanovíme, aké sú priamky, z ktorých treba B premietať do B', B'', B_{12}', resp. B_{12}''.

4. Zobrazenie priamky

Uvažujme o priamke $p \equiv AB$ vo všeobecnej polohe vzhľadom na $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$, resp. na pomocné axonometrické roviny α', α''. Nech p_0', p_0'' sú jej ortogonálne priemety do $\mathbf{E}_3'$, resp. $\mathbf{E}_3'$. Dostali sme ich premietaním v smere ${}^4x$, resp. ${}^3x$. Ich ortogonálne priemety do α', α'' nech sú p', p''. Ak označíme k', resp. k'' smery v $\mathbf{E}_3'$, resp. $\mathbf{E}_3''$ kolmé na α', resp. α'', potom dvojsmery $\varkappa' \equiv ({}^4x, k')$,



Obr. 3.

$\varkappa'' \equiv ({}^3x, k'')$ sú na roviny α', resp. α'' totálne kolmé a pritom lineárne nezávislé. Aj pri zobrazení priamky p určujeme axonometrické obrazy p'_{12}, p''_{12}. Tak ortogonálny priemet priamky p'_0 do roviny $({}^1x, {}^2x)$ dostávame, ak p premietame z nevlastnej priamky roviny $\varkappa'_{12} \equiv ({}^4x, {}^3x)$. Podobne ortogonálny priemet priamky p''_0 do tej istej roviny, ak p premietame v smere roviny $\varkappa''_{12} \equiv ({}^3x, {}^4x)$. Vidíme, že $\varkappa''_{12} \equiv \varkappa'_{12}$, teda ortogonálne priemety priamok p'_0, p''_0 do $({}^1x, {}^2x)$ sú totožné. Teda aj v obrazoch sú závislé v tom smere ako napr. B'_{12} a B''_{12}. Preto p'_{12} a p''_{12} sú tiež združené tak, že ich priesečné body obrazmi súradnicových osí ${}^1x$ a ${}^2x$ sú združené, ako aj že p'_{12}, p''_{12} a o sa pretínajú v jednom bode (obr. 3).

Def. 4,1: *Priestory* $\mathbf{K}' \equiv (p\varkappa')$, $\mathbf{K}'' \equiv (p\varkappa'')$, *resp.* $\mathbf{K}_{12} \equiv (p\varkappa'_{12})$ *sú ortogonálno-premietajúce priestory priamky p do rovín* α', α'', *resp.* $({}^1x, {}^2x)$.

Základný poznatok pre zobrazenie priamky p je vyslovený

Vetou 4,1: *Priamka p vo všeobecnej polohe je (1,1) — značne určená trojicou združených obrazov* (p', p'', p'_{12}), *resp.* (p', p'', p''_{12}), *pričom* $p' \equiv \mathbf{K}' \cap \alpha'$; $p'' \equiv \mathbf{K}'' \cap \alpha''$, $p'_{12} \equiv \mathbf{K}_{12} \cap ({}^1x, {}^2x)$, *resp.* $p''_{12} \equiv \mathbf{K}_{12} \cap ({}^1x, {}^2x)$.

Dôkaz: Vyplýva z *V. 3,1*, ak uvažujeme, že $p \equiv AB$. Ak použijeme definície *4,1*, potom priamkou p možno položiť tri kolmopremietajúce priestory na roviny α', α'', $({}^1x, {}^2x)$, a teda určiť trojicu priemetov p', p'', p'_{12} alebo p', p'', p''_{12}. Obrátene, takto určené premietajúce priestory sa pretínajú práve v jedinej priamke p.

Def. 4,2: *Body* ${}^1S \equiv p \cap \mathbf{E}'_3$, ${}^2S \equiv p \cap \mathbf{E}''_3$ *nazveme stopné body priamky p.*

Konštr. 4,1: *Určiť stopné body priamky* $p \equiv (p', p'', p'_{12})$ *(obr. 3).*

Riešenie: Podľa *V. 3,2* pre združené obrazy stopného bodu ${}^1S$ platí: ${}^1S'' \equiv {}^1S''_{12}$, podobne pre ${}^2S$ zase ${}^2S' \equiv {}^2S'_{12}$. Bude preto ${}^1S'' \equiv p'' \cap p''_{12}$ a ${}^2S' \equiv p' \cap p'_{12}$.

Pretože v premietaniach sa incidencia zachováva, ľahko odvodíme združené obrazy bodu $B \in p$, ak je daný jeden jeho obraz. Potom podľa *V. 3,1* stačí viesť združovaciu priamku $\| O'O''$ týmto obrazom a na obrazoch priamky p dostávame zodpovedajúce obrazy bodu B (obr. 3).

Z konštrukcie *4,1* a def. *4,2* vyplýva:

Veta, 4,2: *Je nevyhnutné a stačí, aby priamka p*

a) *bola rovnobežná s* E'_3, *aby* $p'' \| p''_{12}$,

b) *bola rovnobežná s* E''_3, *aby* $p' \| p'_{12}$,

c) *pretínala rovinu* $({}^1x, {}^2x)$, *aby* ${}^1S \equiv {}^2S$.

Poznámka: Ľahko odvodíme vlastnosti združených obrazov priamky kolmej na $\mathbf{E}'_3$, $\mathbf{E}''_3$, $({}^1x, {}^2x)$ atď.

Venujme pozornosť ešte vzájomnej polohe dvoch priamok p, q. O tom nás poučuje

Veta 4,3: *Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby priamky p, q boli:*

a) *totožné je, aby platilo* $p' \equiv q'$, $p'' \equiv q''$, $p'_{12} \equiv q'_{12} \Rightarrow p''_{12} \equiv q''_{12}$;

b) *rovnobežné je, aby platilo* $p' \| q'$, $p'' \| q''$, $p'_{12} \| q'_{12} \Rightarrow p''_{12} \| q''_{12}$;

c) *rôznobežné je, aby* $p' \equiv q'$, $p'' \equiv q''$, $p'_{12} \not\equiv q'_{12} \Rightarrow p''_{12} \equiv q''_{12}$, *alebo* $p' \equiv q'$, $p'' \not\equiv q''$, $p'_{12} \equiv q'_{12} \Rightarrow p''_{12} \equiv q''_{12}$;

potom $p'_{12} \cap q'_{12} \equiv R'_{12}$ *je jeden obraz ich spoločného bodu R;*

d) *mimobežné je, aby neboli splnené podmienky a), resp. b), resp. c).*

Dôkaz vety by sme vykonali použitím kolmopremietajúcich priestorov a uvažovaním o ich vzájomnej polohe.

Poznámka 1: Priamka, ktorej všetky obrazy sú kolmé na združovaciu os $o' \equiv o''$, musí byť nevyhnutne daná obrazmi dvoch bodov. O vzájomnej polohe priamok v takejto polohe treba osobitne rozhodovať.

Poznámka 2: Pri 4,3b rozumie sa, že je $p \| q$ aj vtedy, ak je $p \equiv q$.

5. Zobrazenie roviny

Tri nekolineárne body A, B, C určia jedinú rovinu ϱ. Predpokladajme, že ϱ má všeobecnú polohu vzhľadom na priemetné priestory a roviny α', α''. Rovina ϱ obsahuje však ∞^2 bodov, ktorých ortogonálne priemety do rovín α', α'' vyplnia bodové polia α, a α''. Zrejme platí

Veta 5,1: *Rovina je (1,1) značne určená trojicami združených obrazov bodov A, B, C*

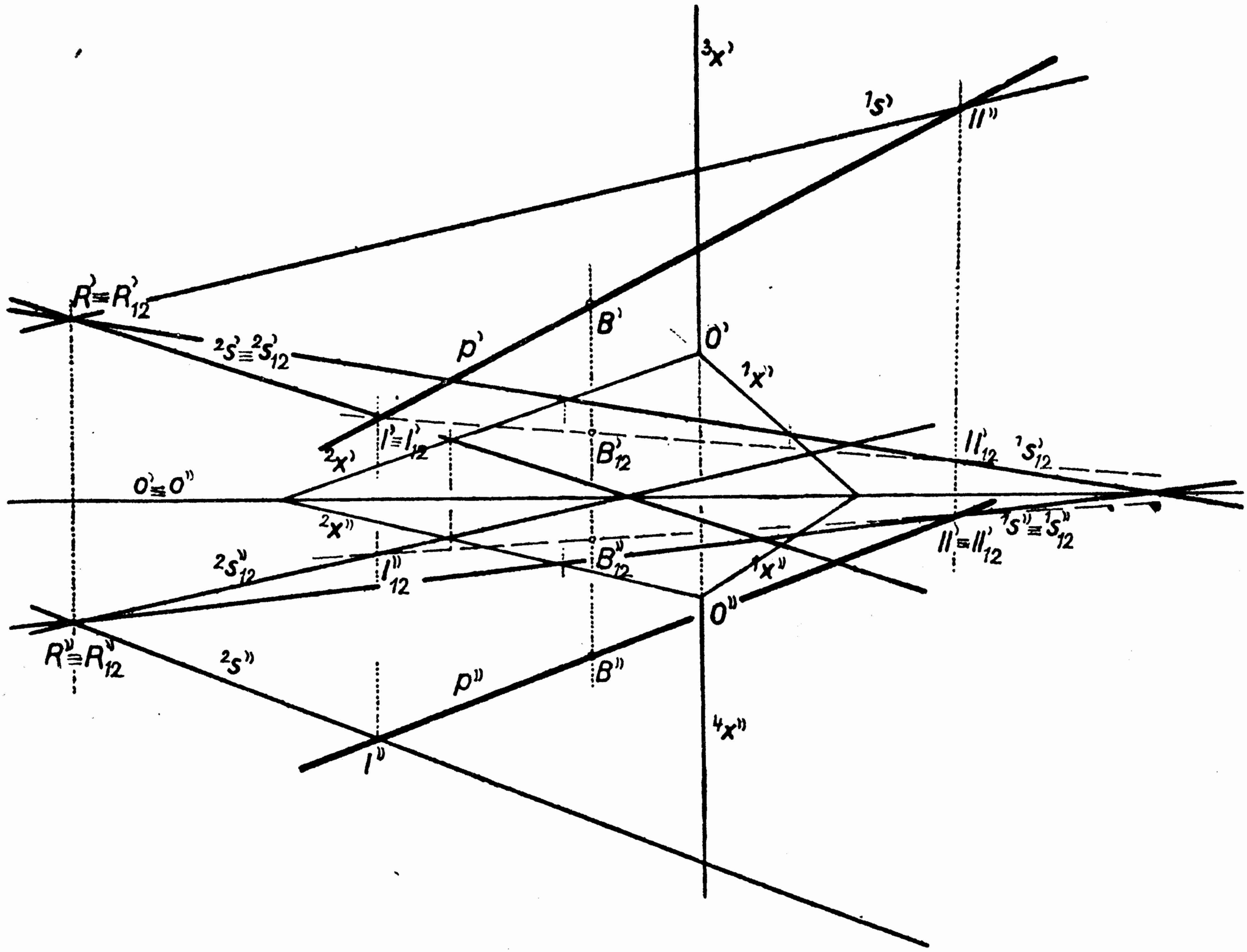
a ďalšia

Veta 5,2: *Bodové polia* $\alpha(A', B', C', \ldots)$ *a* $\alpha(A'', B'', C'', \ldots)$ *sú všeobecne afinné polia.*

Určenie roviny ϱ trojicou bodov A, B, C je pre mnohé konštrukcie nevhodné, preto si povšimneme iné určenia vhodné pre túto zobrazovaciu metódu.

Def. 5,1: *Priamky* ${}^1s \equiv \varrho \cap \mathbf{E}'_3$, ${}^2s \equiv \varrho \cap \mathbf{E}''_3$ *nazveme stopné priamky roviny na priemetných priestoroch* $\mathbf{E}'_3$, $\mathbf{E}''_3$.

Konštr. 5,1: *Určiť združené obrazy stopných priamok* ${}^1s, {}^2s$, *roviny* $\varrho \equiv (A, B, C)$.



Obr. 4.

Riešenie: Zostrojením konštr. *4,1* určíme stopné body spojníc AB, AC, BC, potom $^1s \equiv \overline{{}^1S_{AB}{}^1S_{AC}{}^1S_{BC}}$, $^2s \equiv \overline{{}^2S_{AB}\,{}^2S_{AC}\,{}^2S_{BC}}$. Združené obrazy týchto ľahko určíme. Platí pre ne: $^1s'' \equiv {}^1s''_{12}$, $^2s' \equiv {}^2s'_{12}$ a $^1s \cap {}^2s \equiv R$ je bod roviny $({}^1x, {}^2x)$; preto $\overline{R' \equiv R'_{12}, R'' \equiv R''_{12}} \parallel O'O''$.

Def. 5,2: *Priamky ^1h, ^2h roviny ϱ ležiace v rovnobežných priestoroch s priemetnými priestormi $\mathbf{E}'_3$, $\mathbf{E}'_3$ nazývame hlavné priamky prvej, resp. druhej osnovy.*

Pretože v paralelných premietaniach rovnobežnosť sa zachováva, môžeme vysloviť

Veta 5,3: *Obrazy hlavných priamok prvej osnovy {druhej osnovy} sú rovnobežné so zodpovedajúcimi obrazmi stopnej priamky ^1s {prípadne ^2s}.*

Konštr. 5,2: *Určiť združené obrazy bodu $R \equiv \varrho \cap ({}^1x, {}^2x)$.*

Riešenie: Pre združené obrazy bodu R musí platiť: $R' \equiv R'_{12}, R'' \equiv R''_{12}$. Bod $R \in \varrho$, ale $^1s \equiv \varrho \cap \mathbf{E}''_3$, $^2s \equiv \varrho \cap \mathbf{E}_3$ a $({}^1x, {}^2x) \equiv \mathbf{E}''_3 \cap \mathbf{E}''_3 \Rightarrow R \equiv {}^1s \cap {}^2s$. Stačí preto určiť združené obrazy stopných priamok použitím *K. 5,1* a dostávame hneď združené obrazy bodu R (obr. 4).

Z tejto konštrukcie vyplýva aj veľmi vhodné určenie roviny — združenými obrazmi stopných priamok ^1s, ^2s (obr. 4), prípadne jednou stopnou priamkou a bodom.

Uvážením zachovania incidencie vieme vyriešiť aj nasledujúce

Konštr. 5,3: *Je daný jeden obraz priamky* $p \subset \varrho$ *(bodu* $B \in \varrho$*) danej združenými obrazmi stopných priamok. Určiť zvyšné obrazy. (obr. 4).*

Konštr. 5,4: *Je daná rovina* $\varrho \equiv ({}^1s, D)$. *Určiť zvyšné obrazy bodu* $C \in \varrho$, *ak je* C *daný obrazom* C'.

Poznámka 1: Ak by bola $\varrho \equiv (A, B, C)$, potom na určenie zvyšných obrazov bodu B možno použiť aj vlastnosti afinných polí z *V. 5,2.* Pri zadaní $\varrho \equiv ({}^1s, {}^2s)$ namiesto ľubovoľnej priamky l incidentnej s B môžeme voliť hlavnú priamku.

Poznámka 2: Prenechávame čitateľovi úvahy o špeciálnych polohách roviny ϱ, ako aj o zaujímavých vlastnostiach bodov $R_{ik} \equiv \varrho \cap ({}^ix, {}^kx)$ a z toho vyplývajúcich planimetrických viet.

6. Zobrazenie lineárneho trojrozmerného priestoru P

Štyri nekomplanárne body A, B, C, D určia priestor **P**. Predpokladajme, že tento nie je konjunktný s **A**, ani s priemetnými priestormi $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$, a nemá ani špeciálnu polohu vzhľadom na tieto. Ak sú dané združené obrazy bodov A, B, C, D, treba rozhodnúť, či určujú priestor **P**, t. j. či ležia v jedinej rovine. O tom nás poučuje

Veta 6,1: *Nevyhnutná a postačujúca podmienka preto, aby body* A, B, C, D *určovali priestor* **P**, *je, aby vo všeobecne afinných poliach* $\alpha(A', B', C', \ldots)$ *a* $\alpha(A'', B'', C'', \ldots)$ *a v afinite* $\alpha(A', B', C' \ldots)$ *a* $({}^1x, {}^2x)(A'_{12}, B'_{12}, C'_{12} \ldots)$ *nezodpovedali si súčasne body* D' *a* D''; D' *a* D'_{12}.

Dôkaz: Keby to tak bolo, podľa *V. 5, 2* body A, B, C, D by nevyhnutne ležali v jedinej rovine a naopak.

Def. 6,1: *Roviny* ${}^1\sigma^{\mathbf{P}} \equiv \mathbf{P} \cap \mathbf{E}_3'$, ${}^2\sigma^{\mathbf{P}} \equiv \mathbf{P} \cap \mathbf{E}_3''$ *nazývame stopné roviny priestoru P.*

Stopné roviny, ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$ a ${}^2\sigma^{\mathbf{P}}$ nie sú nezávislé, lebo ležia v jedinom priestore **P**. Tento preniká rovinu $({}^1x, {}^2x)$ v priamke $s^{\mathbf{P}} \equiv s$ a združovaciu os $o' \equiv o''$ v jedinom bode, ktorým $s^{\mathbf{P}}$ prechádza.

Konštr. 6,1: *Pre priestor* $\mathbf{P} \equiv (A, B, C, D)$ *určiť združené obrazy stopných rovín* ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$, ${}^2\sigma^{\mathbf{P}}$.

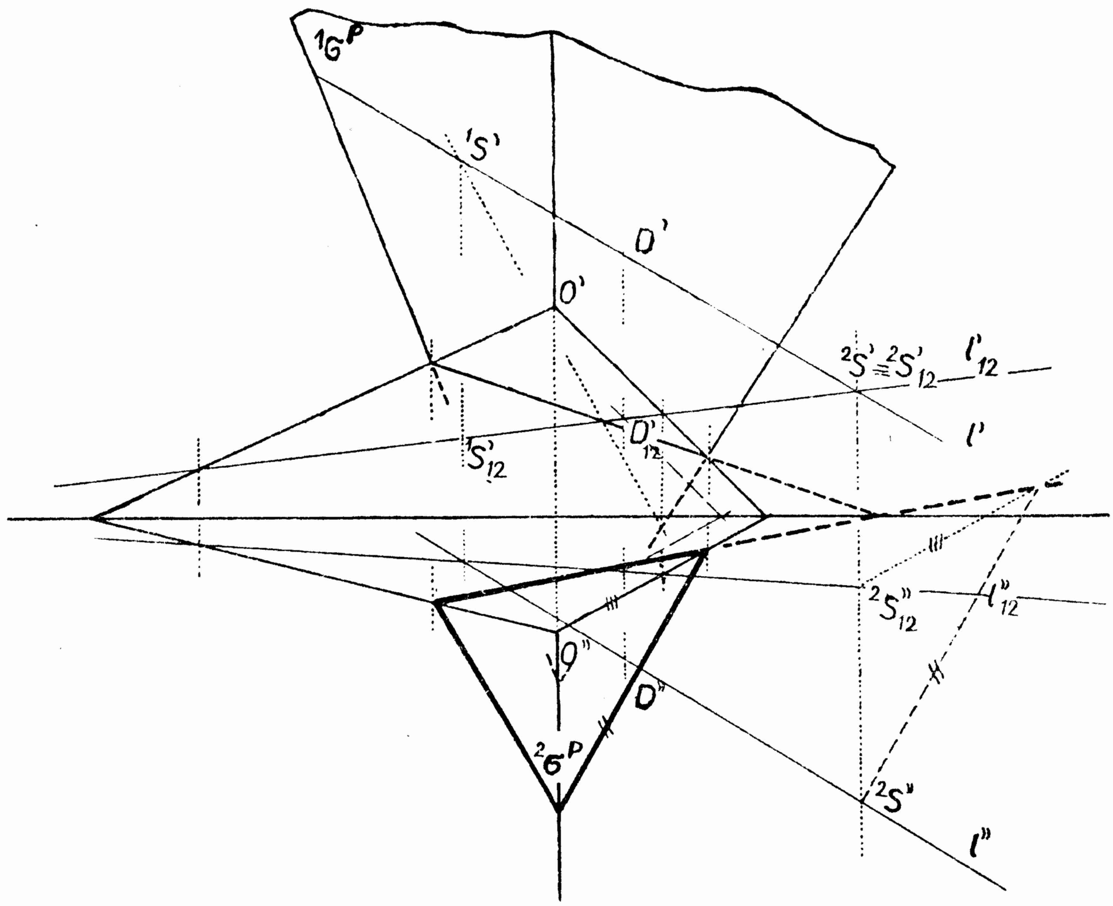
Riešenie: Určujúce body A, B, C, D sú dané združenými obrazmi. Použitím konštr. *4,1* určíme združené obrazy stopných bodov ${}^1S_{AD}$, ${}^1S_{BD}$, ${}^1S_{CD}$; ${}^2S_{AD}$, ${}^2S_{BD}$, ${}^2S_{CD}$, spojníc AD, BD, CD. Potom známymi konštrukciami z axonometrického premietania z $\mathbf{E}_3$ vieme určiť ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$ a ${}^2\sigma^{\mathbf{P}}$.

Priesečné priamky roviny ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$ (${}^2\sigma^{\mathbf{P}}$) so súradnicovými rovinami priestoru $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$ tvoria vždy trojuholník s vrcholmi na súradnicových osiach. O ich priesečnici sa s rovinou $({}^1x, {}^2x)$ sme už hovorili. V zobrazení priestoru **P** dvojicou stopných rovín ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$ a ${}^2\sigma^{\mathbf{P}}$ sú s'_{12} a s''_{12} združené obrazy tejto priamky (obr. 5).

Def. 6,2: *Priamky* ${}^1a^{\mathbf{P}} \equiv \mathbf{P} \cap \alpha'$; ${}^2a^{\mathbf{P}} \equiv P \cap \alpha''$ *nazývame axometrické stopy priestoru.*

Konštrukcia ${}^1a^{\mathbf{P}}$ a ${}^2a^{\mathbf{P}}$ je totožná s konštrukciou axonometrických stôp rovín ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$ a ${}^2\sigma^{\mathbf{P}}$.

Pre konštrukcie o priestore **P** najvhodnejšie zadanie je jeho určenie stopnými rovinami ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$ a ${}^2\sigma^{\mathbf{P}}$, alebo jednou stopnou rovinou a bodom. Určenie štyrmi nekomplanárnymi bodmi A, B, C, D používame menej.



Obr. 5.

Zaujímavé sú

Konštr. 6,2: *Určiť stopnú rovinu $^2\sigma^{\mathbf{P}}$ priestoru $\mathbf{P} \equiv ({}^1\sigma^{\mathbf{P}}, D)$.*

Riešenie: Je zrejmé z obr. 5.

Konštr. 6,3: *Priestor $\mathbf{P}$ je určený združenými obrazmi stopných rovín $^1\sigma^{\mathbf{P}}$ a $^2\sigma^{\mathbf{P}}$, priamka $p \subset \mathbf{P}$ dvoma združenými obrazmi p', p''_{12}. Určiť jej zvyšné obrazy (obr. 6).*

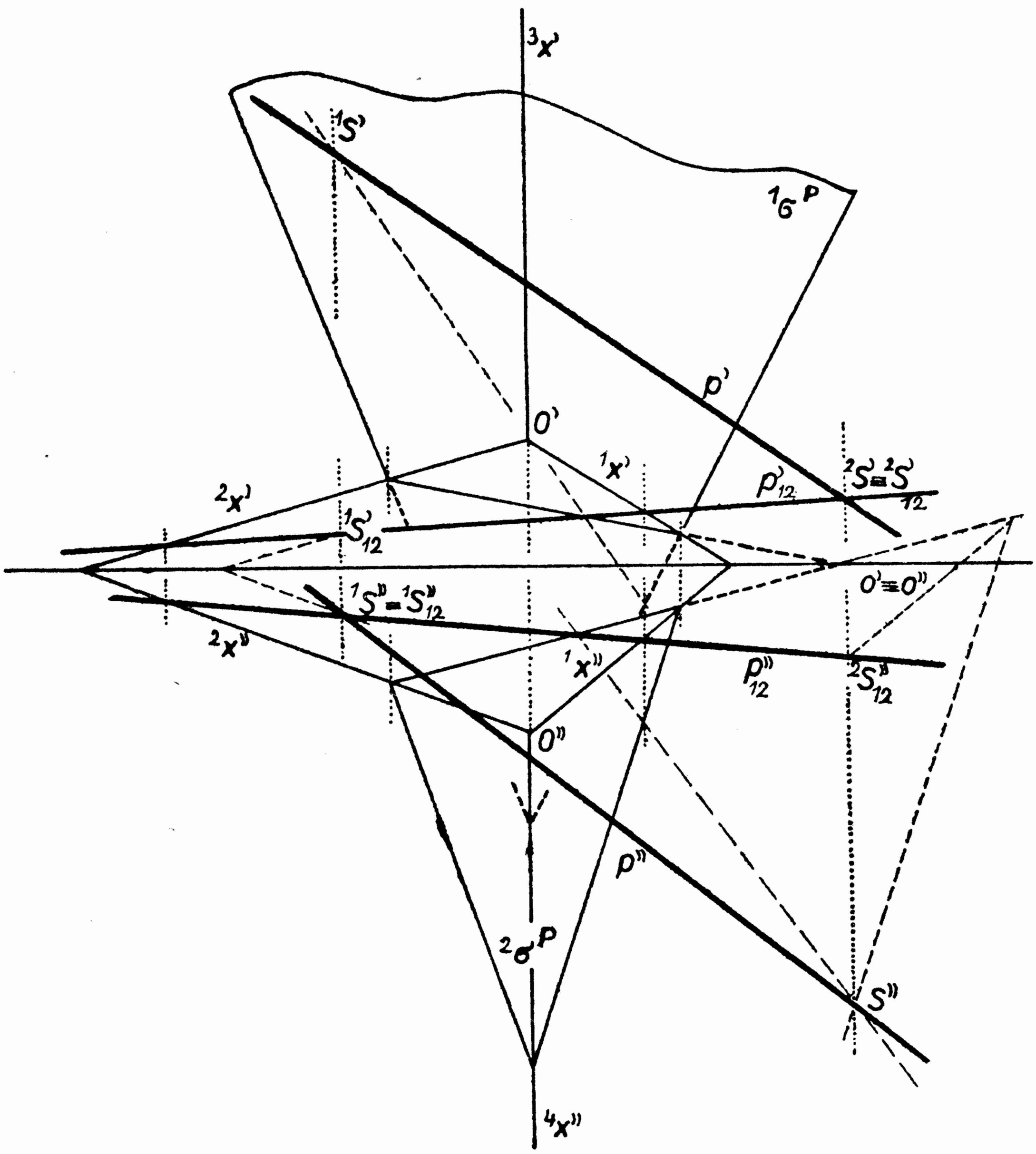
Riešenie: Dané obrazy p', p'_{12}, vzťahujú sa na priemetný priestor $\mathbf{E}'_3$. Priamka $p \equiv {}^1S{}^2S$, kde $^1S \equiv p \cap \mathbf{E}'_3$, $^2S \equiv p \cap \mathbf{E}''_3$. Určíme združené obrazy stopných bodov ^1S, ^2S, a tak aj zvyšné združené obrazy priamky. Tak pre ^1S platí: Obrazy $^1S'$, $^1S'_{12}$ dostávame ako obrazy priesečného bodu priamky p (danej v $\mathbf{E}'_3$ dvojicou p', p''_{12}) so stopnou rovinou $^1\sigma^{\mathbf{P}}$ známymi konštrukciami z $\mathbf{E}_3$. Ak odvodíme p''_{12}, je obraz $^1S''_{12} \equiv {}^1S''$ s ňou incidentný, jeden určujúci bod obrazu p'' priamky p. Pre stopný bod ^2S však platí, že ($^2S' \equiv {}^2S'_{12} \equiv$ $\equiv p' \cap p'_{12}$. Obraz $^2S''_{12} \in p''_{12}$. No pretože $^2S \equiv p \cap \mathbf{E}''_3$, $^2S \in \mathbf{P}$ a $^2\sigma^{\mathbf{P}} \equiv \mathbf{P} \cap \mathbf{E}''_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow {}^2S \in {}^2\sigma^{\mathbf{P}}$. Z obrazu $^2S''_{12}$ a z danej $^2\sigma^{\mathbf{P}}$ vieme známou konštrukciou určiť $^2S''$. Potom $p'' \equiv {}^1S''{}^2S''$.

Poznámka: Podobne by sme postupovali pri určení p dvojicami (p'', p''_{12}), alebo (p', p'').

Aplikovaním konštr. 6,3 vyriešime aj nasledujúce:

Konštr. 6,4: *V priestore $\mathbf{P} \equiv ({}^1\sigma^{\mathbf{P}}, {}^2\sigma^{\mathbf{P}})$ odvodiť zvyšné obrazy bodu $B \in \mathbf{P}$, ak je tento daný združenými obrazmi (B', B'_{12}).*

Riešenie: Stačí preložiť bodom B ľubovoľnú priamku $p \subset \mathbf{P}$. Zvolíme p', p'_{12} a zvyšné obrazy odvodíme *K. 6,3.*



Obr. 6.

Konštr. 6,5: V priestore $\mathbf{P} \equiv ({}^1\sigma^{\mathbf{P}}, {}^2\sigma^{\mathbf{P}})$ odvodiť zvyšné obrazy roviny $\varrho \subset \mathbf{P}$, je táto daná len dvojicami určujúcich stopných elementov ${}^1s''_{12} \equiv {}^1s''$, ${}^2s' \equiv {}^2s'_{12}$. (Obr. 7.)

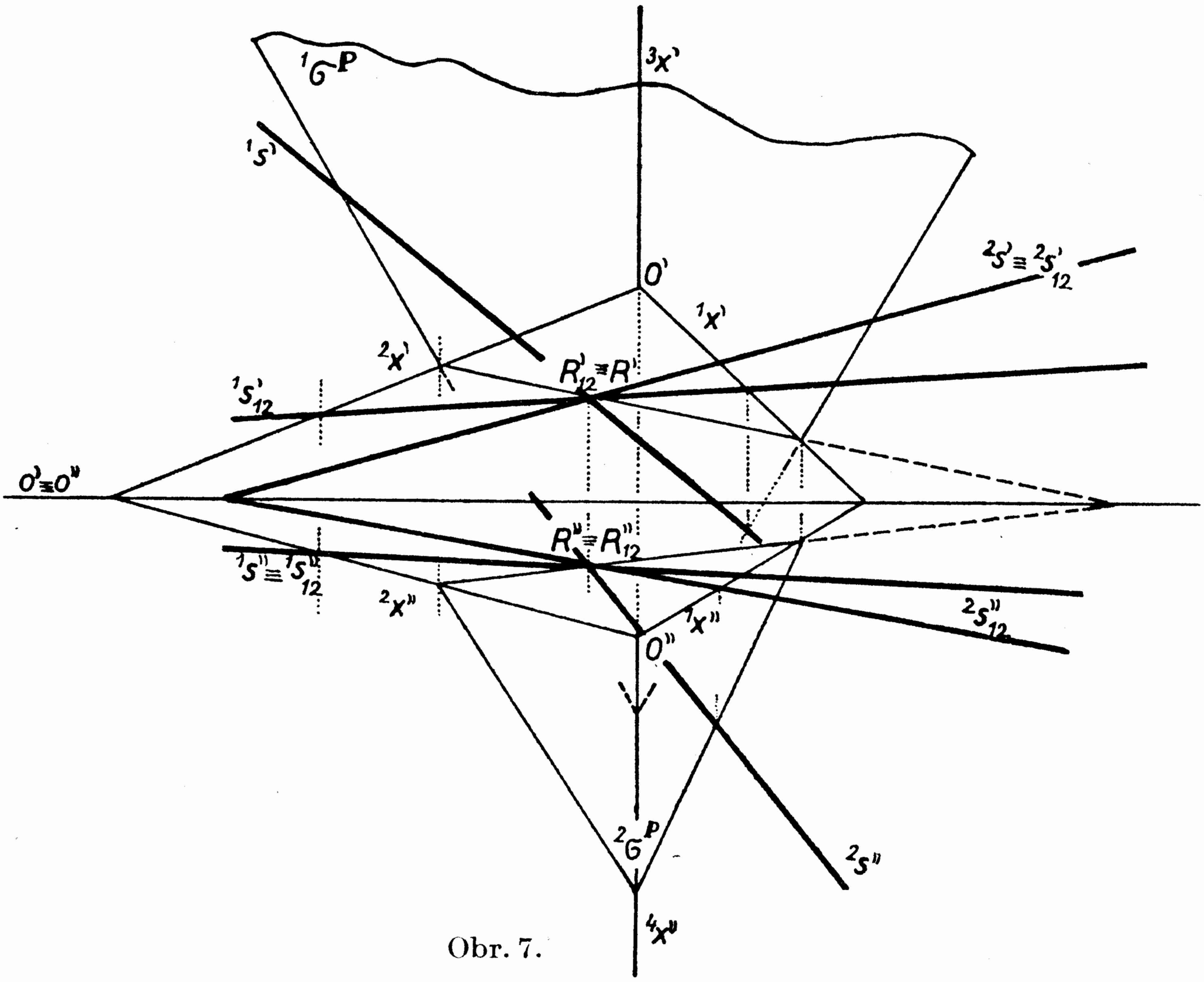
Riešenie: Nesmieme zabudnúť, že ${}^1s \cap {}^2s \equiv R \in ({}^1x, {}^2x)$, ale aj $R \in \varrho \subset \mathbf{P} \Rightarrow$ $\Rightarrow R \in s^{\mathbf{P}}$. Zvyšné obrazy ${}^1s'$, ${}^2s''$ určíme už známymi konštrukciami z $\mathbf{E}_3$ pri uvážení *Def. 5, 1* a *6,1.* Pre konštrukčné účely je dôležitá

Def. 6,3: *Priestory rovnobežné s priestormi* $\mathbf{E}'_3$, *resp.* $\mathbf{E}''_3$, *prenikajú daný* $\mathbf{P}$ *v hlavných rovinách prvej, resp. druhej osnovy. Priamky* ${}^1o \subset \mathbf{P}$, ${}^2o \subset \mathbf{P}$ *kolmé na hlavné roviny prvej, resp. druhej osnovy, sú odchylkové priamky priestoru* $\mathbf{P}$ *prvého a druhého druhu.*

Z uvedenej definície vyplýva

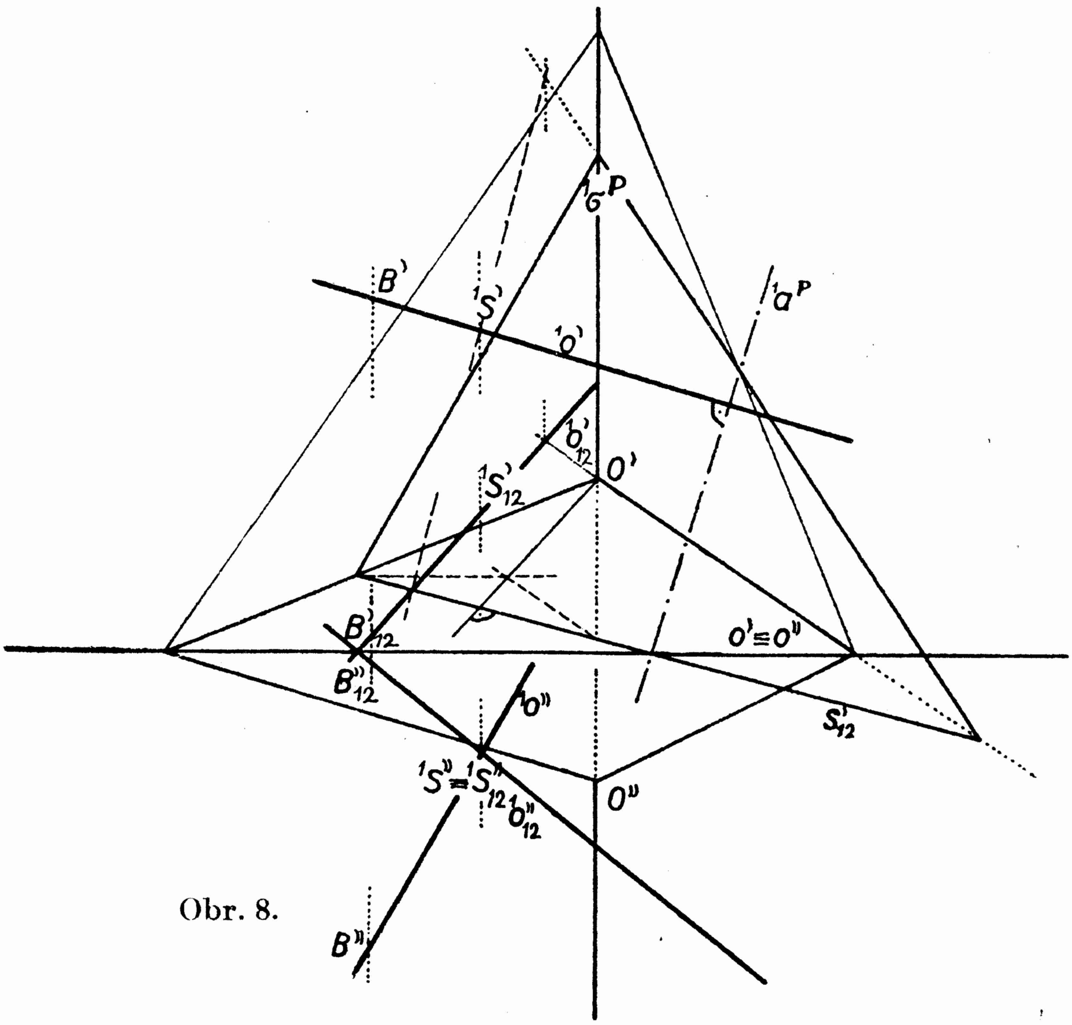
Veta 6,2: Pre združené obrazy odchýlkových priamok platí: ${}^1o' \perp {}^1a^{\mathbf{P}}$, ${}^1o'_{12} \perp s'_{12}$; ${}^2o'' \perp {}^2a^{\mathbf{P}}$, ${}^2o''_{12} \perp s''_{12}$.

Konštr. 6,6: Určiť združené obrazy odchýlkovej priamky ${}^1o$ idúcej bodom $B \in \mathbf{P}$ ak $\mathbf{P} \equiv (B, {}^1\sigma^{\mathbf{P}})$ a jej stopného bodu ${}^1S$. (Obr. 8.)



${}^1G^P$
${}^3x'$
${}^1s'$
O'
${}^2s' \equiv {}^2s'_{12}$
${}^1x'$
${}^2x'$
$R'_{12} \equiv R'$
${}^1s'_{12}$
$O' \equiv O''$
$R'' \equiv R''_{12}$
${}^1s'' \equiv {}^1s''_{12}$
${}^2x''$
${}^1x''$
O''
${}^2s''_{12}$
${}^2G^P$
${}^2s''$
${}^4x''$

Obr. 7.



${}^1G^P$
B'
${}^1S'$
${}^1a^P$
${}^1o'$
${}^1o'_{12}$
O'
${}^1S'_{12}$
B'_{12}
$O' \equiv O''$
B''_{12}
${}^1o''$
S'_{12}
${}^1S'' \equiv {}^1S''_{12}$
${}^1o''_{12}$
O''
B''

Obr. 8.

Riešenie: Podľa V . 6,2 je ${}^1o' \perp {}^1a^P$, ${}^1o'_{12} \perp s'_{12}$; ${}^1o''_{12}$ odvodíme. Určíme obrazy ${}^1S'$, ${}^1S'_{12}$ stopného bodu ${}^1S$ použitím ${}^1\sigma^P$ a obrazov ${}^1o'$, ${}^1o'_{12}$. Odvodíme ${}^1S'' \equiv {}^1S''_{12} \in {}^1o''_{12}$. Potom je už $B''{}^1S'' \equiv {}^1o''$.

Poznámka:

Priestor $\mathbf{P} \parallel \mathbf{E}'_3$, (resp. s $\mathbf{E}''_3$) určíme jedným bodom; priestor $\mathbf{P} \perp \mathbf{E}'_3$ (resp. $\perp \mathbf{E}''_3$) príslušnou stopnou rovinou. Ľahko skonštruujeme aj stopné elementy priestorov $\mathbf{P} \equiv (a.\ b)$, keď sú a, b disjunktné; $\mathbf{P} \equiv (A, \varrho)$, ak $A \notin \varrho$ a podobne.

O súvise s kótovanou — axonometrickou zobrazovacou metódou

7. Súvis s kótovano-axonometrickou metódou

O zobrazovacej kótovano-axonometrickej metóde (v ďalšom $K—A$-metóda) v $\mathbf{E}_4$ sme písali v práci [4]. V ďalšom si ukážeme, ako súvisí táto metóda s uvedenou ortogonálne-axonometrickou metódou (v ďalšom $O—A$-metóda).

$K—A$ zobrazovacia metóda v $\mathbf{E}_4$ sa vyznačovala tým, že v priemetnom priestore $\mathbf{E}^p_3 \equiv [O;\ {}^1x,\ {}^2x,\ {}^3x]$ ($\equiv \mathbf{E}'_3$) sme použili ortogonálnu axonometriu pre zobrazovanie bodov tohto priestoru na axonometrickú priemetňu $\alpha \equiv \alpha'$. K axonometrickému obrazu napr. B^α bodu B sme pripisovali príslušnú kótu $(= {}^4x_B)$! Porovnaním s $O — A$ zobrazovacou metódou vidíme, že v $\mathbf{E}'_3$ ($\equiv \mathbf{E}^p_3$) pracujeme tak isto s ortogonálnou axonometrickou metódou. Teda $B' \equiv B^\alpha$. Kótu však nepripisujeme, ale vieme ju ($= {}^4x_B$!) známymi metódami určiť. Jej grafický obraz je v úsečke $B''_{12}B''$. Konštrukcie v $O — A$ metóde môžeme teda zostrojovať tak ako pri $K—A$ metóde, ak $\mathbf{E}^p_3 \equiv \mathbf{E}'_3$, a nepripísané kóty bodov ($= {}^4x$ — súradnice) graficky určujeme zo zobrazenia v priestore $\mathbf{E}''_3$.

O $K—A$ metóde sme mohli uvažovať aj takto: Za premietajúci priestor $\mathbf{E}^p_3$ zvolíme priestor $[O;\ {}^1x,\ {}^2x,\ {}^4x]$ ($\equiv \mathbf{E}''_3$) a za priemetňu rovinu α''. Potom k axonometrickému obrazu $B^{\alpha''}$ na túto rovinu by sme pripísali kótu ${}^3x_B$! Metódy a konštrukcie riešenia jednotlivých problémov sa riešia ako v prípade $\mathbf{E}^p_3 \equiv \mathbf{E}'_3$.

Hovorili sme, že v $O—A$ zobrazovacej metóde môžeme uvažovať tak, že vezmeme $\alpha''_3 \equiv \alpha$ za priemetňu a α', otočíme do α. Pre súvis s $K—A$ metódou máme: $\mathbf{E}''_3 \equiv \mathbf{E}^p_3$, $B'' \equiv B^{\alpha''}$ a nepripísanú kótu ${}^3x_B$ môžeme zase určiť ako skutočnú veľkosť úsečky $B'B'_{12}$ v priestore $\mathbf{E}'_3$. Teda konštrukcie v $O—A$ metóde môžeme znova robiť v obrazoch priestoru $\mathbf{E}''_3$ ako v $K—A$ zobrazovacej metóde, pričom kóty graficky určujeme zo zobrazenia v priestore $\mathbf{E}'_3$.

Vzhľadom aj na ďalšiu vlastnosť, ktorú medzi hlavnými priemetmi hrá združovacia os, možno vysloviť konštrukčne dôležitý poznatok vo

Vete 7,1: *V hlavných združených obrazoch útvarov priestoru* $\mathbf{E}_4$ *v* $O—A$ *zobrazovacej metóde v* $\mathbf{E}_4$ *možeme konštrukcie robiť podľa zásad* $K—A$ *zobrazovacej metódy* [4], *a to pre každý obraz osobitne, pričom potrebnú kótu* ${}^3x$, *resp.* ${}^4x$ *určujeme graficky zo zvyšného obrazu. Obidva tieto obrazy sú združené kolmo podľa združovacej osi* $o' \equiv o''$.

Treba poznamenať, že tu *ide o podobný súvis* medzi dvoma zobrazovacími metódami *v* $\mathbf{E}_4$ *ako v* $\mathbf{E}_3$ *medzi Mongeovou projekciou a kótovaným premietaním.*

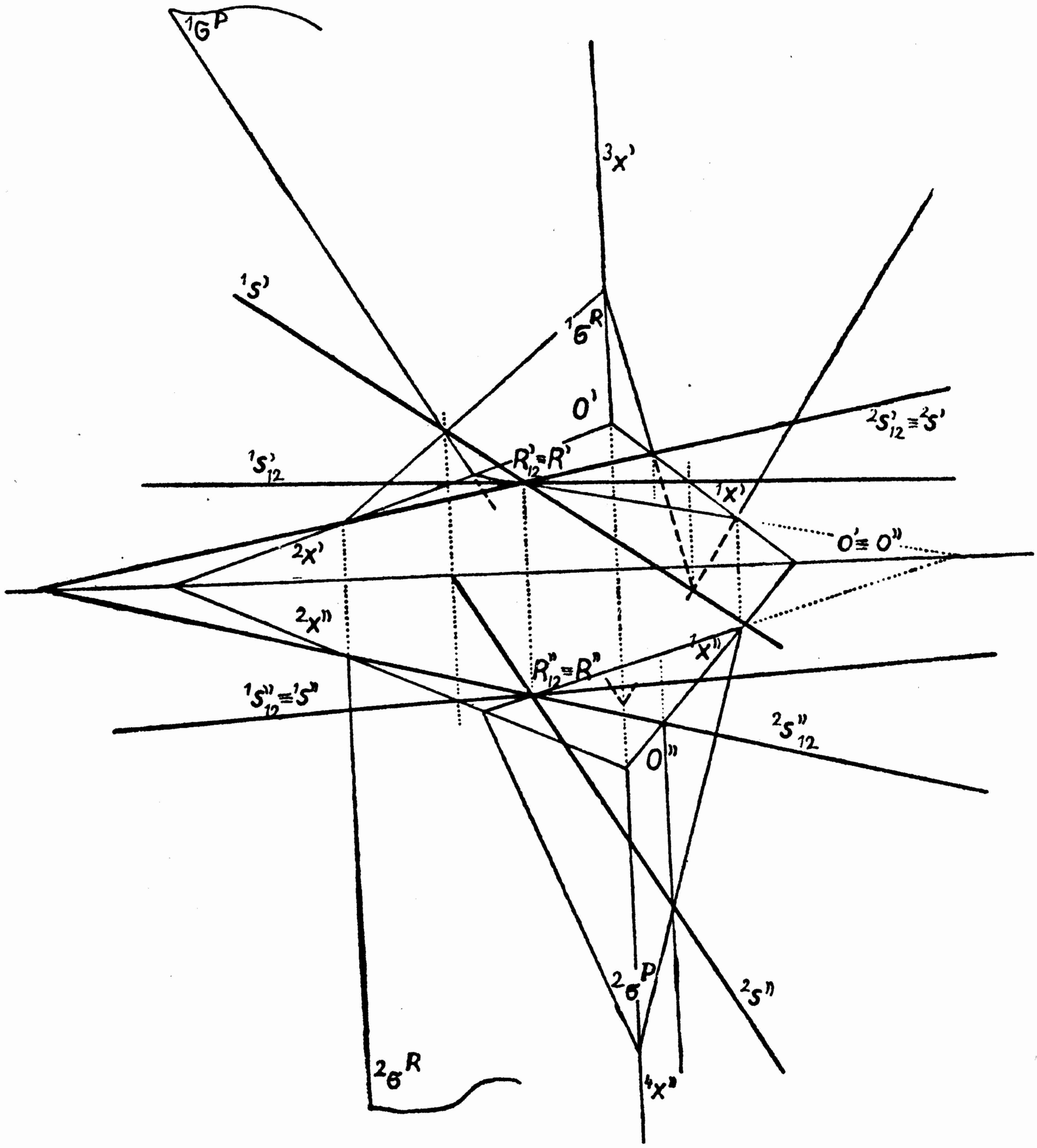
Podobne ako v E_3 pri uvedenom súvise aj v E_4 platí, že určité konštrukcie najmä mnohé riešiace problémy incidencie a koincidencie sa výhodnejšie riešia použitím združených obrazov útvaru, kým pri metrických problémov s výhodou používame prevod $O-A$ metódy na $K-A$ metódu podľa *V . 7,1.*

IV.

Vzájomná poloha základných útvarov v E_4

8. Incidencia a koincidencia útvarov

V predešlom sme sa už oboznámili s riešením niektorých základných incidenčných vzťahov, ak $B \in p$; $B \in \varrho$; $p \subset \varrho$; $B \in \mathbf{P}$; $p \subset \mathbf{P}$; $\varrho \subset \mathbf{P}$. V ďalšom sa budeme zapodievať problémami určovania preniku dvoch základných útvarov.



Obr. 9.

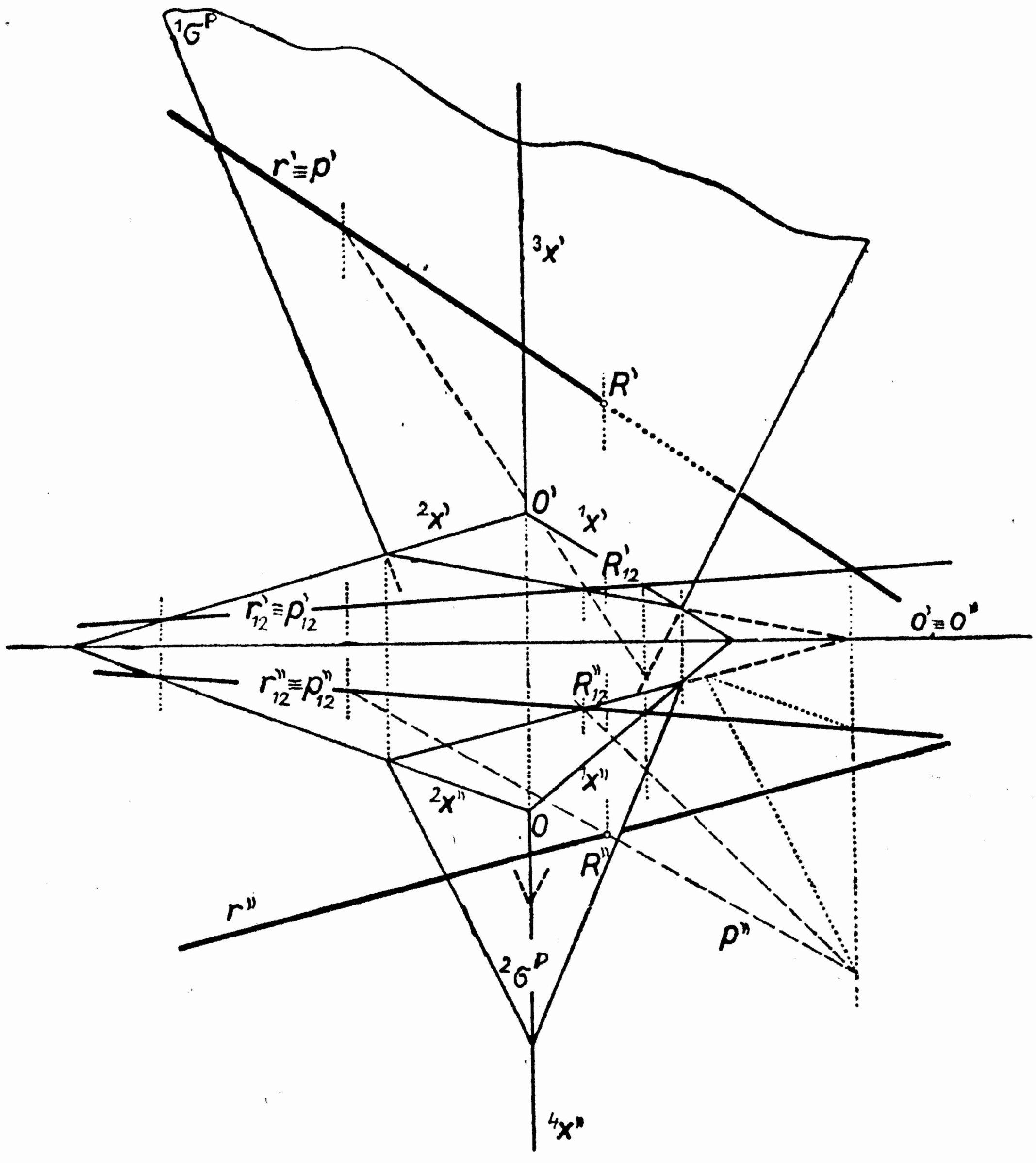
Uvedieme niekoľko základných koincidenčných úloh.

Konštr. 8,1: Určiť prenikovú rovinu $\varrho \equiv \mathbf{P} \cap \mathbf{R}$ (obr. 9).

Riešenie: Obidva priestory určíme ich stopnými rovinami. Potom zrejme platí: ${}^1\sigma^{\mathrm{P}} \cap {}^1\sigma^{\mathrm{R}} \equiv {}^1s$; ${}^2\sigma^{\mathrm{P}} \cap {}^2\sigma^{\mathrm{R}} \equiv {}^2s$; potom $\varrho \equiv ({}^1s, {}^1s)$ a ${}^2s$, ${}^2s$ sú stopné priamky hľadanej roviny. Ich združené obrazy vieme určiť.

Konštr. 8,2: Určiť $R \equiv r \cap \mathbf{P}$ (obr. 10).

Riešenie: Problém vyriešime *metódou krycej priamky*. Zvolíme $p' \equiv r'$, $p'_{12} = r'_{12}$, pričom žiadame, aby $p \subset \mathbf{P}$. Použitím konštr. *6,3* určíme p'', p''_{12}. Potom $R'' \equiv p'' \cap r''$. Ďalšie obrazy bodu R už ľahko odvodíme.



Obr. 10.

Dvojnásobným opakovaním konštr. *8,2* vyriešime aj $r \equiv \varrho \cap \mathbf{P}$. K riešeniu $S \equiv \varrho \cap \bar{\varrho}$ se ešte vrátime, ako aj k určeniu $s \equiv \varrho \cap \bar{\varrho}$, $S \equiv r \cap \varrho$, ak tieto ležia v lineárnom priestore $\mathbf{P}$.

9. Rovnobežnosť

O združených obrazoch rovnobežných priamok sme hovorili vo vete *4,3*. Pri dôkaze tejto vety i ďalších používame z $\mathbf{E}_\iota$ známu

Vetu 9,1: *Dva totálne rovnobežné priestory* $\mathbf{E}_k \parallel \overline{\mathbf{E}}_k$ *v* $\mathbf{E}_\iota$ $(k \leq n - 1)$ *sú ľubovoľným priestorem* $\mathbf{E}_m$ $(m \leq n - 1)$ *preťaté v priestoroch* $(k + m - n)$ — *rozmerných, ktoré sú navzájom tiež totálne rovnobežné.*

Dôsledek tejto vety je

Veta 9,2: *Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou preto, aby boli dva priestory* $(\mathbf{P} \mathrel{+\!\!\!\!=} \overline{\mathbf{P}})$, *resp. dve roviny* $(\varrho \mathrel{+\!\!\!\!=} \overline{\varrho})$ *vzájomne totálne rovnobežné, je, aby boli súhlasné obrazy ich stopných elementov vzájomne rovnobežné!*

Uvedená veta sa v našom premietaní geometrizuje takto: Ak platí $\mathbf{P} \parallel \overline{\mathbf{P}}$, tak je nevyhnutelné a stačí, aby ${}^1\sigma^{\mathbf{P}} \parallel {}^1\sigma^{\overline{\mathbf{P}}}$; ${}^2\sigma^{\mathbf{P}} \parallel {}^2\sigma^{\overline{\mathbf{P}}}$, čo sa prejaví v zobrazeniach $\mathbf{E}_3'$, a $\mathbf{E}_3''$, že stopné trojúholníky rovín ${}^1\sigma$, resp. ${}^2\sigma$, sú homotetické. Rovnobežné sú aj súhlasné združené obrazy axonometrických stôp.

Podobne ak $\varrho \parallel \overline{\varrho}$, tak je nevyhnutné a stačí, aby ${}^1s^\varrho \parallel {}^1s^{\overline{\varrho}}$, ${}^2s^\varrho \parallel {}^2s^{\overline{\varrho}}$. Splňujú obrazy stopných priamok V. 4,3b.

Základnou konštrukciou tu zostávajú

Konštr. 9,1: *Daným bodom B položiť priamku, rovinu, resp. priestor totálne rovnobežný s danou priamkou, rovinou, resp. priestorom.*

Riešenie týchto konštrukcií nerobí ťažkosti. Použitím tejto konštrukcie vieme riešiť rad *ďalších úloh*, ako: priamkou p položiť priestor rovnobežný s danou rovinou; rovinou proložiť priestor 1/2-rovnobežný s dvoma danými rovinami incidentnými s jediným priestorom a hodobne. Najmä problémy $\dfrac{m}{n}$ — rovnobežnosti a rovnobežnosti $\mathbf{E}_k \parallel \mathbf{E}_p$ $(k < p)$ poskytujú rad zaujímavých riešení.

V.

Metrické vzťahy medzi základnými útvarmi v $\mathbf{E}_4$

10. Kolmosť

Pri problémoch kolmosti dvoch útvarov v $\mathbf{E}_4$ pokladáme za známe nasledujúce výsledky:

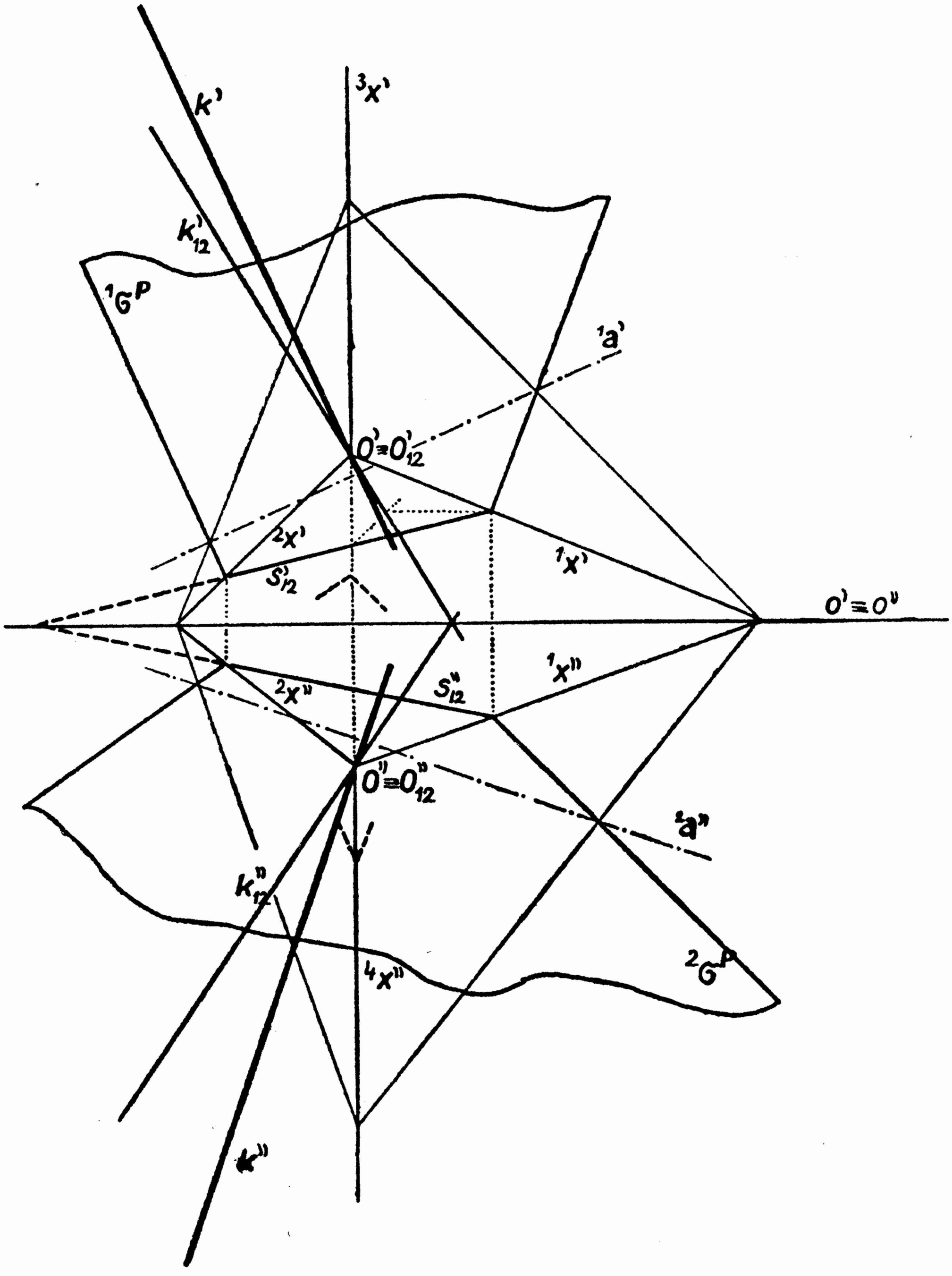
K danému priestoru $\mathbf{P}$ existuje jediný kolmý smer k. Smer k má tú vlastnosť, že je kolmý na každý smer z priestoru $\mathbf{P}$. Je však potrebné a stačí, aby bol kolmý na tri lineárne nezávislé smery z priestoru $\mathbf{P}$. Teda k je kolmý aj na každú rovinu $\varrho \subset \mathbf{P}$. Obrátene, na danú priamku k jestvuje jediný kolmý trojsmer $\mathbf{P}$.

K danej rovine ϱ je totálne kolmý jediný dvojsmer ϱ^N. Dostaneme ho tak, že rovinou ϱ položíme dva ľubovoľné priestory $\mathbf{P} \mathrel{+\!\!\!\!=} \mathbf{P}'$, určíme smery k, k' kolmé na tieto. Potom je dvojsmer $\varrho^N \equiv (k, k')$. Všetky dvojsmery $\alpha \equiv (k, a)$, $\beta \equiv (k', b)$, kde $a \mathrel{+\!\!\!\!\parallel} k$, $b \mathrel{+\!\!\!\!\parallel} k$. sú len dvojsmery 1/2-kolmé na danú rovinu ϱ.

Daným bodom B možno položiť jedinú kolmicu $k \perp \mathbf{P}$, jedinú totálne kolmú rovinu $\varrho^{N} \perp \bar{\varrho}$, jediný priestor $\mathbf{P} \perp k$. (lit. [3]).

O priamke k kolmej na daný priestor platí

Veta 10,1: *Nevyhnutná a postačujúca podmienka preto, aby* $k \perp \mathbf{P}$, *je, aby* $k \perp {}^1a$, $k \perp {}^2a$, $k \perp s_{12}$, kde ${}^1a \equiv \mathbf{P} \cap \alpha$, ${}^2a \equiv \mathbf{P} \cap \alpha''$, $s_{12} = \mathbf{P} \cap ({}^1x, {}^2x)$.



Obr. 11.

Dôkaz: Združené obrazy priamky k sú kolmé na tri lineárne nezávislé priamky priestoru $\mathbf{P}$; preto je $k \perp \mathbf{P}$. Platí aj obrátene. Predpokladali sme, že $\mathbf{P}$ neobsahuje združovaciu os $o' \equiv o$.

Konštr. 10,1: *Bodom* O *viesť* $k \perp \mathbf{P}$ *(obr. 11).*

Riešenie: Vzhľadom na výsledok *V. 10,1* predpokladajme, že **P** je určený obrazmi stopných rovín ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$, ${}^2\sigma^{\mathbf{P}}$. Skonštruujeme axonometrické stopy ${}^1a$, ${}^2a$ priestoru **P**. Stačí určiť len obrazy ${}^1a'$, ${}^2a''$ (známymi metódami z $\mathbf{E}_3$). Pretože tieto ležia v priemetni, pravé uhly sa v priemetoch zachovávajú, preto $k' \perp {}^1a'$, $k'' \perp {}^2a''$. Pri danom zadaní **P** je už s'_{12} daná. Použitím známej konštrukcie výšok trojuholníka z $\mathbf{E}_3$ vieme určiť $k'_{12} \perp s'_{12}$ a z toho hneď $k''_{12} \perp s''_{12}$. Ako vieme z axonometrického zobrazovania z $\mathbf{E}_3$: (k', k'_{12}), sú združené obrazy priamky $k \perp {}^1\sigma^{\mathbf{P}}$ a (k'', k''_{12}) zase združené obrazy priamky $k \perp {}^2\sigma^{\mathbf{P}}$. Zrejme $k \perp \mathbf{P}$ a $(k', k'', k'_{12}, k''_{12})$ sú preto združené obrazy hľadaného kolmého smeru na daný priestor.

Aplikovaním tejto konštrukcie vieme určiť aj $\varrho^N \perp \varrho$, $\mathbf{P}^N \perp k$, riešiť ďalšie problémy o ortogonálnych priemetoch jedného útvaru na druhý, ako aj problémy osí disjunktných útvarov atď.

11. Skutočná veľkosť rovinného útvaru

Jednou zo základných metrických konštrukcií je

Konštr. 11,1: *Určenie skutočnej veľkosti úsečky AB.*

Riešenie: Postačí *Konštr. 2,1* a *obr. 2* z [4] aplikovať pre niektorý hlavný priemet s použitím *Vety 7,1.* Na *obr. 12* sú obidve zhodné riešenia, pričom dostávame aj obrazy stopných bodov priamky $p \equiv AB$.

Konštr. 11,2: *Určiť skutočnú veľkosť obrazca (napr. $\triangle ABC$) v rovine ϱ.*

Riešenie: Trojuholník ABC v rovine ϱ nech je daný združenými obrazmi. Takto je aj rovina určená. Aby sme určili skutočnú veľkosť $\triangle ABC$, treba rovinu ϱ stotožniť s priemetňou α. Robíme to **metódou dvojnásobne afinnej transformácie.** (Pozri *Konštr. 3,2* a *obr. 4* [4].) Metódu použijeme pre jeden z hlavných priemetov s použitím *V. 7,1.* Pre zhodnosť riešenia konštrukčne neriešime.

Obráteným postupom, túto konštrukciu využijeme na *zostrojovanie združených obrazov rovinných obrazcov predpísaných vlastností.* Tak by sme vedeli zostrojiť obrazy pravidelných mnohouholníkov, kružnice v danej rovine a pod.

Uvedenú konštrukciu použijeme na vyriešenie ďalšej v metrických problémoch dôležitej

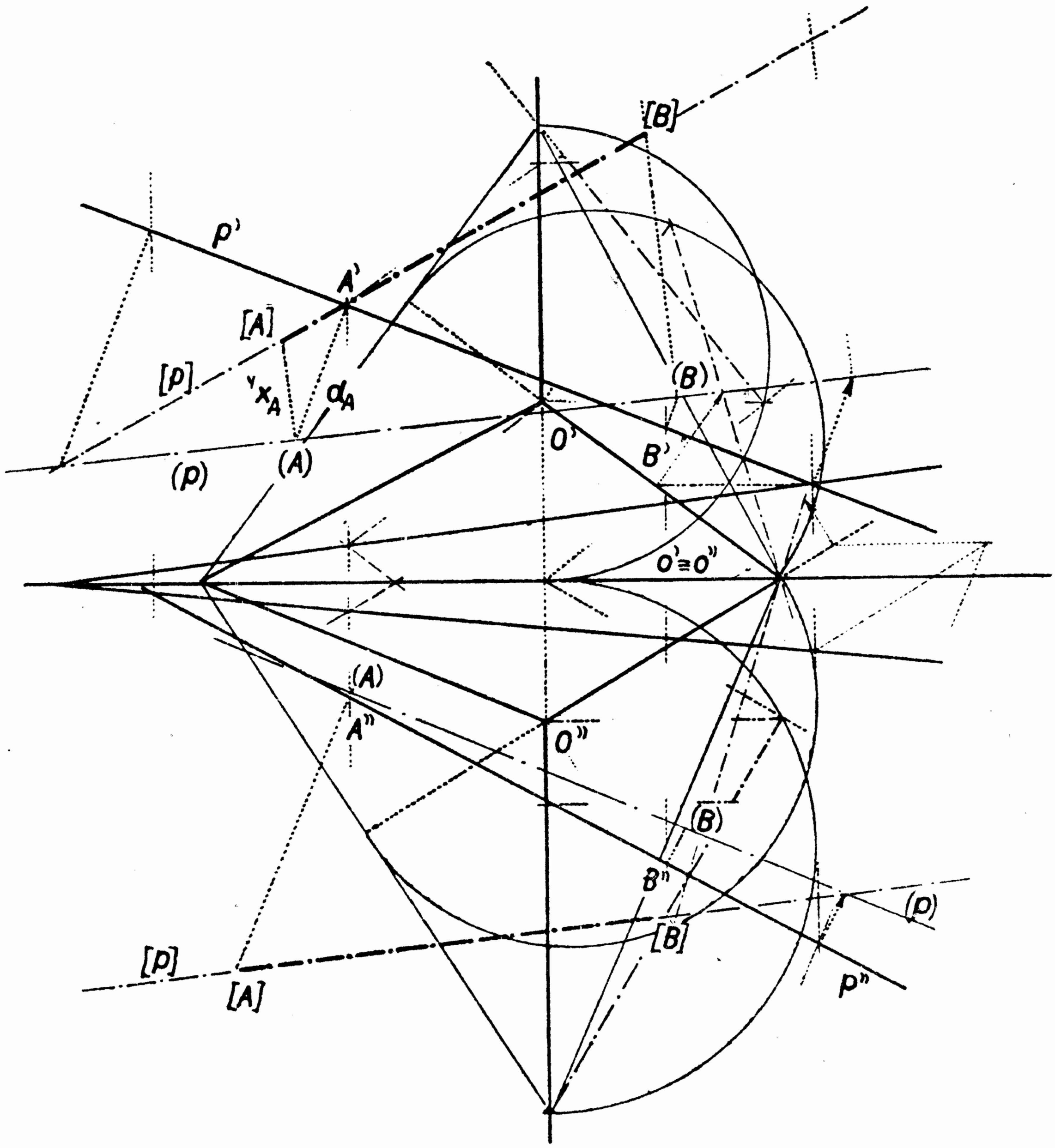
Konštr. 11,3: *Určiť uhol dvoch rôznobežných priamok p, q.*

Riešenie: Dané rôznobežné priamky p, q určia rovinu ϱ. Aplikovaním *Konštr. 11,2* vieme ju stotožniť s priemetňou α; potom $\sphericalangle\, [p]\, [q]$ je veľkosť hľadaného uhla.

Touto konštrukciou budeme riešiť celý *rad ďalších, ako* určenie uhla dvoch disjunktných priamok, uhla a priestoru **R**, zvyšného uhla dvoch *2/3*-rovnobežných priestorov, uhlov dvoch rovín atď.

12. Otáčanie a sklápanie priestoru P do priemetného priestoru

Často máme riešiť rôzne problémy týkajúce sa priestoru **P**, ktorý nie je priemetným priestorom. Napr. určenie $B \dashv p$, $B \dashv \varrho$, $R \equiv p \cap \varrho$ a podobne, ak sú zúčastnené útvary v jedinom priestore; zostrojiť združené obrazy hra-

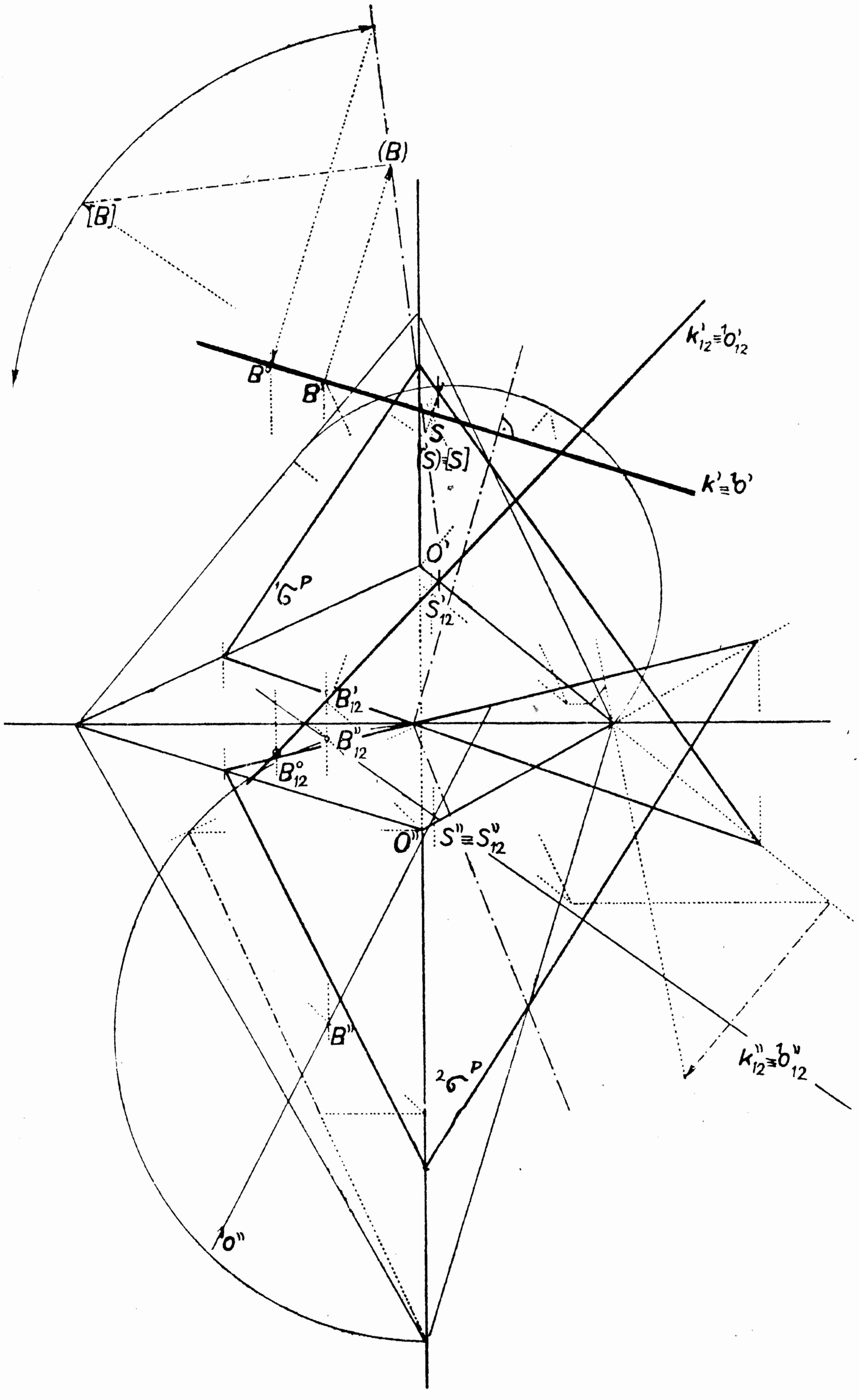


Obr. 12.

nola, ihlana, valca, kužeľa, gule, pravidelných mnohostenov, ktoré ležia v **P** atď. Pri riešení týchto úloh je potrebné **P** stotožniť s priemetným priestorom $\mathbf{E}_3'$, resp. $\mathbf{E}_3''$, v ktorom problém známymi metódami z $\mathbf{E}_3$ vyriešime a ak je potrebné, výsledok prenieseme späť do **P**. Robíme to *metódou otáčania alebo sklápania priestoru* **P** *do* niektorého *priemetného priestoru.*

Def. 12,1: *Ak je priestor* **P** *k priemetnému priestoru položený všeobecne, hovoríme o otočení priestoru* **P** *do priemetného priestoru. Ak je* **P** *kolmý na priemetný priestor, hovoríme o sklápaní do priemetného priestoru.*

Najskôr si všimneme *otáčanie*. Pri tomto platia tieto zásady: Každý bod $B \in \mathbf{P}$ sa otáča po kružnici v rovine totálne kolmej na príslušnú stopnú rovinu. Polomer otáčania sa rovná dĺžke $B\,S$, resp. B^2S príslušnej odchýlkovej priamky idúcej bodom B, ak ^1S, resp. ^2S je jej stopný bod. Medzi útvarom v **P** a jeho otočenou polohou do priemetného priestoru je *priestorovo-afinný vzťah.* Stopná rovina $^1\sigma^{\mathbf{P}}$, resp. $^2\sigma^{\mathbf{P}}$ je *samodružnou rovinou tejto afinity.* V zobrazeniach


(B)
[B]
B'
S
(S)≡[S]
O'
$k'_{12} \equiv {}^1o'_{12}$
$k' \equiv o'$
S'_{12}
B'_{12}
B''_{12}
B^0_{12}
O''
$S'' \equiv S''_{12}$
B''
$k''_{12} \equiv {}^1o''_{12}$
$^1o''$

Obr. 13.

združených útvarov v O—A zobrazovacej metóde sa afinný vzťah tak isto zachováva. Je určená samodružnou rovinou ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$, resp. ${}^2\sigma^{\mathbf{P}}$ a obrazmi dvojicou korešpondujúcich bodov B a ${}^\circ B$, kde ${}^\circ B$ je otočená poloha bodu B do príslušného premietajúceho priestoru.

Konštr. 12,1: *Otočiť priestor* $\mathbf{P}$ *do priemetného priestoru* $\mathbf{E}'_3$ *(obr. 13).*

Riešenie: Nech $\mathbf{P} \equiv (B, {}^1\sigma^{\mathbf{P}})$, pričom $B \notin \mathbf{E}'_3$. Zostrojíme obrazy odchýlkovej priamky ${}^1o$ idúcej bodom B (Konštr. 6,5) a jej stopného bodu ${}^1S$. Bod ${}^1S \in {}^1\sigma^{\mathbf{P}}$; preto pri otáčaní priestoru $\mathbf{P}$ do $\mathbf{E}'_3$ je samodružným bodom. Polomer otáčania bodu B určíme sklopením roviny $\varkappa^B$ totálne kolmej na α do α. Určíme najskôr $({}^1o) \equiv (B)({}^1S)$, a to použitím vzdialenosti $B_0 \dashv \alpha$, ${}^1S_0 \dashv \alpha$, a potom $[{}^1o] = (B)({}^1S)$, a to použitím vzdialenosti $B_0 \dashv \alpha$, ${}^1S_0 - \alpha$, a potom $[{}^1o] = [B][S]$, kde $\overline{(B)[B]} = {}^4x_B$, $({}^1S) \equiv [{}^1S]$, lebo ${}^4x_S = 0$. Dĺžka $[B][{}^1S]$ už polomer otáčania bodu B. (Pozor celá konštrukcia sa robí v rovine $\varkappa$, ktorá je sklopená do α). Z preotočeného $[{}^\circ B] \in [o]$ odvodíme $[{}^\circ B'] \in ({}^1o)$, a teda aj ${}^\circ B'$, ako aj ${}^\circ B'_{12}$. Obrazy ${}^\circ B'$, ${}^\circ B'_{12}$ sú už v $\mathbf{E}'_3$.

Treba pripomenúť, že ide o priestorovú afinitu o samodružnej rovine ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$, preto stopné elementy útvarov na ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$ sú samodružné. Smer afinity v obrazoch je v smere ${}^1o$.

Otáčanie $\mathbf{P}$ do $\mathbf{E}''_3$ je zrejmé.

Ak je $\mathbf{P}$ kolmý na priemetný priestor $\mathbf{E}'_3$, tak je daný svojou stopnou rovinou. Pri stotožnení $\mathbf{P}$ s priemetným priestorom $\mathbf{E}'_3$ priestor $\mathbf{P}$ *sklápame*. Nezabudneme, že príslušná odchylková priamka má za obrazy ${}^1o'$, ${}^1o'_{12}$ len body. Ak napr. uvažujeme, že $\varrho \subset \mathbf{P}$, vtedy sklápanie $\mathbf{P}$ do $\mathbf{E}'_3$ a zostrojenie sklopenej polohy roviny ϱ sa prakticky vykoná ako *konštr. 11,2*

Podobne postupujeme pri sklopení $\mathbf{P}$ do $\mathbf{E}''_3$.

VI.

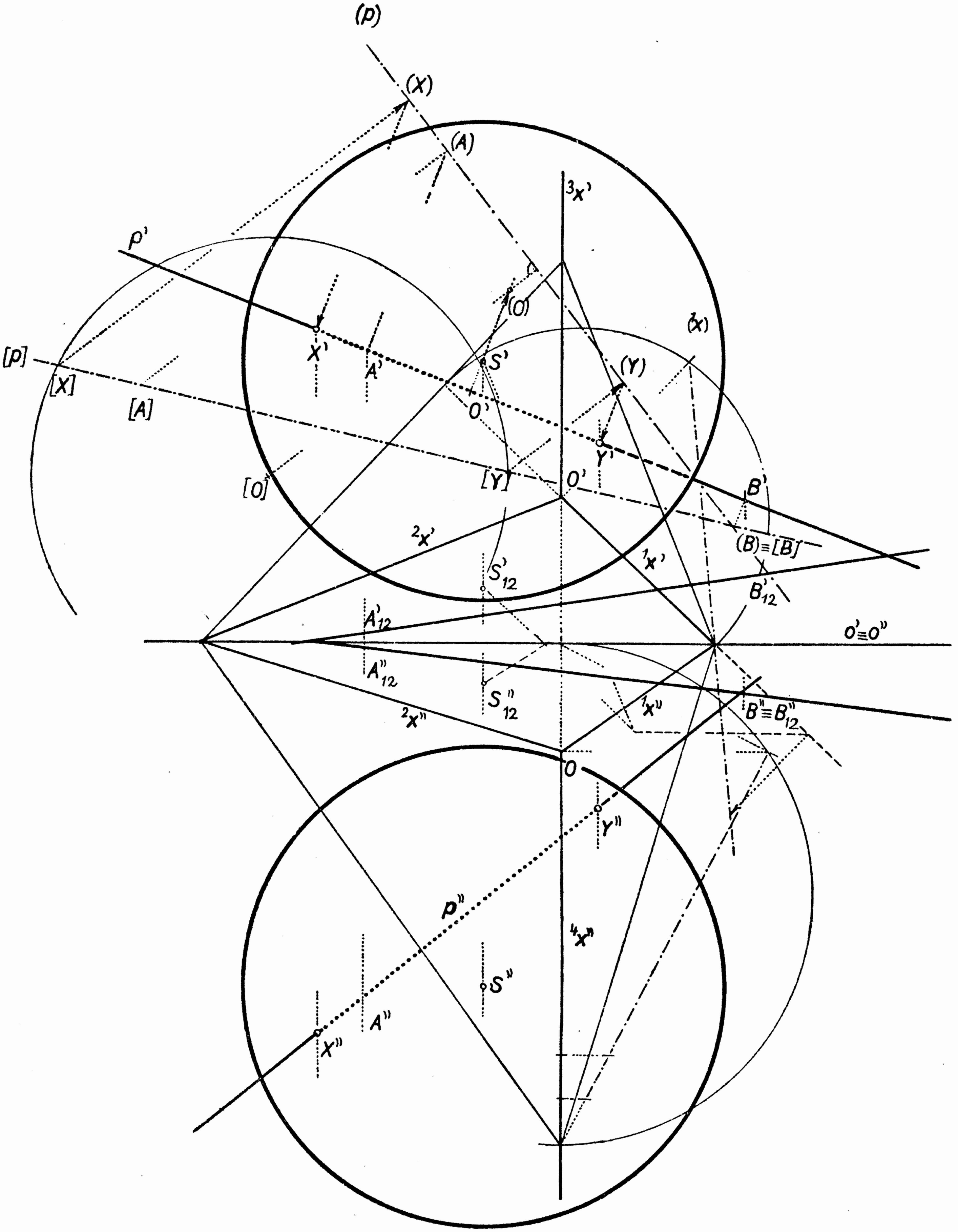
Hypersféra

13. Dve úlohy o hypersfére

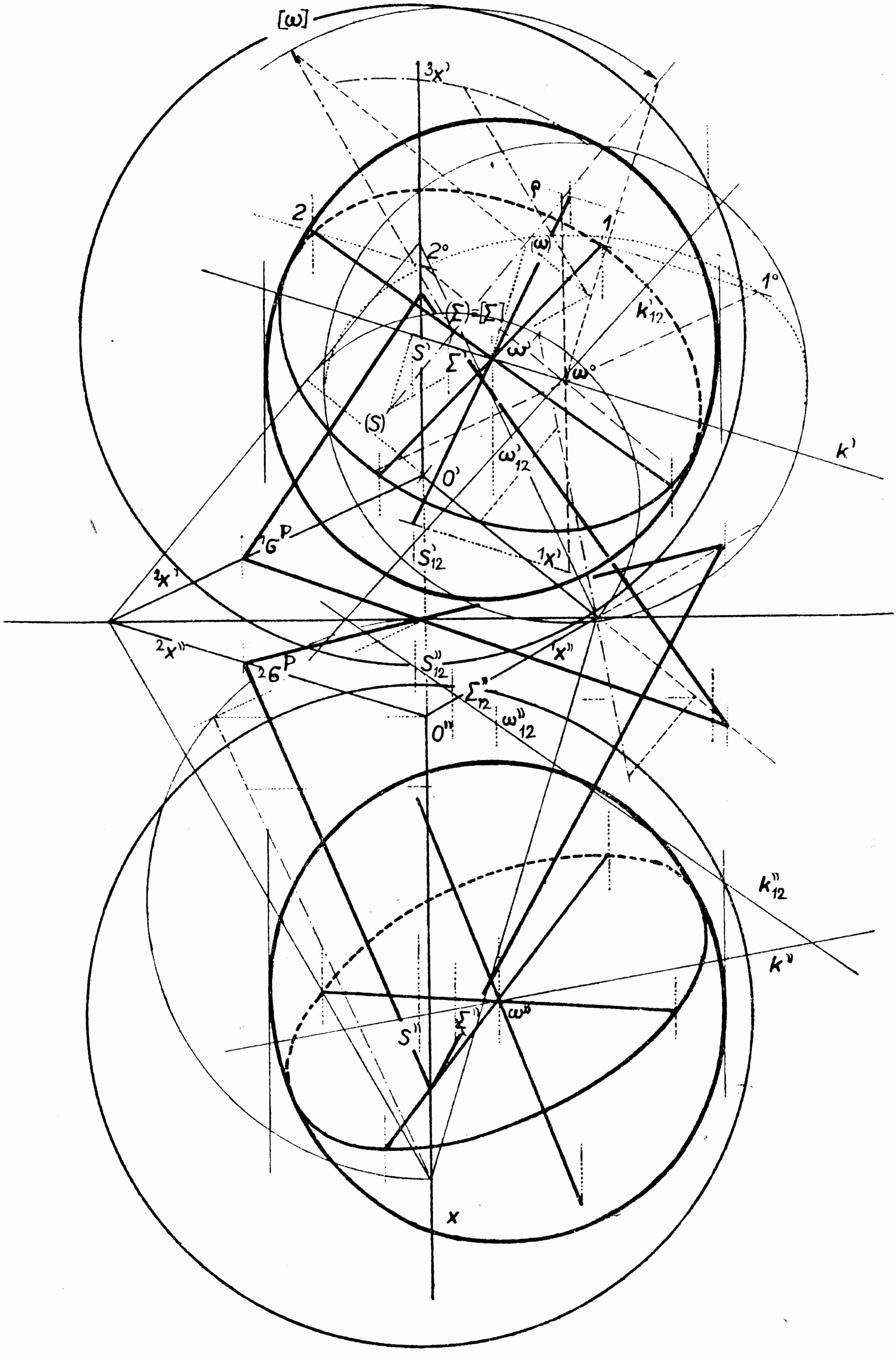
Záverom riešime konštrukčne dve aplikácie uvedených základných konštrukcií v ortogonálno-axonometrickej zobrazovacej metóde v $\mathbf{E}_4$. Vyriešime dva problémy o hypersfére $\mathbf{G}$. Guľová nadplocha o rovnici

$$ {}^1x^2 + {}^2x^2 + {}^3x^2 + {}^4x^2 = r^2 $$

patrí medzi stredové trojdimenzionálne hyperkvadriky (pozri [5]). Nadplocha $\mathbf{G}$ je množina bodov, ktoré majú od jej stredu S konštantnú vzdialenosť r. Veličina $r > 0$ je polomer hyperkvadriky $\mathbf{G}$. Ortogonálnym priemetom hypersféry $\mathbf{G}$ do priestoru $\mathbf{E}''_3$ je guľa s polomerom r. Ľubovoľná priamka p pretína nadplochu vo dvoch bodoch. Na ich reálnosti usudzujeme o vzájomnej polohe p a $\mathbf{G}$. Ľubovoľný priestor $\mathbf{P}$ preniká nadguľu v guli o strede ω a polomere R pričom $R = \sqrt{r^2 - \overline{S\omega}^2}$.


(p)
(X)
(A)
$^3x'$
p'
(O)
(^1x)
[p]
[X]
X'
A'
S'
(Y)
[A]
O'
Y'
[O]
[Y]
O'
B'
$^2x'$
(B)≡[B]
S'_{12}
$^1x'$
B'_{12}
A'_{12}
O'≡O''
A''_{12}
S''_{12}
$^1x''$
$B''\equiv B''_{12}$
$^2x''$
O
Y''
p''
$^4x''$
S''
A''
X''

Obr. 14.



Obr. 15.

Konštr. 13,1: *Určiť priesečné body priamky p a guľovej nadplochy (obr. 14).*

Riešenie: Nech $\mathbf{G} \equiv (S; r)$. Združené obrazy do $\mathbf{E}_3', \mathbf{E}_3''$ sú kružnice $(S'; r)$; $(S''; r)$. Nech je p daná združenými obrazmi. Priamkou p položená rovina $\varkappa^p$ totálne kolmá na α preniká nadplochu v kružnici k. Hľadané priesečníky X, Y sú priesečné body k a p. Nech je O stred tejto kružnice. Nech $p' \equiv \varkappa^p$; potom sklopením stotožníme rovinu $\varkappa^p$ s α. Najskôr určíme sklopenú priamku p použitím kót a vzdialenosti jej bodov $A_0'B_0'$ od α: $\overline{A'(A)} = \overline{A_0' \dashv \alpha}$, $\overline{B'(B)} = \overline{B_0' \dashv \alpha}$; $(A)(B) = (p)$; $\overline{(A)[A]} = {}^4x_A$, $\overline{(B)[B]} = {}^4x_B$ $[A][B] \equiv [p]$. Pri sklopení k uvážime, že $\overline{O \dashv \alpha} = \overline{S - \alpha}$, ${}^4x_O = {}^4x_S$, pričom $O' \in p'$ a $S'O' \perp p'$. Sklopená $[k]$ je opísaná okolo $[O]$ polomeru rovnajúcemu sa polovici dĺžky tetivy, ktorú určuje p' v kružnici $(S'; r)$. Potom $[X], [Y] = [k] \cap [p]$. Združené obrazy hľadaných bodov X, Y ľahko odvodíme.

Ďalšou, konštrukčne zaujímavou úlohou je

Konštr. 13,2: *Určiť prenik nadgule a priestoru* $\mathbf{P}$ *(obr. 15).*

Riešenie: Nech $\mathbf{P} \equiv ({}^1\sigma^{\mathbf{P}}, {}^2\sigma^{\mathbf{P}})$. Stred ω prenikovej gule je v päte kolmice z S na $\mathbf{P}$. Určíme ho konštr. *10,1* a *8,2*. Jej polomer $R = \sqrt{r^2 - \overline{S\omega}^2}$ určíme konštr. *11,1*. Preniková guľa $(\omega; R)$ bude mať hlavné združené obrazy elipsy, obrazy rotačného sploštelého elipsoidu. V obrazoch kolmice z S na $\mathbf{P}$ sú priemety osi rotácií. Tento elipsoid je priestorovo-afinný s guľou, ktorú dostaneme, ak $\mathbf{P}$ otočíme do $\mathbf{E}_3'$ (alebo $\mathbf{E}_3''$) okolo stopnej roviny ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$ (alebo ${}^2\sigma^{\mathbf{P}}$). Konštr. *12,1* určíme obrazy ${}^\circ\omega'$, ${}^\circ\omega_{12}'$ (alebo ${}^\circ\omega''$, ${}^\circ\omega_{12}''$) otočného bodu ω. Z vlastnosti afinity vieme k trom kolmým priemerom v otočenej gule určiť ich korešpondujúce. Tieto sú troma združenými priemermi elipsoidu, ktorého obrysovú elipsu vieme určiť známymi konštrukciami z $\mathbf{E}_3$ (pozri napr. [11]).

Treba poznamenať, že uvedená zobrazovacia metóda je veľmi vhodná na *riešenie ďalších problémov* z teórie stredových hyperkvadrík [5], [8], aj nestredovekých hyperkvadrík pozri [6], [4]. Tak ako ortogonálne-axonometrická metóda v $\mathbf{E}_3$, aj tu uvedená pre $\mathbf{E}_4$ je jednou z dôležitých zobrazovacích metód.

Literatúra

[1] Beskin: Osnovnoje predloženie aksonometrii, Sborník prác, Moskva—Leningrad 1947.

[2] Džaparidze: Projektivno-sintetičeskoje dokazateľstvo teoremy H. M. Beskina, Sborník prác: Moskva, 1955.

[3] Harant: Analytická geometria lineárnych útvarov II (n-rozmerná) S. P. N, Bratislava, 1954.

[4] Harant. Kótovano-axonometrická zobrazovacia metóda vo štvorrozmernom euklidovskom priestore, Spisy PFMU č. 379, Brno, 1956.

[5] Harant: K metrickému triedeniu stredových nadkvadrík v $\mathbf{E}_4$. Acta F. Rn UK, t. I f. 4—6, Bratislava, 1956.

[6] Harant: Teória nadkvadrík vo štvorrozmernom euklidovskom priestore, ktorých stredy vyplňajú stredový útvar, Acta F. Ru UK, t. II, f. 1—2, Bratislava, 1957.

[7] Harant: Klinogonálna zobrazovacia metóda v $\mathbf{E}_4$. Acta F. Rn UK, t. II, f. 5—6, Bratislava, 1957.

[8] Harant: K teórii elipsoidicko-hyperboloidickej nadkvadriky v $\mathbf{E}_4$. Acta F. Rn UK, t, W. f. 3—5, Bratislava, 1957.

[9] Havel: O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie, Mat.-fyz. čas. SAV, VII/2, Bratislava, 1957.

[10]

[11] Kadeřavek–Klíma–Kounovský: Deskriptivní geometrie II; Praha, 1932.
[12] Kruppa: Zur achsonometrischen Methode der darstellende Geometrie; Sitzb. d. K. A des Wissens., Wien, 1950.
[13] Küpper: Mathematische Annalen, Bd 33, 1888.
[14] Pervikov: Oboščenie osnovnoj teoremy centralnoj axonometri na prostranstvo n-izmernii, Sborník prác, Moskva, 1955.
[15] Naumann: Über Vektorsterne und Paralelprojektionen reguläre Polytope, Math. Zeitschift, 67, 18, 57
[16] Schoute P. H.: Mehrdimensionale Geometrie, I.
[17] Srb: Afinní klasifikace nadkvadrík, Acta F. Rn UK, f. 5, f. 1, Bratislava, 1956.
[18] Srb: Deskriptivní geometrie n-rozměrného prostoru I, Acta F. Rn UK, t. II, f. 1–2. Bratislava, 1957.
[19] Stiefel: Zum Satz von Pohlke, Commentari Math. Helv., 10, 1938.
[20] Veronese: Sulla geometria descripttiva a quatro dimensioni, Atti del reale Instituto Veneto, 1882.

Adresa autora:

Katedra matematiky K. U., Bratislava, Šmeralova 7.

Do redakcie dodané 25. X. 1958

Ортогонально-аксонометрический метод изображения в $\mathbf{E}_4$

(Посвящено проф. Д-р. Яну Србу к шестидесятилетию со дня рождения)

М. Гарант

Резюме

В предложенной работе занимаемся конструктивной обработкой ортогонально-аксонометрического метода изображения в $\mathbf{E}_4$. С этой проблемой встречаемся в литературе очень редко]20], [16], [11].

Первые две части посвящены *ойисанию метода иъвбражения* и описанию изображения точки, прямой, плоскости и пространства.

Пусть в $\mathbf{E}_4$ даны ортогональный базис (прямоугольная система координат $[O;\ {}^1\vec{x},\ {}^2\vec{x},\ {}^3\vec{x},\ {}^4\vec{x}]$ и собственная плоскость α неинцидентная ни с O, ни с осями координат. Кроме того, пусть дана прямая ${}^1s$, являющаяся несобственной прямой плоскости $\varkappa$ вполне перпендикулярной к плоскости α. Если $\mathbf{A}$ линейное трехмерное пространство обладающее свойством $O \notin \mathbf{A}$, ${}^ix \notin \mathbf{A}$ и пересекающее оси координат в точках ${}^iX$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, то ${}^iX$ составляют в $\mathbf{E}_4$ четырехгранник. Этот четырехгранник называется координатным и все геометрические фигуры исследуемые в $\mathbf{E}_4$ будут рассматриваться относительно этого многогранника. Обозначим еще $\mathbf{E}_3' \equiv [O;\ {}^1\vec{x},\ {}^2\vec{x},\ {}^3\vec{x}]$, $\mathbf{E}_3'' \equiv [O;\ {}^1\vec{x},\ {}^2\vec{x},\ {}^4\vec{x}]$.

Изберем плоскость $\alpha' \equiv ({}^1X, {}^2X, {}^3X)$ и определим ортогональную проекцию O' точки O на эту плоскость. Прежде всего определим ортогональную проекцию O° точки O на пространство $\mathbf{A}$ и в этом пространстве спроектируем точку O° ортогонально на плоскость α'. Очевидно, что двухнаправление OO° и $O^\circ O'$ есть в направленности плоскости $\varkappa'$ вполне перпендикулярной к α'. Проекция O' является ортоцентром треугольника следов ${}^1X, {}^2X, {}^3X$. То же самое повторяем и для плоскости $\alpha'' \equiv ({}^1X, {}^2X, {}^4X)$ и определяем O'' воспользуясь двунаправлением OO°, $O^\circ O''$ плоскости $\varkappa''$ вполне перпендикулярной к плоскости α'' (черт. 1). Если $\alpha' \equiv \alpha$ плоскость проекций и плоскость α'' совместим с ней поворотом вокруг ${}^1X\,{}^2X \equiv o' \equiv o''$ в $\mathbf{A}$, получаем основания ортогональной аксонометрии в $\mathbf{E}_4$.

Имеет место утверждение, что пространства проекций $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$ при ортогонально-аксонометрическом методе изображения изобразятся на плоскость α проекций в две перпендикулярно сопряженные ортогональные аксонометрии с осью сопряжения $o' \equiv o''$ (черт. 2).

При *изображении точки* B изображается иногда ее сопровождающий гиперпараллелепипед (черт. 2). Для $(1, 1)$-значного изображения однако необходима тройка сопряженных проекций точки, главным образом проекции B', B'' (аксонометрические образы ортогональных проекций B_0', B_0'' точки B соответственно на $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$) и одна из вспомагательных аксонометрических проекций B_{ik}', или B_{ik}''. Точку изображают удобнее всего тройкой сопряженных проекций (B', B'', B_{12}'), или (B', B'', B_{12}'').

При *игображении прямой* состроим проекции ее следов ${}^1S$, ${}^2S$ на пространства проекций $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$ (черт. 3).

При *ипображении плоскости* ϱ, наиболее угодно определить ее следами ${}^1s$, ${}^2s$ на $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$, причем эти прямые пересекаются в точке R, лежащей в $({}^1x, {}^2x)$ (черт. 4). На том же чертеже решены также $p \subset \varrho$, $B \in \varrho$.

Игображение простпанства $\mathbf{P}$ проведем удобнее всего, воспользуясь плоскостями следов ${}^1\sigma\mathbf{P}$, ${}^2\sigma\mathbf{P}$. Линии пересечения этих следов с плоскостью $({}^1x, {}^2x)$ конструктивно зависимы (черт. 5).

На черт. 5, 6, 7 решены задачи $D \in \mathbf{P}$, $p \subset \mathbf{P}$, $\varrho \subset \mathbf{P}$. При построениях большую важность играют линии наибольшего ската ${}^1o$, ${}^2o \subset \mathbf{P}$ данного пространства, для которых имеет место ${}^1o \perp {}^1\sigma\mathbf{P}$, ${}^2o \perp {}^2\sigma\mathbf{P}$. Построение прямой ${}^1o$ проведено на чертеже 8. Специальные положения прямых, плоскостей, пространств предоставляют большую возможность рассуждений.

В III. части показана *сяаз между вышеприведенным методом изобважения и котовано-аксонометрическим методом изозражения* (аксонометрический метод с числовыми отметками в $\mathbf{E}_4$) [4]. Эта связь аналогична связи метода Монжа с методом с числовыми отметками в $\mathbf{E}_3$. Здесь также имеет место принцип, что многие задачи инцидентности и коинцидентности более выгодно решатся употреблением обеих главных проекций, с другой стороны метрические задачи решатся исключительно методами аксонометрического метода изображения с числовыми отметками.

В IV. части, повющенной *проблематике взаимново расположения основных фигур*, решены следующие задачи: на черт. 9 $\varrho \equiv \mathbf{P} \cap \mathbf{R}$, на черт. 10 $R \equiv r \cap \mathbf{P}$. Это две основные задачи отыскания линии пересечения двух пространств и точки пересечения прямой с пространством. В этом изображении параллельность сохраняется. (Подобно как при изображении методом Монжа в $\mathbf{E}_3$.)

Часть V. посвящена *метрическим задачам*. Прежде всего решена проблема перпендикулярности к пространству (черт. 11): через точку O вести перпендикулярь k к пространству $\mathbf{P}$. Проекции перпендикуляра k получаем из свойства, что $k \perp {}^1\varrho^{\mathbf{P}}$, $k \perp \varrho^{\mathbf{P}}$. На чертеже 12 решена основная метрическая задача — расстояние двух точек. Задачи, касающиеся определения истинных форм плоских фигур как и построений в плоскости решим методом двойного аффинного преобразования [4].

Все проблемы, касающиеся построений в определенном пространстве $\mathbf{P}$ решим совмещением пространства $\mathbf{P}$ с некоторым пространством проекций.

В УI. части вышеприведенный метод изображения применим к решению *двух пвоблем, касающихся гиперсфери*. На черт. 14 построены точки пересечения прямой p с гиперсферой а именно совмещением плоскости $\varkappa^p$, проходящей через прямую p и вполне перпендикулярной к α, с той же плоскостью α.

Интересный результат получается при пересечении гиперсферы с пространством. В ортогонально-аксонометрическом методе изображения в $\mathbf{E}_4$ шар пересечения изображается как эллипсоид вращения, который получаем методом совмещения пространства $\mathbf{P}$ с пространством $\mathbf{E}_3$ и применением пространственного аффинитета (черт. 15).

Приведенный метод изображения возможно как применить к решению проблем из теории гиперквадрик и политопов так и обобщить ее на $\mathbf{E}_5$, $\mathbf{E}_6$ и т. д.

Ortogonale-axonometrische Abbildungsmethode im Raume $\mathbf{E}_4$

Gewidmet zum 60. Geburtstag von. Prof. dr. J. Srb.

M. Harant

Zusammenfassung

In dieser Arbeit befassen wir uns mit der konstruktiven Verarbeitung der ortogonalen-axonometrischen Abbildungsmetode im Raume $\mathbf{E}_4$. Mit diesem Problem treffen wir uns in der Literatur nur selten [20] [16] [11].

Die ersten zwei Teile befassen sich mit der *Beschreibung dieser neuen Abbildungsmetode* und mit der Abbildung des Punktes der Geraden, der Ebene und des Raumes.

Es sei im $\mathbf{E}_4$ die ortonormale Basis $[O; \vec{{}^1x}, \vec{{}^2x}, \vec{{}^3x}, \vec{{}^4x}]$ gegeben und die eigentliche Ebene α welche mit den Punkt O und auch mit dem Koordinatenachsen nicht incident ist. Weiter sei die Gerade s gegeben, welche eine Fluchtgerade der Ebene $\varkappa$ ist. Die Ebene $\varkappa$ ist total senkrecht auf α.

Ist $\mathbf{A}$ ein linear dreidimensionaler Raum mit den Eigenschaften, daß $O \notin \mathbf{A}$, ${}^ix \notin \mathbf{A}$. Der Raum $\mathbf{A}$ bestimmt auf den Koordinatenachsen ${}^ix$ die Punkte ${}^iX (i = 1, 2, 3, 4)$, welche im Raume $\mathbf{E}_4$ ein Tetraeder bilden. Mit dem Tetraeder meinen wir einen Koordinatentetraeder. In Bezug zu diesen Koordinatentetraeder untersuchen wir die Eigenschaften der Punkte, der Geraden der Ebenen und der Räume. Bezeichnen wir $\mathbf{E}_3' \equiv [O; \vec{{}^1x}, \vec{{}^2x}, \vec{{}^3x}]$; $\mathbf{E}_3'' = [O; \vec{{}^1x}, \vec{{}^2x}, \vec{{}^4x}]$.

Wählen wir die Ebene $\alpha \equiv ({}^1X, {}^2X, {}^3X)$ und bestimmen wir die ortogonale Projektion O°, des Punktes O auf diese Ebene: Vorallem bestimmen wir die ortogonale Projektion O° des Punktes O auf den Raum $\mathbf{A}$ und in diesen projektieren wir O° ortogonal auf α'. Es ist verständlich, daß die Doppelrichtung OO°, $O^\circ O'$ in der Doppelrichtung der Ebene $\varkappa'$ total senkrecht auf α' ist. Die Projektion O, ist ein Ortocentrum des Spurdreiecks $O^1x^2x^3x$. Denselben Vorgang wiederholen wir für die Ebene $\alpha'' \equiv ({}^1X, {}^2X, {}^4X)$ und bestimmen O'' mit Benützung der Doppelrichtung OO°, $O^\circ O''$ der Ebene $\varkappa''$ total senkrecht auf α'' (Abb. 1). Ist $\alpha' \equiv \alpha$ eine Bildebene und α'' durch Umlegung um die Gerade ${}^1X{}^2X \equiv o' \equiv o''$ in $\mathbf{A}$ identisch, erhalten wir die Grundlage der ortogonalen Axonometrie im Raume $\mathbf{E}_4$.

Es gilt, daß die Bildräume $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$ sich in der ortogonal-axonometrischen Abbildungsmetode (wie in $\mathbf{E}_3$ welche nach der Achse $o \equiv o''$ ortogonal korrespondiert sind. (Abb. 2.)

Bei der *Abbildung des Punktes* B bilden wir auch seinen Begleitungshyperquader ab. (Abb. 2.) Für die (*1,1*)-deutige Abbildung benötigen wir drei entsprechende Projektionen des Punktes und zwar die Hauptprojektion des Punktes B', B'' (axonometrische Abbildung der ortogonalen Projektionen B_0', B_0'' des Punktes B in $\mathbf{E}_3$ resp. $\mathbf{E}_3''$) und eine der axonometrischen Hilfsprojektionen B_{ik} oder B_{ik}. Am besten bilden wir den Punkt B durch (B', B'', B_{12}') oder (B', B'', B_{12}'') ab. Bei Abbildung *der Geraden*, konstruieren wir Projektitionen ihrer Spurpunkte ${}^1S$, ${}^2S$ auf die Projektionsräume $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$ (Abb. 3).

Bei Abbildung *der Ebene* ϱ benützen wir am besten die Spurgeraden ${}^1s$, ${}^2s$ (auf $\mathbf{E}_3'$, $\mathbf{E}_3''$). Diese durchdringen sich im Punkte R welcher in der Ebene (${}^1x$, ${}^2x$) liegt (Abb. 4). In dieser Abbildung wird auch die Aufgabe $p \subset \varrho$, $B \in \varrho$ gelöst.

Auch *den Raum* $\mathbf{P}$ bilden wir am vorteilhaftesten durch Benützung seiner Spurebenen ${}^1\sigma^{\mathbf{P}}$, ${}^2\sigma^{\mathbf{P}}$ ab, deren Durchdringungsgerade mit der Ebene (${}^1x$, ${}^2x$) gegenseitig abhängig sind (Abb. 5). In der Abbildung 5, 6, 7, lösen wir $D \in \mathbf{P}$, $p \subset \mathbf{P}$, $\varrho \subset \mathbf{P}$. Bei der Konstruktion sind die Fallgeraden ${}^1o$, ${}^2o$ des gegeben Raumes sehr wichting, für welche gilt, daß ${}^1o \perp {}^1\sigma^{\mathbf{P}}$, ${}^2o \perp {}^2\sigma^{\mathbf{P}}$. Die Konstruktion ${}^1o$ ist in der Abbildung 8 durchgeführt. Die spezialen Lagen der Geraden, der Ebenen und der Räume bieten große Möglichkeiten zu Erwägungen.

Der dritte Teil behandelt den *Zusammenhang zwischen der angeführeten Metode und der kotiert-axonometrischen Abbildungsmetode* [4]. Dieser Zusammenhang ist analogisch, wie z. B. der Zusammenhang zwischen der Monge-Projektion und der kotierten Projektion in $\mathbf{E}_3$. Auch hier gilt, daß viele Inzidenz- und Koinzidenzaufgaben am besten bei Verwendung beider Hauptprojektionen gelöst werden. Metrische Aufgaben lösen wir aus.

schließlich mit den Konstruktionen der kotiert-axonometrischen Abbildungsmetode in $\mathbf{E}_4$.

Im IV. Teil, welcher der *Problematik der Lagenbeziehungen* der Geraden, Ebenen und Räume gewidmet ist, werden in der Abbildung 9 $\varrho \equiv \mathbf{P} \cap \mathbf{R}$ und in der Abbildung 10 $R \equiv \gamma \cap \mathbf{P}$ zwei Grundaufgaben gelöst. Die *Parallelität* wird in dieser Projektion erhalten.

Der V. Teil ist den *metrischen Aufgaben* gewidmet. In der Abbildung 11 lösen wir die Bestimmung der Senkrechten k zum gegenen Raum $\mathbf{P}$ durch den Punkt O. Die Projektionen der Senkrechten k bestimmen wir aus den Eigenschaften, daß $k \perp {}^1\sigma^{\mathbf{P}}$, $k \perp {}^2\sigma^{\mathbf{P}}$. Abbildung 12 ist eine metrische Grundaufgabe — die wahre Größe zweier Punkte.

Aufgaben über die wahre Größe der Figuren in der Ebene bestimmen wir durch die Metoden der zweifachen afinen Transformationen [4].

Alle Konstruktionsaufgaben in einem bestimmten Raume $\mathbf{P}$, lösen wir durch die die Umlegung dieses Raumes in $\mathbf{E}_3'$ oder $\mathbf{E}_3''$.

Die angeführten Abbildungsmetode aplizieren wir im VI. Teil auf *zwei Probleme über die Hyperkugel*. In Abbildung 14 bestimmen wir die Durchdringungspunkte der Geraden p und der Hyperkugel.

In Abbildung 15 lösen wir die Durchdringung des Raumes und der Hyperkugel. In der ortogonale-axonometrischen Metode in $\mathbf{E}_4$ wird die Schnittkugel wie ein Drehelipsoid abgebildet: drei konjugierte Durchmesser des Elipsoides wurden mittels der Affinität des Elipsoides mit einer bestimmten Kugelfläche ermittelt.

Weitere Aplikationen können auf die Probleme aus der Teorie der Hyperquadriken und Polytopen ausgeführt werden, sowie auch die Verallgemeinerung dieser Metode auf $\mathbf{E}_5$ und $\mathbf{E}_6$ usw.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV — 3–5, MATHEM., 1959]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

K teórii elipsoidicko-hyperboloidickej nadkvadriky vo štvorrozmernom euklidovskom priestore

M. HARANT

1. V tomto pojednaní budeme sa zapodievať *zostrojením obrysu elipsoidicko-hyperboloidickej nadkvadriky v* $\mathbf{E}_4$ (pozri [1]), *ako aj zostrojením prenikových kvadrík tejto hyperkvadriky a všeobecne položeného priestoru* **P**. Ukazuje sa, že uvedená E—H nadkvadrika má v trojrozmernom euklidovskom priestore analogón vo všeobecnom jednodielnom hyperboloide JH. Eliptickému, parabolickému a hyperbolickému rezu, ktorý nie je rozloženou kužeľosečkou, zodpovedá elipsoidický, elipticko-paraboloidický a dvojdielno-hyperboloidický prenik nadkvadriky E—H a priestoru **P**. Aj plocha asymptotického nadkužeľa nadkvadriky E—H hrá analogickú úlohu pri prenikovej kvadrike ako asymptotický kužeľ plochy JH pri rezoch tejto plochy rovinou.

Uvedený problém vyriešime v *klinogonálnom premietaní v* $\mathbf{E}_4$ (pozri [2]), v ktorom sa nadkvadrika, ktorú berieme do úvahy, jednoducho zobrazí.

2. *Elipsoidicko-hyperboloidická nadkvadrika* má v ortonormálnej báze $[O; \vec{^1x}, \vec{^2x}, \vec{^3x}, \vec{^4x}]$ normálny tvar daný rovnicou:

$$\text{(a)} \qquad \frac{^1x^2}{a^2} + \frac{^2x^2}{b^2} + \frac{^3x^2}{c^2} - \frac{^4x^2}{d^2} = 1,$$

pričom *jej asymptotická nadkužeľová plocha* je nadkvadrika elipsoidicko-kužeľová. Jej normálny tvar je:

$$\text{(b)} \qquad \frac{^1x^2}{a^2} + \frac{^2x^2}{b^2} + \frac{^3x^2}{c^2} - \frac{^4x^2}{d^2} = 0.$$

Dĺžky a, b, c, id nazývame dĺžky hlavných polosí. Vidíme, že tri z dĺžok sú reálne, štvrtá je imaginárna (obr. 1).

Konštrukcia 1. *Určiť obrysovú krivku nadkvadriky E—H.*

Riešenie. a) Pri konštrukcii priemetu kužeľosečky obrysu nadkvadriky E—H danej dĺžkami osí $\overline{A^1A} = 2a$, $\overline{B^1B} = 2b$, $\overline{C^1C} = 2c$, $\overline{D_i{}^1D_i} = 2d$ využijeme vlastnosť, že obrysové priamky asymptotickej plochy E—K danej rovnicou (b) sú asymptotami obrysovej kužeľosečky k. Potom postačí k „*hrdelnému elipsoidu nadkvadriky E—H*" danému osami $\overline{A^1A}$, $\overline{B^1B}$, $\overline{C^1C}$ opísať v smere osi $\vec{^4x}$ valcovú plochu a zostrojiť jej obrysové tangenty, a to použitím *Pelcovej vety* (pozri [5], [7]). Potom je k daná asymptotami a dvojicou rovnobežných tangent. Ako vyplýva z rovníc (a), (b), prenikové elipsoidy nadkvadriky $E-H$ a jej asymptotickej nadkužeľovej plochy priestormi $^4x =$ *konšt.* sú homotetické elipsoidy. Ak určíme v rovine $(\overrightarrow{^1x}, \overrightarrow{^4x})$ prenikovú hyperbolu $(\overline{A^1A}, \overline{D_i{}^1D_i}!)$ tejto roviny a nadkvadriky $E-H$, sú $\overline{A^1A}$, resp. $\overline{\alpha^1\alpha}$ priemery (elipsoidov nadkvadriky (b), resp. (a) ležiacich vpriestore $^4x = d$. Použitím „hrdelného elipsoidu" a z vlastnosti homotetie obidvoch elipsoidov vieme pre obidva elipsoidy určiť polohu 3 združených priemerov a z nich určiť ich obrysové kužeľosečky. Je zrejmé, že obrysové elipsy obidvoch elipsoidov sa musia obrysových priamok, resp. obrysovej hyperboly k nadkvadrík (b), resp. (a), dotýkať.

b) *Iná konštrukcia kužeľosečky k,* ktorú môžeme vo všeobecnosti použiť pre všetky stredové nadkvadriky (pozri [1]), je *aplikácia rozšírenej Pelcovej vety* (pozri [4]), ktorá znie:

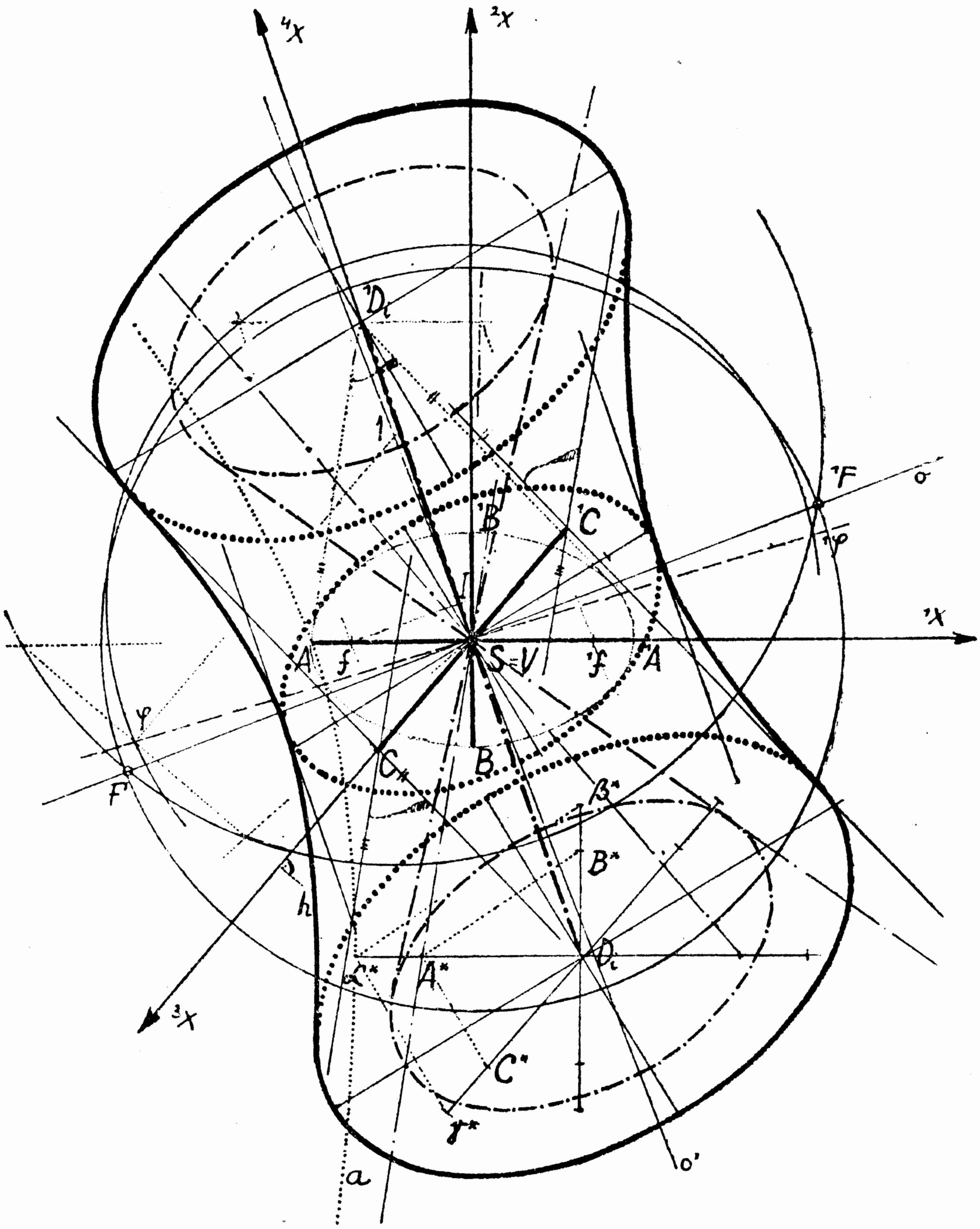
Všetky priestory **P** *rovnobežné s priemetňou π pretínajú nadkvadriku v plochách, ktorých obrysy sú homotetické kužeľosečky dotýkajúce sa dvojnásobne obrysovej kužeľosečky k nadkvadriky. Ich ohniská vypĺňajú preto dve kužeľosečky e^*, f^* s obrysovou kužeľosečkou k konfokálne* (upravené podľa [4], str. 268).

Nech je nadkvadrika $E-H$ daná združenými priemermi $\overline{A^1A}$, $\overline{B^1B}$, $\overline{C\,C}$, $\overline{D_i{}^1D_i}$. Nech sú f, ^1f ohniská kužeľosečky $(\overline{A^1A}, \overline{B^1B})$ v rovine $\pi = (\overrightarrow{^1x}, \overrightarrow{^2x})$. Priestor $(\overrightarrow{^1x}, \overrightarrow{^2x}, \overrightarrow{^3x})$ preniká danú $E-H$ nadkvadriku v hyperboloide, ktorého obrysovou krivkou (na π) je hyperbola s ohniskami φ, $^1\varphi$. Tieto dostaneme *použitím Pelcovej vety* pre $\mathbf{E}_3$ (pozri [5], [7]) a *Chaslesovej konštrukcie* (pozri [6]) z $\overline{f^1f}$, $\overline{D_i{}^1D_i}$ ako združených priemerov. Ak preložíme priestor $\mathbf{P} \parallel \overrightarrow{^1x}, \overrightarrow{^2x}, \overrightarrow{^4x})$ bodmi C, ^1C, budú prenikové hyperboloidy degenerovať v kužele a ich obrysové hyperboly v dvojicu priamok, ktoré sa obrysovej kužeľosečky k zrejme musia dotýkať. Takto degenerovaná hyperbola má v bode C, resp. ^1C nielen stredy, ale aj ohniská. Preto ak zostrojíme ohniská F, ^1F kužeľosečky $\overline{\varphi^1\varphi}$, $\overline{C\,C}$, sú tieto podľa vyslovenej Pelcovej vety už ohniskami obrysovej kužeľosečky k. Pre jej konštrukciu postačí určiť jedinú tangentu, najvhodnejšie $t \parallel {}^4x$, vedenú k obrysovej elipse „hrdelného elipsoidu" nadkvadriky. Potom tiež asymptoty kužeľosečky k sú obrysovými priamkami asymptotickej plochy nadkužeľovej (b). Ak ukončíme nadkvadriku prenikovými elipsoidami priestormi $\mathbf{E}$, $\overline{\mathbf{E}} \parallel (\overrightarrow{^1x}, \overrightarrow{^2x}, \overrightarrow{^3x})$, určíme ich analogicky ako v odseku a).

K vete o homotetičnosti rezových kužeľosečiek na hyperboloide a jeho asymptotickom kuželi v $\mathbf{E}_3$ jestvuje analogická veta pre elipsoidicko-hyperboloidickú nadkvadriku a príslušnú asymptotickú kužeľovú nadplochu v $\mathbf{E}_4$.

Veta 1. *Prenikové kvadriky elipsoidicko-hyperboloidickej nadkvadriky a jej asymptotickej plochy nadkužeľovej priestorom* **P** *sú vzájomne homotetické.*

Dôkaz. Súradnicové priestory $(\overrightarrow{^1x}, \overrightarrow{^2x}, \overrightarrow{^4x})$, $(\overrightarrow{^1x}, \overrightarrow{^3x}, \overrightarrow{^4x})$, $(\overrightarrow{^2x}, \overrightarrow{^3x}, \overrightarrow{^4x})$, prenikajú nadkvadriku (a) v jednodielnych hyperboloidoch a nadkvadriku (b) v príslušných asymptotických kužeľových plochách. Uvedené JH a príslušné asymptotické kužeľové plochy indukujú v úbežnom priestore $\mathbf{U}_3$ daného štvorrozmerného priestoru $\mathbf{E}_4$ elipsoid E. Táto vlastnosť vyplýva aj z rovníc (a) a (b). Ľubovoľný priestor **P** preniká preto nadkvadriky (a) (b) v homotetických kvadrikách a ich typ je závislý od polohy **P** a E.



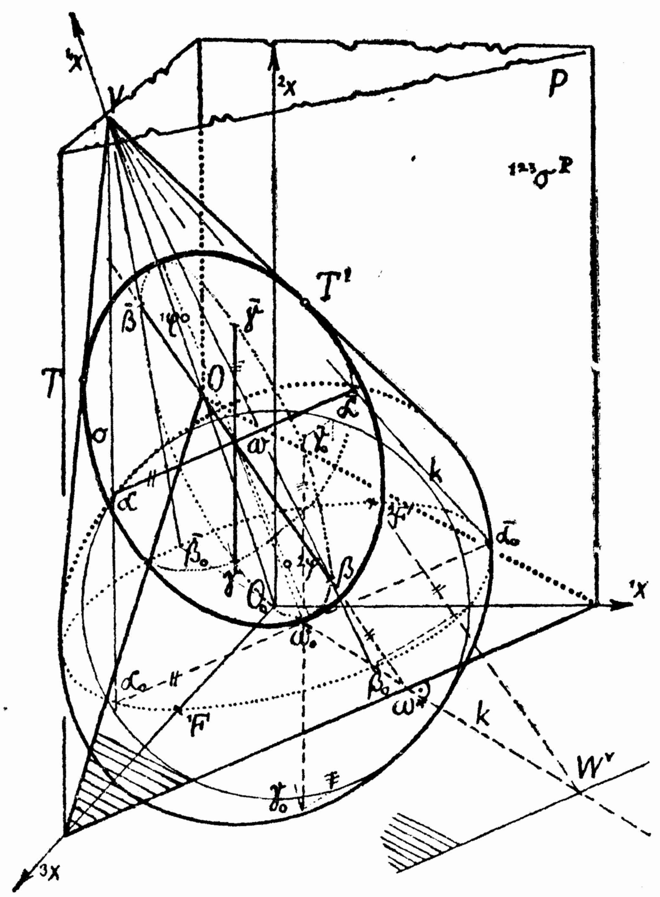
Obr. 1.

Táto veta je pre riešenie prenikových kvadrík nadkvadriky E—H priestormi **P** veľmi dôležitá.

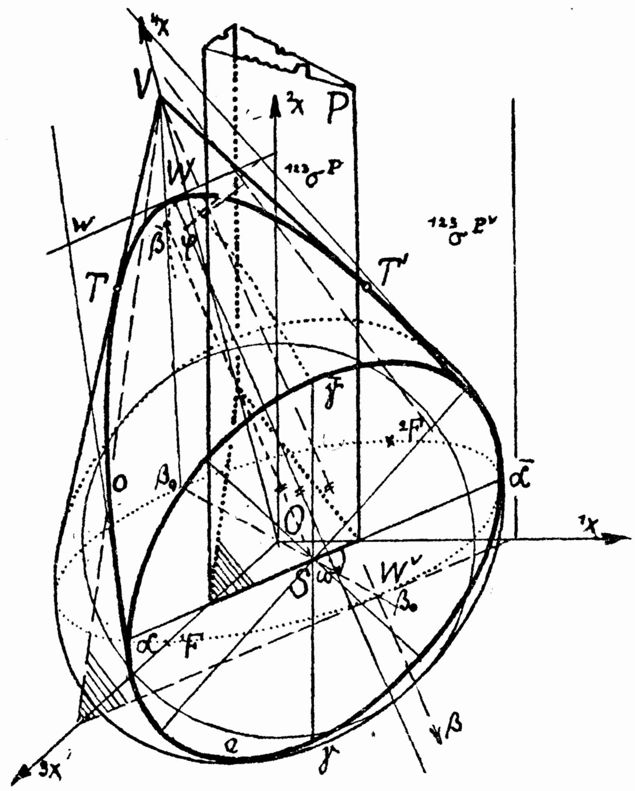
3. Ako z uvedenej vety vyplýva, pri konštrukciách prenikových kvadrík nadkvadriky E—H priestormi **P** sú veľmi dôležité aj preniky nadkvadriky E—K priestormi. Preto si o týchto najskôr v krátkosti pohovoríme. Konštrukčne o *prenikoch* **P** *so šikmou guľovo-kužeľovou nadkvadrikou* sme písali v [3], tu si vykonáme modifikáciu konštrukcií pre klinogonálne premietanie v $\mathbf{E}_4$, v ktorom budeme riešiť aj preniky nadkvadriky E—H.

Konštrukcia 2. *Určiť elipsoidicky prenik guľovo-kužeľovej nadkvadriky a priestoru* **P** (obr. 2).

Riešenie. Uvažujme o priamej G—K nadkvadrike, ktorej *„podstavná guľa"* je v priestore $(\overrightarrow{{}^1x}, \overrightarrow{{}^2x}, \overrightarrow{{}^3x})$. Jej obrysovou krivkou je elipsa. Priemet vrcholu V



Obr. 2.



Obr. 3.

nadkvadriky je v priemete osi $\overrightarrow{{}^4x}$. *Preniková kvadrika E a „podstavná guľa“ sú kolineárne priradené plochy.* Stredom tejto priestorovej kolineácie je V a samodružnou rovinou je stopná rovina priestoru $\mathbf{P}$ v priestore $(\overrightarrow{{}^1x}, \overrightarrow{{}^2x}, \overrightarrow{{}^3x})$, teda rovina $\sigma^{\mathbf{P}} \equiv ({}^{123}\sigma^{\mathbf{P}}) = \mathbf{P} \cap (\overrightarrow{{}^1x}, \overrightarrow{{}^2x}, \overrightarrow{{}^3x})$.

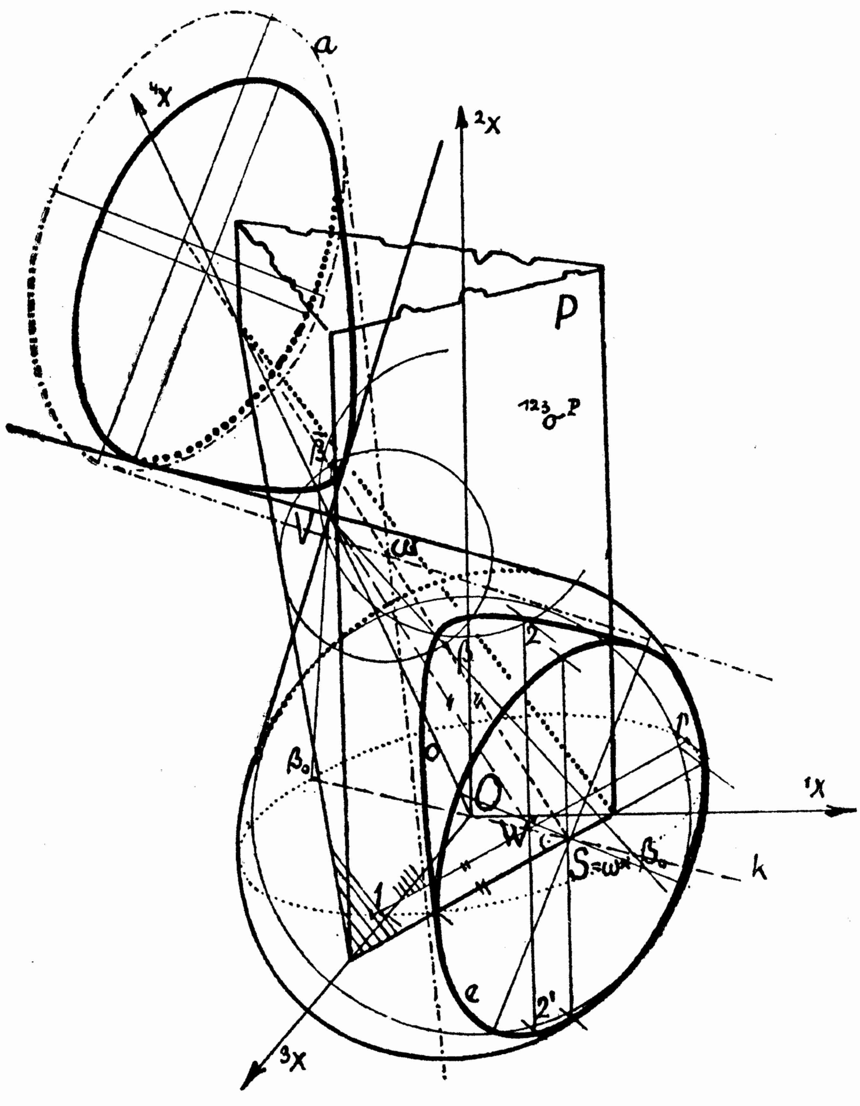
Zostrojme priemer $k = \beta_0\bar{\beta}_0$ podstavnej gule kolmý na stopnú rovinu $\sigma^{\mathbf{P}}$. Nech $\omega^* = k \cap \sigma^{\mathbf{P}}$ a $O = O_0V \cap \mathbf{P}$ je priesečík osi nadkvadriky s daným $\mathbf{P}$. Priemeru $\bar{\beta}_0O_0\beta_0$ v kolineácii zodpovedá priemer ω^*O a omedzenie $\bar{\beta}, \beta$ ľahko vykonáme z vlastnosti kolineácie. Tangenciálne roviny podstavnej gule v bodoch $\beta_0, \bar{\beta}_0$ sú rovnobežné so $\sigma^{\mathbf{P}}$. Pretože však $\sigma^{\mathbf{P}}$ je samodružná rovina kolineácie, sú aj τ — roviny v bodoch $\bar{\beta}, \beta$ rovnobežné so $\sigma^{\mathbf{P}}$. Preto je $\beta\bar{\beta}$ jedným priemerom prenikovej elipsoidickej kvadriky. Preto je ω splňujúci $\bar{\beta}\omega = \omega\beta$ jej stredom. K ω určíme kolineárne priradený ω_0. Ak zostrojíme k rezovej kužeľosečke $(\alpha_0\bar{\alpha}_0, \gamma_0\bar{\gamma}_0)$ podstavnej gule s rovinou incidentnou s ω_0 a rovnobežnou so $\sigma^{\mathbf{P}}$ kolineárne priradenú $(\alpha\bar{\alpha}, \gamma\bar{\gamma})$, sú už $\alpha\bar{\alpha}, \beta\bar{\beta}, \gamma\bar{\gamma}$ *tri sdružené priemery prenikového elipsoidu. Pelcovou vetou vieme jeho obrysovú kužeľosečku určiť.* Táto sa dotýka obrysových priamok nadkvadriky $G—K$. Ak pretína rovina $\sigma^{\mathbf{P}}$ podstavnú guľu v krivke, bude táto kužeľosečka ležať na prenikovom elipsoide E. Ak zostrojime $VW^V \parallel \omega\omega^*$, pričom $W^V \in k$, je bod W^V bodom vrcholového priestoru $\mathbf{P}^V \parallel \mathbf{P}$. Vidíme, že jeho stopná rovina $\sigma^{\mathbf{P}V}$ nepretína podstavnú guľu, a preto prenik $\mathbf{P} \cap G—K$ je elipsoid (pozri [3]).

Konštrukcia 3. *Určiť elipticko-paraboloidický prenik nadkvadriky G—K priestoru* **P** (obr. 3).

Riešenie. V tomto prípade *stopná rovina* σ^{P^V} *vrcholného priestoru* $\mathbf{P}^V \parallel \mathbf{P}$ *musí byť tangenciálnou rovinou podstavnej gule.* Pre priestor **P** môžeme teda zvoliť len jeho stopnú rovinu σ^P a musíme ho dourčiť z podmienky rovnobežnosti priestorov **P** a $\mathbf{P}^V$. V tomto prípade kolineárne priradený priemer k priemeru $\overline{\beta_0 O_0 \beta_0}$ je $\overline{\beta\omega^*} \parallel \overline{VW^V}$, kde $\omega^* = k \cap \sigma^P$. Potom β je nevlastný bod smeru $\overline{\beta\omega^*}$, a preto $\overline{VW^V}$ je smer osi prenikového paraboloidu. Ak zostrojíme prenikovú kužeľosečku podstavnej gule a roviny σ^P, tak je táto krivkou paraboloidu, a to v rovine združenej so smerom osi paraboloidu. Pelcovou konštrukciou (pozri [5]) vieme konštrukčne určiť jeho obrysovú parabolu, ktorá sa obrysových priamok *G—K* nadkvadriky dotýka.

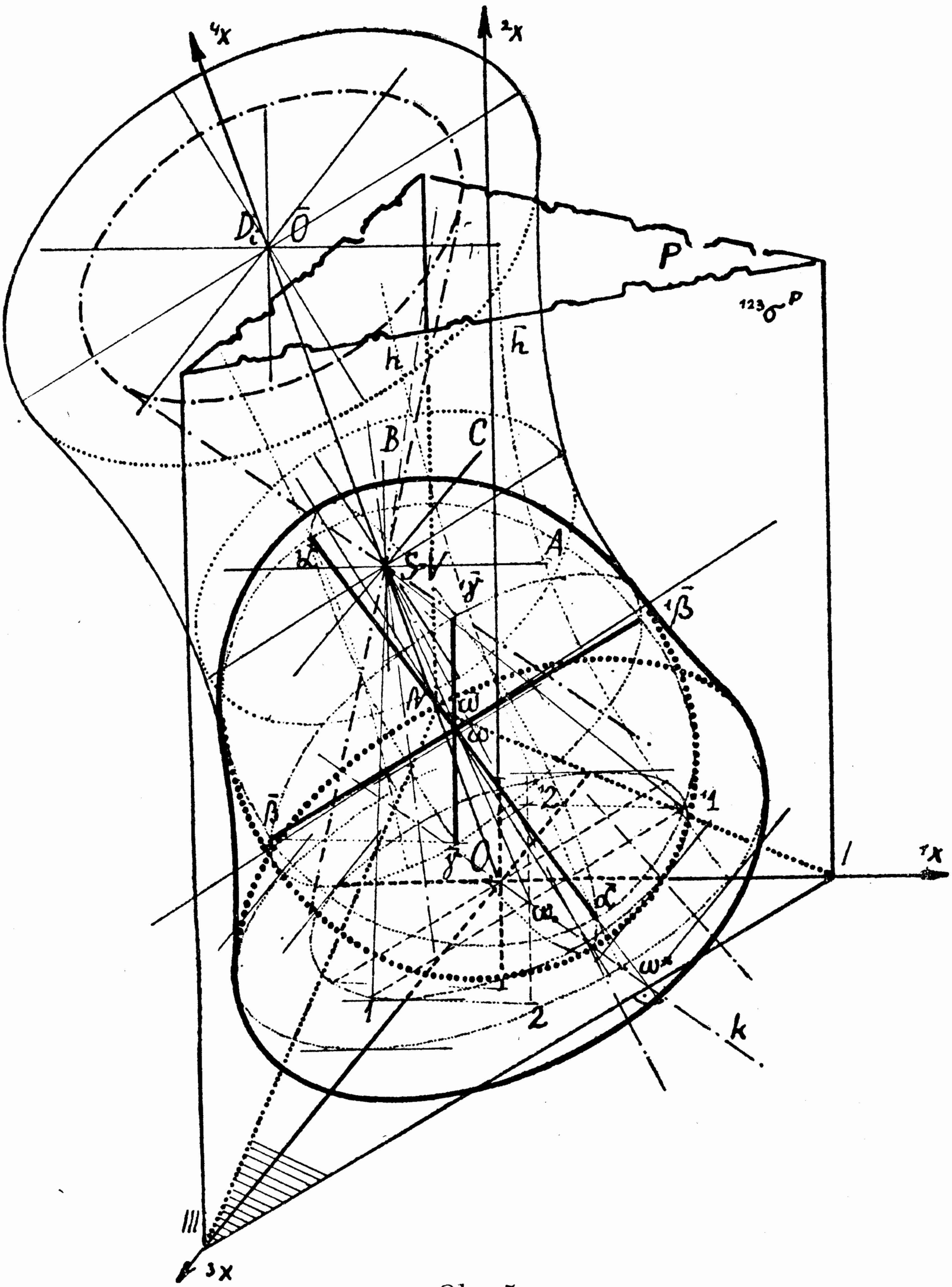
Konštrukcia 4. *Určiť prenik G—K nadkvadriky a priestoru* **P**, *ak je tento dvojdielny hyperboloid* (obr. 4).

Riešenie. Keď pretína stopná rovina σ^{P^V} podstavnú guľu v kužeľosečke k (určenej združenými priemermi $\overline{11'}$, $\overline{22'}$), preniká **P** danú *G—K* nadkvadriku v kuželi K, vrchole V a podstavnej krivke k. Potom prenikové kvadriky priestormi $\mathbf{P} \parallel \mathbf{P}^V$ sú hyperboloidy, ktorých asymptotické kužele sú zhodné s kužeľom K. Určením bodov β, β určíme stred prenikovej kvadriky ω, ale platí $\overline{\beta\omega} = \overline{\omega\beta}$, ktorý je tiež vrcholom asymptotického kužeľa K. Jeho asymptotické priamky sú asymptotami obrysovej krivky hyperboloidu. Na určenie hyperboly obrysu použijeme vlastnosť, že táto sa musí dotýkať aj obrysových priamok hyperkvadriky *G—K*. Aj kužeľosečka $e = G \cap \sigma^P$ je krivkou prenikového hyperboloidu.



Obr. 4.

Poznámka 1. Z uvedenej konštrukcie vidíme, že 4. *typ prenikových plôch nadkvadriky G—K priestormi incidentnými s vrcholom V*, ak pretínajú ich stopné roviny podstavnú plochu, *sú kužele* s vrcholom V. Tento prípad je analogón rezu



Obr. 5.

kužeľa jeho vrcholovými rovinami, pretínajúcimi kužeľovú plochu na dvoch rôznobežných priamkach.

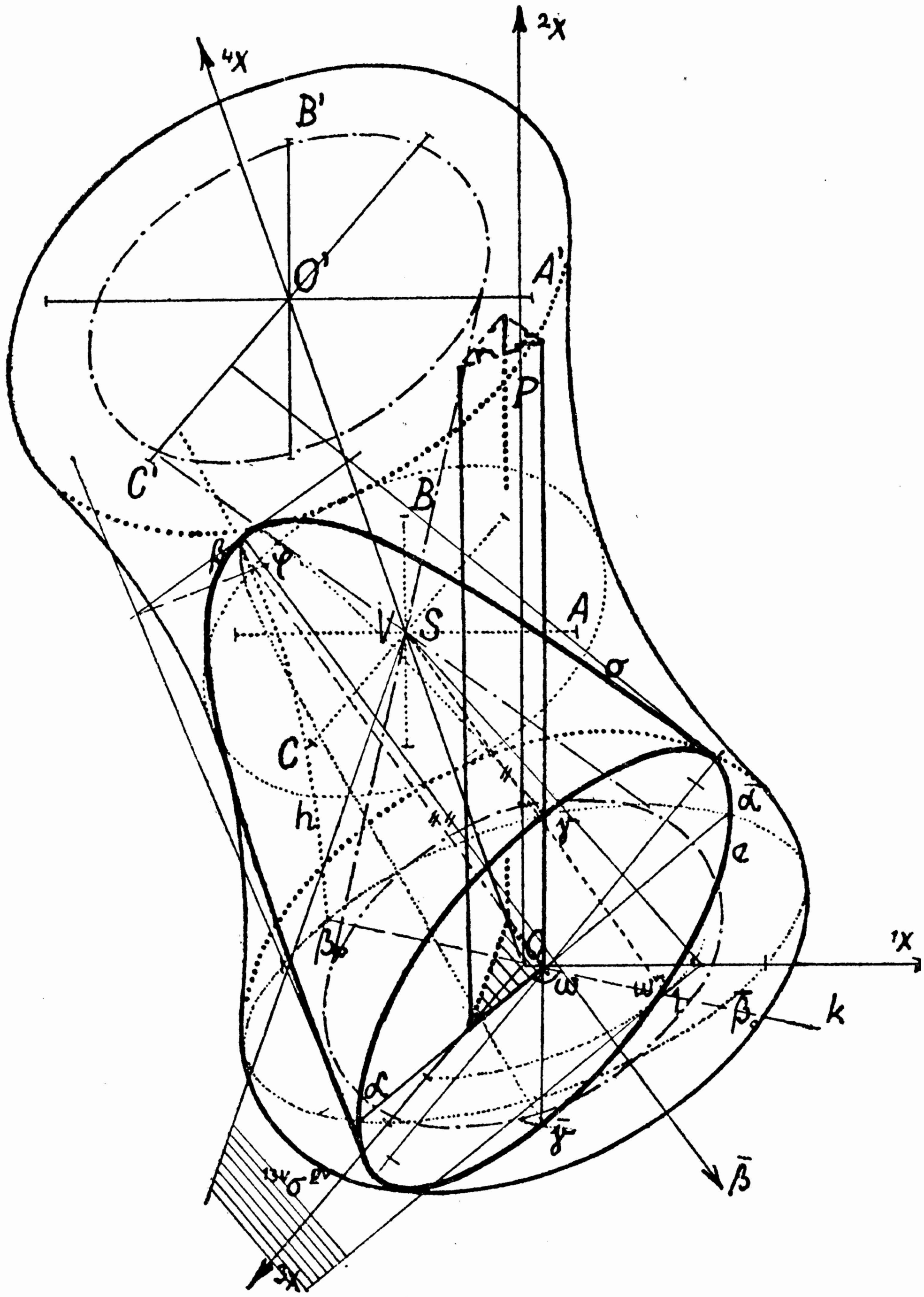
Poznámka 2. Len kvôli konštrukčnej jednoduchosti volili sme na miesto nadkvadriky *E—K* nadkvadrîku *G—K* a aj priestor **P** rovnobežný s osou $^2\vec{x}$. Ak by to tak nebolo, museli by sme riešiť body β_0, $\bar{\beta}_0$, ako aj rezové krivky $\sigma^{\mathbf{P}}$ a podstavnej plochy riešiť známymi konštrukciami (pozri [6]).

4. Pristúpime k jadru pojednania, ku konštrukciám prenikových kvadrík nadkvadriky *E—H* a priestoru **P**.

Konštrukcia 5. *Určiť elipsoidický prenik nadkvadriky E—H a priestoru* **P** (obr. 5).

Riešenie. Predpokladajme, že stred S nadkvadriky $E—H$, ktorý je súčasne aj vrcholom jej asymptotickej nadkužeľovej plochy, je na osi $\overrightarrow{{}^4x}$, pričom nadkvadrika je obmedzená priestorom $(\overrightarrow{{}^1x}, \overrightarrow{{}^2x}, \overrightarrow{{}^3x})$ a priestorom s ním rovnobežným, incidentným s O', pričom $\overline{O'S} = \overline{SO}$.

Ak chceme zostrojiť elipsoidický prenik priestorom **P**, potom vzhľadom na *V. 1* je zrejmé, akú polohu musí mať stopná rovina $\sigma^{\mathbf{P}^V}$ vrcholového priestoru $\mathbf{P}^V \parallel \mathbf{P}$ vzhľadom na podstavný elipsoid asymptotickej kužeľovej nadkvadriky. Ak sú splnené predpoklady vyslovené v Konštr. 2, pre $\sigma^{\mathbf{P}^V}$ zostrojíme najskôr elipsoidický prenik priestoru **P** a kužeľovej nadkvadriky. Postačí určiť tento len dĺžkami združených priemerov. Elipsoidický prenik nadkvadriky $E—H$ priestorom **P** je homotetický elipsoid. V tejto homotetii určíme na niektorom reze súradnicovou rovinou obsahujúcou os $\overrightarrow{{}^4x}$ dvojicu pridružených bodov na asymptotickej nadkužeľovej ploche a na $E—H$ nadkvadrike.

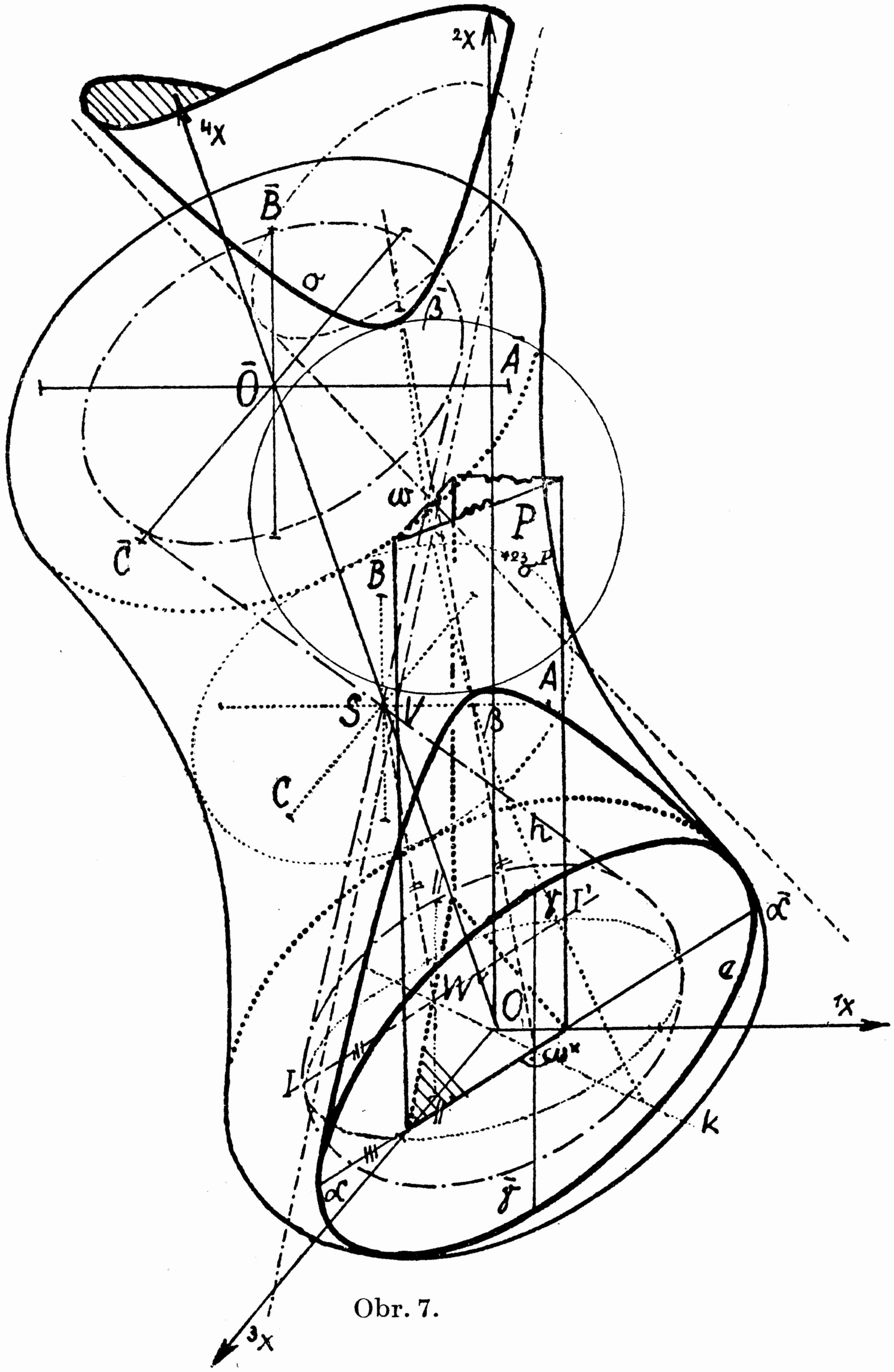


Obr. 6.

Potom k združeným priemerom prenikovej nadkvadriky K-nadplochy a daného **P** ľahko určíme priradené priemery prenikového hľadaného elipsoidu. Tento je takto dostatočne určený. Ako ďalšia podmienka pre určenie jeho obrysovej elipsy je nevyhnutnosť dotyku tejto a obrysovej hyperboly nadkvadriky $E—H$. Keby pretínala $\sigma^{\mathbf{P}}$ podstavný elipsoid hyperkvadriky $E—H$ v elipse, nachádza sa táto na prenikovom elipsoide, a preto je priemetom tohto rezu krivka dvojnásobného dotyku s obrysovou elipsou elipsoidického preniku.

Konštrukcia 6. *Určiť paraboloidický prenik nadkvadriky $E—H$ priestorom* **P** (obr. 6).

Riešenie. Aby bola preniková kvadrika eliptickým paraboloidom, potom *musí* **P** *prenikať nevyhnutne aj príslušný asymptoticky nadkužeľ v paraboloide.*



Obr. 7.

No vtedy môžeme pre $\mathbf{P}$ zvoliť len jej stopnú rovinu $\sigma^{\mathbf{P}}$, pričom $\mathbf{P}$ je určený ešte tým, že stopná rovina $\sigma^{\mathbf{P}^{\mathbf{V}}}$ vrcholného priestoru $\mathbf{P}^{\mathbf{V}} \parallel \mathbf{P}$ dotýka sa podstavnej plochy nadkvadriky. Potom, ak $\omega^* \equiv k \cap \sigma^{\mathbf{P}^{\mathbf{V}}}$, vtedy je $\overline{S\omega}^*$ smer osi prenikového paraboloidu, pričom $k \perp \sigma^{\mathbf{P}}$. Ak zostrojíme $\overline{\omega\beta} \parallel \overline{S\omega}^*$, kde $\omega \equiv k \cap \sigma^{\mathbf{P}}$ a β je na hyperbole h, v ktorej rovina $(k, \overrightarrow{{}^4x})$ preniká nadkvadriku E—H, je β jeden vrchol paraboloidu. Zostrojením rezovej krivky e roviny $\sigma^{\mathbf{P}}$ a podstavného elipsoidu nadkvadriky E—H dostaneme elipsu, ktorá leží na paraboloide v rovine združenej k smeru $\overline{\beta\omega}$. Potom konštrukcia obrysovej paraboly, ktorá sa zase dvojnásobne dotýka obrysovej hyperboly nadkvadriky $E-H$, je taká istá ako v konštrukcii 3.

Konštrukcia 7. *Určiť dvojdielno-hyperboloidický prenik nadkvadriky $E-H$ a priestoru* **P** (obr. 7).

Riešenie. Aby sme dostali tento druh preniku, stopná rovina σ^{P^V} vrcholového priestoru P^V musí podstavný elipsoid asymptotického nadkužeľa pretínať v kužeľosečke $k^* \equiv (\overline{II'}, \overline{II}\,\overline{II'})$, a teda asymptotickú nadkvadriku v kuželi K o vrchole V a určujúcej kužeľosečke k^*. Určíme k idúce O, kolmé na σ^P a ďalej hyperbolicky rez h danej nadkvadriky $E-H$ rovinou $(k, {}^4\vec{x})$. Na hyperbole h ležia vrcholy β, $\bar{\beta}$ dvojdielneho prenikového hyperboloidu, pričom $\omega^*\overline{\beta\beta} \parallel W^V S$, kde $\omega^* \equiv k \cap \sigma^P$. Stred prenikového hyperboloidu ω spĺňa vzťah $\bar{\beta}\omega = \omega\beta$. Ak zostrojime zhodný kužeľ K s kužeľom K o vrchole v bode ω, tak sme už určili asymptotický kužeľ hľadaného hyperboloidického preniku. Jeho obrysové priamky sú asymptotami obrysovej hyperboly o, ktorá sa dvojnásobne dotýka obrysovej krivky nadkvadriky $E-H$. Prenikový hyperboloid obsahuje aj kužeľosečku e, čiže rezovú krivku podstavného elipsoidu nadkvadriky $E-H$ a roviny σ^P. Kužeľosečka e leží zase v rovine združenej k smeru $\overline{\beta\beta}$. Známymi konštrukciami vieme obrysovú hyperbolu o určiť.

Poznámka. Len z konštrukčných výhod určenia $k \perp \sigma^P$ ako aj určenia rezových kužeľosečiek podstavných plôch s rovinami σ^P, resp. σ^{P^V} sme volili priestor $P \parallel {}^2\vec{x}$. Ak by bol všeobecne položený, vtedy tieto konštrukcie riešime inými, známymi konštrukciami (pozri [6]).

Literatúra

[1] Harant M.: Metrické triedenie stredových nadkvadrík v E_4, Acta fak. r. n. univ. Comenianae T. I, fasc. 4–6, Bratislava 1956.

[2] Harant M.: Klinogonálne premietanie v E_4, Acta fak. r. n. univ. Comenianae, T. II, fasc. 5–6 Bratislava 1957.

[3] Harant M.: Kotovano-axonometrická zobrazovacia metóda vo štvorrozmernom euklidovskom priestore, Spisy PFMU, č. 379, Brno 1956

[4] Hlavatý V.: Promítání z přímky na rovinu v prostoru čtyřrozměrném, Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. LII, Praha 1923.

[5] Kadeřávek–Klíma–Kounovský; Deskriptivní geometrie I, Praha 1928.

[6] Kadeřávek–Klíma–Kounovský: Deskriptivní geometrie II, Praha 1932.

[7] Procházka B.: Vybrané statě z deskr. geometrie, I. diel, Praha 1912.

Adresa autora:

Katedra matematiky K. U. Bratislava, Šmeralova 2.

Do redakcie došlo 15. I. 1958

К теории эллипсоидическо-гиперболоидической гиперквадрики в четырехместном евклидовом пространстве

Резюме

М. Гарант

В этой работе автор конструирует контур эллипсоидическо-гиперболоидической гиперквадрики — $E—H$ гиперквадрики (лит. (1)) в клиногональной (не ортогональной) проекции (лит. (2)) в четырехмерном евклидовом пространстве (черт. 1). Ее уравнением является уравнение (a), уравнением же соответствующего асимптотического гиперконуса является уравнение (b). Показано, что таким образом можно построить контурные линии второго порядка двумя методами, но удобнее всего воспользоваться приспособленной расширенной теоремой Пелца (лит. (4)). Далее указано, что квадрики пересечения гиперквадрики $E—H$ и ее асимптотической конической гиперповерхности подобны. Поэтому прежде всего построены три типа пересечений пространства **P** с шаро-конической гиперквадрикой, а именно: если чесением является эллипсоид (черт. 2), параболоид (черт. 3) и двуполостный гиперболоид (черт. 4).

Конструкция 5 описывает определение пересечения $\mathbf{P} \cap E—H$, если оно является эллипсоидом (черт. 5), в конструкции 6 указано осуществление $\mathbf{P} \cap E—H$, если сечением является параболоид (черт. 6) и накнец а конструкции 7 построено гиперболоидическое пересечение $\mathbf{P} \cap E—H$ (черт. 7).

Следовательно гиперквадрика $E—H$ в $\mathbf{E}_4$ является аналогией трехосного однолостного гиперболоида из $\mathbf{E}_3$, подобно как шаро-коническая гиперквадрика является аналогией конуса из $\mathbf{E}_3$.

Beiträge zur Theorie der elipsoidisch-hyperboloidischen Hyperkvadrik im vierdimensionalen euklidischen Raum

M. Harant

In dieser Arbeit *konstruieren wir den Umriß einer elipsoidisch-hyperboloidischen Hyperkvadrik* (Lit. [1]) *in klinagonaler Projektion* (Lit. [2]) *im vierdimensionalen euklidischen Raum* (Abb. 1). Ihre Gleichung ist durch die Gleichung (a) gegeben, des betreffenden asymptotischen Hyperkegels bestimmt durch die Relation (b).

In der Arbeit ist gezeigt, wie man die Umrißkegelschnitte mittels zweier Methoden konstruktieren kann, am besten durch die Anwendung *der Erweiterung des Pelszchen Satzes.*

Im Weiteren wird gezeigt, daß die *Durchdringungskvadriken der Hyperkvadrik $E-H$ und ihrer asymptotischen Kegelhyperflächen homotetisch sind.* Deshalb würden zuerst drei Arten von Durchdringungen des Raumes **P** und Kugel-Kegel Hyperkvadrik konstruiert und zwar wenn die Durchdringungsflächen ein Elipsoid (Abb. 2), Paraboloid (Abb. 3) und ein zweischaliges Heperboloid ist (Abb. 4).

Die Konstruktion 5. beschreibt die Bestimmung der Durchdringungsfläche des Raumes **P** mit dem $E-H$ Hyperkvadrik, aber die ist ein Elipsoid (Abb. 5). In der Abbildung 6. ist die Durchdringungsfläche $\mathbf{P} \cap E-H$ durchgeführt wenn die Durchdringungsfläche ein Paraboloid ist, in der letzten Abb. 7 handelt es sich um die hyperboloidische Durchdringungsfläche $\mathbf{P} \cap E - H$.

Es ist also die Hyperkvadrik $E - H$ im Raum $\mathbf{E}_4$ ein Analogon des dreiachsigen Hyperboloides von $\mathbf{E}_3$ ähnlich wie die Kugel-Kegel Hyperkvadrik ein Analogon seines asymptotischen Kegels von $\mathbf{E}_3$ ist.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV — 3–5, MATHEM., 1959]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

Über metrische Vielverbände, I

M. KOLIBIAR

Einleitung

In der Arbeit [1] führte M. Benado den Begriff „normierter Vielverband" ein. Man versteht darunter einen Vielverband M, in dem eine gewisse reelle Funktion, sog. Valuation, definiert ist. Mit Hilfe der Valuation kann man unter gewissen Bedingungen eine Metrik in M einführen. In dieser Note wählen wir eine formell andere Weise, und zwar betrachten wir einen Vielverband M, in dem eine Metrik, die gewisse Bedingungen in bezug auf die Anordnung in M erfüllt, erklärt ist. Im Falle, wenn die Halbordnung M gerichtet ist, stimmt dieser Begriff mit dem des normierten Vielverbands überein. Einen Spezialfall der metrischen Vielverbände bilden metrische Verbände.

Im Abschn. 1 sind die am häufigsten benützten Begriffe eingeführt. Abschn. 2 enthält einige Hilfssätze über die metrische Relation „zwischen" in metrischen Vielverbänden. Im Abschn. 3 werden solche Abbildungen von metrischen Vielverbänden betrachtet, die in bezug auf die Relation „zwischen" relationstreu sind. Ein Kriterium für die Existenz einer solchen Abbildung im Fall der gerichteten distributiven Vielverbände gibt Satz 3.3.2. Als Spezialfall bekommen wir den von J. Jakubík [2] bewiesenen Satz über Graphsisomorphismus der längenendlichen distributiven Vielverbände (Satz 4.5, resp. 4.6). (Die Beweismethode des Satzes 3.3.2 ist in den Hauptlinien ähnlich wie bei dem erwähnten Satz von J. Jakubík. Sie unterscheidet sich aber von derjenigen in einzelnen Schritten wegen der allgemeineren Voraussetzungen, die bei der Satz 3.3.2 bestehen.)

Als eine weitere Folgerung dieser Betrachtungen bekommen wir einen Satz (3.4), der die zu ein und demselben metrischen Raum gehörige Klasse der gerichteten distributiven Vielverbände ordnungstheoretisch charakterisiert.

1. Metrische Vielverbände

1.1. Vielverbände. P sei eine Halbordnung. Wir sagen, daß P *nach oben (nach unten) gerichtet* ist, wenn es zu je zwei Elementen $a, b \in P$ ein Element $u \in P$ gibt, so daß $a \leq u$, $b \leq u$ ($a \geq u$, $b \geq u$) gilt. Falls P nach oben und nach unten gerichtet ist, sagen wir kurz, daß P *gerichtet* ist.

Sind $a, b \in P$, bezeichnen wir mit $a \vee b$ die Menge aller derjenigen Elemente $u \in P$, für die gilt: 1. $u \geq a$, $u \geq b$; 2. wenn $t \in P$, $t \geq a$, $t \geq b$, $u \geq t$, so

$t = u$. Ist $p \in P$, $p \geq a$, $p \geq b$, so definieren wir $(a \vee b)_p = \{u \in P \mid u \leq p, u \in a \vee b\}$. Dual definieren wir die Mengen $a \wedge b$ und $(a \wedge b)_p$ $(p \leq a, p \leq b)$.

Eine Halbordnung P wird ein *Vielverband*[1]) genannt, wenn

1. für jede $a, b, t \in P$, $t \geq a$, $t \geq b$, gilt $(a \vee b)_t \neq \emptyset$;
2. für jede $a, b, t \in P$, $t \leq a$, $t \leq b$, gilt $(a \wedge b)_t \neq \emptyset$.

Ist M ein Vielverband, so wird $|M|$ die Menge der Elemente von M bedeuten.

Die Vielverbände M, M' heißen isomorph (in zeichen $M \sim M'$), wenn sie als Halbordnungen isomorph sind.

Ist $u \in a \vee b$, so gilt offenbar $(a \vee b)_u = \{u\}$. Wir werden das kurz in der Form $(a \vee b)_u = u$ schreiben. Analog für $a \wedge b$. Weiter sind offenbar die Behauptungen: Ist $a \leq b$, so $a \vee b = b$, $a \wedge b = a$. Wenn $a \leq u$, $b \leq c \leq u$, $u \in a \vee b$, so $u \in a \vee c$, d. h. $u = (a \vee c)_u$. Diese Behauptungen sowie ihnen dualen Behauptungen werden im weiteren ohne Hinweise benutzt werden.

Ein Vielverband heißt *modular* ([1], 4.41), wenn aus $u \leq a \leq v$, $u \leq b \leq b' \leq v$, $(a \vee b)_v = v$, $(a \wedge b')_u = u$ folgt $b = b'$. Ein Vielverband heißt *distributiv* [1], wenn aus den Beziehungen $u \leq a_i \leq v$, $i = 1, 2, 3$, $(a_1 \vee a_2)_v = (a_1 \vee a_3)_v = v$, $(a_1 \wedge a_2)_u = (a_1 \wedge a_3)_u = u$ folgt $a_2 = a_3$. Offenbar ist ein distributiver Vielverband modular.

Natürlich ist ein Vielverband genau dann ein Verband, wenn für jede a, b die Mengen $a \wedge b$, $a \vee b$ genau ein Element enthalten. Die Bedingungen der Modularität und der Distributivität stimmen im Fall der Verbände mit den dazugehörigen Bedingungen für Verbände überein.

1.2. Kardinalprodukt von Vielverbänden. Sei $A_1 \times A_2 = P$ ein Kardinalprodukt von Halbordnungen A_1, A_2 ([4], §7). Die folgenden Behauptungen können leicht bewiesen werden:

1. *P ist nach unten (nach oben) gerichtet genau dann, wenn A_1, A_2 nach unten (nach oben) gerichtet sind.*

2. *P ist ein Vielverband genau dann, wenn A_1, A_2 Vielverbände sind.*

3. Ist $x \in P$, bezeichnen wir mit x_1, x_2 $(x_i \in A_i)$ die Komponenten von x. *Für die Elemente $a, b, t, u \in P$ gilt $u \in (a \vee b)_t$ $(u \in (a \wedge b)_t)$ genau dann, wenn in A_i $(i = 1, 2)$ $u_i \in (a_i \vee b_i)_{t_i}$ $(u_i \in (a_i \wedge b_i)_{t_i})$ gilt.*

1.3. Normierte Vielverbände. Wir sagen, daß ein Vielverband M *normiert* ist [1], wenn in der Menge M eine reelle Funktion $v[x]$ $(x \in M)$ gegeben ist, die folgende Eigenschaften bezitzt:

V1. *Wenn $a, b \in M$, $d \in a \wedge b$, $h \in a \vee b$, so*

$$v[a] + v[b] = v[d] + v[h].$$

V2'. *v ist positiv, d. h. aus $a < b$ folgt $v[a] < v[b]$.*

1.3.1. In der Arbeit [1] sind folgende Sätze bewiesen (5.4, 5.5):

1. *Ein gerichteter normierter Vielverband ist ein metrischer Raum, wenn wir die Metrik wie folgt definieren:*

$$\varrho(a, b) = v[h] - v[d];$$

dabei ist h (d) beliebiges Element von $a \vee b$ $(a \wedge b)$.

---

[1]) Die hier angegebene Definition unterscheidet sich nur formal von der in [1] benutzten.

2. *Ein normierter Vielverband ist modular.*

1.3.2. a) *M sei ein gerichteter normierter Vielverband. Die Metrik ϱ von Satz 1 Abschn. 1.3.1 besitzt die beiden folgenden Eigenschaften:*

M1. *Aus $a \leq b \leq c$ folgt $\varrho(a, b) + \varrho(b, c) = \varrho(a, c)$.*

M2. *Ist d ein Element aus $a \vee b$ oder $a \wedge b$, so gilt*

$$\varrho(a, d) + \varrho(d, b) = \varrho(a, b).$$

b) *M sei ein nach unten gerichteter Vielverband, in dem eine Metrik ϱ mit den Eigenschaften* **M1**, **M2** *erklärt ist. Sei $u \in M$. Setzen wir für $x \in M$ fest*

$$v[x] = \varrho(x, d) - \varrho(u, d), \tag{1}$$

wo d ein beliebiges Element von $u \wedge x$ ist. Dann besitzt die Funktion $v[x]$ die Eigenschaften **V1**, **V2**$'$ *(M ist also ein normierter Vielverband). Ist M auch nach oben gerichtet, so stimmt die durch v nach Satz 1 Abschn. 1.3.1 gegebene Metrik mit ϱ überein.*

Beweis. a) Es seien die Voraussetzungen der Behauptung a) erfüllt. Die Gültigkeit von **M1** ist klar. Seien $d \in a \wedge b$, $h \in a \vee b$. Mit Hilfe von **V1** bekommen wir

$$\begin{aligned} \varrho(a, b) &= v[h] - v[d] = (v[h] - v[a]) + (v[a] - v[d]) = \\ &= (v[b] - v[d]) + (v[a] - v[d]) = \\ &= \varrho(b, d) + \varrho(d, a) = \varrho(a, h) + \varrho(h, b). \end{aligned}$$

b) Es seien nun die Voraussetzungen der Behauptung b) erfüllt. Die Zahl $v[x]$ hängt von der Wahl des Elements d nicht ab. Denn sind d_1, d_2 zwei Elemente von $u \wedge x$, wählen wir ein $c \in d_1 \wedge d_2$. Nach **M1** ist nun

$$\varrho(u, d_1) + \varrho(d_1, c) = \varrho(u, d_2) + \varrho(d_2, c),$$

$$\varrho(x, d_1) + \varrho(d_1, c) = \varrho(x, d_2) + \varrho(d_2, c),$$

woraus $\varrho(x, d_1) - \varrho(u, d_1) = \varrho(x, d_2) - \varrho(u, d_2)$ folgt.
Sei $a \vee b \neq 0$, $d \in a \wedge b$, $h \in a \vee b$. Nach **M2** ergibt sich

$$\varrho(a, b) = \varrho(a, d) + \varrho(d, b) = \varrho(a, h) + \varrho(h, b) \tag{2}$$

und nach **M1**

$$\varrho(d, h) = \varrho(d, a) + \varrho(a, h) = \varrho(d, b) + \varrho(b, h). \tag{3}$$

Daraus folgt $2\varrho(a, b) = 2\varrho(d, h)$,
also

$$\varrho(a, b) = \varrho(d, h). \tag{4}$$

Aus (2), (3) und (4) ergibt sich

$$\varrho(a, h) = \varrho(d, b), \tag{5}$$

$$\varrho(a, d) = \varrho(h, b). \tag{5'}$$

Sei $a \leq b$. Wählen wir $d \in u \wedge a$, $e \in (u \wedge b)_d$. Dann gilt $v[a] = \varrho(a, d) - \varrho(u, d)$, $v[b] = \varrho(b, e) - \varrho(u, e)$. Aus **M1** folgt $\varrho(u, d) = \varrho(u, e) + \varrho(e, d)$, also (nach **M1**)
$v[b] - v[a] = \varrho(b, e) - \varrho(u, e) - \varrho(a, d) + \varrho(u, d) = \varrho(b, e) + \varrho(e, d) - \varrho(d, a) = \varrho(b, d) - \varrho(a, d) = \varrho(a, b)$. Damit haben wir:

$$\text{(6)} \qquad \text{Aus } a \leq b \text{ folgt } v[b] - v[a] = \varrho(a, b).$$

Ist $a < b$, so $\varrho(a, b) > 0$, d. h. $v[a] < v[b]$, also gilt **V2′**.

Seien a, b beliebige Elemente von M, $a \vee b \neq \emptyset$ (und der Voraussetzung nach auch $a \wedge b \neq \emptyset$). Sei $d \in a \wedge b$, $h \in a \vee b$. Nach (6) ergibt sich $v[a] - v[d] = \varrho(a, d)$, $v[h] - v[b] = \varrho(h, b)$. Daraus folgt **V1** nach (5′).

Sei nun M gerichtet. Konstruieren wir die Metrik δ nach Satz 1 Abschn. 1.3.1, d. h. setzen wir fest $\delta(a, b) = v[h] - v[d]$, wobei $h \in a \vee b$, $d \in a \wedge b$. Nach (6) und (4) ergibt sich $\delta(a, b) = v[h] - v[d] = \varrho(h,d) = \varrho(a, b)$, d. h. die Metriken δ, ϱ stimmen überein.

1.4. Metrische Vielverbände. Wir wollen einen Vielverband M mit einer Metrik ϱ ein *metrischer Vielverband* nennen, falls die Bedingungen **M1**, **M2** aus 1.3.2 erfüllt sind. (Dabei ist **M2** so zu verstehen: ist $a \vee b \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$) und $d \in a \vee b$ ($d \in a \wedge b$), so $\varrho(a, d) + \varrho(d, b) = \varrho(a, b)$.) Ein metrischer Vielverband mit der Metrik ϱ wird mit (M, ϱ) bezeichnet werden.

Aus 1.3.2 folgt, daß im Fall eines gerichteten Vielverbands die Begriffe normierter Vielverband und metrischer Vielverband gleichbedeutend sind.

Ein zu einem gegebenen metrischen Vielverband dualer Vielverband, mit derselben Metrik, ist offenbar wieder metrischer Vielverband.

1.4.1. Aus dem Beweis von 1.3.2 (die Beziehungen (4), (5)) folgt:
Gilt für die Elemente a, b eines metrischen Vielverbands $a \wedge b \neq \emptyset$, $a \vee b \neq \emptyset$, $d \in a \wedge b$, $h \in a \vee b$, so $\varrho(a, b) = \varrho(d, h)$, $\varrho(a, h) = \varrho(d, b)$, $\varrho(a, d) = \varrho(h, b)$.

1.4.2. *Ein metrischer Vielverband ist modular.*

Beweis. Es gelte $u \leq a \leq v$, $a \leq b \leq b' \leq v$, $(a \vee b)_v = v$, $(a \wedge b')_u = u$. Das Intervall $\langle u, v \rangle = \{x \mid u \leq x \leq v\}$ ist ein metrischer Vielverband, der den Bedingungen der Behauptung b) in 1.3.2 genügt und so ist es ein normierter Vielverband. Mit Hilfe von 1.3.1 (Satz 2) ergibt sich $b = b'$, w. z. z. w.

1.4.3. Beispiel: längenendliche Vielverbände. Einen Vielverband M nennen wir *längenendlich*, wenn jede beschränkte Kette in M endlich ist. Falls die Elemente $a, b \in M$ benachbart[2]) sind, schreiben wir $a\mathbf{s}b$.

Die Menge der Elemente von M

$$\text{(7)} \qquad a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$$

nennen wir eine a mit b verbindende *Linie* (oder eine Linie von a nach b), falls für alle $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ die Beziehung $x_i \mathbf{s} x_{i+1}$ besteht. Wir wollen die Zahl n die Länge, und a, b die Endpunkte, der Linie (7) nennen.

1.4.3.1. *a, b seien Elemente eines längenendlichen modularen Vielverbands, $a \leq b$. Dann hat jede maximale Kette von a nach b die gleiche Länge.*

Die Behauptung folgt aus dem Satz 4.7 der Arbeit [1].

---

[2]) D. h. $a < b$ oder $b < a$ und es gibt kein c in M, das echt zwischen a und b liegt [14].

Die Länge einer maximalen Kette von a nach b ($a \leq b$) wird mit $d(a, b)$ bezeichnet werden.

1.4.3.2. *Es gelte für die Elemente a, b eines längenendlichen modularen Vielverbands $a \wedge b \neq \emptyset$, $a \vee b \neq \emptyset$. Wenn $u \in a \wedge b$, $v \in a \vee b$, so*

$$d(a, v) + d(v, b) = d(u, v) = d(a, u) + d(u, b),$$
$$d(u, a) = d(b, v).$$

Beweis. Die erste Beziehung folgt unmittelbar aus der Betrachtungen Abschn. 4.741 [1]. Die zweite folgt aus der ersten und aus der offenbaren Gleichheit $d(u, v) = d(u, a) + d(a, v)$.

1.4.3.3. Aus 1.4.3.2 folgt, daß unter der Voraussetzung $a \wedge b \neq \emptyset, a \vee b \neq \emptyset$ im längenendlichen modularen Vielverband gilt: *Wenn u_1, $u_2 \in a \vee b$ (u_1, $u_2 \in a \wedge b$), so $d(a, u_1) + d(u_1, b) = d(a, u_2) + d(u_2, b)$.*

Anmerkung. Diese Behauptung wäre nicht richtig, wenn wir die Bedingung $a \wedge b \neq \emptyset$ ausließen. Das zeigt das Beispiel des modularen Vielverbands, dessen Diagramm Abb. 1 zeigt. Es gilt hier $d(a, u_1) + d(u_1, b) = 4$, $d(a, u_2) + d(u_2, b) = 2$.

1.4.3.4. *Es sei in einem längenendlichen gerichteten modularen Vielverband eine Linie der Länge n mit Endpunkten a, b gegeben. Ist $u \in a \vee b$ ($u \in a \wedge b$), so*

$$d(a, u) + d(u, b) \leq n.\text{[3]} \tag{8}$$

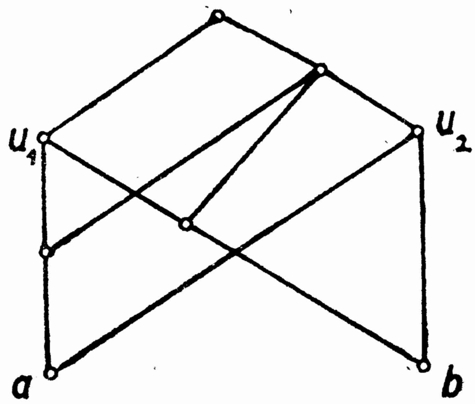


Abb. 1.

Beweis. Wir wenden die Induktion nach n an. Es genügt, den Fall $u \in a \vee b$ zu betrachten, der zweite Fall ist dual.

Ist $n = 1$, so müssen a, b benachbart sein, u ist einem der Elemente a, b gleich und (8) ist erfüllt. Sei nun $n > 1$ und es gelte die Behauptung für alle Linien der Länge $n - 1$. Wollen wir zwei Fälle unterscheiden: 1. $x_{n-1} > b$, 2. $x_{n-1} < b$.

Fall 1. Wählen wir $r \in a \vee x_{n-1}$, $t \in (a \vee b)_r$. Nach der Induktionsvoraussetzung

$$d(a, r) + d(r, x_{n-1}) \leqq n - 1. \tag{9}$$

[3]) D. h. eine Linie, die aus den Ketten von a nach u und von b nach u zusammengesetzt ist, ist die kürzeste Linie von a nach b.

Ist $t = r$, so gilt nach 1.4.3.3 und (9)

$$d(a, u) + d(u, b) = d(a, r) + d(r, b) = d(a, r) + d(r, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, b) \leq n$$

(wegen $d(x_{n-1}, b) = 1$). Ist $t < r$, so gilt $r = (t \vee x_{n-1})_r$ (wegen $a \leq t < r$ und $r \in a \vee x_{n-1}$), $b \in (t \wedge x_{n-1})_b$ (weil x_{n-1} ein oberer Nachbar von b ist), also nach 1.4.3.2 $d(t, b) = d(r, x_{n-1})$. Mit 1.4.3.3 ergibt sich weiter $d(a, u) + d(u, b) = d(a, t) + d(t, b) = d(a, t) + d(r, x_{n-1}) < d(a, t) + d(t, r) + d(r, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, b) = d(a, r) + d(r, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, b) \leq n$ (wir haben (9) und $d(x_{n-1}, b) = 1$ benutzt).

Fall 2. Wählen wir ein $r \in (a \vee x_{n-1})_u$. Wegen $a \leq r \leq u$ und $u \in a \vee b$ ist $u = (r \vee b)_u$. Da b ein oberer Nachbar von x_{n-1} ist, $x_{n-1} = (r \wedge b)_{x_{n-1}}$. Nach 1.4.3.2 $d(r, u) = d(x_{n-1}, b) = 1$, $d(u, b) = d(r, x_{n-1})$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt (9). Daraus folgt $d(a, u) + d(u, b) = d(a, r) + d(r, u) + d(u, b) = d(a, r) + d(r, x_{n-1}) + 1 \leq n$.

1.4.3.5. *Sei M ein längenendlicher gerichteter modularer Vielverband. M ist ein metrischer Vielverband, wenn wir definieren $\varrho(a, b) = d(a, u) + d(u, b)$, wobei u irgendein Element von $a \vee b$ ist.*

Beweis. Nach 1.4.3.3 hängt $\varrho(a, b)$ nicht vom Element u ab. Offenbar $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$, $\varrho(a, a) = 0$. Ist $\varrho(a, b) = 0$, so $d(a, u) + d(u, b) = 0$, d. h. $a = u = b$. Sind $a, b, c \in M$, wählen wir $u \in a \vee b$, $v \in b \vee c$, $z \in a \vee c$. Nach 1.4.3.4 ergibt sich $d(a, z) + d(z, c) \leq d(a, u) + d(u, b) + d(b, v) + d(v, c)$, also $\varrho(a, c) \leq \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$. Die Eigenschaften **M1**, **M2** folgen unmittelbar aus der Definition der Metrik und aus 1.4.3.2.

Bemerkung. Die Anmerkung in 1.4.3.3 zeigt, daß in 1.4.3.5 nicht die Voraussetzung genügen würde, daß M nach oben gerichtet ist.

1.5. Metrische Verbände. Ein metrischer Verband ist der Definition nach (siehe [4]) ein normierter Verband (d. h. ein normierter Vielverband, der ein Verband ist).

Aus 1.3.2 folgt: Ist S ein metrischer Verband, so ist $\varrho(a, b) = v[a \cup b] - v[a \cap b]$ eine Metrik in S, die den Bedingungen genügt: **M1** und **M2'**: $\varrho(a, a \cup b) + \varrho(a \cup b, b) = \varrho(a, b) = \varrho(a, a \cap b) + \varrho(a \cap b, b)$. Umgekehrt: Ist S ein Verband mit der Metrik ϱ, die die Eigenschaften **M1** und **M2'** besitzt, so ist S metrischer Verband, wenn wir die Valuation wie folgt definieren: $v[x] = \varrho(u \cap x, x) - \varrho(u \cap x, u)$, wobei u beliebiges, fest gewähltes Element von S ist. Dabei gilt $v[a \cup b] - v[a \cap b] = \varrho(a, b)$. Man kann also einen metrischen Verband entweder mit Hilfe der Valuation $v[x]$, oder mit Hilfe der Metrik, die den Bedingungen **M1**, **M2'** genügt, definieren. (Dabei kann **M2'** durch die Gleichheit $\varrho(a, b) = \varrho(a \cap b, a \cup b)$ ersetzt werden.)

Aus 1.4.3.5 folgt, daß jeder längenendliche modulare Verband ein metrischer Verband ist, wenn wir die Metrik (z. B.) so erklären: $\varrho(a, b) = d(a, a \cup b) + d(a \cup b, b)$ (vgl. [4]).

2. Die metrische Relation „zwischen"

Ist für die Elemente a, b, x eines metrischen Raumes die Bedingung $\varrho(a, x) + \varrho(x, b) = \varrho(a, b)$ erfüllt, so sagt man, daß *x zwischen a und b liegt*. Wir wollen diese Relation mit axb bezeichnen.

2.1. *Es gelte für die Elemente a, b, x eines metrischen Vielverbands M $a \wedge x \neq \emptyset$, $x \wedge b \neq 0$ und es existieren die Elemente $u \in a \wedge x$, $v \in x \wedge b$,* *so daß* $u \wedge v \neq \emptyset$. *Dann gilt* axb *genau dann, wenn 1.* $x = (u \vee v)_x$; *2. aus* $t \in u \wedge v$ *folgt* $t \in a \wedge b$.

Beweis. Es seien die Voraussetzungen der Behauptung erfüllt und es gelte axb. Wählen wir $p \in (u \vee v)_x$, $q \in (a \wedge b)_t$. Es gilt $\varrho(u, p) = \varrho(t, v)$, $\varrho(u, t) = \varrho(p, v)$ (1.4.1). Mit Hilfe von **M1** und **M2** ergibt sich

$$\varrho(a, b) = \varrho(a, x) + \varrho(x, b) = \varrho(a, u) + \varrho(u, x) + \varrho(x, v) + \varrho(v, b) = \varrho(a, u) + \varrho(u, p) + 2\varrho(p, x) + \varrho(p, v) + \varrho(v, b) = \varrho(a, u) + \varrho(u, t) + \varrho(t, v) + \varrho(v, b) + 2\varrho(p, x) = \varrho(a, t) + \varrho(t, b) + 2\varrho(p, x) = \varrho(a, q) + 2\varrho(q, t) + \varrho(q, b) + 2\varrho(p, x) = \varrho(a, b) + 2\varrho(q, t) + 2\varrho(p, x).$$

Daraus folgt $\varrho(q, t) + \varrho(p, x) = 0$, d. h. $q = t$, $p = x$ und so sind die Bedingungen 1, 2 erfüllt.

Es seien nun die Bedingungen 1, 2 erfüllt. Dann $\varrho(u, t) = \varrho(x, v)$, $\varrho(u, x) = \varrho(t, v)$ und weiter

$$\varrho(a, b) = \varrho(a, t) + \varrho(t, b) = \varrho(a, u) + \varrho(u, t) + \varrho(t, v) + \varrho(v, b) = \varrho(a, u) + \varrho(u, x) + \varrho(x, v) + \varrho(v, b) = \varrho(a, x) + \varrho(x, b).$$

Also gilt axb.

Bemerkungen. 1. Offenbar gilt auch die zu dieser Behauptung duale Behauptung.

2. Für metrische Verbände folgt daraus, daß axb mit den Beziehungen $(a \cap x) \cup (x \cap b) = x, a \cap x \cap b = a \cap b$, d. h. mit der Beziehung $(a \cap x) \cup (x \cap b) = x = x \cup (a \cap b)$ äquivalent ist. (Vgl. [5].)

2.2. Aus 2.1 folgt: *Sei* M *ein gerichteter metrischer Vielverband. Für die Elemente* $a, b, x \in M$ *gilt* axb *genau dann, wenn die folgende Bedingung* (m) *oder die dazu duale Bedingung* (m') *erfüllt ist:*

(m) *Aus* $u \in a \wedge x$, $v \in x \wedge b$ *folgt* $x \in (u \vee v)_x$, $u \wedge v \subset a \wedge b$. *Die Bedingungen* (m), (m') *sind gleichwertig.*

2.3. Seien M, A_1, A_2 gerichtete Vielverbände und $M \sim A_1 \times A_2$. Bezeichnen wir mit (t_1, t_2) das Bildelement von $t \in M$ bei diesem Isomorphismus. *Die Elemente* $a, b, x \in M$ *genügen der Bedingung* (m) *genau dann, wenn die Elemente* $a_i, b_i, x_i \in A_i$, $i = 1, 2$ *dieser Bedingung genügen.*

Dasselbe gilt für die Bedingung (m').

Der Beweis stellt keine Schwierigkeiten dar.

2.4. Es gilt offenbar: Genügen die Elemente a, b, x des Vielverbands A den Bedingungen (m), (m'), so sind diese Bedingungen auch im dualen Verband $\tilde{A}$ für die Elemente a, b, x erfüllt.

2.5. *Sei* M *ein nach unten gerichteter Vielverband und es sei in* M *eine Metrik* ϱ *gegeben.* (M, ϱ) *ist metrischer Vielverband genau dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

(A) *Wenn die Elemente* $a, b, x \in M$ *der Bedingung* (m) *genügen, so gilt* axb.

Beweis. Sei (A) erfüllt. Gilt eine der Beziehungen $a \leq x \leq b$, $x \in a \wedge b$, $x \in a \vee b$, so erfüllen die Elemente a, b, x (wie man leicht werifizieren kann) die Bedingung (m), also gilt axb. **M1**, **M2** sind somit erfüllt. Die Umkehrung gilt nach 2.1.

2.6. *Es gelte für die Elemente* a, b, c *eines metrischen Vielverbands* abc, $a \leq c$, $a \wedge b \neq \emptyset$. *Dann* $a \leq b \leq c$.

Bemerkung. Aus $a \leq b \leq c$ folgt offenbar abc.

Beweis. Wählen wir $u \in a \wedge b$, $v \in (c \wedge b)_u$. Dann $u \leq a \leq c$, $u \leq v \leq c$, $u \leq v \leq b$. Mit **M1**, **M2** ergibt sich

$$\varrho(a, c) = \varrho(a, b) + \varrho(b, c) = \varrho(a, u) + \varrho(u, b) + \varrho(b, v) + \varrho(v, c) = \varrho(a, u) + \\ + \varrho(u, v) + 2\varrho(v, b) + \varrho(v, c) = \varrho(a, u) + \varrho(u, c) + 2\varrho(v, b),$$

$\varrho(u, c) = \varrho(u, a) + \varrho(a, c)$.
Daraus folgt $\varrho(u, a) = 0 = \varrho(v, b)$, d. h. $u = a$, $b = v$, also $a \leq b \leq c$.

2.7. *Es gelte in einem metrischen Vielverband* $b \leq a$, $b \leq c$ ($b \geq a$, $b \geq c$). *So gilt* abc *genau dann, wenn* $b \in a \wedge c$ ($b \in a \vee c$).

Beweis. Aus $b \in a \wedge c$ folgt abc nach **M2**. Es gelte nun abc. Wählen wir $u \in (a \wedge c)_b$. Nach **M1** und **M2** $\varrho(a, u) + \varrho(u, c) = \varrho(a, c) = \varrho(a, b) + \varrho(b, c) = \varrho(a, u) + 2\varrho(u, b) + \varrho(u, c)$. Daraus folgt $\varrho(u, b) = 0$, d. h. $u = b$. Der zweite Fall ist dual.

3. m-äquivalente metrische Vielverbände

Es entsteht eine natürliche Frage, diejenigen metrischen Räume zu charakterisieren, die (bei passender Erklärung der Anordnungsrelation) zu metrischen Vielverbänden werden können. Auf diese Frage werden wir im zweiten Teil dieser Arbeit näher eingehen. Dabei wird sich zeigen, daß von den Eigenschaften dieser metrischen Räume nur die Eigenschaften der metrischen Relation „zwischen" vorkommen. Daher ist es zweckmäßig, folgenden Begriff einzuführen:

Definition. Metrische Vielverbände M', M sollen *m-äquivalent* heißen, wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung φ von M auf M' gibt, derart, daß in M abc genau dann gilt, wenn in M' $\varphi(a)\,\varphi(b)\,\varphi(c)$ gilt. Die Abbildung φ nennen wir *m-äquivalente Abbildung*, oder *m-Äquivalenz*.

Wir wollen nun untersuchen, wie zwei m-äquivalente metrische Vielverbände zusammenhängen.

3.1. Im ganzen Abschnitt 3.1 bedeuten M, M' m-äquivalente nach unten gerichtete metrische Vielverbände. Ist $x \in M$, so wird x' das Bildelement von x in der zugehörigen m-Äquivalenz bedeuten. Die Anordnungsrelation und die Operationen sollen in M mit $\leq$, $\wedge$, $\vee$ in M' mit $\subseteq$, $\cap$, $\cup$ bezeichnet werden.

Wir sagen, daß *das Intervall* $\langle u, v\rangle$, $u \leq v$, *erhalten wird (umgekehrt wird)*,[4] wenn in M' $u' \subseteq v'$ ($u' \supseteq v'$) gilt. Dabei lassen wir auch den Fall $u = v$ zu (so daß das Intervall $\langle u, v\rangle$ wird in diesem Fall sowohl erhalten, als auch umgekehrt).

3.1.1. *Wird das Intervall* $\langle u, v\rangle$, $u \leq v$, *erhalten (umgekehrt) und* $u \leq a \leq b \leq v$, *so wird auch das Intervall* $\langle a, b\rangle$ *erhalten (umgekehrt).*

Beweis. Es gilt ubv, uab. In M' gilt dann nach 2.6 $u' \subseteq b' \subseteq v'$, $u' \subseteq a' \subseteq b'$. Der Fall mit der Umkehrung ist dual.

3.1.2. a) *Wenn* $u \leq v$, $p' \in u' \cap v'$ ($p' \in u' \cup v'$), *so* $u \leq p \leq v$. b) *Wenn* $u \leq p \leq v$, $p' \subseteq u'$, $p' \subseteq v'$ ($p' \supseteq u'$, $p' \supseteq v'$), so $p' \in u' \cap v'$ ($p' \in u' \cup v'$).

Beweis. a) Aus der Voraussetzung folgt $u'p'v'$, d. h. upv. Man hat nun nur 2.6 anzuwenden. b) Wegen upv gilt $u'p'v'$, woraus die Behauptung nach 2.7 folgt.

---

[4]) Wir benutzen hier die Terminologie aus [13].

3.1.3. *Sei $u \leq v$. Dann gibt es ein $t \in M$ derart, daß $u \leq t \leq v$ und das Intervall $\langle u, t\rangle$ wird umgekehrt, $\langle t, v\rangle$ wird erhalten.*

Beweis. Wählen wir $t' \in u' \cap v'$, Nach 3.1.2 a) gilt $u \leq t \leq v$, woraus die Behauptung folgt.

3.1.4. *M, M' seien gerichtet und distributiv. Seien $u \in a \wedge b$, $v \in a \vee b$. Wenn die Intervalle $\langle u, a\rangle$, $\langle u, b\rangle$ erhalten (umgekehrt) werden, so wird auch das Intervall $\langle u, v\rangle$ (also nach 3.1.1 auch $\langle a, v\rangle$ und $\langle b, v\rangle$) erhalten (umgekehrt).*

Beweis. Die Behauptung über die Umkehrung kann aus der Behauptung über die Erhaltung gefolgert werden, wenn man statt M' den dualen Vielverband nimmt. Wir werden die Behauptung über die Erhaltung bewiesen.

Wählen wir $x' \in a' \cup v'$, $y' \in b' \cup v'$. Nach 3.1.2a) ist $a \leq x \leq v$, $b \leq y \leq v$ und die Intervalle $\langle u, x\rangle$, $\langle u, y\rangle$ werden somit erhalten. Wählen wir ein $z \in (x \wedge y)_u$. Die Intervalle $\langle z, x\rangle$, $\langle z, y\rangle$ werden nach 3.1.1 erhalten. Offenbar ist $v \in (x \vee y)_v$ und die Intervalle $\langle x, v\rangle$, $\langle y, v\rangle$ werden umgekehrt.

Sei nun $p' \in z' \cap v'$. Nach 3.1.2 a) $z \leq p \leq v$. Das Intervall $\langle p, z\rangle$ wird damit umgekehrt und $\langle p, v\rangle$ wird erhalten. Mit 3.1.2 b) (wir vertauschen dabei die Rollen von M und M') ergibt sich $z \in x \wedge p$, $v \in x \vee p$, also, wegen der Distributivität von M, $p = y$. Da $p' \subseteq v' \subseteq y'$, ist auch $y' = v'$, also $y = v$. Daher wird das Intervall $\langle u, v\rangle$ erhalten, womit die Behauptung bewiesen ist

Bemerkung. Man sieht leicht, daß in 3.1.4 die Voraussetzung, daß M, M' gerichtet sind, nicht durch die Voraussetzung, daß sie nach unten gerichtet sind, ersetzt werden kann. (In M' könne dann $b' \subseteq v'$, $a' \cup v' = \emptyset$, $a' \cap v' = u'$ gelten.) Auch die Voraussetzung der Distributivität von M, M' kann nicht ausgelassen werden, wie das Beispiel in 4.6 zeigt.

3.1.5. *Es haben M, M' dieselbe Bedeutung wie in 3.1.4. Für $a, b \in M$ setzen wir $a \equiv b$, falls es ein $u \in a \vee b$ gibt, derart, daß die Intervalle $\langle a, u\rangle$, $\langle b, u\rangle$ erhalten (umgekehrt) werden. Die Relation $\equiv$ erzeugt eine Zerlegung von M. Diese Zerlegung wollen wir mit R_1 (R_2) bezeichnen.*

Bemerkung. Offenbar können sowohl in 3.1.4 als auch in 3.1.5 die Operationen $\wedge$, $\vee$ durch die duale ersetzt werden.

Der Beweis von 3.1.5 kann analog wie in 3.1.4 nur auf den Fall der Erhaltung der Intervalle beschränkt werden. Offenbar ist die Relation $\equiv$ reflexiv und symmetrisch. Ist nun $a \equiv b$, $b \equiv c$, so gibt es Elemente $p \in a \vee b$, $q \in b \vee c$, derart, daß die Intervalle $\langle a, p\rangle$, $\langle b, p\rangle$, $\langle b, q\rangle$, $\langle c, q\rangle$ erhalten werden. Es seien nun $r \in p \vee q$, $s \in (a \vee c)_r$, $t \in (p \wedge q)_b$. Nach 3.1.1 werden die Intervalle $\langle t, p\rangle$, $\langle t, q\rangle$, also nach 3.1.4 auch die Intervalle $\langle p, r\rangle$, $\langle q, r\rangle$ erhalten. In M' ist also $a' \subseteq r'$, $c' \subseteq r'$. Nach 3.1.1 werden auch die Intervalle $\langle a, s\rangle$, $\langle c, s\rangle$ erhalten, d. h. $a \equiv c$.

In den weiter folgenden Abschnitten 3.1.6 bis 3.1.13 haben M, M' und R_1, R_2 dieselbe Bedeutung wie in 3.1.5.

3.1.6. *Die Zerlegungen R_1, R_2 sind vertauschbar. (D. h. wenn $a \equiv x(R_1)$, $x \equiv b(R_2)$, so gibt es ein $y \in M$, so daß $a \equiv y(R_2)$ und $y \equiv b(R_1)$.)*

Der Beweis ist analog zum Beweis der ähnlichen Behauptung in [2] (Lemma 10). Wenn $a \equiv x(R_1)$, $x \equiv b(R_2)$, so gibt es Elemente $u \in a \vee x$, $v \in x \vee b$, so daß die Intervalle $\langle a, u\rangle$, $\langle x, u\rangle$ erhalten, die Intervalle $\langle x, v\rangle$, $\langle b, v\rangle$ umgekehrt werden. Wählen wir $w \in u \vee v$, $p' \in a' \cap w'$, $q' \in w' \cup b'$, $r \in p \wedge q$. Wegen $a \leq u \leq w$, $b \leq v \leq w$ gilt nach 3.1.2 a) $a \leq p \leq w$, $b \leq q \leq w$. Analog, aus $p' \subseteq w' \subseteq q'$ ergibt sich $p' \subseteq r' \subseteq q'$. Hieraus folgt, daß die Intervalle $\langle a, p\rangle$, $\langle r, p\rangle$ umgekehrt und die Intervalle $\langle r, q\rangle$, $\langle b, q\rangle$ erhalten werden. Wählen wir nun $p_1 \in (a \vee r)_p$, $q_1 \in (r \vee b)_q$, so werden nach 3.1.1 die Intervalle $\langle a, p_1\rangle$, $\langle r, p_1\rangle$ umgekehrt, die Intervalle $\langle r, q_1\rangle$, $\langle b, q_1\rangle$ erhalten. Damit haben wir $a \equiv r(R_2)$, $r \equiv b(R_1)$, w. z. z. w.

3.1.7. *Für die Zerlegungen R_1, R_2 gilt $R_1 \cap R_2 = 0$, $R_1 \cup R_2 = J$.*[5])

Beweis. Sei $a \equiv b(R_1 \cap R_2)$, d. h. $a \equiv b(R_1)$, $a \equiv b(R_2)$. Dann gibt es Elemente $u \in a \vee b$, $v \in a \vee b$ so daß die Intervalle $\langle a, u\rangle$, $\langle b, u\rangle$ erhalten, die Intervalle $\langle a, v\rangle$, $\langle b, v\rangle$ umgekehrt werden. Mit 2.7 bekommt man $u' \in a' \cup b'$, $v' \in a' \cap b'$. Nach der Behauptung 3.1.4 (die wir da für die Elemente $a', b', u', v' \in M'$ benutzen) erhält man, daß die Intervalle $\langle a', u'\rangle$, $\langle b', u'\rangle$ und hiermit auch die Intervalle $\langle a, u\rangle$, $\langle b, u\rangle$ umgekehrt werden. Da diese Intervalle gleichzeitig erhalten werden, muß $a = u = b$ gelten, woraus $R_1 \cap R_2 = 0$ folgt.

Seien nun x, y beliebige Elemente von M. Wählen wir $b \in x \vee y$, $c' \in x' \cup b'$, $d' \in b' \cup y'$. Dann ist $x' \subseteq c'$, $b' \subseteq c'$, $b' \subseteq d'$, $y' \subseteq d'$ und mit 3.1.2 a) $x \leq c \leq b$, $y \leq d \leq b$, also $x \equiv c(R_1)$, $c \equiv b \equiv d\,(R_2)$, $d \equiv y(R_1)$, woraus $x \equiv y(R_1 \cup R_2)$ folgt.

3.1.8. *Zu beliebigen $a, b \in M$ gibt es genau ein Element x, derart, daß*

$$a \equiv x(R_1),\quad x \equiv b(R_2) \tag{1}$$

gilt und genau ein Element y derart, daß

$$a \equiv y(R_2),\quad y \equiv b(R_1) \tag{1'}$$

gilt.

Beweis. Nach 3.1.7 $a \equiv b(R_1 \cup R_2)$. Da R_1, R_2 vertauschbar sind, gibt es ein $x \in M$, so daß (1) gilt. Gelten für ein $x_1 \in M$ die Relationen (1), so ist $x_1 \equiv x(R_1)$, $x_1 \equiv x(R_2)$, woraus nach 3.1.7 $x_1 = x$ folgt. Die Existenz und die Eindeutigkeit vom y erweist sich analog.

3.1.9. *Seien $a \equiv b(R_2)$, $c \equiv d(R_2)$, $a \equiv c(R_1)$, $b \equiv d(R_1)$. Aus $a \leq b$ folgt $c \leq d$ und aus $a \leq c$ folgt $b \leq d$.*

Beweis. 1. Sei $a \leq b$. Wegen $a \equiv c(R_1)$ gibt es ein $p \in a \vee c$ so daß die Intervalle $\langle a, p\rangle$, $\langle c, p\rangle$ erhalten werden. Wählen wir ein $q \in b \vee p$. Da $a \equiv b(R_2)$, wird das Intervall $\langle a, b\rangle$ umgekehrt, also $b' \subseteq a' \subseteq p'$. Nach 3.1.2 a) $b' \subseteq q' \subseteq p'$, also das Intervall $\langle b, q\rangle$ wird erhalten. Wählen wir nun $t' \in q' \cap c'$. Wegen $c \leq p \leq q$ ist nach 3.1.2 a) $c \leq t \leq q$, also das Intervall $\langle c, t\rangle$ wird umgekehrt, das Intervall $\langle t, q\rangle$ wird erhalten. Es gilt also $t \equiv q \equiv b \equiv d(R_1)$, $t \equiv c \equiv d(R_2)$. Hieraus folgt nach 3.1.7 $t = d$, und wegen $c \leq t$ ist $c \leq d$.

2. Der Beweis, daß aus $a \leq c$ folgt $b \leq d$, ist analog zum Beweis im Teil 1. Man hat nur die Zeichen $\subseteq$, $\cap$ durch die Zeichen $\supseteq$, $\cup$ zu ersetzen und miteinander zu vertauschen: b mit c, R_1 mit R_2 und „wird erhalten" mit „wird umgekehrt" (wir behalten aber die Zeichen $\leq$, $\vee$ bei).

3.1.10. Sei t ein (fest gewähltes) Element von M. Setzen wir $A_1 = \{x \in M \mid x \equiv t(R_1)\}$, $A_2 = \{x \in M \mid x \equiv t(R_2)\}$. Nach 3.1.8 gehört zu jedem $a \in M$ ein eindeutig bestimmtes Paar von Elementen $a_1, a_2 \in M$, so daß gilt: $t \equiv a_1(R_1)$, $a_1 \equiv a(R_2)$; $t \equiv a_2(R_2)$, $a_2 \equiv a(R_1)$. Man sieht leicht, daß die Abbildung

---

[5]) 0 bedeutet hier die feinste Zerlegung (jedes Element von M bildet eine Klasse für sich), J die gröbste Zerlegung (J besitzt nur eine Klasse).

$a \to (a_1, a_2)$ (wir bezeichnen sie mit ψ) eine umkehrbar eindeutige Abbildung von M auf das Cartesische Produkt S der Mengen A_1, A_2 ist. (Das Element $(u_1, u_2) \in S$ ist ein Bild desjenigen Elementes $u \in M$, für das $u_1 \equiv u(R_2)$, $u \equiv u_2(R_1)$ gilt. Nach 3.1.8 gibt es genau ein solches Element u.)

3.1.11. *Sei ψ die Abbildung aus* 3.1.10 *und* $\psi(a) = (a_1, a_2)$, $\psi(b) = (b_1, b_2)$, $a \leq b$. *Wird das Intervall* $\langle a, b\rangle$ *erhalten (umgekehrt), so* $a_1 \leq b_1$, $a_2 = b_2$ $(a_1 = b_1, a_2 \leq b_2)$.

Beweis. Angenommen, das Intervall $\langle a, b\rangle$ wird erhalten. Dann ist $a \equiv b(R_1)$ und $a_1 \equiv a(R_2)$, $b_1 \equiv b(R_2)$, $a_1 \equiv t \equiv b_1(R_1)$. Hieraus folgt $a_1 \leq b_1$ nach 3.1.9.

Für die Elemente a_2, b_2 haben wir $a_2 \equiv b_2(R_2)$, $a_2 \equiv a(R_1)$, $b_2 \equiv b(R_1)$. Da das Intervall $\langle a, b\rangle$ erhalten wird, ist $a \equiv b(R_1)$. Daraus folgt $a_2 \equiv b_2(R_1)$. Nach 3.1.7 haben wir $a_2 = b_2$.

Falls das Intervall $\langle a, b\rangle$ umgekehrt wird, bekommen wir den Beweis aus dem vorangehenden, indem wir überall den Index 1 mit 2 vertauschen.

3.1.12. *Es sei ψ die Abbildung aus 3.1.10 und* $\psi(a) = (a_1, a_2)$, $\psi(b) = (b_1, b_2)$. $a \leq b$ *gilt genau dann, wenn* $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$.

Beweis. Sei $a \leq b$. Nach 3.1.3 gibt es ein $t \in M$, so daß $a \leq t \leq b$ gilt und das Intervall $\langle a, t\rangle$ umgekehrt wird, $\langle t, b\rangle$ wird erhalten. Sei $\psi(t) = (t_1, t_2)$. Nach 3.1.11 $a_1 = t_1$, $a_2 \leq t_2$, $t_1 \leq b_1$, $t_2 = b_2$, also $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$.

Seien nun $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$. Es gilt $a \equiv a_1(R_2)$, $a \equiv a_2(R_1)$, $b \equiv b_1(R_2)$, $b \equiv b_2(R_1)$, $a_1 \equiv b_1(R_1)$, $a_2 \equiv b_2(R_2)$. Nach 3.1.8 gibt es ein $p \in M$, so daß $a \equiv p(R_1)$, $p \equiv b(R_2)$. Nun gilt $p \equiv b \equiv b_1(R_2)$, $p \equiv a \equiv a_2(R_1)$. Nach 3.1.9 aus $a_1 \leq b_1$ folgt $a \leq p$ und aus $a_2 \leq b_2$ folgt $p \leq b$. Daher gilt $a \leq b$.

3.1.13. Aus 3.1.12 folgt, daß die Abbildung ψ ein Isomorphismus von der Halbordnung M auf das Kardinalprodukt von Halbordnungen A_1, A_2 ist (dabei hat man die Teilmengen A_1, A_2 von M mit der in M gegebenen Anordnungsrelation zu betrachten), d. h.

$$(2) \qquad M \sim A_1 \times A_2 \text{ vermöge der Zuordnung } a \to \psi(a) = (a_1, a_2).$$

Da M ein Vielverband ist, sind es auch A_1 und A_2 (1.2).

Die metrischen Vielverbände M, M' (von denen wir bei dieser ganzen Betrachtung voraussetzen, daß sie distributiv und gerichtet sind), sind m-äquivalent. Die zugehörige Abbildung von M auf M' soll mit φ bezeichnet werden. Bezeichnen wir mit A_1', A_2' die Bilder von A_1 und A_2 in der Abbildung φ. Dabei sollen A_1', A_2' mit der in M' gegebenen Anordnungsrelation betrachtet werden. Aus der Konstruktion der Mengen A_1, A_2 geht hervor, daß in der Abbildung φ sind A_1, A_1' isomorph, A_2, A_2' dual isomorph, d. h.[6])

$$(3) \qquad A_1 \sim A_1', \tilde{A}_2 \sim A_2' \text{ vermöge der Zuordnung } a \to \varphi(a) = a'.$$

Nun werden wir eine Abbildung ψ' vom Vielverband M' auf das Kardinalprodukt $A_1' \times A_2'$ erklären. Ist $a' \in M'$, so ist $a' = \varphi(a)$ für ein $a \in M$. Wenn $\psi(a) = (a_1, a_2)$, setzen wir $\psi'(a') = (a_1', a_2')$. Aus dem vorher gesagten folgt, daß $M' \sim A_1' \times A_2'$ vermöge der Zuordnung $a' \to \psi'(a') = (a_1', a_2')$. Mit (3)

[6]) Die zur Halbordnung A_2 duale Halbordnung soll mit $\tilde{A}_2$ bezeichnet werden.

haben wir jedoch $A_1' \times A_2' \sim A_1 \times \tilde{A}_2$ vermöge der Zuordnung $(a_1', a_2') \to \to (a_1, a_2)$ $(a_i' = \varphi(a_i))$. Zusammenfassend bekommen wir

$$M \sim A_1 \times A_2, \quad M' \sim A_1 \times \tilde{A}_2. \tag{4}$$

Dabei wird einem Element $a \in M$ im ersten Isomorphismus dasselbe Paar (a_1, a_2) wie dem Element $\varphi(a) = a' \in M'$ im zweiten Isomorphismus zugeordnet. Damit haben wir:

Satz. *Seien M, M' gerichtete distributive metrische Vielverbände und φ eine m-äquivalente Abbildung von M auf M'. Dann gibt es Vielverbände A_1, A_2 derart, daß (4) gilt, wobei jedem Element $a \in M$ im ersten Isomorphismus dasselbe Paar (a_1, a_2) wie dem Element $\varphi(a) \in M'$ im zweiten Isomorphismus zugeordnet wird.*

3.2. Seien M, M' gerichtete metrische Vielverbände und es gebe Vielverbände A_1, A_2, so daß (4) gilt. Die Isomorphismen (4) erzeugen die umkehrbar eindeutige Abbildung φ von M auf M', die sich durch die Zusammensetzung von Isomorphismen $M \to A_1 \times A_2$, $A_1 \times \tilde{A}_2 \to M'$ ergibt. Wir bezeichnen: Das Bildelement von $a \in M$ in der Abbildung φ mit a', das dem Element a im ersten Isomorphismus zugeordnete Paar mit (a_1, a_2).

Seien $a, b, x \in M$ und es gelte in M axb. Die Elemente a, b, x genügen den Bedingungen (m), (m') Abschn. 2.2. Nach 2.3 und 2.4 genügen auch die Elemente a', b', x' in M' diesen Bedingungen, also gilt in M' $a'x'b'$ nach 2.2. Wir haben somit

Satz. *M, M' seien gerichtete metrische Vielverbände.*[7]) *Wenn es Vielverbände A_1, A_2 gibt, so daß*

$$M \sim A_1 \times A_2, \tag{4'}$$

$$M' \sim A_1 \times \tilde{A}_2 \tag{4''}$$

gilt, so ist die Abbildung von M auf M', die sich durch Zusammensetzung der Isomorphismen (4′) und (4″) ergibt, eine m-Äquivalenz.

3.3. Durch Zusammenfassung der Sätze 3.1.13 und 3.2 bekommen wir die Sätze:

3.3.1. Satz. *M, M' seien gerichtete distributive metrische Vielverbände. Eine Abbildung φ von M auf M' ist genau dann eine m-Äquivalenz, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

(D) Es gibt Vielverbände A_1, A_2, derart, daß (4′) und (4″) gelten, wobei jedem Element $a \in M$ im Isomorphismus (4′) dasselbe Paar (a_1, a_2), wie dem Element $\varphi(a) \in M'$ in (4″) zugeordnet ist.[8])

3.3.2. Satz. *Gerichtete distributive metrische Vielverbände M, M' sind genau dann m-äquivalent, wenn es Vielverbände A_1, A_2 gibt derart, daß gilt: $M \sim A_1 \times \times A_2$, $M' \sim A_1 \times \tilde{A}_2$.*[8])

3.4. Sei (M, ϱ) ein gerichteter distributiver metrischer Vielverband. Bezeichnen wir mit $S(M)$ das System aller, in der Menge $|M|$ definierten, gerichteten distributiven Vielverbände, die bei der Metrik ϱ metrische Vielverbände sind. Es entsteht die Frage, wie hängen die Vielverbände des Systems $S(M)$ mit dem Vielverband M zusammen.

---

[7]) Wir fordern hier nicht, daß M, M' distributiv sein sollen.

[8]) Über die Möglichkeit des Abschwächens der Voraussetzungen dieses Satzes siehe die Bemerkungen im Abschn. 4.6.

Ist $M' \in S(M)$, so sind M, M' m-äquivalent vermöge der identischen Abbildung. Nach 3.1.13 wird dann die folgende Bedingung erfüllt:

(D') *Es gibt Vielverbände* A_1, A_2 *derart, daß* (4') *und* (4'') *gelten, wobei jedem Element* $a \in M$ *in beiden Isomorphismen dasselbe Paar* (a_1, a_2) *zugeordnet ist.*

Sei nun M' ein gerichteter distributiver Vielverband, der in der Menge $|M|$ definiert ist, und sei für M, M' die Bedingung (D') erfüllt. Zum Nachweis, daß (M', ϱ) ein metrischer Vielverband ist, genügt es nach 2.5 zu zeigen, daß für die Elemente $a, b, x \in |M|$, die in M' die Eigenschaft (m) haben, die Relation axb (im Sinne der Metrik ϱ) besteht. Aber nach 2.3 und 2.4 besitzen die Elemente a, b, x auch in M die Eigenschaft (m), und da (M, ϱ) ein metrischer Vielverband ist, gilt nach 2.5 axb. Damit haben wir:

Satz. *Sei* (M, ϱ) *ein metrischer Vielverband und* M' *ein in* $|M|$ *erklärter Vielverband. Die Vielverbände* M, M' *seien gerichtet und distributiv.* (M', ϱ) *ist genau dann ein metrischer Vielverband, wenn* M *und* M' *der Bedingung* (D') *genügen.*[8])

Bemerkung. Einen analogen Satz für metrische Verbände hat J. Jakubík [9] bewiesen. (Im Fall der Verbände ist die Voraussetzung der Distributivität nicht nötig.)

4. Graphsisomorphismus der Vielverbände

4.1. Definition. Seien M, M' längenendliche Vielverbände. Eine umkehrbar eindeutige Abbildung φ von M auf M' wird ein *Graphsisomorphismus* [3] genannt, wenn φ folgende Eigenschaft besitzt: Elemente $a, b \in M$ sind genau dann benachbart, wenn die Elemente $\varphi(a)$, $\varphi(b) \in M'$ benachbart sind. Falls es ein Graphsisomorphismus von M auf M' gibt, so sagen wir, M und M' seien *G-isomorph*.

4.2. *Es seien nach unten gerichtete metrische Vielverbände* M, M' *m-äquivalent vermöge der Zuordnung* $x \to x'$ $(x \in M)$. *In* M *gilt nun* $a\mathbf{s}b$[9]) *genau dann, wenn in* M' $a'\mathbf{s}b'$ *gilt.*

Beweis. Gilt für $a, b \in M$ $a\mathbf{s}b$, so gibt es kein von a und b verschiedenes Element $x \in M$, so daß axb ist (2.6). Wegen der m-Äquivalenz gilt dasselbe für die Elemente a', $b' \in M'$. Wären die Elemente a', b' unvergleichbar, so wäre das Element $c' \in a' \cap b'$ von den Elementen a', b' verschieden, und dabei gälte $a'c'b'$, was einen Widerspruch bedeutet. Also $a'\mathbf{s}b'$. Die Umkehrung gilt wegen der Symmetrie.

4.3. *Es seien* M, M' *längenendliche gerichtete modulare Vielverbände, die (vermöge der Zuordnung* $x \to x'$*) G-isomorph sind.* ϱ (ϱ') *bedeute die nach* 1.4.3.5 *in* M (M') *erklärte Metrik. Für beliebige Elemente* $a, b \in M$ *gilt dann* $\varrho(a, b) = \varrho'(a', b')$. *Insbesondere sind also die metrischen Vielverbände* (M, ϱ), (M', ϱ') *m-äquivalent.*

Beweis. Für $a, b \in M$ ist $\varrho(a, b) = d(a, u) + d(u, b)$, wobei $u \in a \vee b$. Es seien $a = a_0, a_1, \ldots, a_m = u$; $b = b_0, \ldots, b_n = u$ maximale Ketten von a nach u und von b nach u. Die Elemente $a'_0, a'_1, \ldots, a'_m, b'_{n-1}, \ldots, b'_1, b'_0$ bilden in M' eine Linie[9]) von a' nach b'. Nach 1.4.3.4 gilt für ein $v' \in a' \vee b'$ in M'

$$d(a', v') + d(v', b') \leq m + n = d(a, u) + d(u, b),$$

[9]) Siehe 1.4.3.

d. h. $\varrho'(a', b') \leq \varrho(a, b)$. Wegen der Symmetrie gilt auch die umgekehrte Ungleichung, so daß $\varrho'(a', b') = \varrho(a, b)$.

4.4. *Es seien M, M' längenendliche gerichtete modulare Vielverbände, ϱ (ϱ') die nach* 1.4.3.5 *in M (M') erklärte Metrik. Die Vielverbände M, M' sind genau dann G-isomorph, wenn die metrische Vielverbände (M, ϱ), (M', ϱ') m-äquivalent sind.*

Die Behauptung folgt aus 4.2 und 4.3.

4.5. Satz. ([2], *Satz* 1.) *M, M' seien längenendliche gerichtete ditributive Vielverbände. Eine Abbildung φ von M auf M' ist genau dann ein G-isomorphismus, wenn die Bedingung (D) aus* 3.3.1 *erfüllt ist.*

Der Satz folgt aus 4.4 und 3.3.1.

Bemerkung. Wird in diesem Satz die Forderung, daß M, M' gerichtet sind, ausgelassen, oder die Bedingung über Distributivität durch die der Modularität ersetzt, so bleibt der Satz nicht richtig, wie J. Jakubík an Beispielen in [2] zeigt. Im zweiten dieser Beispiele sind zwei modulare gerichtete Vielverbände M, M' und ein G-Isomorphismus φ von M auf M' gegeben. Dabei gibt es zur Abbildung φ keine Vielverbände A_1, A_2, die der Bedingung (D) genügen. Doch gibt es in diesem Beispiel eine andere Abbildung von M auf M', die ein duales Isomorphismus ist. Es gibt damit auch in diesem Fall Vielverbände A_1, A_2, so daß $M \sim A_1 \times A_2$, $M' \sim A_1 \times \tilde{A}_2$ gilt, sie gehören aber zu einem anderen G-Isomorphismus. (Siehe jedoch 4.6, Bemerkung 1.)

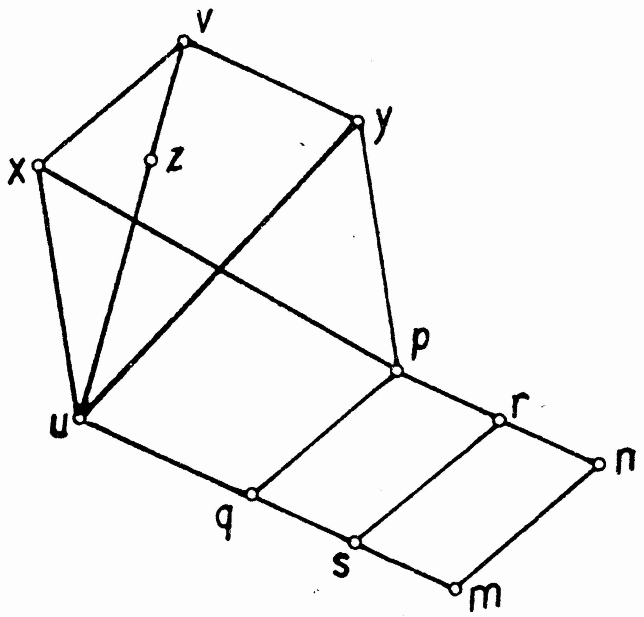


Abb. 2a.

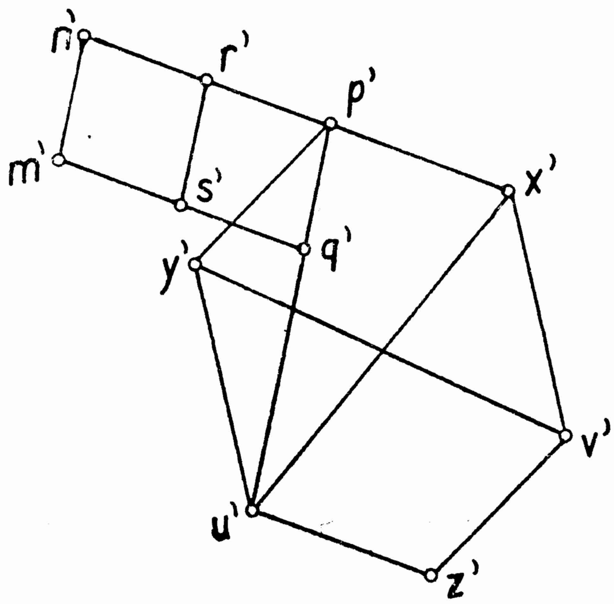


Abb. 2b.

4.6. Satz. *Zwei längenendliche gerichtete distributive Vielverbände M, M' sind genau dann G-isomorph, wenn es Vielverbände A_1, A_2 gibt, so daß $M \sim A_1 \times A_2$, $M' \sim A_1 \times \tilde{A}_2$.*

Der Satz folgt aus 4.4 und 3.3.2.

Bemerkungen. 1. Daß die Voraussetzung der Distributivität nicht ausgelassen werden kann, zeigt das Beispiel der gerichteten modularen Vielverbände, deren Diagramme die Abbildungen 2a (Vielverband M) und 2b (Vielverband M') ergeben. (Das Beispiel bekommt man aus dem in 4.5 erwähnten Beispiel J. Jakubíks durch eine kleine Abänderung.) Die Abbildung $a \to a'$ von M auf M' ist ein G-Isomorphismus. Gäbe es Vielverbände A_1, A_2, die den Forderungen vom Satz 4.6 genügen, so müßte einer der Vielverbände A_1, A_2 nur ein Element besitzen, da M 11 Elemente (Primzahl) besitzt. Dann wären M, M' isomorph oder dual isomorph. Weder der erste noch der zweite Fall kann vorkommen, wie leicht zu sehen ist (z. B. ist das größte Element in M ein oberer Nachbar von drei, in M' von zwei Elementen).

Nach 1.4.3.5 sind die Vielverbände M, M' in diesem Beispiel metrische Vielverbände und nach 4.4 sind m-äquivalent. Man sieht daraus, daß die Sätze 3.3.1, 3.3.2 und 3.4 nicht richtig wären, wenn wir die Voraussetzung der Distributivität ausließen.

2. Der Satz 4.6 bleibt auch nicht richtig, wenn wir die Voraussetzung, daß M, M' gerichtet sind, durch die schwächere Voraussetzung, daß sie nach unten gerichtet sind, ersetzen. Das zeigt das Beispiel der distributiven nach unten gerichteten Vielverbände, deren Diagramme die Abbildungen 3a (M) und 3b (M') geben. Die Abbildung $x \to x'$ ist ein G-Isomorphismus, doch sind die Vielverbände M, M' weder in Kardinalprodukt zerlegbar (außer dem Trivialfall, wenn einer der Faktoren nur ein Element besitzt) noch isomorph, noch dual isomorph.

Abb. 3a.

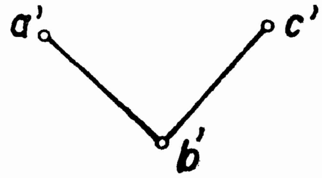


Abb. 3b.

Erklären wir $\varrho(a, b) = \varrho(b, c) = 1$, $\varrho(a, c) = 2$ und gleich ϱ' in M', so sind (M, ϱ), (M', ϱ') m-äquivalente metrische Vielverbände. Daraus ersieht man, daß in den Sätzen 3.3.1, 3.3.2 und 3.4 die Voraussetzung, daß M, M' gerichtet sind, durch die Voraussetzung, daß sie nach unten gerichtet sind, nicht ersetzt werden kann.

4.7. Anmerkungen über Verbände

4.7.1. Bekanntlich gilt in metrischen Verbänden axb genau dann, wenn

$$(1) \qquad (a \cap x) \cup (x \cap b) = x = (a \cup x) \cap (x \cup b).$$

Daher bezeichnet man auch in allgemeinen Verbänden die Relation (1) mit axb [11]. Die Verbände S, S' werden wir *b-äquivalent* nennen, wenn es eine Abbildung φ von S auf S' gibt, so daß axb $(a, x, b \in S)$ genau dann, wenn $\varphi(a)\, \varphi(x)\, \varphi(b)$. Die Abbildung φ soll eine *b-Äquivalenz* heißen.

Bemerkung. In den metrischen Verbänden stimmt der Begriff der b-Äquivalenz mit dem der m-Äquivalenz überein.

In der Arbeit [12] wurde ein Satz bewiesen, den man so formulieren kann: Die Abbildung φ vom Verband S auf den Verband S' ist genau dann eine b-Äquivalenz, wenn es Verbände A_1, A_2 gibt, so daß $S \sim A_1 \times A_2$, $S' \sim A_1 \times \times \tilde{A}_2$ gilt, wobei jedem Element $a \in S$ dasselbe Paar (a_1, a_2) wie dem Element $\varphi(a)$ zugeordnet ist.

Hieraus bekommt man leicht die Behauptung:

4.7.2. *(Beliebige) Verbände S, S' sind genau dann b-äquivalent, wenn es Verbände A_1, A_2 gibt, so daß*

$$S \sim A_1 \times A_2, \; S' \sim A_1 \times \tilde{A}_2. \tag{2}$$

4.7.3. Aus 4.4, 1.5 und Bemerkung in 4.7.1 folgt: *Längenendliche modulare Verbände S, S' sind genau dann G-isomorph, wenn sie b-äquivalent sind.*

4.7.4. Aus 4.7.3 und 4.7.2 folgt: *Längenendliche modulare Verbände S, S' sind genau dann G-isomorph, wenn es Verbände A_1, A_2 gibt, so daß* (2) *gilt.*

Dieser Satz wurde von J. Jakubík in der Arbeit [13] bewiesen. Gleichzeitig wurde dort das Problem gestellt: Man suche diesen Satz auf den Fall der (unendlichen) modularen Verbände, die bei irgendeiner (im Fall der Verbände gewöhnlichen) Topologie topologisch äquivalent sind, zu verallgemeinern. (Eine derartige Verallgemeinerung ist in [9] gegeben.)

Aus 4.7.3 folgt, daß der Satz 4.7.2 eine Verallgemeinerung des Satzes 4.7.4 von einem anderen Charakter ist (man benutzt die Relation „zwischen" statt der Topologie).

Literatur

[1] M. Benado, Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier, II (Théorie des multistructures). Чехосл. мат. ж. **5(80)**, 308–344 (1955).

[2] J. Jakubík, Grafový izomorfizmus multisväzov. Acta fac. rer. nat. Univ. Comenianae. Mathematica **1**, 255–264 (1956).

[3] J. Jakubík–M. Kolibiar, О некоторых свойствах пар структур. Чехосл. мат. ж. **4(79)** 1–27 (1954).

[4] G. Birkhoff, Lattice theory, II. Ed., 1948.

[5] L. M. Blumenthal–D. O. Ellis, Notes on lattices. Duke Math. J. **16**, 585–590 (1949).

[6] L. M. Kelly, The geometry of normed lattices. Duke Math. J. **19**, 661–669 (1952).

[7] M. F. Smiley–W. R. Transue, Applications of transitivities of betweenness in lattice theory. Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 280–287 (1943).

[8] K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik. Math. Annalen **100**, 75–163 (1928).

[9] J. Jakubík, O metrických sväzoch. Mat.-fyz. Čas. Slovensk. Akad. Vied **5**, 140–143 (1955).

[10] V. Glivenko, Géometrie des systèmes de choses normées. Amer. J. Math. **58**, 799–828 (1936).

[11] E. Pitcher–M. F. Smiley, Transitivities of betweenness. Trans. Amer. Math. Soc. **52**, 95–114 (1942).

[12] M. Kolibiar, K vzťahom „medzi" vo sväzoch. Mat.-fyz. Čas. Slovensk. Akad. Vied **5**, 162–171 (1955).

[13] J. Jakubík, О графическом изоморфизме структур. Чехосл. мат. ж. **4(79)** 131–142 (1954).

[14] H. Hermes, Einführung in die Verbandstheorie. Berlin 1955.

Do redakcie dodané 20. IV. 1959

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2.

O metrických multizväzoch, I

M. Kolibiar

Zhrnutie

Pojem metrického multizväzu, ktorý používame v tejto práci, zhoduje sa v podstate s pojmom normovaného multizväzu, ktorý zaviedol M. Benado [1]. V práci sa skúmajú najmä niektoré vlastnosti metrických multizväzov, súvisiace s pojmom metrického vzťahu „medzi“, daného rovnosťou $\varrho(a, b) + \varrho(b, c) = \varrho(a, c)$. Hlavným výsledkom v tomto smere je veta 3.4, ktorá dáva, v prípade distributívnych usmernených multizväzov, odpoveď na otázku: Ako navzájom súvisia metrické multizväzy M, M', ktoré majú tú istú metriku. O niečo všeobecnejšia je veta 3.3.2, ktorá vyjadruje súvis medzi M a M' v prípade, keď existuje prosté zobrazenie multizväzu M na M', ktoré zachováva vzťah „medzi“ (tzv. m-ekvivalencia). Ako špeciálny prípad dostaneme vetu o grafickom izomorfizme multizväzov, ktorú dokázal J. Jakubík v práci [2].

О метрических мультиструктурах, I

М. Колибиар

Резюме

Понятие метрической мультиструктуры, которым мы пользуемся в этой работе, в основном совпадает с понятием нормированной мультиструктуры, введенным М. Бенадо [1]. В работе исследуются главным образом некоторые свойства метрических мультиструктур, связанные с понятием метрического отношения „между“, данного равенством $\varrho(a, b) + \varrho(b, c) = \varrho(a, c)$. Главным результатом в этом направлении является теорема 3.4, которая, в случае дистрибутивных направленных мультиструктур, отвечает на вопрос: Какая взаимная связь между метрическими мультиструктурами M, M' с одной и той же метрикой. Несколько общей является теорема 3.3.2, выражающая связь между M, M' в случае, когда имеется взаимно однозначное отображение M на M' при котором сохраняется отношение „между“ (так называемая m-эквиваленция). В частности получается теорема о графическом изоморфизме мультиструктур, доказанная Я. Якубиком в работе [2].

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV – 3–5, MATHEM., 1959]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

Poznámka o disperziách a transformáciách diferenciálnej rovnice tretieho rádu

M. GREGUŠ

Úvod

V tejto poznámke sa zavádza pojem centrálnych disperzií pre oscilatorické riešenia diferenciálnej rovnice

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0 \tag{a}$$

za určitých predpokladov o koeficientoch A, A', b, analogicky ako v práci [1] O. Borůvku pre riešenia diferenciálnej rovnice druhého rádu:

$$y'' + Q(x)\,y = 0. \tag{α}$$

Ďalej sa tu uvádzajú vzorce pre prvú deriváciu centrálnych disperzií a nelineárna diferenciálna rovnica, ktorej vyhovujú centrálne disperzie prvého druhu. Odvodenie vzorcov je celkom podobné, aj keď trochu zdĺhavejšie, ako pre rovnicu (α), preto ho nebudeme uvádzať.

V ďalšom sa uvádzajú transformačné vzorce pre určité množiny riešení dvoch diferenciálnych rovníc tretieho rádu.

Problém sa rieši na rovniciach druhého rádu, preto odvodenie transformačných vzorcov je podobné ako v práci [2] O. Borůvku.

V práci využívam tú vlastnosť riešení diferenciálnej rovnice (a) [3], že určité množiny riešení tejto rovnice vyhovujú rovniciam druhého rádu samoadjungovaného tvaru.

I.

Nech $A, A', b \geqq 0$ sú spojitými funkciami $x \in (-\infty, \infty)$ a také, že každé riešenie diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $y(a) = 0$, $a \in (-\infty, \infty)$ osciluje napravo od a, t. j. má nekonečne mnoho nulových bodov napravo od a.

Adjungovaná diferenciálna rovnica k rovnici (a) je

$$z''' + 2Az' + (A' - b)\,z = 0. \tag{b}$$

Je známe [3], že za uvedených predpokladov riešenia diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $y(a) = 0$ vyhovujú pre $x > a$ diferenciálnej rovnici druhého rádu

$$\text{(c)} \qquad \left[\frac{1}{\omega}\, y'\right]' + \left[\frac{2A}{\omega} + \frac{\omega''}{\omega^2}\right] y = 0,$$

kde $w = w(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (b) vlastnosti $w(a) = w'(a) = 0$, $w''(a) \neq 0$, ktoré nemá napravo od a žiadny nulový bod, o čom sa ľahko presvedčíme z integrálnej identity [4] pre riešenia diferenciálnej rovnice (b):

$$\text{(1)} \qquad zz'' - \frac{1}{2} z'^2 + Az^2 - \int_a^x bz^2 \, dt = \text{konšt.}$$

Každé riešenie diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $y(a) = 0$ možno totiž písať v tvare $y = c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2$, kde $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ sú netriviálne riešenia diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $\bar{y}_1(a) = \bar{y}_1'(a) = 0$, $\bar{y}_2(a) = \bar{y}_2''(a) = 0$, pritom $w(x) = \bar{y}_1\bar{y}_2' - \bar{y}_1'\bar{y}_2$ je ich wronskian.

Nech sú teraz y_1, y_2 ľubovoľné dve nezávislé oscilatorické riešenia diferenciálnej rovnice (a), t. j. také, že každé z nich má aspoň dva nulové body v intervale I a nech ich wronskian $w(x) \neq 0$ pre $x \in I$. Potom zrejme množina riešení $c_1y_1 + c_2y_2$ vyhovuje v I diferenciálnej rovnici druhého rádu tvaru (c).

Definícia (centrálnych disperzií). Nech $x \in I$ je ľubovoľné číslo. Nech A je množina riešení diferenciálnej rovnice (c) (teda aj diferenciálnej rovnice (a)), z ktorých každé má v x nulový bod. Nech B je množina riešení diferenciálnej rovnice (c), z ktorých každé má v bode x nulovú prvú deriváciu. Zrejme všetky riešenia množiny A a aj všetky riešenia množiny B sú závislé.

Nech $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Označme pomocou: $\varphi_\nu(x)$ n-tý nulový bod riešení množiny A nasledujúci po x (pred x), pokiaľ existuje v I; $\psi_\nu(x)$ n-tý nulový bod derivácie riešení množiny A nasledujúci po x (pred x), pokiaľ existuje v I;

$\chi_\nu(x)$ n-tý nulový bod riešení množiny B nasledujúci po x (pred x), pokiaľ existuje v I;

$\tau_\nu(x)$ n-tý nulový bod derivácie riešení množiny B nasledujúci po x (pred x), pokiaľ existuje v I;

Funkcie $\varphi = \varphi_\nu$, $\psi = \psi_n$, $\chi = \chi_\nu$, $\tau = \tau_\nu$ nazývame centrálnymi disperziami prvého, druhého, tretieho a štvrtého druhu. Ich zavedenie je totožné so zavedením centrálnych disperzií pre rovnicu (α) [1]. Podobne aj ich vlastnosti sú totožné s vlastnosťami disperzií diferenciálnej rovnice (α), preto ich nebudeme uvádzať. No uvediem diferenciálne rovnice prvého rádu, ktorým centrálne disperzie vyhovujú, a podobne nelineárnu diferenciálnu rovnicu tretieho rádu, ktorej vyhovujú centrálne disperzie prvého druhu.

Platí totiž:

Veta 1: Derivácie centrálnych disperzií podľa x možno vyjadriť vzorcami

$$\varphi' = \frac{\omega(x)}{\omega(\varphi)} \, \frac{\varrho^2(\varphi)}{\varrho^2(x)}, \qquad \psi' = \frac{\omega(x)}{2A(\psi)\,\omega(\psi) + \omega''(\psi)} \, \frac{\sigma^2(\psi)}{\varrho^2(x)},$$

$$\chi' = \frac{2A(x)\,\omega(x) + \omega''(x)}{\omega(\chi)} \, \frac{\varrho^2(\chi)}{\sigma^2(x)}, \qquad \tau' = \frac{2A(x)\,\omega(x) + \omega''(x)}{2A(\tau)\,\omega(\tau) + \omega''(\tau)} \, \frac{\sigma^2(\tau)}{\sigma^2(x)},$$

$$\text{kde } \varrho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \qquad \sigma = \sqrt{y_1'^2 + y_2'^2}.$$

Veta 2: Centrálne disperzie prvého druhu vyhovujú určitej diferenciálnej rovnici tretieho rádu tvaru

$$\sqrt{\varphi'}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\right)'' + \varphi'^2\left[\frac{1}{2}\frac{2\omega'^2(\varphi) - \omega(\varphi)\,\omega''(\varphi)}{\omega^2(\varphi)} - \frac{1}{4}\frac{\omega'^2(\varphi)}{\omega^2(\varphi)} - \frac{2A(\varphi)\,\omega(\varphi) + \omega''(\varphi)}{\omega(\varphi)}\right] =$$

(d) $$= \frac{1}{2}\frac{2\omega'^2(x) - \omega(x)\,\omega''(x)}{\omega^2(x)} - \frac{1}{4}\frac{\omega'^2(x)}{\omega^2(x)} - \frac{2A(x)\,\omega(x) + \omega''(x)}{\omega(x)}.$$

Poznámka 1: Koeficienty diferenciálnej rovnice (d) možno zjednodušiť takto: Integrálna identita (1) pre riešenie ω je:

$$\omega\omega'' - \frac{1}{2}\omega'^2 + A\omega^2 - \int_{x_1}^{x} b\omega^2\,\mathrm{d}t = k,$$

kde $k = \omega(x_1)\,.\,\omega''(x_1) - \frac{1}{2}\omega'^2(x_1) + A(x_1)\,\omega^2(x_1)$, pričom $x_1 \in I$.

Je

$$\frac{1}{2}\frac{2\omega'^2 - \omega\omega''}{\omega^2} - \frac{1}{4}\frac{\omega'^2}{\omega^2} - \frac{2A\omega + \omega''}{\omega} =$$

$$= \frac{\omega'^2 - \frac{1}{2}\omega\omega'' - \frac{1}{4}\omega'^2 - 2A\omega^2 - \omega\omega''}{\omega^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{\omega\omega'' - \frac{1}{2}\omega'^2 + A\omega^2}{\omega^2} + \frac{1}{3}A\right] = -\frac{3}{2}\left[\frac{\int_{x_1}^{x} b\omega^2\,\mathrm{d}t + k}{\omega^2} + \frac{1}{3}A\right].$$

Teda diferenciálnu rovnicu (d) možno písať v tvare

$$\sqrt{\varphi'}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\right)'' - \frac{3}{2}\varphi'^2\left[\frac{\int_{\varphi(x_1)}^{\varphi} b\omega^2\,\mathrm{d}t + K}{\omega^2(\varphi)} + \frac{1}{3}A(\varphi)\right] =$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{\int_{x_1}^{x} b\omega^2\,\mathrm{d}t + k}{\omega^2(x)} + \frac{1}{3}A(x)\right],$$

kde

$$K = \omega[\varphi(x_1)]\,\omega''[\varphi(x_1)] - \frac{1}{2}\omega'^2[\varphi(x_1)] + A[\varphi(x_1)]\,\omega^2[\varphi(x_1)].$$

II.

Uvažujme o dvoch diferenciálnych rovniciach tretieho rádu:

(a) $$y''' + 2A(t)\,y' + [A'(t) + b(t)]\,y = 0,$$

(A) $$Y''' + 2A_1(T)\,Y' + [A_1'(T) + b_1(T)]\,Y = 0,$$

pritom nech sú funkcie A', b, A_1', b_1 spojité v intervale $(-\infty, \infty)$. Rovnice (a) a (A) môžu byť aj totožné.

Diferenciálne rovnice adjungované k rovniciam (a) a (A) sú

$$z''' + 2A(t)\, z' + [A'(t) - b(t)]\, z = 0, \tag{b}$$

$$Z''' + 2A_1(T)\, Z' + [A_1'(T) - b_1(T)]\, Z = 0. \tag{B}$$

Nech y_1, y_2, resp. Y_1, Y_2, sú ľubovoľné dve nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (a), resp. (A), tej vlastnosti, že ich wronskian $\omega(t)$, resp. $W(T)$, je od nuly rôzny v intervale j, resp. J.

Je známe, že $\omega(t)$, resp. $W(T)$, je riešením diferenciálnej rovnice (b), resp. (B).

Množina riešení $y = c_1y_1 + c_2y_2$, resp. $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$, c_1, c_2, resp. C_1, C_2, sú ľubovoľné konštanty, vyhovuje v intervale j, resp. J, diferenciálnej rovnici druhého rádu tvaru:

$$\left[\frac{1}{\omega}\, y'\right]' + \left[\frac{2A}{\omega} + \frac{\omega''}{\omega^2}\right] y = 0, \tag{c}$$

resp.

$$\left[\frac{1}{W}\, Y'\right]' + \left[\frac{2A_1}{W} + \frac{W''}{W^2}\right] Y = 0. \tag{C}$$

Popri rovniciach (a) a (A) uvažujeme ďalej o nelineárnych rovniciach tretieho rádu:

$$\sqrt{|X'|}\left[\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\right]'' - \frac{3}{2}X'^2\left[\frac{\int\limits_{T_1}^{X} b_1(u)\, W^2(u)\, du + K}{W^2(X)} + \frac{1}{3}A_1(X)\right] =$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{\int\limits_{t_1}^{t} b(u)\, \omega^2(u)\, du + k}{\omega^2(t)} + \frac{1}{3}A(t)\right], \tag{d}$$

$$\sqrt{|\dot{x}|}\left[\frac{1}{\sqrt{|\dot{x}|}}\right]^{\cdot\cdot} - \frac{3}{2}\dot{x}^2\left[\frac{\int\limits_{t_1}^{x} b(u)\, \omega^2(u)\, du + k}{\omega^2(x)} + \frac{1}{3}A(x)\right] =$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{\int\limits_{T_1}^{T} b_1(u)\, W^2(u)\, du + K}{W^2(T)} + \frac{1}{3}A_1(T)\right], \tag{D}$$

kde $t_1 \in j$, $T_1 \in J$ sú ľubovoľné, ale pevné čísla,

$$k = \omega(t_1)\, \omega''(t_1) - \frac{1}{2}\omega'^2(t_1) + A(t_1)\, \omega^2(t_1),$$

$$K = W(T_1)\, W''(T_1) - \frac{1}{2}W'^2(T_1) + A_1(T_1)\, W^2(T_1),$$

X, x značia neznáme funkcie.

Rovnice (d) a (D) sú toho istého tvaru ako analogické rovnice v práci [2] O. Borůvku a ich koeficienty majú tie isté vlastnosti, teda aj vlastnosti ich riešení sú tie isté. Preto ich nebudeme uvádzať, ale uvedieme len transformačné vzorce.

Nech X je riešením diferenciálnej rovnice (d) definované v nejakom intervale $i \subset j$. Je známe [2], že existuje k nemu inverzná funkcia x, ktorá je definovaná v nejakom intervale $I = X(i) \subset J$ a vyhovuje rovnici (D).

Nech $t_0 \in i$ a nech $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0) = X'_0$, $X''(t_0) = X''_0$. Nech ďalej $X(t_0) = T_0 \in I$ a nech $x(T_0) = x_0$, $\dot{x}(T_0) = \dot{x}_0$, $\ddot{x}(T_0) = \ddot{x}_0$.

Potom vzťahy medzi riešeniami rovníc (a) a (A), (d), (D) vyjadruje nasledujúca veta:

Veta 3: Nech Y je ľubovoľné riešenie diferenciálnej rovnice (c). Potom funkcia

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{|X'(t)|}} \sqrt{\left|\frac{\omega(t)}{W[X(t)]}\right|} \,.\, Y[X(t)]$$

definovaná v intervale i je riešením diferenciálnej rovnice (c), daná začiatočnými Cauchyovskými podmienkami:

$$y(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|X'_0|}} \sqrt{\left|\frac{\omega(t_0)}{W(X_0)}\right|}\, Y(X_0),$$

$$y'(t_0) = \left[\frac{1}{\sqrt{|X'(t)|}} \sqrt{\left|\frac{\omega(t)}{W[X(t)]}\right|}\, Y[X(t)]\right]'_{t=t_0}.$$

Poznámka 2: Riešenie Y spĺňa v intervale I vzhľadom na riešenie y nasledujúci inverzný vzťah:

$$Y(T) = \frac{1}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}} \sqrt{\left|\frac{W(T)}{\omega[x(T)]}\right|}\, y[x(T)],$$

ktoré je určené v bode T_0 analogickými začiatočnými podmienkami.

Veta 4: Nech y, Y sú riešenia diferenciálnych rovníc (c) a (C) a nech $t_0 \in j$ a $T_0 \in J$. Nech ďalej je buď

a) $y(t_0) \neq 0 \neq Y(T_0)$, buď

b) $y(t_0) = 0 = Y(T_0)$.

Potom existuje vždy najširšie riešenie diferenciálnej rovnice (d) X, ktoré nadobúda v t_0 hodnotu $X(t_0) = T_0$ a transformuje v svojom intervale definície i integrály y a Y formulou

$$y(t) = \eta \sqrt{\left|\frac{\omega(t)}{W[X(t)]}\right|}\, \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}.$$

V prípade a) existuje jedno riešenie X, ktoré je rastúce, a jedno klesajúce. V prípade b) existuje nekonečne mnoho riešení závislých od jedného parametra, ktoré sú rastúce, a práve toľko klesajúcich.

V prípade a) $\eta = \operatorname{sgn} y(t_0)\, Y(T_0)$.

V prípade b) $\eta = \begin{cases} \operatorname{sgn} \dot{y}(t_0)\, Y(T_0) & \textit{pre } X \textit{ rastúce,} \\ -\operatorname{sgn} \dot{y}(t_0)\, Y(T_0) & \textit{pre } X \textit{ klesajúce.} \end{cases}$

Aj dôkazy viet 3 a 4 sú celkom podobné ako v práci [2] O. Borůvku.

Poznámka 3: Je známe [4], že ak sú y_1, y_2 dve nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (a) také, že ich wronskian $\omega = y_1 y_1' - y_1' y_2 \neq C$, vtedy tretie riešenie y_3 také, že y_1, y_2, y_3 tvoria fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (a) v j, je určené vzorcom:

$$y_3(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{-y_1(x)\, y_2(t) + y_2(x)\, y_1(t)}{\omega^2(t)}\, \mathrm{d}t,$$

kde $x_0 \in j$. Ich wronskian má dokonca hodnotu 1. Odtiaľ a z predchádzajúceho vyplýva, že pomocou riešení rovnice (d) a ľubovoľných dvoch nezávislých riešení rovnice (C) vieme určiť fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (a) v intervale i.

Určenie veľkosti intervalu i je podobné ako v práci [2].

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2.

Do redakcie dodané 25. XI. 1958

Примечание к дисперсиям и преобразованиям дифференциального уравнения третьего порядка

М. Грегуш

Выводы

В работе введено понятие центральных дисперсий для осциляционных решений дифференциального уравнения

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + b(x)]y = 0 \tag{a}$$

при определенных условиях о коэффициентах и приведены основные формулы для центральных дисперсий.

Во второй части приведены формулы преобразования для определенных множеств решений двух дифференциальных уравнений третьего порядка типа (a). Насколько определенные множества решений дифференциального уравнения (a) соответствуют уравнениям второго порядка, поэтому свойства дисперсий и преобразований являются подобными, как в работах [1], [2] О. Борувки.

Eine Bemerkung über die Dispersionen und Transformationen der Differentialgleichung dritter Ordnung

M. GREGUŠ

Zusammenfassung

In der Arbeit ist der Begriff der Zentraldispersionen für die oszillatorischen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0 \tag{a}$$

unter gewissen Bedingungen über die Koeffizienten eingeführt, weiters wurden in der vorliegenden Arbeit Grundformeln für Zentraldispersionen abgeleitet.

Im zweiten Teil sind Transformationsformeln für gewisse Mengen von Lösungen zweier Differentialgleichungen dritter Ordnung der Form (a) angeführt. Da gewisse Mengen von Lösungen der Differentialgleichung gleichzeitig Lösungen gewisser Differentialgleichung zweiter Ordnung sind, deshalb sind die Eigenschaften der Dispersionen und Transformationen dieselben, wie in den Arbeiten [1], [2] von O. Borůvka.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV – 3–5, MATHEM., 1959]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

Über eine Klasse von in sich kompakten Mengen der linearen metrischen Räume

T. ŠALÁT

In dieser Arbeit verallgemeinert man die Egebnisse der Arbeiten [2], [3] (auf die linearen metrischen Räume) und präzisiert man die Voraussetzungen in den erwähnten Arbeiten beim Beweis der Perfektheit einiger Mengen, die durch gewisse unendliche Reihen definiert sind.

Unter dem linearen metrischen Raum (X, ϱ) verstehen wir im weiteren (siehe [1] s. 41) einen Modul X über dem Körper T aller komplexen Zahlen mit der Metrik $\varrho(x, y)$, welche diese zwei Bedingungen erfüllt:

(a) Für alle drei Elemente $x, y, z \in X$ gilt

$$\varrho(x + z, y + z) = \varrho(x, y).$$

(b) Wenn t_n, $t \in T$, $x_n, x \in X$, $t_n \to t$ (dh. $|t_n - t| \to 0$), $x_n \to x$ (dh. $\varrho(x_n, x) \to 0$), dann $t_n x_n \to tx$ (dh. $\varrho(t_n x_n, tx) \to 0$).

Vor allem bemerken wir, daß durch die Induktion die Gültigkeit des folgenden Hilfssatzes bewiesen werden kann:

Lemma. Es sei k eine natürliche Zahl. Es seien a_i $(i = 1, 2, \ldots k)$ Elemente des linearen metrischen Raumes (X, ϱ). Dann gilt:

$$\varrho(\sum_{i=1}^{k} a_i, 0) \leqq \sum_{i=1}^{k} \varrho(a_i, 0).$$

Die Summe der unendlichen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, $b_i \in X$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, wo (X, ϱ) ein linearer metrischer Raum ist, definiert man analogisch wie die Summe der Reihe von Zahlen. Setzt man

$$s_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und den Grenzwert $\lim_{n \to \infty} s_n$ (in dem Raum (X, ϱ)), wenn sie existiert, nennen wir die Summe der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$. Die Reihen, welche die Summen haben, werden wir die konvergenten Reihen nennen, oder wir werden sagen, daß sie konvergieren. Bezeichnung: Wenn $\lim_{n \to \infty} s_n = x$, dann schreiben wir $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

Satz 1. Es sei (X, ϱ) ein linearer metrischer Raum. Es sei $\{a_i\}_1^\infty$ eine Folge der Elemente von (X, ϱ) und $\{T_i\}_1^\infty$ eine Folge der nichtleeren Mengen von komplexen Zahlen. Es seien folgende zwei Bedingungen erfüllt:

(A) Jede der Mengen T_i ist eine in sich kompakte Menge.

(B) Jede der Reihen

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i\,, \quad t_i \in T_i \; (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

konvergiert und es gilt (Z): Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine solche natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$, daß für alle natürliche $n \geqq n_0(\varepsilon)$ und für jede der Reihen (1) $\varrho(R_n, 0) < \varepsilon$ ist, wo $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} t_i a_i$ (R_n ist der Rest der Reihe (1) nach dem n-ten Glied).

Behauptung: Die Menge W aller derjenigen $x \in X$, welche die Form $x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i$, $t_i \in T_i (i = 1, 2, \ldots)$ haben, ist eine in sich kompakte Menge des Raumes (X, ϱ).

Beweis. Es sei $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ eine Folge von Elementen aus W. Wir werden zeige, daß diese Folge eine in W konvergente Teilfolge enthält. Wir schreiben

$$x^n = \sum_{i=1}^{\infty} t_i^n a_i\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

dabei $t_1^n \in T_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Aus der Folge $\{t_1^n\}_{n=1}^\infty$ kann man nach (A) eine konvergente Teilfolge $\{t_1^{n_k}\}_{k=1}^\infty$, $t_1^{n_k} \to t_1^0 \in T_1$ entnehmen, es sei $n_1 > 1$. Aus der Folge $\{t_2^{n_k}\}_{k=1}^\infty$ kann man nach (A) eine konvergente Teilfolge $\{t_2^{n_{k_s}}\}_{s=1}^\infty$, ${}_2^{n_{k_s}} \to t_2^0 \in T_2$ entnehmen, es sei $k_1 > 1$. Aus der Folge $\{t_3^{n_{k_s}}\}_{s=1}^\infty$ kann man nach (A) eine konvergente Teilfolge $\{t_3^{n_{k_{s_r}}}\}_{r=1}^\infty$, $t_3^{n_{k_{s_r}}} \to t_3^0 \in T_3$ entnehmen, es sei $s_1 > 1$. u. s. w. So konstruieren wir durch Induktion eine Folge von natürlichen Zahlen

$$1 < n_1 < n_{k_1} < n_{k_{s_1}} < n_{k_{s_{r_1}}} < \ldots \tag{2}$$

und die Folge

$$x^{n_1},\ x^{n_{k_1}},\ x^{n_{k_{s_1}}},\ x^{n_{k_{s_{r_1}}}},\ \ldots \tag{3}$$

die eine Teilfolge der Folge $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ ist.

Wir setzen $x^0 = \sum_{i=1}^{\infty} t_i^0 a_i$, $x^0 \in W$ (siehe (B)). Wir zeigen, daß die Folge (3) zu x^0 konvergiert. Es sei $\varepsilon > 0$. Nach der Bedingung (Z) existiert eine solche Zahl m' aus (2), daß für jede Zahl m aus (2), $m \geqq m'$ und für jede der Reihen (1)

$$\varrho(R_m, 0) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4}$$

ist. Weiter nach der Eigenschaft (b) der Metrik ϱ existiert eine solche Zahl m'' aus (2), daß für jede Zahl m aus (2), $m \geqq m''$ und für jedes $l = 1, 2, \ldots m'$

$$(5) \qquad \varrho\big((t_l^m - t_l^0)\, a_l, 0\big) < \frac{\varepsilon}{2m'}$$

ist. Es sei $M = \max(m', m'')$ und es sei $m \geqq M$, m aus (2).

Wir schreiben:

$$x^m = s_{m'}(x^m) + R_{m'}(x^m), \quad x^0 = s_{m'}(x^0) + R_{m'}(x^0),$$

dabei bedeutet $s_{m'}(x)$ die Summe der ersten m' Glieder der Reihe, deren Summe x ist, $R_{m'}(x)$ ist der Rest in derselben Reihe nach dem m'-ten Glied. Also nach (a)

$$\varrho(x^m, x^0) = \varrho\big((s_{m'}(x^m) - s_{m'}(x^0)) + (R_{m'}(x^m) - R_{m'}(x^0), 0\big).$$

Nach dem Hilfssatz bekommen wir daraus

$$\varrho(x^m, x^0) \leqq \varrho\big(s_{m'}(x^m) - s_{m'}(x^0), 0\big) + \varrho\big(R_{m'}(x^m) - R_{m'}(x^0), 0\big).$$

Der erste Summand nach rechts ist nach dem Hilfssatz und nach (5)

$$\leqq \sum_{l=1}^{m'} \varrho\big((t_l^m - t_l^0)\, a_l, 0\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir schätzen noch den zweiten Summand nach rechts ab. Wir bekommen

$$\varrho\big(R_{m'}(x^m) - R_{m'}(x^0), 0\big) \leqq \varrho\big(R_{m'}(x^m), 0\big) + \varrho\big(R_{m'}(x^0), 0\big)$$

nach dem Hilfssatz und infolge der Eigenschaften der Metrik ϱ. Aus der letzten Ungleichheit bekommen wir nach (4)

$$\varrho\big(R_{m'}(x^m) - R_{m'}(x^0), 0\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also im ganzen für jedes $m \geqq M$, m ist eine Zahl aus (2), ist $\varrho(x^n, x^0) < \varepsilon$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Wir führen im weiteren diese Bezeichnung: Wir werden sagen, daß der lineare metrische Raum (X, ϱ) die Eigenschaft $V(A)$, $A > 0$ hat, wenn für jedes $t \in T$ und jedes $x \in X$ $\varrho(tx, 0) \leqq A\,|\,t\,|\,\varrho(x, 0)$ ist.

Bemerken wir, daß jeder lineare Banachsche normierte Raum X die Eigenschaft $V(1)$ hat, weil für jedes $t \in T$ und für jedes $x \in X$ $\varrho(tx, 0) = \|\,tx\,\| = |t|\,\|\,x\,\| = |\,t\,|\,\varrho(x, 0)$ ist ($\|\,u\,\|$ bedeutet die Norm des Elementes u). Jeder lineare normierte Banachsche Raum ist also ein spezialer Fall des vollständigen linearen metrischen Raumes, der die Eigenschaft $V(1)$ hat.

Im vollständigen linearen metrischen Raum (X, ϱ), der die Eigenschaft $V(A)$, $A > 0$ hat, kann man leicht die Bedingungen angeben, die die Konvergenz jeder der Reihe (1) und die Erfüllung der Bedingung (Z) garantieren. Es gilt nämlich der folgende Satz.

Satz 2. Es sei (X, ϱ) ein vollständiger linearer metrischer Raum mit der Eigenschaft $V(A)$, $A > 0$. $\{a_i\}_1^\infty$, $\{T_i\}_1^\infty$ haben dieselbe Bedeutung wie im vorhergehenden Satz 1. Es seien diese zwei Bedingungen erfüllt:

(A′) Jede der Mengen T_i ist eine in sich kompakte Menge.

(B′) Wenn wir

$$K_i = \sup_{t \in T_i} |t| \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

setzen, dann $\sum_{i=1}^{\infty} K_i \varrho(a_i, 0) < \infty$ ist.

Behauptung: Die Menge W aller derjenigen $x \in X$, die die Form $x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i$, $t_i \in T_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ haben, ist eine in sich kompakte Menge des Raumes (X, ϱ).

Beweis. Wir zeigen, daß in diesem Fall alle Bedingungen des Satzes 1 erfüllt sind. Vor allem zeigen wir, daß jede der Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i$, $t_i \in T_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ konvergiert in (X, ϱ).

Setzen wir

$$s_n = t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_n a_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

dann genügt es mit Rücksicht auf die Vollständigkeit des Raumes (X, ϱ) zu zeigen, daß $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Fundamentalfolge ist. Nach (B′) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $n_0(\varepsilon)$, daß für jedes $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\text{(6)} \qquad \sum_{i=n+1}^{\infty} K_i \varrho(a_i, 0) < \frac{\varepsilon}{A}$$

ist. Es sei $n \geq n_0(\varepsilon)$ und k eine natürliche Zahl. Dann ist nach (a)

$$\varrho(s_{n+k}, s_n) = \varrho(s_{n+k} - s_n, 0).$$

Im Sinne des Hilfssatzes und nach der Eigenschaft $V(A)$, weiter nach der Definition der Zahlen K_i mit Berücksichtigung von (6) bekommen wir

$$\varrho(s_{n+k}, s_n) = \varrho(t_{n+1} a_{n+1} + \ldots + t_{n+k} a_{n+k}, 0) \leq$$

$$\leq A\, |t_{n+1}|\, \varrho(a_{n+1}, 0) + \ldots + A\, |t_{n+k}|\, \varrho(a_{n+k}, 0) \leq A \sum_{i=n+1}^{\infty} K_i \varrho(a_i, 0) < \varepsilon.$$

Also $\{s_n\}_1^\infty$ eine Fundamentalfolge von Elementen aus X ist.

Weiter zeigen wir, daß auch die Bedingung (Z) erfüllt ist. Es sei (1) $\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i$ eine Reihe mit $t_i \in T_i (i = 1, 2, \ldots)$ und n eine natürliche Zahl, $n \geq n_0$. Wenn wir $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} t_i a_i$ setzen, dann ist

$$\varrho(R_n, 0) = \lim_{l \to \infty} \varrho\left(\sum_{i=n+1}^{n+l} t_i a_i, 0\right).$$

Nach dem Hilfssatz und nach der Eigenschaft $V(A)$ bekommen wir

$$\varrho(\sum_{i=n+1}^{n+l} t_i a_i, 0) \leq \sum_{i=n+1}^{n+l} \varrho(t_i a_i, 0) \leq A \sum_{i=n+1}^{n+l} |t_i| \varrho(a_i, 0) \leq A \sum_{i=n+1}^{\infty} K_i \varrho(a_i, 0) < \varepsilon$$

und so $\varrho(R_n, 0) \leq \varepsilon$ für jedes $n \leq n_0$ ist. Das gilt für jede Reihe (1) und die Behauptung des Satzes 2 folgt aus dem Satz 1.

Mit Anknüpfung zweier weiterer Voraussetzungen kann man die Perfektheit der Menge W garantieren.

Satz 3. Es seien außer den Voraussetzungen des Satzes 1 noch diese Voraussetzungen erfüllt:

(C) $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$

(D) Für unendlich viele natürliche i gilt: Die Menge T_i ist wenigstens zweielementig.

Behauptung: Die Menge W ist eine (in X) perfekte Menge.

Beweis. Da nach dem Satz 1 W eine in sich kompakte Menge ist, folgt daraus die Abgeschlossenheit der Menge W in X. Es genügt also noch zu zeigen, daß W keine isolierten Punkte hat. Es sei $x' = \sum_{i=1}^{\infty} t'_i a_i \in W$, wir werden zeigen, daß in jeder Umgebung des Punktes x' wenigstens ein Punkt $x'' \in W$, $x'' \neq x'$ liegt.

Es sei $\varepsilon > 0$. Nach (B) existiert ein solches $n_1(\varepsilon)$, daß für jede Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i, \; t_i \in T_i \; (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

und für jedes $n \geq n_1(\varepsilon)$ $\varrho(R_n, 0) < \frac{\varepsilon}{4}$ ist (R_n bedeutet dabei den Rest der Reihe (1) nach dem n-ten Glied). Wenn

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i, \; t_i \in T_i \; (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

eine feste Reihe ist, ist bereits zu sehen, daß $t_n a_n = R_{n-1} - R_n$, wo $R_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} t_i a_i$ ist. Also für jedes $n > n_1(\varepsilon)$ und für jedes $t_n \in T_n$ im Sinne des Hilfssatzes und nach der Wahl der Zahl $n_1(\varepsilon)$

$$\varrho(t_n a_n, 0) = \varrho(R_{n-1} - R_n, 0) \leq \varrho(R_{n-1}, 0) + \varrho(R_n, 0) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

ist. Es sei $n > n_1(\varepsilon)$ so gewählt, daß die Menge T_n wenigstens zweielementig ist. Ein solches n existiert nach der Voraussetzung des Satzes. Es sei $t''_n \in T_n$, $t''_n \neq t'_n$. Konstruieren wir die Reihe
$x'' = t'_1 a_1 + \ldots + t'_{n-1} a_{n-1} + t''_n a_n + t'_{n+1} a_{n+1} + \ldots + t'_{n+k} a_{n+k} + \ldots$, $x'' \in W$. Aus $t''_n - t'_n \neq 0$, $a_n \neq 0$ folgt $(t''_n - t'_n) a_n \neq 0$, es ist leicht zu sehen, das $\varrho(x'', x') = \varrho((t''_n - t'_n) a_n, 0)$, daraus bekommen wir $\varrho(x'', x') > 0$ und also $x'' \neq x'$. Weiter im Sinne des Hilfssatzes und nach (7)

$$\varrho(x'', x') \leq \varrho(t''_n a_n, 0) + \varrho(t'_n a_n, 0) < \varepsilon$$

ist.

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Bemerkung. Aus den Sätzen 2 und 3 bekommen wir die Gültigkeit der Sätze aus den Arbeiten [2] und [3]. In der Arbeit [3] beweist man den folgenden Satz:

Es sei $\{a_i\}_1^\infty$ eine Folge von Null verschiedener Elemente eines linearen normierten Banachschen Raumes X. Es sei $\{C_i\}_1^\infty$ eine Folge der nichtleeren Mengen von komplexen Zahlen. Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Jede der Mengen C_i ist eine in sich kompakte Menge.
2. Wenn wir

$$K_i = \sup_{z \in C_i} |z| \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

setzen, dann $\sum_{i=1}^{\infty} K_i \, ||a_i|| < +\infty$ ist.

3. Für unendlich viele i gilt: C_i ist wenigstens zweielementig.

Behauptung: Die Menge W aller derjenigen $x \in X$, die die Form

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i, \quad c_i \in C_i \; (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

haben, ist eine (in X) perfekte Menge.

Es ist leicht zu sehen, daß dieser Satz die Folgerung der Sätze 2 und 3 ist. Dazu genügt zu bemerken, daß der lineare normierte Banachsche Raum ein spezialer Fall des vollständigen linearen metrischen Raumes mit Eigenschaft $V(1)$ ist.

Bemerkung. Im Sinne der Sätze 1, 2, 3 kann man im beliebigen vollständigen linearen metrischen Raum (X, ϱ) mit der Eigenschaft $V(A)$, $A > 0$ perfekte, in sich kompakte Mengen W konstruieren. Dies kann man zum Beispiel so verwirklichen: Wir nehmen ein $a \in X$, $a \neq 0$ und setzen $a_n = c_n a$, dabei $\sum_{1}^{\infty} c_n$ ist eine absolut konvergente Reihe mit komplexen Gliedern, $c_n \neq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. T_i seien für alle $i = 1, 2, 3, \ldots$ solche wenigstens zweielementige in sich kompakte Mengen von komplexen Zahlen, daß die Menge $T^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ beschränkt ist (dh. es existiert ein $K > 0$ so, daß für jede Zahl $t \in T^*$ $|t| \leq K$ ist). Dann sind die Bedingungen (A'), (C), (D) offensichtlich erfüllt und die Bedingung (B′) folgt aus den Ungleichheiten

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \varrho(a_n, 0) \leq K \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(c_n a, 0) \leq KA\varrho(a, 0) \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$$

und also die Menge W aller derjenigen $x \in X$, die die Form

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n c_n a, \quad t_n \in T_n \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

haben, ist eine perfekte in sich kompakte Menge.

Bemerken wir noch am Ende, daß es leicht ist hinreichende Bedingungen dazu anzugeben, daß die Mengen W, die in den vorhergehenden Sätzen konstruiert waren, konvex seien. Es gilt nämlich der folgende Satz.

Satz 4. Es sei (X, ϱ) ein linearer metrischer Raum, $\{a_i\}_1^\infty$ eine Folge von Elementen aus X, $\{T_i\}_1^\infty$ sei eine Folge von nichtleeren konvexen Mengen der komplexen Zahlen.[1]) Es sei jede der Reihen

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i\,,\ t_i \in T_i\ (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

konvergent.

Dann ist die Menge W aller $x \in X$,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i\,,\ t_i \in T_i\ (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

konvex.

Beweis. Es sei $x, x' \in W$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i$, $x' = \sum_{i=1}^{\infty} t'_i a_i$, α sei eine reelle Zahl, $0 \leq \alpha \leq 1$. Dann bekommen wir aus (b) bereits:

$$\alpha x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha t_i a_i,\ (1 - \alpha)\, x' = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \alpha)\, t'_i a_i.$$

Weiter, wie bekannt ist (siehe [1] s. 48), aus $y_n \to y$, $y'_n \to y'$, $y_n, y'_n, y, y' \in X$,

$$\alpha \in T \text{ folgt } \alpha y_n + (1 - \alpha)\, y'_n \to \alpha y + (1 - \alpha)\, y',$$

daraus bekommen wir

$$\alpha x + (1 - \alpha)\, x' = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha t_i + (1 - \alpha)\, t'_i)\, a_i$$

Die Reihe nach rechts bestimmt aber ein Element der Menge W, weil es ist für jedes $i = 1, 2, 3, \ldots$ nach der Voraussetzung des Satzes $\alpha t_i + (1 - \alpha) t'_i \in T_i$, also $\alpha x + (1 - \alpha)\, x' \in W$ für jedes α, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Literatur

[1] M. Katětov: Přednášky z funkcionální analýsy, Praha, 1957.
[2] J. Jakubík: Poznámka o absolútne konvergentných radoch, Mat.-fyz. čas. SAV, V (1955), 3, 133–136.
[3] T. Šalát: K absolútne konvergentným radom, Mat.-fyz. čas. SAV, VII (1957), 3, 139–142.

Do redakcie dodané 24. III. 1959

[1]) Unter der konvexen Menge der komplexen Zahlen werstehen wir eine konvexe Untermenge des Moduls aller komplexen Zahlen (bei Multiplikation mit reellen Zahlen).

O jednej triede kompaktov lineárnych metrických priestorov

Tibor Šalát

Resumé

V tejto práci sa zovšeobecňujú výsledky prác [2], [3] na lineárne metrické priestory. V ďalšom lineárnym metrickým priestorom (X, ϱ) rozumieme (pozri [1] str. 41) modul X nad telesom všetkých komplexných čísel T s metrikou $\varrho(x, y)$ spĺňajúcou tieto dve podmienky:

(a) Pre každé tri prvky $x, y, z \in X$ je

$$\varrho(x + z, y + z) = \varrho(x, y).$$

(b) Ak $t_n, t \in T$, $x_n, x \in X$, $t_n \to t$ (t. j. $|t_n - t| \to 0$), $x_n \to x$ (t. j. $\varrho(x_n, x) \to 0$), potom $t_n x_n \to tx$ (tj. $\varrho(t_n x_n, tx) \to 0$).

Veta 2. sa vzťahuje na špeciálnu triedu úplných lineárnych metrických priestorov, ktoré majú vlastnosť $V(A)$, $A > 0$. Hovoríme, že lineárny metrický priestor (X, ϱ) má vlastnosť $V(A)$, $A > 0$, ak pre každé $t \in T$ a každé $x \in X$ je

$$\varrho(tx, 0) \leq A\,|t|\,\varrho(x, 0).$$

Ihneď vidieť, že komplexný normovaný lineárny Banachov priestor je špeciálnym prípadom úplného lineárneho metrického priestoru, ktorý má vlastnosť $V(1)$. Z toho ihneď vyplýva v porovnaní s prácami [2], [3], že výsledky obsiahnuté v tejto práci sú zovšeobecnením výsledkov prác [2], [3].

Hlavným výsledkom práce sú tieto vety:

Veta 1. Nech (X, ϱ) je lineárny metrický priestor. Nech $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť prvkov priestoru (X, ϱ) a $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ postupnosť neprázdnych množín komplexných čísel. Nech:

(A) Každá z množín T_i je kompakt.

(B) Každý rad tvaru: (1) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i a_i$, $t_i \in T_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ konverguje a platí: Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0(\varepsilon)$ tak, že pre každé $n \geq n_0(\varepsilon)$ a každý rad (1) je $\varrho(R_n, 0) < \varepsilon$, kde $R_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} t_i a_i$.

Tvrdenie: Množina W všetkých tých $x \in X$, ktoré majú tvar $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i a_i$, $t_i \in T_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ je kompakt priestoru (X, ϱ).

Veta 2. Nech (X, ϱ) je úplný lineárny metrický priestor s vlastnosťou $V(A)$, $A > 0$. Nech $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ majú rovnaký význam ako vo vete 1. Nech:

(A′) Každá z množín T_i je kompakt.

(B′) Ak kladieme $K_i = \sup\limits_{z \in T_i} |z|$ $(i = 1, 2, \ldots)$, potom

$$\sum_{i=1}^{\infty} K_i \varrho(a_i, 0) < +\infty.$$

Tvrdenie: Množina W všetkých tých $x \in X$, ktoré majú tvar $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i a_i$, $t \in T_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ je kompakt priestoru (X, ϱ).

Ak okrem predpokladov vety 1 ešte platí: $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ a pre nekonečne mnoho i je T_i aspoň dvojbodová množina, tak W je perfektná množina priestoru (X, ϱ) (veta 3).

Nakoniec autor udáva postačujúce podmienky na to, aby boli množiny W konštruované v predošlých vetách konvexné (veta 4).

Об одном классе компактных множеств линейных метрических пространств

Т. Шалат

Резюме

В этой работе автор обобщает результаты работ [2] и [3] на линейные метрические пространства.

Дальше линейным метрическим пространством (X, ϱ) разумеется комплексное линейное пространство с метрикой $\varrho(x, y)$ удовлетворяющей следующим двум условиям:

(a) Для всех трех элементов $x, y, z \in X$ имеет место:

$$\varrho(x + z, y + z) = \varrho(x, y).$$

(b) Если $t_n, t \in T$(T — множество всех комплексных чисел), $x_n, x \in X$, $t \to t_n$(т. е. $|t_n - t| \to 0$), $x_n \to x$ (т. е. $\varrho(x_n, x) \to 0$), потом $t_n x_n \to t x$ (т. е. $\varrho(t_n x_n, tx) \to 0$).

Теорема 2 относится к специальному классу полных линейных метрических пространств, имеющих свойство $V(A)$, $A > 0$. Мы говорим что линейное метрическое пространство (X, ϱ) имеет свойство $V(A)$, $A > 0$, если для каждого $t \in T$ и каждого $x \in X$ имеет место неравенство

$$\varrho(tx, 0) \leq A\,|t|\,\varrho(x, 0).$$

Очевидно что комплексное нормированное линейное пространство Банаха специальный случай полного линейного метрического пространства, обладающего свойством $V(1)$.

Из сказанного следует, сравнивая эту работу с работами [2], [3], что результаты, которые содержит эта работа, являются обобщением результатов работ [2], [3].

Основными результатами этой работы являются теоремы:

Теорема 1. Пусть (X, ϱ) — линейное метрическое пространство. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность элементов пространства (X, ϱ) и $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ последовательность непустых множеств комплексных чисел. Пусть

(A) все множества T_i компактны.

(B) всякий ряд вида (1) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i a_i$, $t_i \in T_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ сходится и для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0(\varepsilon)$, что для каждого $n \geq n_0(\varepsilon)$ и каждово ряда (1) имеет место неравенство $\varrho(R_n, 0) < \varepsilon$, где $R_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} t_i a_i$.

Утверждение: Множество W всех $x \in X$, которые возможно писать в виде $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i a_i$, $t_i \in T_i (i = 1,2,\ldots)$ является компактным множеством.

Теорема 2. Пусть (X, ϱ) полное линейное метрическое пространство обладающее свойством $V(A)$, $A > 0$. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ последовательности из теоремы 1. Пусть

(A') все множества T_i компактны

(B') если положить $K_i = \sup\limits_{z \in T_i} |z|$ $(i = 1,2,\ldots)$, потом

$$\sum_{i=1}^{\infty} K_i \varrho(a_i, 0) < +\infty$$

Утверждение: Множество W всех $x \in X$, которые возможно писать в виде $x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i$, $t_i \in T_i (i = 1,2,\ldots)$ является компактным множеством.

Если кроме предложений теоремы 1 наложить на $a_i (i = 1,2,\ldots)$ и $T_i (i = 1,2,\ldots)$ требования: $a_i \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots)$ и для бесконечно много i T_i содержит более чем один элемент, потом W является совершенным множеством (теорема 3).

Наконец автор приводит достаточные условия для того, чтобы множества W, построенны в предидущих теоремах, являлись выпуклыми.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV – 3–5, MATHEM., 1959]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

O niektorých vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice $y'' = Q(z) \cdot y$, $Q(z) \not\equiv 0$ je celá funkcia

V. ŠEDA

Táto práca má 3 časti. V prvej sa dokazujú pomocou Picard—Borelovej vety dve vlastnosti riešení vyššie uvedenej diferenciálnej rovnice. Ich slabšie znenie je nasledovné: Jestvujú najviac dve lineárne nezávislé riešenia tejto rovnice, ktoré majú konečný počet nulových bodov a najviac dve lineárne nezávislé riešenia, ktorých derivácie majú konečný počet nulových bodov. Riešenie s konečným počtom nulových bodov nazývame Picardovým výnimočným riešením 1. druhu. Riešenie, ktorého derivácia má konečný počet nulových bodov, nazývame Picardovým výnimočným riešením 2. druhu. Analogicky definujeme Picard—Borelovo výnimočné riešenie 1. a 2. druhu.

V druhej časti sa zaoberáme otázkou výnimočných riešení v prípade, keď je $Q(z)$ polynóm. Vtedy je každé Picardovo, resp. Picard—Borelovo výnimočné riešenie 1. druhu aj Picardovým, resp. Picard—Borelovým výnimočným riešením 2. druhu, a obrátene. Ďalej každé Picard—Borelovo výnimočné riešenie je aj Picardovým výnimočným riešením. Ak ešte nie je $Q(z)$ konštanta, vtedy jestvuje najviac jedna trieda Picardových výnimočných riešení.

V tretej časti riešime jeden problém O. Borůvku. Daná je postupnosť bodov otvorenej komplexnej roviny, ktorá nemá nikde v konečne hromadný bod. Treba nájsť diferenciálnu rovnicu vo vyššie uvedenom tvare, ktorej jedno riešenie má nulové body práve v bodoch danej postupnosti, prípadne nájsť podmienku, kedy bude takáto diferenciálna rovnica jestvovať. Odpoveď na daný problém je kladná. Jestvuje nekonečne mnoho diferenciálnych rovníc uvedeného tvaru, ktorých jedno riešenie a jeho derivácia majú predpísané nulové body, a ďalej jestvuje nekonečne mnoho diferenciálnych rovníc, ktorých fundamentálny systém má dané nulové body. Z toho vyplýva, že ak je Q celá transcendentná funkcia, tak nemusí platiť ani jedna z troch vlastností uvedených v časti 2. Napokon sa charakterizuje rovnica s konštantným koeficientom touto vlastnosťou: Je to jediná rovnica hore uvedeného typu s fundamentálnym systémom tvoreným Picardovými výnimočnými riešeniami 1. a súčasne aj 2. druhu.

Záverom sú dané tri problémy, ktoré vystupujú v súvislosti s touto prácou.

I.

Uvažujme najprv o diferenciálnej rovnici

$$y'' = Q(z) \cdot y, \tag{1}$$

kde $Q(z)$ je holomorfná funkcia v jednoducho súvislej oblasti T, ktorá neobsahuje bod ∞. Je známe (I, str. 233), že riešenia tejto rovnice sú funkcie, holomorfné v oblasti T. Ak u, v sú dve lineárne nezávislé riešenia rovnice (1), vtedy všeobecné riešenie y tejto rovnice je $y = c_1u + c_2v$, kde c_1, c_2 sú komplexné konštanty. V ďalšom pod riešením rovnice (1) budeme rozumieť jej netriviálne riešenie, t. j. také, ktoré sa identicky nerovná 0. Ďalej je známe, že riešenia rovnice (1) majú len jednoduché nulové body.

Pri skúmaní nulových bodov riešení rovnice (1) je účelné zaviesť na množine riešení tejto rovnice rozklad na triedy tým spôsobom, že dve riešenia u, v rovnice (1) sú z tej istej triedy práve vtedy, ak sú lineárne závislé. Z toho vyplýva, že všetky riešenia tej istej triedy majú rovnaké nulové body; podobne aj ich derivácie majú tie isté nulové body. Riešenia z dvoch rôznych tried, ani ich derivácie, nemajú ani jeden nulový bod spoločný. Ďalej platí, že všetky riešenia v rovnice (1) tej istej triedy majú tú istú logaritmickú deriváciu $\frac{v'}{v}$ a obrátene, ak majú dve riešenia rovnice (1) rovnakú logaritmickú deriváciu, vtedy sa ich wronskián identicky rovná 0, t. j. obidve riešenia patria do tej istej triedy. Ak budeme v ďalšom hovoriť o rozklade množiny riešení rovnice (1) na triedy, budeme mať vždy na mysli rozklad zavedený spomínaným spôsobom.

Logaritmická derivácia $w = \frac{v'}{v}$ riešenia v rovnice (1) vyhovuje Riccatiho rovnici

$$w' = Q(z) - w^2. \tag{2}$$

Zase ku každému riešeniu w rovnice (2) jestvuje trieda riešení v_c rovnice (1), daná vzťahom $v_c = e^{\int w \, \mathrm{d}z + c}$, ktorých w je logaritmickou deriváciou. Takto riešenia rovnice (2) sú jedno-jednoznačne priradené triedam riešení rovnice (1). Je zrejmé, že každý nulový bod riešenia v rovnice (1) a jeho derivácie je pólom, resp. nulovým bodom jeho logaritmickej derivácie a naopak. Keďže riešenia rovnice (1) z dvoch rôznych tried, ani ich derivácie, nemajú spoločný ani jeden nulový bod, dve rôzne riešenia rovnice (2) nemajú ani jeden nulový bod, ani jeden pól spoločný. Podobným spôsobom možno každý výsledok, týkajúci sa nulových bodov riešení rovnice (1), resp. ich derivácie interpretovať ako istú vlastnosť pólov, resp. nulových bodov riešení rovnice (2).

S rovnicou (1) je v úzkom vzťahu aj rovnica

$$-\{f, z\} = Q(z), \tag{3}$$

kde výraz $\{f, z\}$ označuje Schwarzovu deriváciu funkcie f podľa z. Teda

$$\{f, z\} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}z^3}}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}} \right)^2.$$

Súvis medzi rovnicami (1) a (3) tkvie v tom, že podiel $f = \frac{u}{v}$ dvoch lineárne nezávislých riešení u, v rovnice (1) je riešením rovnice (3) (I, str. 248) a obrátene, každé riešenie f rovnice (3) možno písať ako podiel dvoch lineárne nezávislých riešení rovnice (1) (I, str. 236). Z toho vyplýva, že riešenia rovnice (3) sú funkcie, meromorfné v oblasti T a všeobecné riešenie tejto rovnice je $\frac{af_1 + b}{cf_1 + d}$, pričom $ad - bc \neq 0$, a, b, c, d sú konštanty a f_1 je partikulárne riešenie rovnice (3). Ďalej dostávame, že každé riešenie rovnice (3) nadobúda len jednoduché hodnoty.

Medzi nulovými bodmi riešení rovnice (1) a rozdelením hodnôt riešení rovnice (3) je určitý vzťah, ktorým sa zaoberá pomocná veta 1.

Pomocná veta 1

Nech u a v sú dve lineárne nezávislé riešenia rovnice (1). Potom platí: Ku každej hodnote c z rozšírenej komplexnej roviny E jestvuje práve jedna trieda riešení rovnice (1) tak, že c-miesta funkcie $\frac{u}{v}$, t. j. body z, v ktorých $\frac{u(z)}{v(z)} = c$, sú totožné s nulovými bodmi riešení tejto triedy. Obrátene, ku každej triede riešení rovnice (1) jestvuje práve jedna konštanta $c \in E$ tak, že množina nulových bodov riešení tejto triedy sa rovná množine c-miest funkcie $\frac{u}{v}$.

Dôkaz. Ponajprv je zrejmé, že póly funkcie $\frac{u}{v}$, sú totožné s nulovými bodmi funkcie v, a teda s nulovými bodmi triedy riešení, v ktorej leží v. Pre konečné c platí, že rovnica $\frac{u(z)}{v(z)} = c$ je splnená práve v tých bodoch z, kde $u(z) - c \cdot v(z) = 0$, t. j. v nulových bodoch riešenia $u - c \cdot v$ a jeho triedy. Obrátene, nulové body riešenia $c_1 u + c_2 v$, kde c_1, c_2 sú konštanty, $|c_1| + |c_2| > 0$ a keďže už netreba brať do úvahy triedu, v ktorej je v, možno ešte predpokladať, že $c_1 \neq 0$, sú totožné s c-miestami funkcie $\frac{u}{v}$, pričom $c = -\frac{c_2}{c_1}$.

Analogicky sa dokáže pomocná veta 2, týkajúca sa vzťahu nulových bodov derivácie riešení rovnice (1) s rozdelením hodnôt určitej funkcie, uvedenej nižšie.

Pomocná veta 2

Nech u a v sú dve lineárne nezávislé riešenia rovnice (1). Potom platí: Ku každej hodnote c z rozšírenej komplexnej roviny E jestvuje práve jedna trieda riešení rovnice (1) tak, že c-miesta funkcie $\frac{u'}{v'}$ sú totožné s nulovými bodmi derivácie riešení tejto triedy. Obrátene, ku každej triede riešení rovnice (1) jestvuje práve jedna konštanta $c \in E$ tak, že množina nulových bodov derivácie riešení tejto triedy sa rovná množine c-miest funkcie $\frac{u'}{v'}$.

Obidve pomocné vety hovoria, že množine tried riešení rovnice (1) je jedno-jednoznačne priradená množina bodov z rozšírenej komplexnej roviny E, pričom každej triede riešení rovnice (1) je priradená práve tá konštanta $c \in E$, pre ktorú sú nulové body riešení tejto triedy, resp. nulové body ich derivácií, totožné s c-miestami funkcie $\frac{u}{v}$, resp. $\frac{u'}{v'}$, kde u, v sú nejaké dve lineárne nezávislé riešenia rovnice (1). Preto skúmanie nulových bodov riešení rovnice (1), resp. nulových bodov ich derivácie možno zameniť za ekvivalentnú úlohu, totiž za skúmanie rozdelenia hodnôt funkcie $\frac{u}{v}$, resp. $\frac{u'}{v'}$.

Poznámka. Špeciálnym prípadom pomocnej vety 1 je tvrdenie:

Funkcia $\frac{u}{v}$ je univalentná práve vtedy, ak majú funkcie $c_1u + c_2v$ pre ľubovoľné konštantné hodnoty c_1, c_2 najviac po jednom nulovom bode. Toto tvrdenie dokázal a používa najmä Z. Nehari pri štúdiu univalentných funkcií (II, str. 49—60).

V ďalšom budeme predpokladať, že oblasť T je otvorená komplexná rovina, t. j. funkcia Q vystupujúca v rovniciach (1), (2), (3) je celá a ešte $\not\equiv 0$. Prípad $Q \equiv 0$ je triviálny.

Vtedy sú riešenia rovnice (1) celé funkcie, a to celé transcendetné. Vyplýva to z toho, že každý koreň riešenia rovnice (1) je aj koreňom aspoň s tou istou násobnosťou jeho druhej derivácie a túto vlastnosť polynómy nemajú.

Jedným z problémov, vystupujúcich v teórii celých funkcií, je otázka ich rádu (typu a triedy).[1]) Tento problém sa pre integrály lineárnych diferenciálnych rovníc riešil v prácach H. Witticha (III), (IV), M. Frei (V) a K. Pöschla (VI). Z nich použijeme tieto výsledky:

M. Frei v práci (V) dokázala, že všeobecné riešenie rovnice

$$w^{(m)} + a_{m-1}(z) \,.\, w^{(m-1)} + \ldots + a_1(z) \,.\, w' + a_0(z) \,.\, w = 0, \tag{4}$$

v ktorej koeficienty $a_j(z)$, $j = 0,1, \ldots, m - 1$, sú celé funkcie, je nekonečného rádu, ak aspoň jeden z koeficientov a_j, $j = 0,1, \ldots, m - 1$, je celá transcendentná funkcia. Ak v postupnosti koeficientov $a_0(z)$, $a_1(z)$, $\ldots$, $a_{m-1}(z)$ je $a_\mu(z)$ posledný celý transcendentný koeficient, t. j. ak sú všetky $a_j(z)$, $\mu < j \leqq m - 1$, polynómy, jestvuje najviac μ lineárne nezávislých integrálov konečného rádu rovnice (4).

H. Wittich v knihe (IV, str. 69) dokázal, že každé celé transcendentné riešenie rovnice

$$w'' + R(z) \,.\, w' + S(z) \,.\, w = 0, \tag{5}$$

pričom $R(z)$ je polynóm stupňa α, $S(z)$ polynóm stupňa β, v prípade $\alpha \geqq \beta + 1$ je rádu $\lambda = 1 + \alpha$, v prípade $\alpha \leqq \frac{\beta}{2}$ je rádu $\lambda = 1 + \frac{\beta}{2}$ a v prípade $\frac{\beta}{2} < \alpha \leqq \beta$ môže byť rádu $\lambda_1 = 1 + \alpha$, alebo rádu $\lambda_2 = 1 + \beta - \alpha < \lambda_1$. Pritom pre riešenia rádu λ_2 je 0 Picardovou výnimkovou hodnotou. Vo všetkých týchto prípadoch je celé transcendentné riešenie rovnice (5) stredného typu (Mitteltypus) (IV, str. 73).

Z uvedených výsledkov ľahko vyplýva pre riešenia rovnice (1) veta 1.

---

[1]) Tieto pojmy, ako aj ďalšie z teórie meromorfných funkcií majú význam, aký sa uvádza napr. v knihe (IV).

Veta 1

Všetky riešenia rovnice (1) sú toho istého rádu a typu, a to: Ak je Q polynóm n-tého stupňa, vtedy sú rádu $1 + \frac{n}{2}$ a stredného typu a ak je Q celá transcendentná funkcia, vtedy sú nekonečného rádu.

Vzniká otázka, akého rádu (typu a triedy) sú riešenia rovnice (2) a rovnice (3). Odpoveď dáme najprv pre riešenia rovnice (3).

Ak je f riešenie rovnice (3), tak jestvujú dve lineárne nezávislé riešenia u, v rovnice (1) tak, že platí rovnica $f = \frac{u}{v}$. Z nej derivovaním dostávame, že je $f' = \frac{-w}{v^2}$, kde w je wronskián riešení u, v a ten je konštanta. Rád a typ funkcií v^2 a v je rovnaký (VII). Keďže sa rád a typ meromorfnej funkcie pri homografickej transformácii nemení, rád a typ funkcie f' sa rovná rádu a typu riešenia v rovnice (1). Je známe, že meromorfná funkcia a jej derivácia sú toho istého rádu a typu (VII, dôkaz tohto tvrdenia je v práci VIII). Z toho napokon vyplýva, že rád a typ riešenia f rovnice (3) sa rovná rádu a typu riešenia v rovnice (1). Platí teda veta 2.

Veta 2

Riešenia rovnice (3) sú toho istého rádu a typu ako riešenia rovnice (1).

Poznámka. Podiel $\frac{u}{v}$ dvoch lineárne nezávislých riešení rovnice (1) ako riešenie rovnice (3) je podľa vety 2 toho istého rádu a typu ako riešenie v rovnice (1). Dokážeme, že to isté platí aj o podiele $\frac{u'}{v'}$ derivácií týchto riešení.

Pomocná veta 3

Nech u a v sú dve lineárne nezávislé riešenia rovnice (1). Potom podiel $\frac{u'}{v'}$ je toho istého rádu a typu ako riešenie v.

Dôkaz. Ak položíme $\frac{u'}{v'} = F$, tak $F' = Q \,.\, \frac{w}{v'^2}$, kde je w wronskián riešení u a v, a teda konštanta. Vzhľadom na to, že funkcie F a F' sú rovnakého rádu a typu, stačí dokázať, že rád a typ funkcie F' je ten istý ako rád a typ funkcie v.

Ak je Q celá funkcia konečného rádu, je F' podielom dvoch funkcií rôznych rádov. Vskutku, ak je Q polynóm n-tého stupňa, je funkcia Qw rádu 0, kým funkcia v'^2, ktorá je toho istého rádu a typu ako funkcia v, je podľa vety 1 rádu $1 + \frac{n}{2}$. Ak zase Q je celá transcendentná funkcia konečného rádu, takou je aj Qw, kým funkcia v'^2 na základe vety 1 je nekonečného rádu. Podiel dvoch meromorfných funkcií rôznych rádov je toho istého rádu a typu ako funkcia s vyšším rádom (VII). Preto je funkcia F' toho istého rádu a typu ako funkcia v.

V prípade, že Q je nekonečného rádu, takého istého rádu je podľa vety 1 aj riešenie v. Dokážeme, že vtedy je aj funkcia F' nekonečného rádu, a to nasledovnou úvahou.

Funkcie u', v' nemajú ani jeden nulový bod spoločný, preto sú nulové body funkcie v' a ich hraničný exponent „Grenzexponent" (IX, str. 210) totožné s pólmi funkcie F, resp. hraničným exponentom pólov funkcie F. Ak je tento nekonečný, vtedy z vety, že hraničný exponent c-miest meromorfnej funkcie sa najviac rovná rádu tejto funkcie (IX, str. 210), vyplýva, že rád funkcie F je nekonečný, č. b. t. d.

Ak je zase hraničný exponent nulových bodov funkcie v' konečný, tak jestvuje kladné číslo k, pre ktoré platí: Rad

$$\sum_n \frac{1}{r_n^k}, \tag{6}$$

kde $r_n = |z_n|$, $\{z_n\}$ je postupnosť všetkých nulových bodov funkcie v', rôznych od 0, usporiadaná tak, aby postupnosť $\{r_n\}$ bola neklesajúca, konverguje. Pripomeňme ešte, že viacnásobný koreň funkcie v' sa opakuje v postupnosti $\{z_n\}$ toľkokrát, koľkokrát je jeho násobnosť.

Nech $P(z)$ je kanonický súčin, zostrojený nad bodmi z_n, vynásobený ešte faktorom z^m, t. j. celá funkcia tvaru $P = z^m \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) . e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{z}{z_n}\right)^\lambda}$, kde λ je celé nezáporné číslo $\leqq k$, známym spôsobom určené, m je násobnosť koreňa funkcie v' v bode 0 ($m = 0$, ak $v'(0) \neq 0$) a n prebieha cez indexy všetkých ostatných nulových bodov funkcie v'. Keďže rad (6) konverguje, celá funkcia P skutočne jestvuje a je bodmi z_n a číslom m jednoznačne určená. Jej rád sa rovná hraničnému exponentu jej nulových bodov (X, str. 330), a je teda konečný. Funkcie v', P majú rovnaké nulové body s tou istou násobnosťou, preto sa môže písať:

$$v' = P . e^h, \tag{7}$$

h je nejaká celá funkcia. Ukážeme, že z predpokladu, že F' je funkcia konečného rádu, vyplýva, že h je polynóm, a teda funkcia v' daná rovnicou (7) je konečného rádu. To je však v spore s tým, že riešenie v je nekonečného rádu.

Výraz $F' = Q . \frac{w}{v'^2}$ možno vzhľadom na rovnicu (1) písať v tvare $F' = \frac{v''}{v} \frac{w}{v'^2}$ a ďalej $F' = \frac{v''}{v'} . \frac{v'}{v} . \frac{w}{v'^2}$. Odtiaľ $v'^2 = \frac{v''}{v'} . \frac{v'}{v} . \frac{w}{F'}$. Prechodom k funkcii „Schmiegungsfunktion" funkcií na obidvoch stranách poslednej rovnice dostávame nerovnosť

$$m(r, v'^2) \leqq m\left(r, \frac{v''}{v'}\right) + m\left(r, \frac{v'}{v}\right) + m\left(r, \frac{w}{F'}\right). \tag{8}$$

Z predpokladu o funkcii F' je pre $r > r_0$ $m\left(r, \frac{w}{F'}\right) < r^\lambda$, λ je konečné kladné číslo; ďalej platí rovnica $m(r, v'^2) = 2m(r, v')$ pre $r > 0$ (VII) a napokon je

$$m\left(r, \frac{v''}{v'}\right) \leqq' A \log r + B \log m(r, v')$$

a

$$m\left(r, \frac{v'}{v}\right) \leqq' A \log r + B \log m(r, v),$$

kde A, B sú kladné konštanty a znak $'$ nad znamienkom nerovnosti značí, že nerovnosť platí pre každé $r > 0$ s výnimkou systému intervalov s konečnou celkovou dĺžkou. V ďalšom použijeme tento znak v tom istom význame a znakmi A, B, C, D, E budeme označovať kladné konštanty, pričom ani jedna z nich nemusí mať v dvoch rôznych nerovnostiach tú istú hodnotu. Ak vezmeme posledné relácie do úvahy, nerovnosť (8) prejde do tvaru

$$m(r, v') \leqq' A \log r + B \log m(r, v) + C \log m(r, v') + Dr^\lambda. \tag{9}$$

Funkcia v' je transcendentná, preto $\lim\limits_{r \to +\infty} \frac{\log r}{m(r, v')} = 0$. V opačnom prípade by jestvovala postupnosť $\{r_n\} : (0 <)\, r_n < r_{n+1} \to +\infty$ tak, že platí $\frac{\log r_n}{m(r_n, v')} > \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, a teda $m(r_n, v') < \frac{1}{\varepsilon} . \log r_n$. Keďže je $m(r, v')$ konvexnou funkciou premennej $\log r$ (IX, str. 167), bolo by pre $r \geqq r_1$ $m(r, v') < \frac{1}{\varepsilon} . \log r$, a teda v' by bola polynómom. Ďalej $\lim\limits_{r \to +\infty} \frac{\log m(r, v')}{m(r, v')} = 0$, takže z nerovnosti (9) vyplýva nerovnosť $1 \leqq' B \frac{\log m(r, v)}{m(r, v')} + D \frac{r^\lambda}{m(r, v')} + \frac{1}{2}$, a túto píšeme v tvare

$$m(r, v') \leqq' A . \log m(r, v) + B . r^\lambda \tag{10}$$

Pre ľubovoľnú celú funkciu g existuje $r_0 > 0$ tak, že pre všetky $r > r_0$, a $k > 1$ platí systém nerovností:

$$m(r, g) \leqq \log M(r, g) \leqq \frac{k+1}{k-1} m(kr, g) \quad \text{(IX, str. 209).} \tag{11}$$

Pritom ako obvykle $M(r, g) = \max\limits_{|z| = r} |g(z)|$. Ľavú stranu nerovnosti (10) zmenšíme, pravú stranu zväčšíme, a to použitím druhej, resp. prvej nerovnosti systému (11), kde za g položíme najprv v', potom v. Dostaneme

$$\frac{k-1}{k+1} \log M\left(\frac{r}{k}, v'\right) \leqq' A \log \log M(r, v) + Br^\lambda,$$

alebo zavedením premennej u vzťahom $\frac{r}{k} = u$ a opätovným písaním r miesto u zase

$$\frac{k-1}{k+1} \log M(r, v') \leqq' A \log \log M(kr, v) + B . k^\lambda . r^\lambda. \tag{12}$$

Teraz použijeme lemmu (XI, str. 375—377):

Funkcia $f(r)$, definovaná, rastúca a kladná pre $r > 0$, spĺňa pre tieto r nerovnosť

$$f\left(r + \frac{1}{\log f(r)}\right) <' [f(r)]^{1+\varepsilon}; \ \varepsilon \text{ je ľubovoľné číslo} > 0.$$

Ak pre každé $r > 0$ volíme k tak, aby bolo

$$kr = r + \frac{1}{\log\log M(r, v)},$$

t. j. aby bolo

$$k = 1 + \frac{1}{r \log\log M(r, v)}, \tag{13}$$

je podľa spomenutej lemmy

$$\log M(kr, v) = \log M\left(r + \frac{1}{\log\log M(r, v)}\right) <' [\log M(r, v)]^{1+\varepsilon},$$

pretože $\log M(r, v)$ je rastúcou funkciou premennej r a od istého r_0 kladná. Z poslednej nerovnosti logaritmovaním vznikne nerovnosť

$$\log\log M(kr, v) <' (1 + \varepsilon) \log\log M(r, v), \tag{14}$$

kde k je dané rovnicou (13). Pravú stranu nerovnosti (14) možno ešte zväčšiť, a to pomocou lemmy (X, str. 323):

Pre každú celú funkciu g a $r > 0$ platí vzťah

$$M(r, g) \leqq |g(0)| + r \,.\, M(r, g').$$

Z nej máme

$$\log M(r, v) \leqq' A + \log r + \log M(r, v')$$

a ďalej

$$\log\log M(r, v) \leqq' A + \log\log r + \log\log M(r, v'). \tag{15}$$

Preto zo (14) vyplýva nerovnosť

$$\log\log M(kr, v) <' A + B \log\log r + B \log\log M(r, v') \tag{16}$$

pre k, určené rovnicou (13).

Z rovnice (13)

$$\frac{k+1}{k-1} = \frac{\dfrac{2r \log\log M(r, v) + 1}{r \log\log M(r, v)}}{\dfrac{1}{r \log\log M(r, v)}} = 2r \log\log M(r, v) + 1,$$

odkiaľ použitím nerovnosti (15) vyplýva nerovnosť

$$\frac{k+1}{k-1} \leqq' 1 + Ar + 2r \log\log r + 2r \log\log M(r, v'). \tag{17}$$

Napokon spojením nerovností (12), (16) a (17) dostávame nerovnosť

$$\log M(r, v') \leqq' (1 + Ar + 2r \log \log r + 2r \log \log M(r, v')) .$$
$$. \left[A(A + B \log \log r + B \log \log M(r, v')) + B\left(1 + \frac{1}{r \log \log M(r, v)}\right)^{\lambda} . r^{\lambda} \right].$$

Ak vezmeme do úvahy, že $\log \log r < r$ pre $r > 1$ a pre $r > r_0$ je $1 + \frac{1}{r \log \log M(r, v)} < 2$, z poslednej nerovnosti vyplýva nerovnosť

$$\log M(r, v') \leqq' [Ar^2 + 2r \log \log M(r, v')] . [Ar + B \log \log M(r, v') + Cr^{\lambda}],$$

z ktorej po rozpísaní pravej strany máme

$$\log M(r, v') \leqq 'Ar^3 + Br^2 \log \log M(r, v') + Cr (\log \log M(r, v'))^2 + \\ + Dr^{\lambda+2} + Er^{\lambda+1} \log \log M(r, v'),$$

a teda

(18) $$\log M(r, v') \leqq' Ar^{\mu} + Br^{\nu} \log \log M(r, v') + Cr(\log \log M(r, v'))^2,$$

kde μ a ν sú nejaké kladné čísla.

Nerovnosť (18) možno ďalej zjednodušiť.

Z rovnice $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\log x)^2}{x^{\varepsilon}} = 0$, $0 < \varepsilon < 1$, vyplýva rovnica

(19) $$\lim_{r \to +\infty} \frac{[\log \log M(r, v')]^2}{[\log M(r, v')]^{\varepsilon}} = 0$$

a teda tým skôr

(20) $$\lim_{r \to +\infty} \frac{\log \log M(r, v')}{[\log M(r, v')]^{\varepsilon}} = 0.$$

Ďalej je

(21) $$\frac{r^{\varkappa}}{[\log M(r, v')]^{1-\varepsilon}} \leqq' A$$

pre kladné $\varkappa$.

Vskutku, funkcia $\log M(r, v')$ je spojitou funkciou, a teda hodnoty r, pre ktoré je splnená opačná nerovnosť, t. j. nerovnosť $\frac{r^{\varkappa}}{[\log M(r, v')]^{1-\varepsilon}} > A$, ktorú možno písať v tvare

(22) $$\log M(r, v') < Ar^{\mu}, \ \mu = \frac{\varkappa}{1 - \varepsilon} > 0,$$

tvoria buď prázdnu množinu, buď systém $\{O_n\}$ otvorených intervalov. Použijeme teraz lemmu (X, str. 333):

Nech P je kanonický súčin konečného rádu ϱ a l ľubovoľné kladné číslo. Nech $\{z_n\}$ je postupnosť nulových bodov funkcie P, rôznych od bodu 0 a nech $|z_n| = r_n$, $|z| = r$. Ak odstránime otvorené kruhy $K_n : |z - z_n| < \frac{1}{r_n^l}$ z otvorenej komplexnej roviny, tak v ostatných bodoch máme pre $\varepsilon > 0$ nerovnosť

(23) $$|P(z)| \geqq \frac{1}{e^{r^{\varrho+\varepsilon}}} \text{ pre } r > r_0(\varepsilon).$$

Množina tých r, pre ktoré neplatí (23), t. j. pre ktoré jestvuje aspoň jedno z_0, $|z_0| = r$, v ktorom platí $|P(z_0)| < \frac{1}{e^{r^{\varrho+\varepsilon}}}$, tvorí buď prázdnu množinu, buď systém otvorených intervalov $\{U_n\}$. Celková dĺžka tohto systému nie je väčšia než

$$2\sum_n \frac{1}{r_n^l}. \tag{24}$$

Ak je $l > \varrho$, tak rad (24) konverguje (X, str. 330), a teda systém $\{U_n\}$ má konečnú celkovú dĺžku. Keby mal systém $\{O_n\}$ nekonečnú celkovú dĺžku, jestvovala by rastúca postupnosť $\{r_n\}$, $\lim_{n\to+\infty} r_n = +\infty$, bodov, ležiacich v intervaloch systému $\{O_n\}$ a neležiacich v žiadnom intervale systému $\{U_n\}$, pre ktoré teda z (22) a (23) platia nerovnosti

$$\log M(r_n, v') < Ar_n^\mu, \ |P(r_n e^{i\vartheta})| \geqq \frac{1}{e^{r_n^{\varrho+\varepsilon}}} \tag{25}$$

pre všetky n a $\vartheta : 0 \leqq \vartheta < 2\pi$. Z rovnice (7) potom máme

$$|e^{h(r_n e^{i\vartheta})}| = \frac{|v'(r_n e^{i\vartheta})|}{|P(r_n e^{i\vartheta})|} \leqq \frac{M(r_n, v')}{|P(r_n e^{i\vartheta})|} < e^{Ar_n^\mu} . e^{r_n^{\varrho+\varepsilon}} \leqq e^{r_n^\varkappa},$$

kde je $\varkappa > 0$, t. j.

$$Re\{h(r_n e^{i\vartheta})\} < r_n^\varkappa. \tag{26}$$

Platí lemma (X, str. 335):

Ak pre rastúcu postupnosť $\{r_n\}$, idúcu do nekonečna, reálna časť $U(z)$ celej funkcie $F(z)$ spĺňa nerovnosti

$$U(r_n e^{i\vartheta}) \leqq Cr_n^k,$$

kde C a k sú kladné konštanty nezávislé od r_n a ϑ, vtedy F je polynóm najviac stupňa k.

Z nerovností (26) na základe tejto lemmy dostávame, že $h(z)$ je polynóm, a teda v' je konečného rádu, čo je v spore s tým, že v je nekonečného rádu. Preto systém $\{O_n\}$ má konečnú celkovú dĺžku, čo sme chceli dokázať.

Z rovníc (19) a (20), ak ešte vezmeme do úvahy nerovnosť (21), vyplýva, že:

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{r^\nu . \log\log M(r, v')}{\log M(r, v')} =' 0$$

a

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{r . [\log\log M(r, v')]^2}{\log M(r, v')} =' 0,$$

kde znak $'$ nad znakom rovnosti hovorí, že r prebieha všetky kladné hodnoty s výnimkou systému intervalov s celkovou konečnou dĺžkou. Na základe týchto rovníc možno nerovnosť (18) písať v tvare $1 \leqq' A \frac{r^\mu}{\log M(r, v')} + \frac{1}{2}$, t. j.

$$\log M(r, v') \leqq' Ar^\mu. \tag{27}$$

Nerovnosť (27) teda platí na systéme intervalov s nekonečnou celkovou dĺžkou. Ďalej postupujeme ako pri dôkaze tvrdenia, že systém $\{O_i\}$ má konečnú celkovú dĺžku. Dostaneme výsledok, že $h(z)$, vystupujúca v rovnici (7), je polynóm, čo sme chceli dokázať.

Okrem hraničného exponentu podáva o hustote rozloženia c-miest meromorfnej funkcie f informácie aj funkcia $n_f(r, c)$, ktorej hodnota pre $r > 0$ sa rovná počtu c-miest funkcie f v kruhu $|z| \leqq r$. Jej rád (typ a trieda) sa rovná rádu (typu a triede) funkcie „Anzahlfunktion der c-Stellen“ $N\left(r, \frac{1}{f - c}\right)$ pre c konečné, resp. $N(r, f)$ pre $c = \infty$ (IX, str. 210), a teda sa rovná najviac rádu (typu a triede) funkcie f. Picard—Borelova veta k tomu dodáva (IX, str. 251): Pre nekonštantnú meromorfnú funkciu f jestvujú najviac dve hodnoty c, pre ktoré funkcia $n_f(r, c)$ je nižšieho rádu (typu a triedy) ako funkcia f.

Na základe tejto vety dokážeme teraz vetu 3.

Veta 3

Jestvujú najviac dve triedy riešení v rovnice (1), pre ktoré je funkcia $n_v(r, 0)$ nižšieho rádu (typu) než riešenie v.

Špeciálne: Jestvujú najviac dve triedy riešení rovnice (1), ktoré majú konečný počet nulových bodov.

Dôkaz. Nech u, v sú dve lineárne nezávislé riešenia rovnice (1). Ich podiel $F = \frac{u}{v}$ je meromorfná, nekonštantná funkcia, ktorá podľa poznámky za vetou 2 je toho istého rádu a typu ako riešenia rovnice (1). Použitím Picard—Borelovej vety na funkciu F, ak ešte vezmeme do úvahy pomocnú vetu 1, dostávame tvrdenie vety 3. Dodatkové tvrdenie vyplýva z toho, že ak má riešenie v konečný počet nulových bodov, je funkcia $n_v(r, 0)$, ktorá je vtedy pre všetky dostatočne veľké r konštantná, rádu 0, a teda nižšieho rádu než je riešenie v.

Ak uvažujeme namiesto funkcie F o funkcii $F_1 = \frac{u'}{v'}$, ktorá je meromorfná, nekonštantná a podľa pomocnej vety 3 toho istého rádu a typu ako riešenia rovnice (1), aplikujeme na ňu Picard—Borelovu vetu a vezmeme potom zase pomocnú vetu 2 do ohľadu, dostaneme vetu 4.

Veta 4

Jestvujú najviac dve triedy riešení v rovnice (1), pre ktoré je funkcia $n_{v'}(r, 0)$ nižšieho rádu (typu) než riešenie v.

Špeciálne: Jestvujú najviac dve triedy riešení rovnice (1), ktorých derivácia má konečný počet nulových bodov.

Riešenie v rovnice (1), pre ktoré je funkcia $n_v(r, 0)$ (resp. $n_{v'}(r, 0)$) nižšieho rádu (typu) než riešenie v, budeme nazývať *Picard—Borelovým výnimočným riešením 1. druhu* (resp. *2. druhu*), stručne *P. B. v. riešením 1. druhu (resp. 2. druhu)*.

Riešenie v rovnice (1) s konečným počtom nulových bodov (resp. ktorého derivácia má konečný počet nulových bodov) budeme nazývať *Picardovým výnimočným riešením 1. druhu* (resp. *2. druhu*), stručne *P. v. riešením 1. druhu* (resp. *2. druhu*).

Je zrejmé, že každé P. v. riešenie rovnice (1) 1. druhu (resp. 2. druhu) je aj P. B. v. riešením 1. druhu (resp. 2. druhu), kým naopak to nemusí platiť.

V práve zavedených termínoch možno vety 3 a 4 zhrnúť v tvrdení:

Jestvujú najviac dve triedy P. B. v. riešení rovnice (1) 1. druhu a najviac dve triedy P. B. v. riešení rovnice (1) 2. druhu. Špeciálne: Jestvujú najviac dve triedy P. v. riešení rovnice (1) 1. druhu a najviac dve triedy P. v. riešení rovnice (1) 2. druhu.

Vety 3 a 4 možno použiť pri skúmaní otázky rastu riešení rovnice (2). Ak je w nejaké riešenie rovnice (2), tak jestvuje riešenie v rovnice (1) tak, že $w = \frac{v'}{v}$. Z tejto rovnice vidieť, že rád (typ) riešenia w sa najviac rovná rádu (typu) riešenia v. Z druhej strany rád (typ) riešenia w sa aspoň rovná rádu (typu) funkcií $n_v(r, \infty)$, $n_{v'}(r, 0)$. Zo vzťahu medzi pólmi, resp. nulovými bodmi funkcie w a nulovými bodmi riešenia v, resp. nulovými bodmi jeho derivácie, vyplývajú rovnice $n_w(r, \infty) = n_v(r, 0)$, $n_w(r, 0) = n_{v'}(r, 0)$. Z nich použitím vety 3 a 4 dostávame vetu 5.

Veta 5

S výnimkou najviac dvoch sú všetky riešenia rovnice (2) toho istého rádu a typu ako riešenia rovnice (1). Výnimočné riešenie je nižšieho rádu (typu) než riešenia rovnice (1) a je logaritmickou deriváciou riešenia rovnice (1), ktoré je súčasne P. B. v. riešením 1. i 2. druhu.

Vzniká otázka, či vôbec jestvujú P. B. v. riešenia rovnice (1) 1., resp. 2. druhu. Ukážeme na príklade, ktorý je zaujímavý aj z iných dôvodov, že jestvuje rovnica (1), ktorá má dve triedy P. B. v. riešení 1. a 2. druhu.

Uvažujme o rovnici

$$y'' = ky, \qquad k \neq 0 \text{ je konštanta.} \tag{28}$$

Riešenia tejto rovnice sú podľa vety 1 rádu *1* a stredného typu. Všeobecné riešenie y rovnice (28) je dané vzťahom

$$y = c_1 e^{\sqrt{k}z} + c_2 e^{-\sqrt{k}z}. \tag{29}$$

Z neho vidieť, že rovnica (28) má dve triedy P. v. riešení, ktoré sú súčasne 1. a 2. druhu, a to riešenia $e^{\sqrt{k}z}$, $e^{-\sqrt{k}z}$ a s nimi lineárne závislé riešenia. Pre nulové body ostatných riešení (ktoré majú podľa vety 3 nekonečne mnoho nulových bodov) platí rovnica $c_1 e^{\sqrt{k}z} + c_2 e^{-\sqrt{k}z} = 0$, kde $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, nakoľko neberieme do úvahy ani triviálne riešenie. Riešenie poslednej rovnice tvoria body

$$z = \frac{1}{2\sqrt{k}} \log \left(-\frac{c_2}{c_1} \right) = z_0 + \frac{n\pi i}{\sqrt{k}}, \tag{30}$$

kde z_0 je jeden z nulových bodov riešenia (29), patriaceho konštantám c_1, c_2 a n prebieha množinu všetkých celých čísel. Tieto body ležia na priamke $z = z_0 + \frac{\pi i}{\sqrt{k}} t$, $-\infty < t < +\infty$. Uhol, ktorý zviera táto priamka s osou x, sa rovná $\arg \frac{i}{\sqrt{k}}$, teda nezávisí od voľby konštánt c_1, c_2. Ak volíme hodnotu $\sqrt{k}$ s opačným znamienkom, dostaneme tú istú priamku, len je opačne orientovaná. Vzdialenosť dvoch susedných nulových bodov na priamke je $\frac{\pi}{\sqrt{|k|}}$. Úhrnom platí tvrdenie:

a) Nulové body riešenia rovnice (28), ktoré nie je P. v. riešením, ležia na priamke. Smer tejto priamky je pre všetky takéto riešenia rovnice (28) rovnaký; táto priamka zviera s osou x uhol, ktorý sa rovná $\arg \frac{i}{\sqrt{k}}$. Vzdialenosť dvoch susedných bodov je pre všetky riešenia rovnice (28), ktoré nie sú P. v. riešeniami, rovnaká; rovná sa $\frac{\pi}{\sqrt{|k|}}$.

Z tvrdenia o rovnakej vzdialenosti medzi dvoma susednými nulovými bodmi riešení rovnice (28), ktoré nie sú P. v. riešeniami, plynie tvrdenie:

b) Nulové body dvoch riešení rovnice (28), ktoré ležia na tej istej priamke, sa oddeľujú.

Ešte dokážeme túto vlastnosť riešení rovnice (28):

c) Ku každému riešeniu u rovnice (28) jestvuje riešenie v tejto rovnice, lineárne nezávislé s u, pre ktoré platí: Funkcie u, v', resp. v, u' majú rovnaké nulové body.

Dôkaz. Ak u je P. v. riešenie, tak za riešenie v možno vziať hociktoré P. v. riešenie, ktoré nepatrí do tej triedy, z ktorej je u.

Ak $u = c_1 e^{\sqrt{k}z} + c_2 e^{-\sqrt{k}z}$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, tak ako riešenie v berieme do úvahy riešenie $c_1 e^{\sqrt{k}z} - c_2 e^{-\sqrt{k}z}$. Keďže $u' = \sqrt{k}(c_1 e^{\sqrt{k}z} - c_2 e^{-\sqrt{k}z})$ a zase $v' = \sqrt{k}(c_1 e^{\sqrt{k}z} + c_2 e^{-\sqrt{k}z})$, majú funkcie u, v' a funkcie v, u' rovnaké nulové body.

Napokon platí tvrdenie:

d) Nulové body riešenia rovnice (28), ktoré nie je P. v. riešením, ležia na tej istej priamke ako nulové body jeho derivácie a navzájom sa oddeľujú.

Dôkaz. Nulové body derivácie riešenia rovnice (28), daného rovnicou (29), spĺňajú rovnicu $c_1 e^{\sqrt{k}z} - c_2 e^{-\sqrt{k}z} = 0$. Jej riešenia sú body

$$(31) \qquad z = \frac{1}{2\sqrt{k}} \log \left(\frac{c_2}{c_1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{k}} \log \left(-\frac{c_2}{c_1}\right) + \frac{\pi i}{2\sqrt{k}} = z_0 + \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi i}{\sqrt{k}},$$

t. j. ležia na priamke $z = z_0 + \frac{\pi i}{\sqrt{k}} t$, $-\infty < t < +\infty$, kde bod z_0 je vyššie definovaný. Prvú časť tvrdenia sme takto dokázali. Porovnaním rovníc (30) a (31) dostávame druhú časť tvrdenia.

II.

V ďalšom sa budeme zaoberať otázkou P. B. v. (P. v.) riešení rovnice (1), ak je funkcia Q, vystupujúca v rovnici (1), polynóm. Vtedy je každé riešenie rovnice (1) konečného rádu a jeho nulové body sú až na konečný počet identické s nulovými bodmi jeho druhej derivácie.

Pre celú funkciu v konečného rádu platí tvrdenie (porovnať s XII): Ak je 0 Picard—Borelovou (Picardovou) výnimočnou hodnotou funkcie v, tak je aj

Picard—Borelovou (Picardovou) výnimočnou hodnotou funkcie v'. Vskutku, ak je P kanonický súčin funkcie v, tak platia rovnice $v = P \,.\, e^h$, h je polynóm a $v' = (P' + Ph')\, e^h$. Funkcia $P' + Ph'$ je najviac toho istého rádu, typu a triedy ako je P. Keďže sú nulové body funkcií v' a $P' + Ph'$ tie isté, je funkcia $n_{v'}(r, 0)$ najviac toho istého rádu, typu a triedy ako je P. Odtiaľ vyplýva prvá časť tvrdenia. Druhú dostávame z toho, že ak je P polynóm, je aj $P' + Ph'$ polynóm.

Analogické tvrdenie platí o nulových bodoch funkcií v' a v''. Zoberúc do ohľadu ešte vyššie uvedenú poznámku, dostávame z toho vetu 6.

Veta 6

Nech v rovnici (1) je Q polynóm. Potom platí: Každé riešenie tejto rovnice, ktoré je P. B. v., resp. P. v. riešením 1. druhu, je aj P. B. v., resp. P. v. riešením 2. druhu a obrátene.

Ďalej platí veta 7.

Veta 7

Ak je v rovnici (1) Q polynóm, ktorý sa neredukuje na konštantu, tak jestvuje najviac jedna trieda P. v. riešení 1. druhu.

Dôkaz tejto vety uvedieme až za vetou 12.

Napokon ukážeme, že v rovnici (1) s polynomiálnym Q nejestvuje P. B. v. riešenie, ktoré by nebolo súčasne aj P. v. riešením. Platí totiž veta 8.

Veta 8

Nech v rovnici (1) je Q polynóm. Potom každé P. B. v. riešenie tejto rovnice je aj P. v. riešením.

Dôkaz. Nech je Q polynóm stupňa n. Stačí zrejme uvažovať o $n \geqq 1$ a keďže rád riešení rovnice (1) je $1 + \frac{n}{2}$ a celé funkcie necelého rádu nemôžu mať P. B. v. hodnotu 0 (IX, str. 225), možno ešte predpokladať, že n je párne. Nech $v = P \,.\, e^h$ je P. B. v. riešenie rovnice (1). Dokážeme, že P je potom polynóm.

Postupným derivovaním dostávame rovnice:

$$v' = (P' + Ph')\, e^h,$$

$$v'' = (P'' + 2P'h' + Ph'' + Ph'^2)\, e^h.$$

Ak v'', určené poslednou rovnicou, dosadíme do rovnice (1), dostaneme, že kanonický súčin P riešenia v rovnice (1) vyhovuje rovnici

$$(P'' + 2P'h' + Ph'' + Ph'^2)\, e^h = QPe^h,$$

a teda aj rovnici

$$P'' + 2h' \,.\, P' + (h'' + h'^2 - Q)\, P = 0. \tag{32}$$

Keďže v je P. B. v. riešením, musí byť e^h toho istého rádu a typu ako je v. Preto je polynóm h stupňa $1 + \frac{n}{2}$, h' stupňa $\frac{n}{2}$. Stupeň polynómu $h'' + h'^2 - Q$ označíme β. Vidieť, že $\beta \leqq n$.

Rovnica (32) je typu (5). Preto o raste funkcie P platí tvrdenie. Ak je P celá transcendentná funkcia, tak v prípade $\frac{n}{2} \geqq \beta + 1$ je rádu $1 + \frac{n}{2}$. Ak je zase $\frac{n}{2} \leqq \frac{\beta}{2} \left(\leqq \frac{n}{2}\right)$, tak $\beta = n$ a P je rádu $1 + \frac{n}{2}$. A napokon aj v prípade $\frac{\beta}{2} < \frac{n}{2} \leqq \beta$ je P rádu $1 + \frac{n}{2}$. Keby mala totiž rád $1 + \beta - \frac{n}{2}$, musela by mať P. v. hodnotu 0, a teda P by sa redukovala na polynóm. Vo všetkých troch prípadoch je P stredného typu, a teda toho istého rádu a typu ako v. Preto P nie je celá transcendentná funkcia, ale polynóm, č. b. t. d.

III.

V ďalšom ukážeme, že ak je v rovnici (1) Q celá transcendentná funkcia, tak vety 6, 7, 8 nemusia platiť. Postupujeme pritom tak, že vyriešime jeden problém prof. O. Borůvku.

Prof. O. Borůvka položil tento problém:

Daná je postupnosť $\{a_n\}$ navzájom rôznych bodov otvorenej komplexnej roviny s najviac jedným hromadným bodom ∞. Treba nájsť diferenciálnu rovnicu (1) tak, aby malo jedno jej riešenie nulové body práve v bodoch a_n.

Keďže nulové body riešenia v rovnice (1) sú pólmi zodpovedajúceho riešenia u rovnice (2), je s daným problémom ekvivalentný tento problém:

Nájsť rovnicu (2), aby malo jedno jej riešenie póly práve v bodoch a_n.

Riešenie

Nech P je celá funkcia s jednoduchými nulovými bodmi a_n, a len s týmito nulovými bodmi. Takáto funkcia podľa Weierstrassovej vety určite jestvuje. Pritom $P'(a_n) \neq 0$. Uvažujme o výraze

$$u = \frac{P'}{P} + h, \tag{33}$$

kde h je zatiaľ neurčená celá funkcia. Tento výraz je logaritmickou deriváciou celej funkcie $v = P \,.\, e^{\int h\,dz}$ a funkcií, ktoré sú konštantnými násobkami funkcie v. Ako sa ľahko spočíta, potom $u' + u^2 = \frac{P'' + 2P'h}{P} + h' + h^2$. Teda funkcia u, daná rovnicou (33), vyhovuje rovnici (2), v ktorej

$$Q = \frac{P'' + 2P'h}{P} + h' + h^2. \tag{34}$$

Ak je možné nájsť celú funkciu h tak, aby bolo Q celou funkciou, tak je už uvedený problém rozriešený. Obrátene, ak má nejaká rovnica (2) riešenie u s pólmi práve v bodoch a_n, tak možno písať u v tvare (33) a celý koeficient Q tejto rovnice zase v tvare (34).

Funkcia Q, daná rovnicou (34), je celou práve vtedy, ak výraz $\frac{P'' + 2P'h}{P}$ je celou funkciou. Táto je však celou práve vtedy, ak sú všetky nulové body funkcie P aj nulovými bodmi funkcie $P'' + 2P'h$. Teda Q je celou vtedy a len vtedy, ak pre každé a_n platí rovnica $P''(a_n) + 2P'(a_n) \,.\, h(a_n) = 0$, čiže rovnica

$$(35) \qquad h(a_n) = -\frac{P''(a_n)}{2P'(a_n)}.$$

Takáto celá funkcia h, ktorá spĺňa podmienky (35), určite jestvuje. Ak je postupnosť $\{a_n\}$ konečná, možno za P vziať polynóm $\prod_{i=1}^{n}(z - a_i)$ a funkcia $h_0(z) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{P''(a_i)}{2P'^2(a_i)} \cdot \frac{P(z)}{z - a_i}$, t. j. Lagrangeov interpolačný polynóm, má žiadanú vlastnosť. V prípade nekonečnej postupnosti $\{a_n\}$, $a_n \neq 0$, vyhovuje podmienkam (35) napríklad funkcia (X, str. 301) $h_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{P''(a_n)}{2P'^2(a_n)} \cdot$ $\cdot \frac{P(z)}{z - a_n} \cdot \left(\frac{z}{a_n}\right)^{q_n}$, kde q_n je vhodné celé nezáporné číslo. Ak je medzi a_n aj 0, pridáme k Σ ešte člen $-\frac{P''(0)}{2P'^2(0)} \cdot \frac{P(z)}{z}$.

Ak je teraz h ľubovoľná celá funkcia, ktorá spĺňa podmienky (35), tak $h(a_n) - h_0(a_n) = 0$, t. j. funkcia $h - h_0$ má nulové body a_n. (Okrem bodov a_n však môže mať i ďalšie nulové body.) Všeobecný tvar takejto funkcie je Pf, kde f je ľubovoľná celá funkcia. Preto platí:

Všeobecný tvar celej funkcie h, ktorá spĺňa podmienky (35), je $h = h_0 + Pf$, kde h_0, P sú vyššie uvedené funkcie a f je ľubovoľná funkcia.

Potom má funkcia Q, daná rovnicou (34), tvar

$$\begin{aligned} Q_f &= \frac{P'' + 2P'h}{P} + h' + h^2 \\ &= \frac{P'' + 2P'h_0}{P} + h_0' + h_0^2 + (3P' + 2h_0P)\,f + Pf' + P^2f^2, \end{aligned}$$

teda

$$(36) \qquad Q_f = Q_0 + (3P' + 2h_0P)\,f + Pf' + P^2f^2,$$

kde $Q_0 = \frac{P'' + 2P'h_0}{P} + h_0' + h_0^2$. Indexom f vyjadrujeme závislosť Q_f od funkcie f.

Analogicky píšeme rovnicu (33) v tvare:

$$(37) \qquad u = \frac{P'}{P} + h_0 + Pf.$$

Platí teda tvrdenie:

Tvrdenie A

Jestvuje rovnica (2), ktorej jedno riešenie u_1 má póly práve v bodoch a_n. Koeficient Q tejto rovnice je daný vzťahom (36) a riešenie u_1 zase rovnicou (37). Význam funkcií P, h_0, f sa uvádza v texte.

Obrátene, ak má nejaká rovnica (2) riešenie u_1 s pólmi práve v bodoch a_n, tak jej koeficient Q je daný rovnicou (36) a riešenie u_1 zase rovnicou (37), kde f je nejaká celá funkcia a ostatné funkcie sú určené ako vyššie.

Ďalej platí tvrdenie B.

Tvrdenie B

K dvom rôznym celým funkciám f_1, f_2 priradí rovnica (36) dve rôzne funkcie Q_{f_1}, Q_{f_2}.

Dôkaz. Ak pre funkcie f_1, f_2 je $Q_{f_1} = Q_{f_2}$, rovnica (2) s koeficientom Q_{f_1} má dve riešenia u_1, u_2, dané rovnicou (37), zodpovedajúce funkcii f_1, resp. f_2, s rovnakými pólmi a_n. Preto $u_1 = u_2$, a teda na základe (37) platí rovnica $\frac{P'}{P} + h_0 + Pf_1 = \frac{P'}{P} + h_0 + Pf_2$, t. j. rovnica $P \,.\, (f_1 - f_2) = 0$. Keďže funkcia $P \neq 0$, je $f_1 - f_2 = 0$, t. j. $f_1 = f_2$, č. b. t. d.

Z posledného tvrdenia vyplýva tvrdenie C.

Tvrdenie C

Jestvuje nekonečne mnoho diferenciálnych rovníc (2), ktoré majú jedno riešenie s predpísanými pólmi a_n.

Pri riešení daného problému vystupuje ľubovoľná celá funkcia f. Vzniká preto táto otázka:

Nech je daná ešte jedna postupnosť $\{b_n\}$ navzájom rôznych bodov otvorenej komplexnej roviny s najviac jedným hromadným bodom, a to ∞, pričom postupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sú disjunktné. Či je možné funkciu f voliť tak, aby malo riešenie u_1 (s pólmi a_n) nulové body práve v bodoch b_n.

Riešenie

Uvažujme o celej funkcii P_1, ktorá má nulové body práve v bodoch b_n. Funkcia $u_1 = \frac{P'}{P} + h_0 + Pf = \frac{P' + P(h_0 + Pf)}{P}$ má nulové body v bodoch b_n a len v týchto bodoch práve vtedy, ak môžeme písať

$$P' + P(h_0 + Pf) = P_1 e^g, \tag{38}$$

kde g je nejaká celá funkcia. Z rovnice (38) vyplýva pre f rovnica

$$f = \frac{P_1 e^g - P' - Ph_0}{P^2}. \tag{39}$$

Daný problém má teda riešenie práve vtedy, ak funkcia f, určená rovnicou (39), je celá, t. j. pre každú celú funkciu g, pre ktorú je f celou. Funkcia f je však celou vtedy a len vtedy, ak je každý nulový bod funkcie P^2 nulovým bodom funkcie $P_1 e^g - P' - Ph_0$, teda ak a_n sú aspoň dvojnásobnými nulovými bodmi funkcie $P_1 e^g - P' - Ph_0$.

Má preto byť:

a) $[P_1 e^g - P' - Ph_0]_{z=a_n} = 0$, t. j.

$$P_1(a_n) \,.\, e^{g(a_n)} - P'(a_n) - P(a_n) \,.\, h_0(a_r) = 0$$

a ďalej, keďže $P(a_n) = 0$, $P_1(a_n) \,.\, e^{g(a_n)} - P'(a_n) = 0$

$$e^{g(a_n)} = \frac{P'(a_n)}{P_1(a_n)}$$

alebo

(40) $$g(a_n) = \log \frac{P'(a_n)}{P_1(a_n)}\,.$$

V rovniciach (40) možno vziať hodnotu hociktorej vetvy logaritmu. Pripomenieme ešte, že $P'(a_n) \neq 0$, ani $P_1(a_n) \neq 0$.

Ďalej musí byť

b) $[(P_1 e^g - P' - Ph_0)']_{z=a_n} = 0$, t. j.

$$P_1'(a_n)\, e^{g(a_n)} + P_1(a_n) \,.\, e^{g(a_n)} \,.\, g'(a_n) - P''(a_n) - .\, P'(a_n)\, h_0(a_n) - P(a_n) \,.\, h_0'(a_n) = 0,$$

alebo ak berieme do úvahy rovnice (40),

$$P_1'(a_n) \,.\, \frac{P'(a_n)}{P_1(a_n)} + P'(a_n) \,.\, g'(a_n) - P''(a_n) - P'(a_n)\, h_0(a_n) = 0,$$

a teda vzhľadom na rovnice (35), ktorým $h_0(z)$ vyhovuje

(41) $$g'(a_n) = -\frac{P_1'(a_n)}{P_1(a_n)} + \frac{1}{2}\,\frac{P''(a_n)}{P'(a_n)}\,.$$

Tvrdíme:

Celá funkcia g, ktorá spĺňa podmienky (40) a (41), určite jestvuje.

Dôkaz. Ak označíme pravé strany rovníc (40), resp. (41) po rade c_n, resp. d_n, má platiť $g(a_n) = c_n$, $g'(a_n) = d_n$. Voľme funkciu g_1 v tvare

(42) $$g_1 = k_0 + k_1 P,$$

kde k_0, k_1 sú celé funkcie, zatiaľ neurčené a P má význam ako vyššie. Potom

(43) $$g_1(a_n) = k_0(a_n) + k_1(a_n) \,.\, P(a_n) = k_0(a_n),$$

(44) $$g_1'(a_n) = k_0'(a_n) + k_1'(a_n) \,.\, P(a_n) + k_1(a_n) \,.\, P'(a_n) = k_0'(a_n) + k_1(a_n) \,.\, P'(a_n).$$

Ak teraz volíme celé funkcie k_0, k_1 tak, aby platili rovnice

(45) $$k_0(a_n) = c_n,$$

(46) $$k_1(a_n) = \frac{d_n - k_0'(a_n)}{P'(a_n)},$$

spĺňa funkcia g_1, daná rovnicou (42), na základe rovníc (43), (44) podmienky (40) a (41).

Platí teda tvrdenie:

Tvrdenie D

Jestvuje rovnica (2), ktorej jedno riešenie u_1 má póly práve v bodoch a_n a nulové body práve v bodoch b_n. Koeficient Q tejto rovnice je daný vzťahom (36), kde je funkcia f určená rovnicou (39). Celá funkcia g spĺňa zase podmienky (40), (41). Riešenie u_1 je zase dané rovnicou (37). Význam ostatných funkcií sa uvádza v texte. Naopak, koeficient Q každej rovnice (2), ktorej jedno riešenie u_1 má póly práve v bodoch a_n a nulové body práve v bodoch b_n, je daný vzťahom (36) a riešenie u_1 zase rovnicou (37). Funkcie f, g a ostatné sú určené ako vyššie.

Ak je g ľubovoľná celá funkcia, ktorá spĺňa podmienky (40), (41), tak rozdiel $g - g_1$ má v každom bode a_n aspoň dvojnásobný nulový bod. Možno preto písať

$$g = g_1 + k_2P^2 = k_0 + k_1P + k_2P^2, \tag{47}$$

kde je k_2 ľubovoľná celá funkcia.

Rovnice (47), (39) a (36) priradia postupne každej celej funkcii k_2 celé funkcie g, f, až napokon Q. Je otázka, aký vzťah spĺňajú dve celé funkcie k_2, ktoré označíme k_{2a}, k_{2b}, ak nim zodpovedajúce funkcie Q, ktoré označíme Q_a, Q_b, splňujú rovnicu

$$Q_a = Q_b. \tag{48}$$

Rovnicami (47), (39) priradené funkcie g, f funkcii k_{2a} označíme g_a, f_a, zase priradené funkcii k_{2b} označíme g_b, f_b. Z rovnice (48) vyplýva na základe tvrdenia B rovnica $f_a = f_b$. Túto rovnicu možno podľa (39) písať v tvare

$$\frac{P_1 e^{g_a} - P' - Ph_0}{P^2} = \frac{P_1 e^{g_b} - P' - Ph_0}{P^2},$$

odkiaľ je $e^{g_a} - e^{g_b} = 0$ a ďalej $e^{g_a - g_b} = 1$. Teda $g_a(z) - g_b(z) = 2n(z) \,.\, \pi i$, $n(z)$ je niektorá z hodnôt $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Funkcia $g_a - g_b$ je spojitá, preto $n(z) \equiv$ $\equiv$ konšt. Teda $g_a - g_b = 2n\pi i$. Použitím rovnice (47) z poslednej rovnice dostávame rovnicu $(k_{2a} - k_{2b}) P^2 = 2n\pi i$. Ak má P aspoň jeden nulový bod, je $n = 0$ a $k_{2a} = k_{2b}$, nakoľko $P \neq 0$. Ak nemá P ani jeden nulový bod, môžeme voliť $P = 1$ a vtedy je $k_{2a} = 2n\pi i + k_{2b}$. Platí teda tvrdenie E.

Tvrdenie E

Ak funkcie Q, f, g sú po rade určené rovnicami (36), (39), (47), potom dvom rôznym celým funkciám k_2, nelíšiacim sa o celý násobok čísla $2\pi i$, zodpovedajú týmito rovnicami určené dve rôzne funkcie Q.

Z toho vyplýva tvrdenie F.

Tvrdenie F

Jestvuje nekonečne mnoho diferenciálnych rovníc (2), ktorých jedno riešenie má predpísané póly a_n a nulové body b_n.

Tvrdenia D a F možno zhrnúť do vety. Túto však vyslovíme, vzhľadom na vzťah medzi rovnicami (1) a (2), o rovnici (1). Keďže funkcia u, daná rovnicou (37), je logaritmickou deriváciou funkcií

$$v = c \, . \, P \, . \, e^{\int (h_0 + Pf) \, dz}, \quad c \text{ je konštanta,} \tag{49}$$

platí veta 9.

Veta 9

Nech $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sú dve disjunktné postupnosti navzájom rôznych bodov otvorenej roviny, ktoré nemajú hromadný bod nikde v konečne. Potom jestvuje nekonečne mnoho diferenciálnych rovníc (1) tak, že jedno ich riešenie v_1 má nulové body práve v bodoch a_n a jeho derivácia v bodoch b_n a len v týchto bodoch.

Koeficient Q týchto rovníc je daný rovnicou (36), pričom celé funkcie P, P_1 majú nulové body (P jednoduché) práve v bodoch a_n, resp. b_n, funkcia f je určená rovnicou (39), funkcia g zase rovnicou (47). Funkcie h_0, k_0, k_1 sú nejaké celé funkcie, ktoré spĺňajú po rade podmienky (35), (45), (46). Funkcia k_2 je ľubovoľná celá funkcia. Samo riešenie v_1 a celá jeho trieda je dané rovnicou (49).

Obrátene, ak má nejaká rovnica (1) riešenie v_1 s nulovými bodmi práve v bodoch a_n, pričom v_1' má nulové body práve v bodoch b_n, tak je koeficient Q tejto rovnice daný rovnicou (36), riešenie v_1 a celá jeho trieda je určené rovnicou (49). Funkcia k_2, vystupujúca v rovnici (47), je nejaká celá funkcia. Význam ostatných funkcií je uvedený vyššie.

Poznámka. Z dôkazu vety 9 je vidieť, že táto veta platí aj v prípade, že niektorá z postupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ je prázdna. Ak napr. $\{a_n\}$ je prázdna, (t. j. ak v_1 nemá ani jeden nulový bod), tak príslušná zmena v znení vety 9 spočíva v tom, že P kladieme rovnú identicky *1*, funkcie h_0, k_0, k_1, nemusia splňovať žiadne podmienky a môžeme ich preto voliť identicky rovnými 0.

Napokon vyriešime tento problém:

Dané sú dve disjunktné postupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ navzájom rôznych bodov otvorenej roviny, ktoré nemajú hromadný bod nikde v konečne. Treba nájsť diferenciálnu rovnicu (1) tak, aby jedno jej riešenie malo nulové body práve v bodoch a_n a druhé práve v bodoch b_n.

Riešenie

Uvažujme o celých funkciách P, R, ktoré majú jednoduché nulové body práve v bodoch a_n, resp. b_n. Utvoríme celé funkcie

$$u = Pe^h, \quad v = Re^k, \tag{50}$$

kde celé funkcie h, k určíme tak, aby bola splnená podmienka

$$uv' - u'v = 1. \tag{51}$$

Ak do rovnice (51) dosadíme za u, v výrazy, dané (50), dostaneme pre h, k ekvivalentnú podmienku

$$e^{h+k}[PR' - P'R + PR(k' - h')] = 1. \tag{52}$$

Označíme

$$(53)\qquad \begin{aligned} k' - h' &= F \\ k + h &= G. \end{aligned}$$

Zrejme sú funkcie h, k celé práve vtedy, keď sú F, G celé. Podmienka (52) má potom tvar

$$(54)\qquad e^G[PR' - P'R + PRF] = 1.$$

Ukážeme, že jestvujú celé funkcie F, G, ktoré spĺňajú rovnicu (54). Z rovnice (54) pre F vyplýva rovnica

$$(55)\qquad F = \frac{e^{-G} - (PR' - P'R)}{PR}.$$

Touto rovnicou určená funkcia F je celá práve vtedy, ak je každý nulový bod funkcie PR aj nulovým bodom funkcie $e^{-G} - (PR' - P'R)$, teda keď platí

$$[e^{-G(z)} - (P(z) \,.\, R'(z) - P'(z) \,.\, R(z))]_{z=a_n,\, z=b_n} = 0.$$

V bodoch $z = a_n$ dostávame podmienku $e^{-G(a_n)} - [P(a_n) R'(a_n) - P'(a_n) \,.\, R(a_n)] = 0$ a ďalej $e^{-G(a_n)} + P'(a_n) R(a_n) = 0$, odkiaľ

$$(56)\qquad G(a_n) = \log \frac{-1}{P'(a_n) \,.\, R(a_n)}.$$

V rovniciach (56) možno uvažovať o hodnote ľubovoľnej vetvy logaritmu.

Analogicky v bodoch $z = b_n$ dostaneme podmienku

$$(57)\qquad G(b_n) = \log \frac{1}{P(b_n) \,.\, R'(b_n)}.$$

Celá funkcia G, ktorá spĺňa podmienky (56), (57), určite jestvuje. Ak je G_0 jedna taká funkcia, tak všeobecný tvar funkcie G je

$$(58)\qquad G = G_0 + PRf,$$

f je ľubovoľná celá funkcia. Z rovníc (53) vyplýva

$$\begin{aligned} k - h &= \int F \,\mathrm{d}z + c \\ k + h &= G, \end{aligned}$$

pričom c je konštanta. Z posledných rovníc je

$$(59)\qquad \begin{aligned} k &= \frac{G + \int F \,\mathrm{d}z + c}{2} = \frac{1}{2}\left[G + \int \frac{e^{-G} - (PR' - P'R)}{PR} \mathrm{d}z + c\right], \\ h &= \frac{G - \int F \,\mathrm{d}z - c}{2} = \frac{1}{2}\left[G - \int \frac{e^{-G} - (PR' - P'R)}{PR} \mathrm{d}z - c\right], \end{aligned}$$

kde sme použili ešte rovnicu (55).

Platí teda tvrdenie **A.**

Tvrdenie A

Ak je G ľubovoľná celá funkcia, ktorá spĺňa podmienky (56) a (57), tak funkcie h a k, dané rovnicami (59), majú tú vlastnosť, že nimi zostavené výrazy (50) spĺňajú podmienku (51). Obrátene, ak spĺňajú funkcie u, v, dané rovnicami (50), podmienku (51), tak funkcie h a k, ktoré vystupujú v rovniciach (50), sú dané rovnicami (59), kde G je nejaká celá funkcia, ktorá spĺňa podmienky (56) a (57).

Poznámka. Ak má nejaká rovnica tvaru (1) dve triedy riešení s nulovými bodmi práve v bodoch a_ι, resp. b_ι, tak vhodnou voľbou riešení u, v z týchto tried možno dosiahnuť, že je splnená podmienka (51). Samozrejme vtedy sú u, v dané v tvare (50).

Ďalej platí tvrdenie B.

Tvrdenie B

Funkcie u, v, ktoré spĺňajú podmienku (51), tvoria fundamentálny systém práve jednej lineárnej homogénnej diferenciálnej rovnice 2. rádu s koeficientom pri derivácii 2. rádu rovnajúcim sa 1. Táto rovnica má tvar

$$\begin{vmatrix} y & u & v \\ y' & u' & v' \\ y'' & u'' & v'' \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(XIII, str. 237)} \tag{60}$$

Keďže derivovaním (51) vyplýva $uv'' - u''v = 0$, po rozpísaní zo (60) dostávame rovnicu

$$y'' + \begin{vmatrix} u' & v' \\ u'' & v'' \end{vmatrix} y = 0,$$

t. j. rovnicu (1) s koeficientom

$$Q = -\begin{vmatrix} u' & v' \\ u'' & v'' \end{vmatrix}. \tag{61}$$

Položme v rovniciach (59) namiesto funkcie G výraz daný rovnicou (58). Potom

$$\begin{aligned} k_f &= \frac{1}{2}\left[G_0 + PRf + \int \frac{e^{-G_0 - PRf} - (PR' - P'R)}{PR} \mathrm{d}z + c\right], \\ h_f &= \frac{1}{2}\left[G_0 + PRf - \int \frac{e^{-G_0 - PRf} - (PR' - P'R)}{PR} \mathrm{d}z - c\right], \end{aligned} \tag{62}$$

kde funkcie h a k priradené funkcii f sú označené indexom h_f, k_f. Spojením tvrdení A, B a poznámky za tvrdením A dostávame tvrdenie C.

Tvrdenie C

Ku každej celej funkcii f jestvujú celé funkcie h_f, k_f, dané rovnicami (62) tak, že funkcie $u_f = P\mathrm{e}^{h_f}$, $v_f = R\mathrm{e}^{k_f}$ tvoria fundamentálny systém rovnice (1) s koeficientom Q_f, určeným rovnicou (61), kde pod u, v sa rozumejú funkcie u_f, v_f. Význam funkcií P, R, G_0 sa uvádza v texte. Obrátene, ak má nejaká rovnica (1) fundamentálny systém u, v s nulovými bodmi práve v bodoch a_n, resp. b_n, t. j. $u = P\mathrm{e}^h$, $v = R\mathrm{e}^k$, pričom jeho wronskián sa rovná 1, tak celé funkcie h a k sú dané rovnicami (62), kde f je nejaká celá funkcia a koeficient Q zase rovnicou (61). Ostatné funkcie, vystupujúce v týchto rovniciach, sú určené ako vyššie.

Ďalej sa budeme zaoberať otázkou, aký vzťah spĺňajú celé funkcie f_1, f_2, ak $Q_{f_1} = Q_{f_2}$. Vtedy majú riešenia u_{f_1}, u_{f_2}, resp. v_{f_1}, v_{f_2} rovnice (1) s koeficientom $Q_{f_1} = Q_{f_2}$ rovnaké nulové body, a sú teda lineárne závislé. Preto $\frac{u_{f_1}}{u_{f_2}} = e^{h_{f_1} - h_{f_2}} =$ konšt., aj $\frac{v_{f_1}}{v_{f_2}} = e^{k_{f_1} - k_{f_2}} =$ konšt. Odtiaľ je po známej úvahe

$$h_{f_1} - h_{f_2} = c_1$$

a

$$k_{f_1} - k_{f_2} = c_2,\ c_1 \text{ a } c_2 \text{ sú konštanty.}$$

Z rovníc (62) ďalej dostávame

$$
\begin{aligned}
h_{f_1} - h_{f_2} &= \frac{1}{2}\left[PR(f_1 - f_2) - \int \frac{e^{-G_0 - PRf_1} - e^{-G_0 - PRf_2}}{PR}\, dz\right] = c_1, \\
k_{f_1} - k_{f_2} &= \frac{1}{2}\left[PR(f_1 - f_2) + \int \frac{e^{-G_0 - PRf_1} - e^{-G_0 - PRf_2}}{PR}\, dz\right] = c_2.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Sčítaním posledných dvoch rovníc vyplýva, že $PR(f_1 - f_2) = c_1 + c_2$. Ak má $PR(f_1 - f_2)$ aspoň jeden nulový bod, tak je $PR(f_1 - f_2) = 0$. Keďže funkcia $PR \neq 0$, je $f_1 - f_2 = 0$, t. j. $f_1 = f_2$. Ak $PR(f_1 - f_2)$ nemá ani jeden nulový bod, tak nemá ani PR ani jeden nulový bod a môžeme písať $P = R = 1$ a za funkciu G_0 brať funkciu identicky rovnajúcu sa 0, keďže nemusí spĺňať žiadne podmienky. Potom odčítaním hornej rovnice od spodnej rovnice v systéme (63) dostaneme $\int (e^{-f_1} - e^{-f_2})\, dz = c_2 - c_1$ a derivovaním $e^{-f_1} = e^{-f_2}$, t. j. $f_1 = f_2 + 2k\pi i$, kde k je celé číslo rôzne od 0.

Platí teda tvrdenie D.

Tvrdenie D

Nech funkcia Q_f má ten istý význam ako v tvrdení C. Potom platí: Ak sa nelíšia dve celé funkcie f_1, f_2 o konštantu $2k\pi i$, k celé, tak $Q_{f_1} \neq Q_{f_2}$.

Spojením tvrdení C a D dostávame tvrdenie E.

Tvrdenie E

Jestvuje nekonečne mnoho diferenciálnych rovníc (1), ktoré majú fundamentálny systém s predpísanými nulovými bodmi.

Napokon zhrnieme tvrdenia C a E vo vete 10.

Veta 10

Nech $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sú dve disjunktné postupnosti navzájom rôznych bodov otvorenej roviny, ktoré nemajú hromadný bod nikde v konečne. Potom jestvuje nekonečne mnoho diferenciálnych rovníc (1) tak, že jedno ich riešenie u má nulové body práve v bodoch a_n a druhé riešenie v lineárne nezávislé s u má nulové body práve v bodoch b_n.

Koeficient Q týchto rovníc je daný rovnicou (61), pričom funkcie u a v sú určené rovnicami (50). Funkcie P a R majú nulové body, a to jednoduché, práve v bodoch a_n, resp. b_n. Funkcie h a k sú určené rovnicami (62). V nich vystupujúca celá funkcia G_0 spĺňa podmienky (56) a (57), kým funkcia f je ľubovoľná.

Obrátene, ak má nejaká rovnica (1) fundamentálny systém u, v s nulovými bodmi práve v bodoch a_n, resp. b_n, pričom wronskián tohto systému sa rovná 1, tak funkcie u, v sú tvaru $u = P\mathrm{e}^h$, $v = R\mathrm{e}^k$, kde celé funkcie h, k sú dané rovnicami (62) a koeficient Q tejto rovnice je daný rovnicou (61). Funkcia f vystupujúca v rovniciach (62) je nejaká celá funkcia, kým ostatné funkcie majú význam ako vyššie.

Poznámka. O vete 10 platí analogická poznámka ako o vete 9.

Vzhľadom na ľubovoľnú funkciu f, ktorá vystupuje v rovnici (58), resp. v rovniciach (62), kladieme si otázku, či nie je možné predpísať nulové body ešte deriváciám fundamentálneho systému riešení s danými nulovými bodmi. Ukážeme, že toto nemožno vždy učiniť.

Vskutku, nech funkcie u, v, dané rovnicami (50), spĺňajú podmienku (51). Toto sa dosiahne podľa vety 10 tým a len tým, že funkcie h, k vystupujúce v rovniciach (50) sú určené rovnicami (62), kde f je ľubovoľná celá funkcia. Keďže je

$$u' = (P' + Ph')\,\mathrm{e}^h, \quad v' = (R' + Rk')\,\mathrm{e}^k, \tag{64}$$

majú derivácie u', v' fundamentálneho systému u, v predpísané nulové body c_n, resp. d_n práve vtedy, ak je možné písať

$$P' + Ph' = P_1\mathrm{e}^{h_1}, \quad R' + Rk' = R_1\mathrm{e}^{k_1}, \tag{65}$$

kde funkcie P_1, R_1 majú nulové body práve v bodoch postupnosti $\{c_n\}$, resp. $\{d_n\}$. Pritom samozrejme $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ sú disjunktné postupnosti navzájom rôznych bodov otvorenej roviny, ktoré nemajú hromadný bod nikde v konečne a pre všetky i, k platí: $c_i \neq a_k$, $c_i \neq b_k$, $d_i \neq a_k$, $d_i \neq b_k$. Funkcie h_1, k_1 sú nejaké celé funkcie. Vzhľadom na rovnice (62) možno rovnice (65) písať v tvare

$$\begin{aligned} P' + \frac{P}{2}\left[(G_0 + PRf)' - \frac{\mathrm{e}^{-(G_0+PRf)} - (PR' - P'R)}{PR}\right] &= P_1\mathrm{e}^{h_1}, \\ R' + \frac{R}{2}\left[(G_0 + PRf)' + \frac{\mathrm{e}^{-(G_0+PRf)} - (PR' - P'R)}{PR}\right] &= R_1\mathrm{e}^{k_1}. \end{aligned} \tag{66}$$

Daný problém má riešenie práve vtedy, ak jestvujú celé funkcie f, h_1, k_1 tak, aby platili rovnice (66). Ináč povedané, ak jestvujú celé funkcie h_1 a k_1 tak, aby rovnice (66), ktoré sú vlastne diferenciálnymi rovnicami pre funkciu f, mali celé spoločné riešenie f.

Celé funkcie h_1, k_1 nemôžu byť celkom ľubovoľné. Rovnice (66) môžeme totiž písať v tvare

$$\begin{aligned} (G_0 + PRf)' - \frac{\mathrm{e}^{-(G_0+PRf)} - (PR' - P'R)}{PR} &= 2\,\frac{P_1\mathrm{e}^{h_1} - P'}{P}, \\ (G_0 + PRf)' + \frac{\mathrm{e}^{-(G_0+PRf)} - (PR' - P'R)}{PR} &= 2\,\frac{R_1\mathrm{e}^{k_1} - R'}{R}. \end{aligned} \tag{67}$$

Keďže sú ľavé strany posledných rovníc celé funkcie, musia byť aj pravé strany celé. Preto musí byť každý nulový bod menovateľa nulovým bodom čitateľa na pravých stranách rovníc (67). Musí teda byť: $P_1(a_n)\,e^{h_1(a_n)} - P'(a_n) = 0$, z toho $e^{h_1(a_n)} = \dfrac{P'(a_n)}{P_1(a_n)}$ a

$$h_1(a_n) = \log \frac{P'(a_n)}{P_1(a_n)} \quad \text{pre všetky } a_n. \tag{68}$$

Analogicky musí byť

$$k_1(b_n) = \log \frac{R'(b_n)}{R_1(b_n)} \quad \text{pre všetky } b_n. \tag{69}$$

Ako obvykle, uvažujeme v obidvoch posledných rovniciach o hodnote hociktorej vetvy logaritmu. Už známou úvahou potom dostaneme výsledok. Ak spĺňajú celé funkcie h_2, k_2 po rade podmienky (68) a (69), je všeobecný tvar funkcií h_1, k_1 tento:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_2 + Ph_3, \\ k_1 &= k_2 + Rk_3, \end{aligned} \tag{70}$$

kde h_3 a k_3 sú ľubovoľné celé funkcie.

Ak teraz dosadíme do rovníc (67) za h_1, k_1 výrazy dané rovnicami (70), dostaneme

$$\begin{aligned} (G_0 + PRf)' - \frac{e^{-(G_0 + PRf)} - (PR' - P'R)}{PR} &= 2\,\frac{P_1 e^{h_2 + Ph_3} - P'}{P}, \\ (G_0 + PRf)' + \frac{e^{-(G_0 + PRf)} - (PR' - P'R)}{PR} &= 2\,\frac{R_1 e^{k_2 + Rk_3} - R'}{R}. \end{aligned} \tag{71}$$

Rovnice (71) možno po vynásobení funkciou PR a po vhodnej úprave písať v tvare

$$\begin{aligned} &e^{-(G_0 + PRf)} + 2P_1 R e^{h_2 + Ph_3} - PR(G_0 + PRf)' - (PR)' = 0, \\ &e^{-(G_0 + PRf)} - 2PR_1 e^{k_2 + Rk_3} + PR(G_1 + PRf)' + (PR)' = 0. \end{aligned} \tag{72}$$

Daný problém má riešenie práve vtedy, ak jestvujú celé funkcie h_3 a k_3 tak, že jestvuje celé spoločné riešenie f diferenciálnych rovníc (72). Vo všeobecnosti toto nemusí jestvovať. Ukážeme totiž, že ak sú P, R, P_1 polynómy, tak má systém (73) len vtedy celé riešenie, ak $P =$ konšt., $R =$ konšt., $P_1 =$ konšt., $R_1 =$ konšt.

Vskutku, nech P, R sú polynómy, t. j. u, v sú dve lineárne nezávislé P. v. riešenia 1. druhu. Potom za celé funkcie G_0, h_2 a k_2 v rovniciach (72) možno voliť polynómy. Tvrdíme:

Ak je ešte aspoň jedna z funkcií P_1, R_1 polynóm, tak každé celé riešenie f systému (72) spĺňa rovnicu

$$G_0 + PRf = \text{konšt.} \tag{73}$$

Dôkaz tohto tvrdenia vyplýva zo Saxerovej vety, ktorá hovorí (XIV, str. 206—207):

Identita tvaru

$$(74)\qquad p(z)\,.\,e^{F_1(z)} + q(z)\,e^{F_2(z)} + r(z)\,F_1'(z) + s(z) = 0$$

medzi celými funkciami F_1, F_2, polynómami p, q, r, s je nemožná, ak sú splnené nasledujúce 4 podmienky:

1. $p(z) \not\equiv 0$,
2. $F_1(z) - F_1(0) \not\equiv 0$,
3. $|\,r(z)\,| + |\,s(z)\,| \not\equiv 0$.
4. Ak $r(z) \not\equiv 0$, $s(z) \not\equiv 0$, tak $\dfrac{s(z)}{r(z)}$ nie je žiadnou celou funkciou.

Z tejto vety vyplýva pri $r(z) \not\equiv 0$ dôsledok, ktorý vyslovíme ako vetu 11.

Veta 11

Nech h je ľubovoľná celá funkcia a polynómy p, q, r, s majú tieto vlastnosti:

1. $p(z) \not\equiv 0$,
2. $r(z) \not\equiv 0$.
3. Ak $s(z) \not\equiv 0$, tak $\dfrac{s(z)}{r(z)}$ nie je žiadnou celou funkciou. Potom každé celé

riešenie diferenciálnej rovnice

$$(75)\qquad p e^{y} + q e^{h} + r y' + s = 0$$

je konštanta.

Dôkaz. Celé riešenie y rovnice (75) spĺňa identitu (74), kde treba položiť $y = F_1$, $h = F_2$. Predpoklady 1.—3. vety 11 zabezpečujú splnenie predpokladov 1., 3. a 4. Saxerovej vety. Nakoľko jestvujú celé funkcie, ktoré vyhovujú identite (74), nemôže platiť 2. predpoklad Saxerovej vety, t. j. $y =$ konšt.

Predpokladajme teraz, že funkcia P_1 je polynóm, t. j. že u je aj P. v. riešením 2. druhu. Nech jestvuje celé riešenie f systému (72). Potom je aj funkcia $-(G_0 + PRf)$ celá a je riešením prvej rovnice systému (72). [V prípade, že R_1 je polynóm, uvažujeme o druhej rovnici systému (72)]. Táto rovnica je toho istého typu ako rovnica (75), pričom $p = 1(\not\equiv 0)$, $q = 2P_1R$; $r = PR(\not\equiv 0)$, $s = -(PR)'$. Ak $-(PR)' \not\equiv 0$, t. j. ak aspoň jeden z polynómov P, R má aspoň jeden nulový bod, nie je $\dfrac{-(PR)'}{PR}$ celou funkciou. Predpoklady 1.—3. vety 11 sú teda splnené. Preto je z vety 11 funkcia $-(G_0 + PRf) =$ konšt., a teda aj $G_0 + PRf =$ konšt.

Uvažujme o funkcii

$$(76)\qquad H = \frac{e^{-(G_0 + PRf)} - (PR' - P'R)}{PR} = \frac{c - (PR' - P'R)}{PR},$$

kde konštanta $c = e^{-(G_0 + PRf)}$.

Funkcia H vystupuje v rovniciach (62) a nakoľko h_f a k_f sú celé, musí byť aj H celá. No ak je PR polynóm aspoň 1. stupňa, nie je funkcia H, ako podiel dvoch polynómov, z nich menovateľ je o jednotku vyššieho stupňa než čitateľ, celou funkciou. Preto je PR konštanta a môžeme brať do úvahy $P = R = 1$. Vtedy však možno voliť funkciu $G_0 = 0$ a rovnica (73) má tvar $f =$ konšt.

Z toho potom dostávame, že funkcie h_f, k_f, dané rovnicami (62), majú tvar $k_f = az + b$, $h_f = -az + c$ a ďalej funkcie u a v, $u = e^{-az+c}$, $v = e^{az+b}$, kde a, b, c sú konštanty, sú riešeniami rovnice (1) s konštantným Q, čo je zrejmé z rovnice (61). Zrejme potom $P_1 =$ konšt., aj $R_1 =$ konšt.

Platí teda veta 12.

Veta 12

Nech rovnica (1) má dve lineárne nezávislé P. v. riešenia 1. druhu. Potom platí: Ak je aspoň jedno P. v. riešenie 1. druhu aj P. v. riešením 2. druhu, je rovnica (1) s konštantným Q.

Dôkaz vety 7. Ak má rovnica (1) s polynomiálnym Q dve lineárne nezávislé P. v. riešenia 1. druhu, sú tieto na základe vety 6 aj P. v. riešeniami 2. druhu. Z vety 12 je potom $Q =$ konšt., č. b. t. d.

Záverom možno poukázať na niektoré problémy, ktoré vystupujú v súvislosti s touto prácou.

1. Nájsť diferenciálne rovnice (1), ktorých 1. derivácie fundamentálneho systému majú predpísané nulové body.
2. Nájsť diferenciálne rovnice (1), ktorých jedno riešenie a derivácia druhého, lineárne nezávislého riešenia, majú predpísané nulové body.
3. Zistiť, či môže mať rovnica (1), okrem rovnice s konštantným Q, dve lineárne nezávislé P. B. v. riešenia 1. druhu, pričom aspoň jedno z nich je aj P. B. v. riešením 2. druhu.

Literatúra

[I] Šeda V.: Transformácia integrálov obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu v komplexnom obore. Acta F. R. N. Univ. Comen. II-5-6 Mathem., 1957, str. 229—254.

[II] Nehari Z.: Univalent functions and linear differential equations. Lectures on Functions of a Complex Variable Michigan Press 1955, str. 49—61.

[III] Wittich H.: Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Annalen 124 (1952), str. 277—288.

[IV] Wittich H.: Neuere Untersuchungen über Eindeutige Analytische Funktionen, Springer Verlag 1955.

[V] Frei M.: Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire. Comptes rendus, t. 236 (1953), str. 38—40.

[VI] Pöschl K.: Zur Frage des Maximalbetrages der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Polynomkoeffizienten. Math. Annalen, 125 (1953) str. 344—349.

[VII] V. Šeda: A note to a paper of Clunie. Acta F. R. N. Univ. Comen. IV—3-5 Mathem., 1959, str. 255—260.

[VIII] Chi-Tai Chuang M.: Sur la comparaison de la croissance d'une fonction méromorphe et de celle de sa dérivée. Bulletin des Sci. Math. t. 75, 2. Série (1951) str. 171—190

[IX] Nevanlinna R.: Eindeutige analytische Funktionen. Springer Verlag 1936.

[X] Saks S., Zygmund A.: Analytic Functions, Warszawa 1952.

[XI] Borel E.: Sur les zéros des fonctions entières. Acta math. t. 20 (1897) str. 357—396.

[XII] Ullrich E.: Über die Ableitung einer meromorphen Funktion. Sitzgsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., 1929, str. 592—608.

[XIII] Kamke E.: Differentialgleichungen Reeler Funktionen, Leipzig 1956.

[XIV] Saxer W.: Über die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten. Math. Zeitschrift 17 Band 1923, str. 206—227.

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2.

Do redakcie dodané 24. 3. 1959

О некоторых свойствах решений дифференциального уравнения $y'' = Q(z) \cdot y$, где $Q(z) \not\equiv 0$ целая функция

В. Шеда

Выводы

Эта работа состоит из трех частей. В первой части исследуются некоторые общие свойства решений уравнения (1), причем используются соотношения между решениями уравнений (1) и (2) и уравнений (1) и (3). Одно такое соотношение дано *леммами* 1 и *2*. Эти леммы очень подобны, поэтому можно их объединить, причем все, что касается только леммы *2*, находится в скобках:

Пусть u и v две линейно независимые решения уравнения (1). Потом справедливо это утверждение. Для всякого c из полной комплексной плоскости E существует один и только один класс решений уравнения (1) так, что c-точки функции $\frac{u}{v}$ $\left(c\text{-точки функции } \frac{u'}{v'}\right)$ тождественны с нулями решений этого класса (с нулями производной решений этого класса). Наоборот, для всякого класса решений уравнения (1) существует одна и только одна постоянная $c \in E$ так, что множество нулей решений этого класса (множество корней производной решений этого класса) является множеством c-точек функции $\frac{u}{v}$ $\left(\text{множеством } c\text{-точек функции } \frac{u'}{v'}\right)$.

Лемма 1 представляет обобщение одного утверждения Негари, находящегося например в (II).

Одним из фундаментальных свойств мероморфных функций является порядок (тип и класс) этих функций. Вопросом порядка и типа решений уравнения (1) и частично уравнения (2) занимался Г. Виттих и М. Фрей. Их результаты резюмированы *в теореме* 1. По этой теореме все решения уравнения (1) того же самого порядка и типа а именно, если Q многочлен n-той степени, потом они порядка $1 + \frac{n}{2}$ и нормального типа и если Q целая трансцендентная функция, потом они бесконечного порядка. В работе доказывается (*теорема 2*), что решения уравнения (3) того же самого порядка и типа как и решения уравнения (1). Аналогичный результат получается в *лемме 3*, которая утверждает, что частное $\frac{u'}{v'}$ производных двух линейно независимых решений u, v уравнения (1) того же самого порядка и типа как и решения уравнения (1).

На основании лемм 1, 2, 3 и применением теоремы Пикар-Бореля доказаны теоремы 3 и 4. Эти теоремы, представляющие сущность всей работы, следующие: Существует не более двух классов решений v уравнения (1), у которых функция $n_v(r, o)$,,*Anzahlfunktion der O-Stellen*'' функции v (теорема 3), соответственно функция $n_{v'}$, (r, o) (теорема 4) нисшего порядка (типа) чем решение v. Специально, существует не более двух классов решений уравнения (1), которые имеют конечное число нулей, соответственно производная которых имеет конечное число нулей.

На основании приведенных теорем естественно ввести понятие *исключительново решения Пикар-Бореля* (Р. В. *v.*) *1. рода*, соответственно *2. рода*. Это такое решение уравнения (1), у которого функция $n_v(r, o)$, соответственно $n_{v'}(r, o)$ нисшего порядка (типа) чем самое решение v. Решение v уравнения (1) с конечным числом нулей, соответственно производная которого имеет конечное число нулей, назвем *исключимельным решением Пикара* (Р. *v.*) 1., соответственно *2. рода*.

На основании теорем 3 и 4 доказана *теорема 5*, занимающаяся вопросом порядка решений уравнения (2). Она утверждает, что все решения уравнения (2) за исключением не более двух того же порядка и типа как и решения уравнения (1). Исключительное решение есть нисшего порядка (типа) чем решения уравнения (1) и является логарифмической производной решения уравнения (1), являющегося одновременно *Р. В. v.* решением 1. и 2. рода.

Р. В. v. решения действительно существуют, как это указывает пример уравнения (1) с постоянным Q.

В второй части автор занимается вопросом Р. В. v. (Р. v.) решений уравнения (1), если функция Q, встречающая в уравнении (1), является многочленом. Тогда всякое решение этого уравнения являющееся Р. В. v. (соответственно Р. v.) решением 1. рода будет тоже Р. В. v. (соответственно Р. v.) решением 2. рода и наоборот (*теорема 6*). Далее всякое Р. В. v. решение есть тоже Р. v. решением (*теорема 8*) и наконец если еще Q не постоянная, потом существует наиболее один класс Р. v. решений (*теорема 7*).

В третьей части доказывается, что если Q лецая трансцендентная функция, потом теоремы 6, 7, 8 не всегда справедливы. Чтоб это доказать, автор решит одну проблему проф. О. Борувки. Дана последовательность точек открытой комплексной плоскости, которая не имеет конечной предельной точки. Найти дифференциальное уравнение (1) так, чтобы корни одного его решения были именно в точках даной последовательности, или найти условие существования такого уравнения. Ответ на этот вопрос положителен и дан *теоремами 9* и *10*. Доказательство этих теорем конструктивное и опирается на известную теорему Вейерштрасса и конструкцию Прингсгейма целой функции с предписанными значениями в точках даной последовательности (X, стр. 301). По теоремам 9 и 10 существует бесконечно много дифференциальных уравнений (1) так, что одно их решение u имеет нули именно в точках a_n и его производная в точках b_n (теорема 9), соответственно одно их решение u имеет нули именно в точках a_n, а второе v, линейно независимое с u, именно в точках b_n. Притом $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ две непересекающиеся последовательности взаимно различных точек открытой плоскости неимеющие конечной предельной точки. Теоремы 9 и 10 указывают вид всех уравнений (1) и их решений с упомянутыми свойствами.

Наконец показывается, что не возможно предписать нули фундаментальной системе решений уравнения (1) и их первым производным. Справедлива *теорема 12*, утверждающая, что если уравнение (1) имеет две линейно независимых Р. v. решения 1. рода и хотя бы одно из них было Р. v. решением 2. рода, потом Q в уравнении (1) постоянная. Итак не существует уравнения (1), имеющего фундаментальную систему решений с конечным числом нулей так, чтобы производная одного решения имела конечное, и производная второго решения бесконечное число нулей. Доказательство этой теоремы основано на одной теореме Саксера (XIV, стр. 206—207), следствием которой является *теорема 11*. Эта теорема говорит следующее: Пусть h произвольная целая функция и p, q, r, s многочлены, обладающие следующими свойствами: 1. $p(z) \not\equiv 0$; 2. $r(z) \not\equiv 0$; 3. Если $s(z) \not\equiv 0$, потом $\frac{s(z)}{r(z)}$ не является целой функцией. Потом всякое целое решение уравнения (75) постоянное.

В заключении предоставлены к решению три проблемы, относящиеся к этой статьи.

1. Найти дифференциальные уравнения (1), у которых первые производные фундаментальной сыстемы имеют предписанные нули.

2. Найти дифференциальные уравнения (1), у которых одно решение и производная второго, линейно независимого, имеют предписанные нули.

3. Может ли иметь уравнение (1) кроме уравнения с постоянным Q две линейно независимых Р. В. v. решения 1. рода, причем хотя бы одно из них было тоже Р. В. v. решением 2. рода?

Über einige Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung $y'' = Q(z) \, . \, y$, $Q(z) \not\equiv 0$ ist eine ganze Funktion

V. Šeda

Zusammenfassung

Diese Arbeit besteht aus drei Teilen. Im ersten Teile werden einige allgemeine Eigenschaften von Lösungen der Gleichung (1) untersucht, wobei man die Beziehungen zwischen den Lösungen der Gleichungen (1) und (2) und der Gleichungen (1) und (3) benützt. Eine solche Beziehung geben die *Hilfssätze 1 und 2*. Sie lauten:

Es seien u und v zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (1). Dann gilt folgende Behauptung: Zu jedem Wert c aus der vollen komplexen Ebene E existiert gerade eine Klasse von Lösungen der Gleichung (1) so, daß c-Stellen der Funktion $\frac{u}{v}$ (Hilfssatz 1), bzw. c-Stellen der Funktion $\frac{u'}{v'}$ (Hilfssatz 2), mit den Nullstellen von Lösungen dieser Klasse, bzw. mit Nullstellen der Ableitung der Lösungen dieser Klasse, identisch sind. Umgekehrt zu jeder Klasse von Lösungen der Gleichung (1) existiert gerade eine Konstante $c \in E$ so, daß die Menge der Nullstellen der Lösungen dieser Klasse, bzw. die Menge der Nullpunkte der Ableitung der Lösungen dieser Klasse, der Menge c-Stellen der Funktion $\frac{u}{v}$, bzw. der Menge c-Stellen der Funktion $\frac{u'}{v'}$, gleich ist.

Der Hilfssatz 1 ist eine Verallgemeinerung einer Behauptung von Nehari, welche auch in (II) angeführt ist.

Eine der fundamentalen Eigenschaften der meromorphen Funktionen ist die Ordnung (Typus und Klasse) dieser Funktionen. Mit dem Problem der Ordnung und des Typus der Lösungen von Gleichung (1) und teilweise von Gleichung (2) beschäftigten sich H. Wittich und M. Frei. Ihre Resultate sind im *Satze 1* enthalten. Nach diesem Satze sind alle Lösungen von der Gleichung (1) derselben Ordnung und desselben Typus, und zwar: Wenn Q ein Polynom des n-ten Grades ist, dann sind die Lösungen der Ordnung $1 + \frac{n}{2}$ und Mitteltypus. Wenn Q eine ganze transzendente Funktion ist, dann sind sie unendlicher Ordnung. In der Arbeit wird gezeigt *(Satz 2)*, daß Lösungen von der Gleichung (3) derselben Ordnung und desselben Typus wie die Lösungen der Gleichung (1) sind. Ein analogisches Resultat gibt der *Hilfssatz 3*, welcher behauptet, das der Quotient $\frac{u'}{v'}$ der Ableitungen zweier linear unabhängiger Lösungen u, v der Gleichung (1) auch derselben Ordnung und desselben Typus wie die Lösungen der Gleichung (1) ist.

Auf Grund der Hilfssätze 1 bis 3, bei Benützung des Picard-Borelschen Satzes werden die *Sätze 3* und *4* bewiesen. Diese, welche der Kern der ganzen Arbeit sind, behaupten: Es gibt höchstens zwei Klassen von Lösungen v der Gleichung (1), für welche die Anzahlfunktion der 0-Stellen der Funktion $v\, n_v(r, 0)$ *(Satz 3)*, bzw. die Funktion $n_{v'}(r, 0)$ *(Satz 4)*, niedrigerer Ordnung (Typus) als die Lösung v ist. Speziell gibt es höchstens zwei Klassen von Lösungen der Gleichung (1), welche eine endliche Anzahl von Nullstellen haben, bzw. die Ableitung dieser Lösung eine endliche Anzahl von Nullstellen hat.

Auf Grund der *Sätze 3* und *4* ist es natürlich ganz gut den Begriff der *Picard-Borelschen Ausnahmelösung* (P. B. v.) der *1.*, oder der *2.* Art, einzuführen. Das ist so eine Lösung v der Gleichung (1), für welche die Funktion $n_v(r, 0)$, bzw. $n_{v'}(r, 0)$, von niedrigerer Ordnung (Typus) als die Lösung v ist. Die Lösung v der Gleichung (1) mit endlicher Anzahl von Nullstellen, bzw. die Ableitung dieser Lösung eine endliche Anzahl von Nullstellen hat, wird als Picardsche *Ausnahmelösung* (P. v.) der 1., bzw. der 2. Art, genannt.

Aus den Sätzen 3 und 4 ist der *Satz 5* abgeleitet. Dieser beschäftigt sich mit dem Problem der Ordnung von Lösungen der Gleichung (2). Nach ihm sind alle Lösungen- mit Ausnahme von höchstens zweien — der Gleichung (2) derselben Ordnung und desselben Typus wie die Lösungen der Gleichung (1). Die Ausnahmelösung ist einer niedrigeren Ordnung (Typus) als die Lösungen der Gleichung (1) und ist eine logaritmische Ableitung der Lösung der Gleichung (1), welche gleichzeitig eine P. B. v. Lösung der 1. und der 2. Art ist.

Die P. B. v. Lösungen existieren ganz bestimmt, was das Beispiel der Gleichung (1) mit konstantem Q, zeigt.

Im zweiten Teile beschäftigt man sich mit dem Problem der P. B. v. (P. v.) Lösungen der Gleichung (1), wenn die Funktion Q, welche in der Gleichung (1) auftritt, ein Polynom ist. Dann ist jede P. B. v., bzw. P. v. Lösung erster Art dieser Gleichung gleichzeitig eine P. B. v., bzw. P. v. Lösung zweiter Art und umgekehrt *(Satz 6)*. Ferner jede P. B. v. Lösung ist auch eine P. v. Lösung *(Satz 8)* und endlich, wenn Q keine Konstante ist, dann existiert höchstens eine Klasse von P. v. Lösungen *(Satz 7)*.

Im dritten Teile wird folgendes bewiesen. Wenn Q eine ganze transzendente Funktion ist, dann müssen die Sätze 6, 7, 8 nicht gelten. Dieses wird so durchgeführt, das man ein Problem von Prof. O. Borůvka löst. Es ist eine Folge von Punkten einer offenen komplexen Ebene gegeben, welche keinen endlichen Häufungspunkt hat. Man soll so eine Differentialgleichung (1) finden, damit eine ihrer Lösungen die Nullstellen gerade in den Punkten der gegebenen Folge hat, bzw. so eine Bedingung finden, unter welcher diese Gleichung existieren wird. Die Antwort auf diese Frage ist positiv und sie ist in den *Sätzen 9* und *10* enthalten. Der Beweis dieser Sätze ist konstruktiv und beruht in der Verwendung des bekannten Weierstraßschen Satzes und der Pringsheimschen Konstruktion einer ganzen Funktion mit vorgeschriebenen Werten in der gegebenen Folge (X, s. 301). Nach den Sätzen 9 und 10 existieren unendlich viele Differentialgleichungen (1) so, das eine ihrer Lösungen v, bzw. ihre Ableitung, die Nullstellen gerade in den Punkten a_n, bzw. b_n hat, oder das eine ihrer Lösungen u die Nullstellen gerade in den Punkten a_n und eine andere v, linear unabhängig mit u, gerade in den Punkten b_n hat. Dabei sind $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zwei disjunkte Folgen von verschiedenen Punkten einer offenen Ebene, welche keinen Häufungspunkt im Endlichen haben. Die Sätze 9 und 10 zeigen auch die Form aller Gleichungen (1) und ihrer Lösungen mit schon erwähnten Eigenschaften.

Endlich wird gezeigt, daß es nicht möglich ist, die Nullstellen des Fundamentalsystems von Lösungen sowie ihrer Ableitungen vorzuschreiben. Es gilt nämlich der *Satz 12*, welcher behauptet: Wenn die Gleichung (1) zwei linear unabhängige P. v. Lösungen erster Art hat und mindestens eine von ihnen gleichzeitig eine P. v. Lösung zweiter Art ist, dann ist die Gleichung (1) mit konstantem Q. Also existiert keine Gleichung (1), welche ein Fundamentalsystem von Lösungen mit endlicher Anzahl von Nullstellen hätte, wobei die Ableitung einer Lösung eine endliche, die Ableitung einer anderen Lösung aber eine unendliche Anzahl von Nullstellen hätte. Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem Saxerschem Satze (XIV, s. 206—207), dessen Folgerung der *Satz 11* ist. Dieser Satz behauptet folgendes: Es sei h eine beliebige ganze Funktion und es haben die Polynome p, q, r, s folgende Eigenschaften: 1. $p(z) \not\equiv 0$, 2. $r(z) \not\equiv 0$, 3. Wenn $s(z) \not\equiv 0$, dann ist $\frac{s(z)}{r(z)}$ keine ganze Funktion. Jede ganze Lösung der Gleichung (75) ist dann eine Konstante.

Im Abschlusse sind drei Probleme, welche im Zusammenhang mit dieser Arbeit auftreten, gegebenen.

1. Man finde solche Differentialgleichungen (1), deren erste Ableitungen des Fundamentalsystems vorgeschriebene Nullstellen haben.

2. Man finde solche Differentialgleichungen (1), deren eine Lösung und die Ableitung einer anderen, linear unabhängigen Lösung, vorgeschriebene Nullstellen haben.

3. Kann die Gleichung (1) außer der Form mit konstantem Q zwei linear unabhängige P. B. v. Lösungen erster Art haben, wobei mindestens eine von ihnen eine P. B. v. Lösung auch zweiter Art ist?

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV – 3–5, MATHEM., 1959]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IV., FASC. III-V **MATHEMATICA** **1959**

A note to a paper of Clunie

V. ŠEDA

In a paper (I) proved *J. Clunie* this theorem:

Theorem A.

If $f(z)$ and $g(z)$ are two integral functions of orders ϱ_1 and ϱ_2 with $\varrho_1 > \varrho_2$, $g(z) \not\equiv 0$, then $f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)$ is of order ϱ_1.

Further he put the questions:

1. *If this theorem for functions of the same order holds, when the type of $g(z)$ is lower than that of $f(z)$.*

2. *What is the order of $f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot h(z)$, if $g(z)$ and $h(z)$ are of lower order than $f(z)$.*

We shall show that the positive answer to the first question gives a corollary of a paper of *M. Chi-Tai Chuang* (II). On the other hand a simple example and theorem A reject the possibility of a definite answer to the second question. In following we shall base on the theory of meromorphic functions as it is given in the book (III) and we shall use also the same notations.

By a meromorphic function we shall mean a function, meromorphic in the open plane. Its order, type and class has the obvious meaning. It is inconvenient to define the type for functions of the order *O*. The complications arise namely for constant functions. Such e. g. a function $w = c$ for $|c| \leq 1$ is of minimal type, while for $|c| > 1$ is of normal type and of order *0*. From this especially follows that the known theorem on invariance of the type of meromorphic function in the case of homographic transformation for these functions does not necessary hold. For the sake of a simpler formulation it shall be useful to generalize the notion of the category of entire functions (IV, p. 35) on meromorphic functions in a following manner:

Two meromorphic functions w_1, w_2 are of the same category if they are of the same order, in the case of finite positive order also of the same type and if they are of minimal type, then of the same class too. In a contrary case we say that the function w_2 is of higher category as the function w_1, if the order of w_2 is greater than that of w_1, or in the case of the same finite and positive orders the type of w_2 is greater than the type of w_1, or if both functions w_1, w_2 are of the same order and minimal type, if w_2 is of class of divergence and w_1 of class of convergence. In an evident manner it is possible to define further notions, related with comparing of categories, such as maximum of the categories of the functions w_1, w_2 etc. By means of the notion of category we can put the questions which contain both the problems of Clunie:

If the functions f, g, h are entire, then:

1'. *What is the category of the function $f' \cdot g - f \cdot g'$, if the category of the function f is greater than that of g.*

2'. *What is the category of the function $f' \cdot g + f \cdot h$, if the functions g and h have lower category as the function f.*

To the considerations on the questions 1'. and 2'. we need a simple

Lemma 1.

Let w_1 and w_2 be two meromorphic functions. Then the category of the product $w_1 w_2$, respectively of the ratio $\frac{w_1}{w_2}$ (w_2 being not identically 0) does not exceed maximum of categories of the functions w_1, w_2. If the category of w_1 is different from that of w_2 and the function of the lower category is not identically 0, then the category of the product $w_1 \cdot w_2$, resp. of the ratio $\frac{w_1}{w_2}$ is equal to maximum of categories of the functions w_1, w_2.

Proof. The first part of lemma follows from the inequalities between the characteristic function $T(r, w_1 \cdot w_2)$ of the product $w_1 \cdot w_2$, respectively the characteristic function $T\left(r, \frac{w_1}{w_2}\right)$ of the ratio $\frac{w_1}{w_2}$ and the characteristics $T(r, w_1)$, $T(r, w_2)$ of functions w_1, w_2. These inequalities say that

(1) $$T(r, w_1 \cdot w_2) \leqq T(r, w_1) + T(r, w_2)$$

(2) $$T\left(r, \frac{w_1}{w_2}\right) \leqq T(r, w_1) + T(r, w_2) + 0(1).$$

The inequalities (1), (2) resemble one another, therefore we give the proo only for the ratio. For the product is the proof analogous. From the same reason we shall limit ourselves in the proof on the case that the category of w_2 does not exceed the category of w_1.

The category of the ratio $\frac{w_1}{w_2}$ is higher than that of w_1, if exactly one of these 3 cases takes place:

1. The order of $\frac{w_1}{w_2}$ is higher than that of w_1.

2. The orders of functions $\frac{w_1}{w_2}$, w_1 are the same, but the type of $\frac{w_1}{w_2}$ is higher than that of w_1.

3. The functions $\frac{w_1}{w_2}$, w_1 have the same order and minimal type, but $\frac{w_1}{w_2}$ is of class of divergence, while w_1 is of class of convergence.

Successively we shall eliminate all these cases.

1. Let us denote the orders of the functions w_1, w_2 λ_1 respectively λ_2. On the assumption on the category of the function w_1 we have $\lambda_1 \geqq \lambda_2$. Evidently it suffices to estimate the case $\lambda_1 < \infty$. From the definition of the order of

meromorphic function it follows in view of (2) that $T\left(r, \frac{w_1}{w_2}\right) \leqq r^{\lambda_1+\varepsilon} + r^{\lambda_2+\varepsilon} + 0(1) \leqq r^{\lambda_1+2\varepsilon}$ for all sufficiently large r and arbitrary $\varepsilon > 0$. But that means that the order of $\frac{w_1}{w_2}$ is not higher than the order of w_1.

The case 1 is already proved in (III, p. 209). We proved it only for the sake of completness.

2. Let again the functions $\frac{w_1}{w_2}$, w_1 be of the same finite and positive order λ_1 and of types τ, respectively τ_1. Again it is sufficient to consider $\tau_1 < \infty$. From the inequality (2) we obtain

$$\tau = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T\left(r, \frac{w_1}{w_2}\right)}{r^{\lambda_1}} \leqq \overline{\lim_{r\to\infty}} \left[\frac{T(r, w_1)}{r^{\lambda_1}} + \frac{T(r, w_2)}{r^{\lambda_1}} + \frac{0(1)}{r^{\lambda_1}}\right] \leqq \tau_1 + \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r, w_2)}{r^{\lambda_1}}.$$

From the assumption on the category of the function w_2 is for $\lambda_2 = \lambda_1$ $\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r, w_2)}{r^{\lambda_1}} = \tau_2 < \infty$ being $\tau_2 = 0$ for $\tau_1 = 0$. In the case $\lambda_2 < \lambda_1$ from the definition of λ_2 for all sufficiently large r follows the inequality $T(r, w_2) \leqq r^{\lambda_2+\varepsilon}$, consequently $\frac{T(r, w_2)}{r^{\lambda_1}} \leqq \frac{1}{r^{\lambda_1-\lambda_2-\varepsilon}} = \frac{1}{r^{\alpha}}$ where for sufficiently little $\varepsilon > 0$ it is $\alpha > 0$. From this follows that $\tau_2 = 0$.

In both cases we have got that the type τ is not higher than the type τ_1.

3. If both functions w_1, and $\frac{w_1}{w_2}$ are of the same order λ_1, minimal type and w_1 is of the class of convergence, it is $\lambda_1 > 0$. If $\lambda_2 < \lambda_1$ holds, from the proof in the case 2 follow the inequalities $\int^{\infty} \frac{T(r, w_2)}{r^{\lambda_1+1}} \mathrm{d}r \leqq \int^{\infty} \frac{1}{r^{\alpha+1}} \mathrm{d}r +$ constant $<\infty$, because $\alpha > 0$. For $\lambda_2 = \lambda_1$ it follows from the assumption on the category of w_2 that this function is of the class of convergence. In both cases in view of the inequality (2) it holds $\int^{\infty} \frac{T\left(r, \frac{w_1}{w_2}\right)}{r^{\lambda_1+1}} \mathrm{d}r \leqq \int^{\infty} \frac{T(r, w_1)}{r^{\lambda_1+1}} \mathrm{d}r + \int^{\infty} \frac{T(r, w_2)}{r^{\lambda_1+1}} \mathrm{d}r + \frac{0(1)}{r^{\lambda_1+1}} \int^{\infty} \mathrm{d}r < \infty$ consequently $\frac{w_1}{w_2}$ is of the class of convergence.

The second part of lemma can be proved in a similar manner as is proved in (III, p. 209) the equality of orders of product $w_1 \,.\, w_2$ and of function w_1, assuming that the order of w_1 is greater than the order of w_2.

Let the category k_1 of the function w_1 be higher than the category k_2 of w_2. Then it is also $w_1 \not\equiv 0$, because in the contrary case k_1 could not be higher than k_2. In the case that the category k of the ratio $\frac{w_1}{w_2}$ is lower than k_1, then according to the first part of the lemma, relating to the product, the category of the function $w_1 = \frac{w_1}{w_2} . w_2$ is at most equal to the maximum (k, k_2) and consequently lower than k_1, what is a contradiction.

In a similar way we go on when k_2 is higher than k_1 and also in the case of product $w_1 . w_2$.

Note. With regard to the inequality $T(r, w_1 + w_2) \leqq T(r, w_1) + T(r, w_2) + \log 2$ and the equation $T(r, -w) = T(r, w)$ for the sum and difference of two meromorphic functions holds a similar lemma also without the assumption that one of these functions is not identically zero.

Lemma 2.

Let w be a meromorphic function. Then the functions w, w^n are of the same category.

Proof. It is $| w(re^{i\vartheta}) | > 1$ then and only then, if $| w^n(re^{i\vartheta}) | > 1$. Therefore for $| w(re^{i\vartheta}) | > 1$ from the definition of $\log^+ \alpha$ it follows that $\log^+ | w^n(re^{i\vartheta}) | = n \log^+ | w(re^{i\vartheta}) |$. In the case $| w(re^{i\vartheta}) | \leqq 1$ is $\log^+ | w(re^{i\vartheta}) | = 0 = \log^+ | w^n(re^{i\vartheta}) |$, what we may write $\log^+ | w^n(re^{i\vartheta}) | = n . \log^+ | w(re^{i\vartheta}) |$. Therefore for those $r \geqq 0$, $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, for which is $\log^+ | w(re^{i\vartheta}) |$ defined, holds the equation $\log^+ | w^n(re^{i\vartheta}) | = n . \log^+ | w(re^{i\vartheta}) |$. From this we have for the functions $m(r, w)$, $m(r, w^n)$, which are the „*Schmiegungsfunktion*" of the functions w, respectively w^n, the equation $m(r, w^n) = n . m(r, w)$.

The poles of the functions w, w^n are identical, being k-tuple pole of the function w $k . n$- tuple pole of the function w^n. From the last follows the equation $n_{w^n}(t, \infty) = n . n_w(t, \infty)$, where the expressions $n_w(t, \infty)$ and $n_{w^n}(t, \infty)$ design the number of poles of the function w, respectively of w^n in the circle $| z | \leqq t$. This equation implies between the functions $N(r, w)$ and $N(r, w^n)$, which are the „*Anzahlfunktion der Pole*" of the functions w, w^n the equation $N(r, w^n) = n . N(r, w)$. The characteristics $T(r, w)$, $T(r, w^n)$ of functions w, resp. w^n fulfil the equation $T(r, w^n) = n . T(r, w)$, which yields the equations $\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r, w^n)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r, w)}{\log r}$, $\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r, w^n)}{r^\lambda} = n . \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r, w)}{r^\lambda}$ and finally $\int^\infty \frac{T(r, w^n)}{r^{\lambda+1}} dr = n \int^\infty \frac{T(r, w)}{r^{\lambda+1}} dr$, meaning that the functions w, w^n are of the same category.

Finally we attend to the nucleus of the note. *M. Chi-Tai Chuang* in the paper (II) among other things some theorems has proved which we can include in a statement:

If the function w is meromorphic and not rational then the order, type and class of function w and its derivative w' are the same.

This statement holds evidently for rational functions too. In a notion of category it means the theorem

Theorem B.

The categories of meromorphic function w and its derivative w' are the same.

Corollary.

If the category of entire function f is higher than that of entire function g, then except of the case $g \equiv 0$, the category of $F = f' . g - f . g'$ is the same as that of f.

Proof. If $g \equiv 0$, then is $F \equiv 0$. Let now be $g \not\equiv 0$. In view of Lemma 1 is the category of the function $\frac{f}{g}$ equal to the category of the function f. From the theorem B it follows that the category of $\left(\frac{f}{g}\right)'$, i. e. the category of the function $\frac{F}{g^2}$ is equal to the category of the function $\frac{f}{g}$ and consequently to that of the function f. Lemma 2 says that the functions g, g^2 are of the same category. Therefore according to Lemma 1 the category of the product $\frac{F}{g^2} \cdot g^2 = F$ is equal to that of the function f.

As to the category of the function $G = f' \cdot g + f \cdot h$ where the entire functions g and h are of lower categories than the entire function f, Lemma 1 and the note associated to it say that the category of the function G is at most equal to the category of the function f. Corollary after the theorem B shows that in a special case, if $h = -g'$, $g \not\equiv 0$ is the category of the function G equal to the category of the function f. This is not a general case as the following example shows: Let us put $f = e^K$, where $K \neq$ const. is an entire function of finite order. The function f is of higher category than K. In fact, if K is a polynomial of degree $n (n \geq 1)$ and so is of order O, f is of order n. If K is an entire transcendental, then from the theorem of Hadamard (IV, p. 38) follows that the function f is of order ∞. Let g be an entire function of lower category as that of f. Then is the function $h = -g \cdot K'$ of lower category as the function f as well and the function $G \equiv 0$.

Bibliography

[I] Clunie J.: The derivative of a meromorphic function, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 7 (1956), pp. 227—229.

[II] Chi-Tai Chuang M.: Sur la comparaison de la croissance d'une fonction méromorphe et de celle de sa dérivée, Bull. Sci. Math. Ser. 2, 75 (1951), pp. 171—190.

[III] Nevanlinna R.: Eindeutige analytische Funktionen, Springer Verlag 1936.

(IV) Левин Б. Я.: Распределение корней целых функций, Москва 1956.

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2.

Do redakcie dodané 25. XI. 1958

Poznámka k jednému článku Clunieho

V. Šeda

Výťah

V práci (I) dokázal *J. Clunie* vetu

Veta A:

Ak sú f a g dve celé funkcie rádu ϱ_1 a ϱ_2, pričom $\varrho_1 > \varrho_2$, $g \not\equiv 0$, tak $f' . g - f . g'$ je rádu ϱ_1.

Ďalej položil otázky:

1. *Či platí táto veta pre funkcie toho istého rádu, ak je typ g menší než typ f.*
2. *Aký je rád funkcie $f' . g + f . h$. ak g a h sú menšieho rádu než f.*

V tomto článku sa ukazuje, že kladná odpoveď na 1. otázku je dôsledkom práce *M. Chi-Tai Chuanga* (II). Pritom sa použijú dve lemmy, z ktorých prvá predstavuje zostrenie jednej vety z (III, str. 209), a druhá tvrdí, že meromorfné funkcie w a w^n sú toho istého rádu, typu a triedy. Jednoduchý príklad a veta A zase zavrhujú možnosť jednoznačnej odpovede na otázku 2.

Замечание к одной статьи Клюни (Clunie)

В. Шеда

Резюме

В работе (I) Клюни доказал теорему A: Если f и g две целые функции соответственно порядков ϱ_1 и ϱ_2, где $\varrho_1 > \varrho_2$, $g \not\equiv 0$, то $f' . g - f . g'$ порядка ϱ_1.

Далее поставил два вопроса:

1. Справедлива-ли эта теорема для функций того же порядка, если тип g ниже типа f.
2. Какой порядок функции $f'g + f . h$, если g и h низшего порядка чем f.

В предлагаемой работе доказывается, что положительный ответ на первый вопрос является следствием теорем в работе: *M. Chi-Tai Chuang (II)*. При доказательстве автор воспользовался двумя леммами, из которых первая представляет усиление одной теоремы из (III, стр. 209), вторая опять утверждает, что мероморфные функции w и w^n того же порядка, типа и класса. Простой пример и теорема A отвергают возможность однозначности ответа на второй вопрос.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV — 3–5, MATHEM., 1959]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

Úlohy polohy v kótovane-Mongeovom zobrazení v E_4

L. NAGY

I. Úvod

Problém zobrazenia priestoru E_4 je známy asi tri štvrte storočia. Cudzí aj naši autori vypracovali viaceré zobrazovacie metódy. Ich prehľad sa uvádza v práci [8] str. 26.

V predloženej práci pojednáme o ďalšej zobrazovacej metóde. Zavedieme ju takto: Body A (lineárneho *euklidovského* štvorrozmerného) operačného priestoru $E_4 \equiv [O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t}]$ zobrazíme ortogonálne do priemetného priestoru $\Pi \equiv [O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ do bodov $\bar{A}$ tak, že pre Π použijeme známe *Mongeove* zobrazenie a kótu t_A bodu $A(x_A, y_A, z_A, t_A)$ pripíšeme k jeho priemetu A_2. Pre tieto dôvody je vhodné nazvať toto zobrazenie *kótovane-Mongeovým* na rozdiel od dvojnásobne kótovaného zobrazenia, ktoré *Marletta* poznal už v r. 1904 (pozri [14]).

V tomto článku si všimneme zobrazenie lineárnych podpriestorov, úlohy o incidencii a rovnobežnosti a niektoré základné úlohy polohy. Pritom niektoré problémy zasahujú aj do metrických úloh, o ktorých sa zmienime v ďalšej práci.

Ďakujem *M. Harantovi* za podnety a pomoc pri vypracovaní podloženej práce.

II. Zobrazenie lineárnych podpriestorov

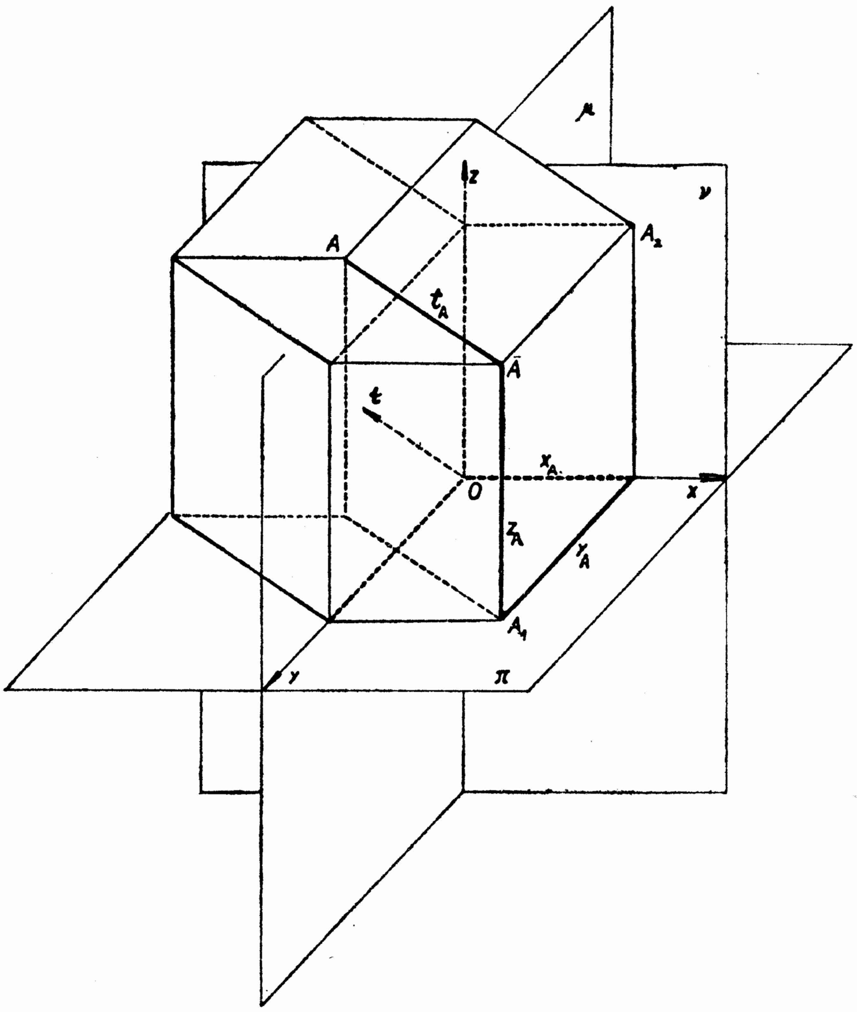
1. Zobrazenie bodu

Def. 1,1 *(Trojrozmerný euklidovský lineárny) podpriestor Π o pravouhlej báze $[O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ nazveme priemetným priestorom. (Štvorrozmerný euklidovský lineárny) priestor E_4 o pravouhlej báze $[O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t}]$ zas operačným priestorom.*

Veta 1,1. *Majme bod $A(x_A, y_A, z_A, t_A) \in E_4$ a priemetný priestor Π. Premietnime vzor A do bodu $\bar{A} \in \Pi$ v smere $\vec{t} \perp \Pi$! Zobrazme bod $\bar{A}$ priemetného priestoru Π v Mongeovej projekcii (vzhľadom na Π) do dvojice bodov A_1, A_2. K bodu A_2 pripíšme jeho kótu t_A v zátvorke: $A_2(t_A)$. Potom takto zavedené zobrazenie medzi množinou vzorov $A \in E_4$ a množinou dvojíc obrazov je (1,1)-značným zobrazením.*

Dôkaz. Z predpokladov daných vo vete 1,1 vieme ku každému bodu $A \in E_4$ ako vzoru stanoviť dvojicu združených obrazov $A_1, A_2(t_A)$ (obr. 2). Pritom vieme stanoviť aj *sprievodný nadkváder bodu* A (obr. 1; pozri aj [20] str. 176). Obrátene, ak zvolíme súradnice x_A, y_A, z_A, t_A, tak vieme ich nanášaním určiť dvojicu združených obrazov $A_1, A_2(t_A)$. Z týchto vieme stanoviť bod $\bar{A}$, a teda aj vzor A, keďže je zrejmé, že medzi bodmi $\bar{A}$ priestoru E_4 a bodmi $\bar{A} \in \Pi$ je (1,1)-značné zobrazenie.

Def. 2,1. *Vetou 1,1 zavedené zobrazenie nazveme kótovane-Mongeovým zobrazením v* E_4.



Obr. 1.

Dohovor 1,1. V ďalšom pod znakmi $\Sigma \parallel \Omega$, $\Sigma \frac{1}{2} \parallel \Omega$, $\Sigma \frac{2}{3} \parallel \Omega \ldots$, $\Sigma \perp \Omega$; $\Sigma \frac{1}{2} \perp \Omega$, $\Sigma \frac{2}{3} \perp \Omega \ldots$ budeme rozumieť totálnu rovnobežnosť, polrovnobežnosť, dvojtretinovú rovnobežnosť, ... atď., resp. totálnu kolmosť, polkolmosť, dvojtretinovú kolmosť, ... atď. daných priestorov.

Dohovor 1,2. Miesto názvov „kótovane-Mongeové obrazy bodu, priamky...“ použijeme v ďalšom priliehavejšie názvy „združené obrazy bodu, priamky...“. Namiesto „lineárny euklidovský trojzmerný podpriestor“ budeme hovoriť jednoducho len „priestor“.

V ďalšom často budeme používať vetu, ktorej dôkaz je triviálny:

Veta 1,2. *Ak platí pre bod* S: $S \in \Pi$, *vtedy pre jeho kótu platí:* $t_S = 0$, *a obrátene.*

Pozn. 1,1. Bolo by zaujímavé skúmať združené obrazy bodov, ktoré ležia v $\pi(y, x)$, $\nu(x, z)$, $\mu(y, z)$, ďalej ktoré ležia na súradnicových osiach, v rovinách totožnosti, resp. súmernosti rovín π, ν.

2. Zobrazenie priamky

Def. 2,1. *Majme priamku a, ktorá nie je kolmá na Π. Preložme ňou rovinu $\varkappa^a \frac{1}{2} \perp \Pi$. Potom túto rovinu nazveme kolmopremietajúcou rovinou priamky a.*

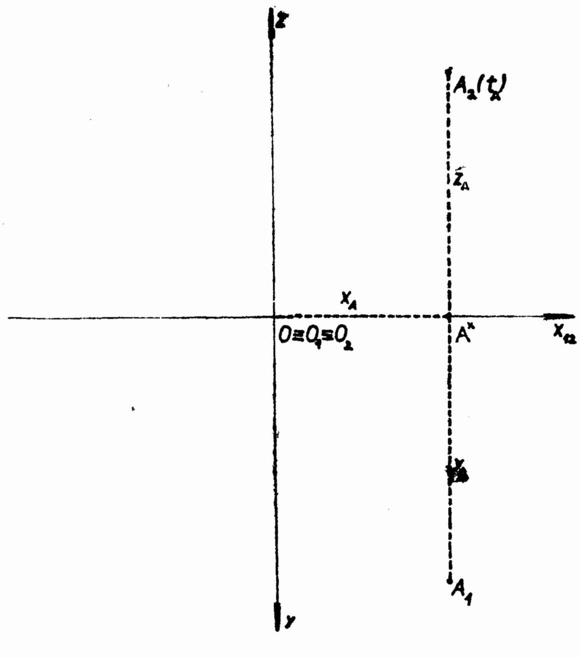
Videli sme, že združenými obrazmi bodu A bola dvojica bodov A_1, $A_2(t_A)$. Keďže priamka je určená podľa [10], str. 57—58, dvoma bodmi, bude pri nej platiť analogický vzťah, ktorý vyjadríme vo

Vete 2,1 (a). *Združené obrazy priamky a, ktorá nie je kolmá na podpriestory Π, π, ν, sú dvojica priamok a_1, a_2. Dostaneme ju Mongeovým zobrazením, keď za vzor zoberieme priamku $\bar{a} \equiv \varkappa^a \cap \Pi$ a ku dvom rôznym bodom $A_2 \not\equiv B_2$ priamky a_2 pripíšeme ich kóty t_A, t_B.*

b) *Združené obrazy priamky $a \perp \Pi$ sú dva body $a_1 \equiv A_1 \equiv B_1$, $a_2 \equiv A_2(t_A) \equiv \equiv B_2(t_B)$.*

c) *Združené obrazy priamky*

$$\left.\begin{matrix} a \perp \nu \\ a \perp \pi \end{matrix}\right\} \text{ sú } \left\{\begin{matrix} \textit{priamka } a_1 \equiv \overline{A_1B_1} \textit{ a bod } a_2 \equiv A_2(t_A) \equiv B_2(t_B) \\ \textit{priamka } a_2 \equiv \overline{A_2B_2} \textit{ a bod } a_1 \equiv A_1 \equiv B_1 \end{matrix}\right\}.$$



Obr. 2.

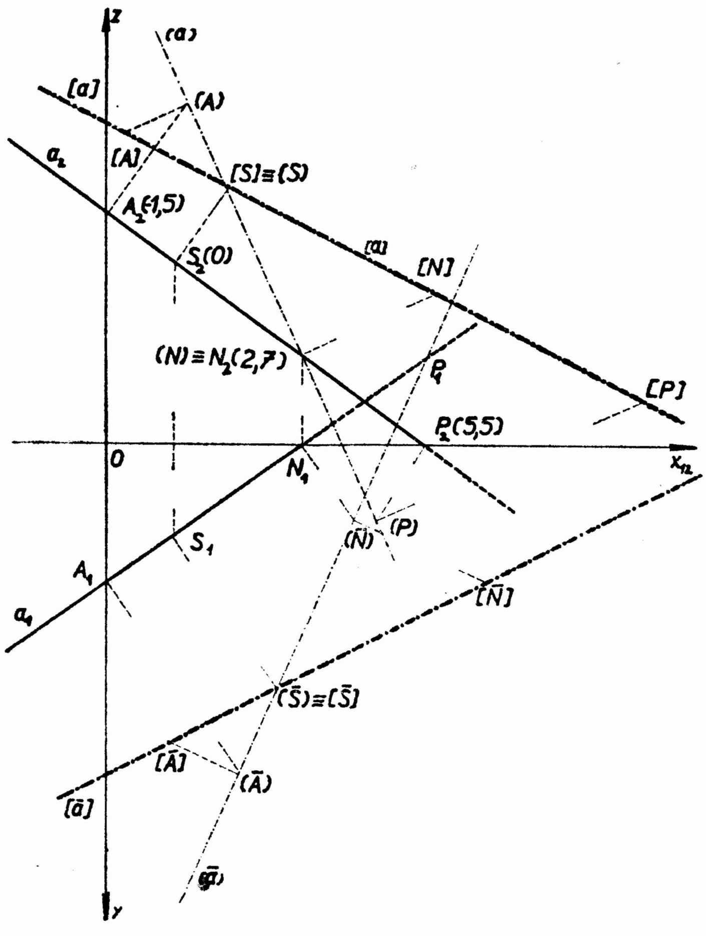
Dôkaz. Na priamke a zoberme bod M. Jeho premietajúci lúč pretne Π v bode $\bar{M}$. Ak prebehne bod M všetky body priamky a, tak premietajúce lúče týchto bodov vyplnia kolmopremietajúcu rovinu $\varkappa^a$ priamky a. Ak zobrazíme všetky body $\bar{M} \in \bar{a} \equiv \varkappa^a \cap \Pi$ v *Mongeovom* zobrazení, vyplnia nám ich obrazy $M_1, M_2(t_M)$ združené obrazy priamok a_1, a_2, pretože *Mongeovo* zobrazenie je lineárne zobrazenie (pozri napr. [18] str. 217). Obrátene, všetkým dvojiciam $M_1' \in a_1$, $M_2'(t_M) \in a_2$ spätným postupom, ako sme ukázali na začiatku, vieme priradiť body $M' \in a$. Pre $a \perp \Pi$ platí: $a \equiv \overline{AB} \equiv \overline{A} \equiv \overline{B}$, z čoho vyplýva tvrdenie vo vete 2,1. Tvrdenia pre $a \perp \nu$, resp. $a \perp \pi$, vyplývajú z obyčajného Mongeovho premietania.

Veta 2,2. *Kótovane-Mongeovo zobrazenie je lineárnym zobrazením.*

Dôkaz. Ak nejaké zobrazenie spĺňa tieto 4 predpoklady:

a) bodu ako vzoru priradí zase bod (body) ako obraz (obrazy),

b) z obrazu (obrazov) možno stanoviť jediný bod ako vzor, potom toto zobrazenie nazývame lineárnym. Požiadavky a)—b) sú pre vetu 2,2 splnené, ako to vyplýva z vety 1,1; požiadavky c)—d) sú opäť splnené na základe vety 2,1.



Obr. 3.

Def. 2,2. *Bod $S \in a$, ktorého kóta je $t_S = 0$, nazveme (priestorovým) stopníkom priamky* (porovnaj [8] str. 4).

Konštr. 2,1. *Určiť skutočnú veľkosť úsečky $\overline{AN}$, stopník S priamky $a \equiv AN$ a polohu priamky a v E_4* (obr. 3).

Riešenie. Najprv určíme skutočnú veľkosť (A) (N) úsečky na priamke (a), na kolmom priemete priamky a do Π sklopením nárysnepremietajúcej roviny použitím súradníc y_A, y_N. Potom sklopíme kolmopremietajúcu rovinu $\varkappa^a$ priamky a, ktorá je polkolmá na nárysnepremietajúcu rovinu. Sklopenie vykonáme pomocou kót t_A, t_N. Pre stopník S platí: $[S] \equiv (S) \equiv (a) \cap [a] \equiv \equiv a \cap \Pi$. Konštrukciu môžeme zostrojiť aj sklopením pôdorysnepremietajúcej roviny priamky $\bar{a}$, keďže platí $\overline{AN} = [A]\,[N] = [\bar{A}]\,[\bar{N}]$ a ide len o zámenu konštrukcií. Tak isto môžeme zostrojiť najprv sklopenie roviny $\varkappa^a$ pomocou kót t_A, t_N, a až potom použiť sklopenie pôdorysne-(nárysne-) krycej roviny pomocou súradníc $z_A, z_N(y_A, y_N)$, čo, pravda, na obr. 3 nie je vyznačené. Ak ide len o určenie skutočnej veľkosti úsečky AN, a nie o polohu priamky v operačnom priestore E_4 (vzhľadom na Π), môžeme použiť rozdielové trojuholníky vzhľadom na π, Π, alebo ν, Π. Keby sme chceli získať len stopník S, môžeme ho určiť aj odstupňovaním priamky a_2 vzhľadom na kóty t. Zo štylizácie konštr. 2,1 vidíme, že táto úloha patrí jednak do skupiny metrických úloh, jednak do skupiny polohových úloh. Podľa obr. 3 vidieť, že platí:

$$(AN) = ([A]\,[N]) = ([\bar{A}]\,[N]) =$$
$$= \sqrt{(x_A - x_N)^2 + (y_A - y_N)^2 + (z_A - z_N)^2 + (t_A - t_N)^2},$$

čo je známy výsledok z analytickej geometrie (pozri [3], str. 13).

Poznámka 2,1. Ak $A, N \ldots\ldots M \ldots$ sú rôzne body ležiace na priamke r, pričom $t_A = t_N = \ldots = t_M = \ldots\ldots \neq 0$, tak je $r \parallel \Pi$. Ak je $S \equiv A_2(t_A) \equiv \equiv B_2(t_B) \equiv \ldots\ldots \equiv M_2(t_M)$, pričom $t_A \neq t_B \neq \ldots\ldots \neq t_M \neq \ldots\ldots \neq 0$, vtedy je $r \perp \Pi$.

Poznámka 2,2. Združené obrazy priamok v špeciálnych polohách ($d \cap \nu$, $e \cap \pi$, $f \perp \pi$, $g \perp \nu$, $h \perp \mu$, $i \perp x$, $j \perp y$, $k \perp z$, $l \perp t$) nebudeme skúmať. Zaujímavé sú aj obrazy bodov spoločných priamke a a s ňou rôznobežnej rovine $P \equiv a \cap \pi$, $N \equiv a \cap \nu$, $M \equiv a \cap \mu$. Body T, resp. U, pre ktoré platí $a_1 \cap a_2$ $a_2 \equiv T_{1,2}$ $U(y_U = z_U)$, $t_T = t_U = 0$ ležia v rovine totožnosti τ, resp. súmernosti $\bar{\sigma}$ rovín π, ν.

3. Zobrazenie roviny

Def. 3,1. *Priesečnicu s^α (ak existuje) roviny $\alpha \nparallel \Pi$, $\alpha \notin \Pi$ s priemetným priestorom Π nazveme jej (priestorovou) stopou.*

Veta 3,1. *Združené obrazy roviny α, danej vo všeobecnej polohe vzhľadom na Π, sú (1,1) — značne určené, ak poznáme združené obrazy s^α_{12} stopy roviny $s^\alpha \equiv \alpha \cap \Pi$ a združené obrazy jedného jej bodu $D \in \alpha$, kde $D \notin s^\alpha$* (obr. 4). *Združené obrazy roviny $\alpha \parallel \Pi$ sú určené združenými obrazmi jedného jej bodu $D \in \alpha$ a stopami p^β, n^β roviny $\beta \parallel \alpha$.*

Dôkaz. Podľa Hilberta (pozri [10]), str. 58, bodom C a priamkou $c \not\ni C$ prechádza jediná rovina, ktorá tieto obsahuje. Zvoľme preto bod $D \in \alpha$ a priamku $s^\alpha \equiv \alpha \cap \Pi$, $s^\alpha \not\ni D$. Združené obrazy D_i, s^α_i $(i = 1, 2)$ vieme podľa vety 1,1 a konštr. 2,1 stanoviť, a to (1,1)-značne. Preto aj každej štvorici obrazov D_i, $s^\alpha_i(D_i \notin s^\alpha_i)$ zodpovedá dvojica D, $s^\alpha(D \notin s^\alpha$, D, $s^\alpha \in \alpha)$. Takto sme vetu 3,1 dokázali, lebo dôkaz druhej časti je evidentný.

Dôsledok. Z vety 3,1 vyplýva, že združenými obrazmi roviny α, danej všeobecne k Π sú zasa roviny (ktoré sú totožné s nákresňou).

Def. 3,2. *Majme rovinu $\alpha \nparallel \Pi$, ktorá nie je kolmá na priemetný priestor Π.*

Preložme ňou $\frac{1}{3}$ kolmý priestor $\Omega^\alpha \frac{1}{3} \perp \Pi$. Potom priestor Ω^α nazveme premietajúcim priestorom roviny α.

Veta 3,3. *Združené obrazy s_i^α, D_i ($i = 1, 2$, $s^\alpha \notin D$) roviny $\alpha \equiv (s^\alpha, D)$, ktorá nie je kolmá na Π, dostaneme Mongeovým zobrazením, keď za vzor zoberieme rovinu $\bar{\alpha} = \Omega^\alpha \cap \Pi$ a k bodu D_2 pripíšeme jeho kótu t_D.*

Dôkaz. Pre priamku s^α vykonáme tú istú úvahu ako v dôkaze vety 2,1. Zoberme bod $D \notin s^\alpha$, $D \in \alpha$. Jeho premietajúci lúč s^D pretne Π v bode $\bar{D}$. Tomuto bodu ako vzoru zodpovedajú združené obrazy $D_i \notin s_i^\alpha$ ($i = 1, 2$). Keby totiž $D_i \in s_i^\alpha$, potom aj $D \in s^\alpha$, a to je spor s vyšeuvedeným predpokladom. Obrátene, podľa vety 1,1 ku každým dvom združeným obrazom D_i' patrí jediný vzor $\bar{D} \in \Pi$, a teda jediný bod $D \in E_4$. Ak budú body D_i prebiehať všetkymi bodmi nákresne, vtedy body $\bar{D} \in \Pi$ vyplnia rovinu $\bar{\alpha} \subset \Pi$. Keby existoval bod $D'' \notin \bar{\alpha}$, $D'' \in \Pi$, potom kolmým priemetom roviny $\alpha \subset E_4$ do Π bol by priestor Π, čo je spor s (1,1)-značnosťou premietania bodov priestoru E_4 do bodov priestoru Π, teda s vetou 1,1.

Poznámka 3,1. Z Hilbertovej axiomatiky (pozri [10] str. 57—58) vyplýva, že určenia roviny troma rôznymi bodmi, priamkou a bodom neležiacim na nej, dvoma rôznobežkami, dvoma rovnobežkami sú ekvivalentné a ľahko možno prejsť z jedného určenia na druhé. Každému z týchto určení zodpovedajú združené obrazy. Z nich za najvhodnejšie zoberieme v ďalšom zadanie podľa vety 3,1. Na obr. 7 sme určili rovinu σ troma bodmi, no aj tu bolo výhodné prejsť na zadanie podľa vety 3,1. Obrazmi $A_1B_1C_1$, A_2 (5·2) B_2 (10·5) sú určené združené obrazy roviny σ. Podľa konštr. 2,1 určíme stopníky ${}^1R$, R priamok b, c. Priamky ${}^1R_iR_i = s_i^\sigma$ sú už združené obrazy stopy roviny $\sigma \equiv (s^\sigma, A)$.

Veta 3,4. *Ak leží rovina α v Π, alebo je s Π rovnobežná, tak priamky s_i^α, x_i ($i = 1, 2$) sa pretínajú v jedinom bode, a obrátene. V nijakom inom prípade táto veta neplatí.*

Dôkaz. Ak leží rovina α v Π, tak jej združené obrazy splynú s Mongeovými obrazmi. V Mongeovej projekcii však veta 3,4 platí. Ak $\alpha \subset \Pi' \parallel \Pi$, ide len o rovnobežné posunutie priemetného priestoru v smere t. Nech teraz α neleží v Π, a nech nie je s ním rovnobežná. Druhú časť vety dokážeme takto: Predpokladajme, že tvrdenie vety 3,4 platí. Potom by muselo platiť buď $\alpha \parallel \Pi$, buď $\alpha \subset \Pi$, a to je spor s predošlým predpokladom.

Vetu 3,4 budeme potrebovať pri konštrukciách, kde sa vyskytuje stopná a hlavná rovina (pozri konštr. 4,1, 4,2, 6,3, 6,4).

Def. 3,3. *Bod $\begin{Bmatrix} {}^1S^\alpha \\ {}^2S^\alpha \end{Bmatrix}$, v ktorom pretína rovina $\begin{Bmatrix} \text{nárysňu} \\ \text{pôdorysňu} \end{Bmatrix}$, nazveme $\begin{Bmatrix} \text{druhým} \\ \text{prvým} \end{Bmatrix}$ stopným bodom roviny.*

Poznámka 3,2. Je zaujímavé skúmať určenie združených obrazov rovín v špeciálnych polohách, napr.: $\beta \parallel \pi$, $\gamma \parallel \nu$, $\delta \frac{1}{2} \parallel \pi$, $\varepsilon \frac{1}{2} \parallel \nu$, $\eta \perp \pi$, $\zeta \perp \nu$, $\vartheta \frac{1}{2} \perp \pi$, $\varrho \frac{1}{2} \parallel \mu$, $\lambda \parallel \mu$, $\varkappa \frac{1}{2} \perp \nu$, $\tau \frac{1}{2} \perp \mu$, $\omega \perp \mu$, $\xi \perp \Pi$ atď.

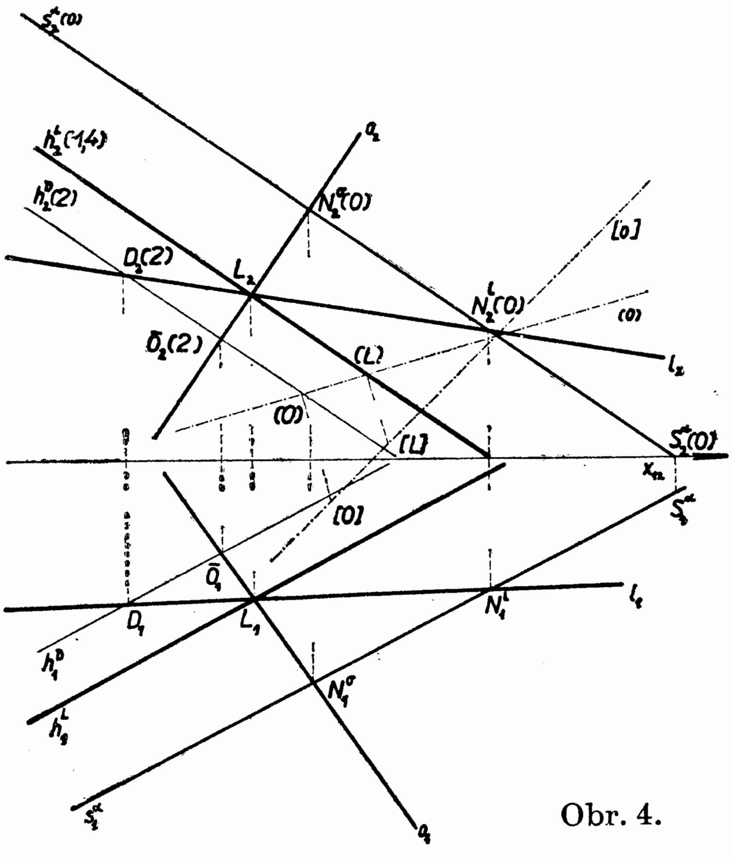
Def. 3,4. a) *Priesečnice roviny $\alpha \notin \Pi$, $\alpha \nparallel \Pi$ s priestormi rovnobežnými s Π nazveme hlavnými priamkami h^α roviny α.*

b) *Priamky o^α roviny, kolmé na hlavné priamky nazveme odchýlkové (spádové) priamky roviny. Ich interval i^α nazveme intervalom roviny (vzhľadom na Π). Odstup-*

ňovanú spádovú priamku o^α nazveme spádovým meradlom roviny (vzhľadom na Π).

Konštr. 3,1. *Dané sú združené obrazy roviny $s_i^\alpha \notin D_i$ a obraz L_1 bodu $L \in \alpha$ ($i = 1, 2$). Určiť t_L a cez bod L viesť tieto priamky roviny α: všeobecnú l, hlavnú h* (obr. 4).

Riešenie. Cez bod L_2 vedieme najprv všeobecnú priamku l_2, pre ktorú je $l_2 \equiv L_2D_2$, z čoho odvodíme l_1. Odstupňovaním priamky $l_2 \equiv D_2N_2^l$ by sme určili t_L, alebo postupujeme takto: Bodom L vedieme ľubovoľnú priamku $O \notin l$. Na nej zistíme bod $\bar{O}$, ktorého kóta je $t_O = 2$, a vyklopením priamky o určíme $t_L = 1{\cdot}4$. Spojnica $\overline{O_2D_2}$ je už nárys h_2^D hlavnej priamky, s ktorou je obraz h_2^L hlavnej priamky idúcej cez L rovnobežný.



Obr. 4.

Veta 3,5. *Nech $\alpha \subset \Pi$, $\alpha \nparallel \Pi$, $\alpha \not\perp \Pi$. Potom medzi dvojicami rovín*

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \bar{\alpha}(\bar{s}^\alpha, \bar{D}),\ \alpha_1(s_1^\alpha, D_1) \\ \bar{\alpha}(s^\alpha, \bar{D}),\ \alpha_2(s_2^\alpha, D_2) \end{array}\right) \\ \alpha_1(s_1^\alpha, D_1),\ \alpha_2(s_2^\alpha, D_2) \end{array}\right\} \text{ platí}$$

$\left\{\begin{array}{c}\textit{priestorová} \\ \textit{rovinná}\end{array}\right\}$ *perspektívna afinita. Osi afinity sú*

$$\left\{\begin{array}{c} s_1^\alpha \\ s_2^\alpha \\ \textit{priesečnica roviny } \alpha \\ \textit{s rovinou totožnosti,} \end{array}\right\}, \textit{ smery zase } \left\{\begin{array}{c} \bar{D}\ D_1 \\ \bar{D}\ D_2(t_D) \\ D_1 D_2(t_D) \end{array}\right\}^{1)}.$$

[1]) Veta 3,5 pre $\alpha \parallel \Pi$, $\alpha \subset \Pi$ je známa z obyčajného Mongeovho premietania (osi afinity sú, pravda, p^α, n^α). V prípade $\alpha \perp \Pi$ dostaneme singulárnu perspektívnu afinitu.

Dôkaz. Pod perspektívnou afinitou rozumieme takú príbuznosť bodov dvoch rovín, kde sa zachovajú vlastnosti:

a) (1,1)-značnosť pridružených elementov,

b) dvojice afinne si zodpovedajúcich { priamok sa pretínajú na jedinej priamke / bodov majú spojnice vzájomne rovnobežné }

c) incidencia.

Medzi $\bar{\alpha}$ a α_2 platí priestorová perspektívna afinita o daných vlastnostiach, lebo požiadavky a)—c) sú splnené ako predpoklady, resp. dôsledky definície o lineárnom zobrazení. Tú istú úvahu môžeme urobiť pre roviny $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}_1$, keďže α_1 dostaneme z $\bar{\alpha}$ aj ako šikmý priemet pre smer $\overline{DD'_1}$ (pozri [9] str. 193). Vzťah perspektívnej afinity medzi α_1, α_2 je známy z Mongeovej projekcie.

Veta 3,6. *Nech $\alpha \nparallel \Pi$, $\alpha \subset \Pi$, α nie je kolmá na Π. Potom medzi dvojicami rovín*

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha(s^\alpha, D) & \bar{\alpha}(\bar{s}_\alpha, \bar{D}) \\ \alpha(s^\alpha, D) & \alpha_1(s_1^\alpha, D_1) \\ \alpha(s^\alpha, D) & \alpha_2(s_2^\alpha, D_{2\,D}) \end{array}\right\} \textit{platí}$$

všeobecná afinita, pričom afinne si zodpovedajúce dvojice sú $\left\{\begin{array}{l} D, \bar{D} \\ D, D_1 \\ D, D_2(t_D) \end{array}\right\}$[2]).

Dôkaz. Pod všeobecnou afinitou dvoch priestorov rozumieme takú príbuznosť bodov dvoch priestorov, že sa zachovajú známe podmienky (ktoré sa uvádzajú napr. v [18] str. 24). Tieto požiadavky sú splnené ako predpoklady, resp. dôsledky definície o lineárnom zobrazení medzi spomenutými dvojicami bodov.

Poznámka 3,3. Zaujímavé sú združené obrazy týchto bodov ležiacich v rovine α: priesečníky $\alpha \cap \pi$, $\alpha \cap \mu$, $\alpha \cap \omega$ (tuná ω je rovina súmernosti rovín π, ν), $\alpha \cap \tau$(τ je rovina totožnosti rovín π, ν).

4. Zobrazenie (trojrozmerného pod-) priestoru

Def. 4,1. *Rovinu σ, v ktorej pretína priestor $\Sigma \not\equiv \Pi$ $\Sigma \nparallel \Pi$ priemetný priestor Π, nazveme stopnou rovinou.*

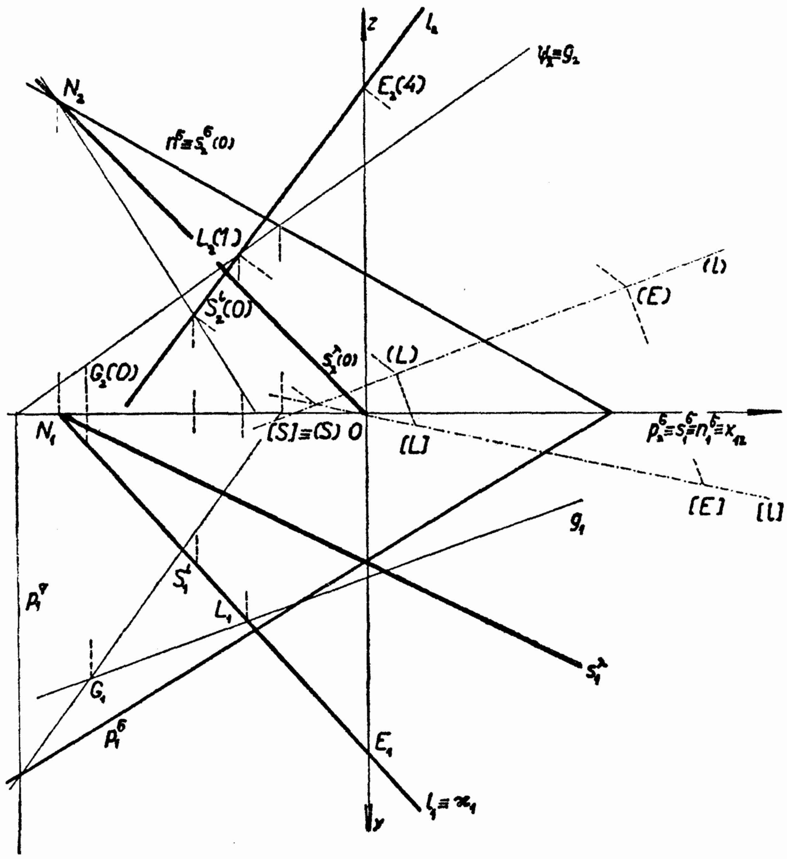
Stopná rovina obsahuje stopníky všetkých priamok a stopy všetkých rovín priestoru. Pre body ležiace v σ platí, že ich kóta je nula.

Veta 4,1. *Združené obrazy priestoru Σ, daného vo všeobecnej polohe vzhľadom na Π, sú (1,1)-značne stanovené, ak poznáme združené obrazy $s_i^\sigma \notin E_i$ stopnej roviny σ a združené obrazy $E_1, E_2(t_E)$ jedného jeho bodu ($E \notin \sigma$, $i = 1, 2$). Združené obrazy priestoru $\Sigma \parallel \Pi$ sú (1,1) značne stanovené združenými obrazmi $E_1, E_2(t_E)$ jedného bodu.*

Dôkaz. Podľa Hilberta (pozri [10] str. 58) bodom G a rovinou $\alpha \not\ni G$ prechádza práve jeden (trojrozmerný euklidovský) priestor Σ, ktorý tieto pod-

[2]) V prípade $\alpha \parallel \Pi$, $\alpha \subset \Pi$ dostaneme medzi α, $\bar{\alpha}$ totožnosť, resp. zhodnosť; v prípade $\alpha \perp \Pi$ zase singulárnu všeobecnú afinitu.

priestory obsahuje. Zvoľme preto (obr. 5) v danom priestore Σ bod $E \notin \sigma$ a rovinu $\sigma \equiv \Sigma \cap \Pi \equiv s_1^\sigma \wedge s_2^\sigma$. Združené obrazy podpriestorov $E_i\ \sigma_i\ (i = 1, 2)$ vieme podľa viet 1,1 a 3,1 stanoviť, a to (1,1) značne. Obrátene, z (1,1)-značnosti vyplýva, že každej štvorici (E_i, s_i^σ) zodpovedá dvojica $(E, \sigma) \equiv \Sigma$, $E \subset \sigma$, E, $\sigma \subset E_4$. Tak sme vetu 4,1 dokázali, lebo dôkaz druhej časti je evidentný.



Obr. 5.

Dôsledok. Z vety 4,1 vyplýva, že združenými obrazmi nadroviny Σ priestoru E_4 sú združené roviny π, ν priestoru Π.

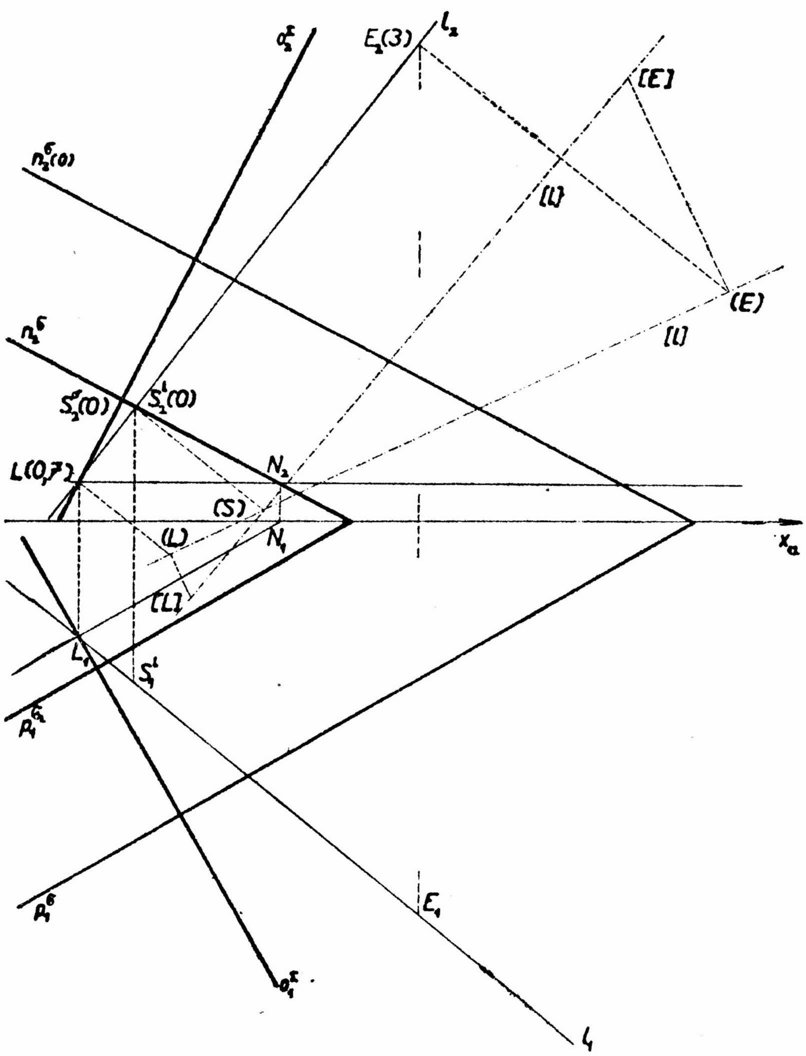
Veta 4,2. *Kolmý priemet priestoru Σ (ktorý nie je kolmý na Π) v smere t je priemetný priestor Π (ak premietame do Π).*

Dôkaz. Každý bod $L \in \Sigma$ sa zobrazí do bodu $\bar{L}(t_L) \in \Pi$. Zoberme ďalšie tri rôzne body L', L'', L''' priestoru Σ, ktoré nie sú totožné a ani jeden z bodov L, L', L'', L''' neleží na priamkach určených ďalšími dvoma bodmi, ďalej ani jeden neleží z nich na premietajúcom lúči druhého, ďalej ani jeden z nich neleží v rovine určenej zvyšnými troma bodmi. Takéto 4 body sa v priestore Σ vždy dajú nájsť a nimi je Σ určený. Tieto body sa premietajú do Π do obrazov $\bar{L}'(t_{L'})$, $\bar{L}''(t_{L''})$, $\bar{L}'''(t_{L'''})$, ktoré, ako to vyplýva zo zachovania incidencie pri lineárnom zobrazení, majú tie isté vlastnosti ako ich vzory. Preto platí: $\bar{L}(t_L)$, $\bar{L}'(t_{L'})$, $\bar{L}''(t_{L''})$, $\bar{L}'''(t_{L'''}) \equiv \Sigma \equiv \Pi$, č. b. t. d. (jednoduchý dôkaz pozri aj v [9] str. 117).

S vetou 3,3 súvisí táto

Veta 4,3. *Medzi priestormi $\Sigma(s^\sigma, E)$, $\Pi(s^\sigma, \bar{E}(t_E))$ platí perspektívna afinita, pričom zodpovedajúca dvojica je E, $\bar{E}(t_E)$ a samodružná rovina tejto afinity splýva so stopnou rovinou σ priestoru Σ.*

Dôkaz. Mimo vlastností a)—c) uvedených v dôkaze vety 3,5 musíme ešte dokázať vlastnosť b′): dvojice afinne pridružených priamok sa pretínajú v tej istej rovine a spojnice afinne pridružených bodov sú rovnobežné (pozri [2] str. 58). Spomenuté vlastnosti a), c) vyplývajú z vlastností o lineárnom zobrazení. Požiadavku b′) dokážeme takto: Nech sú dané Σ, Π takto: $\Sigma \equiv (U, V,$



Obr. 6.

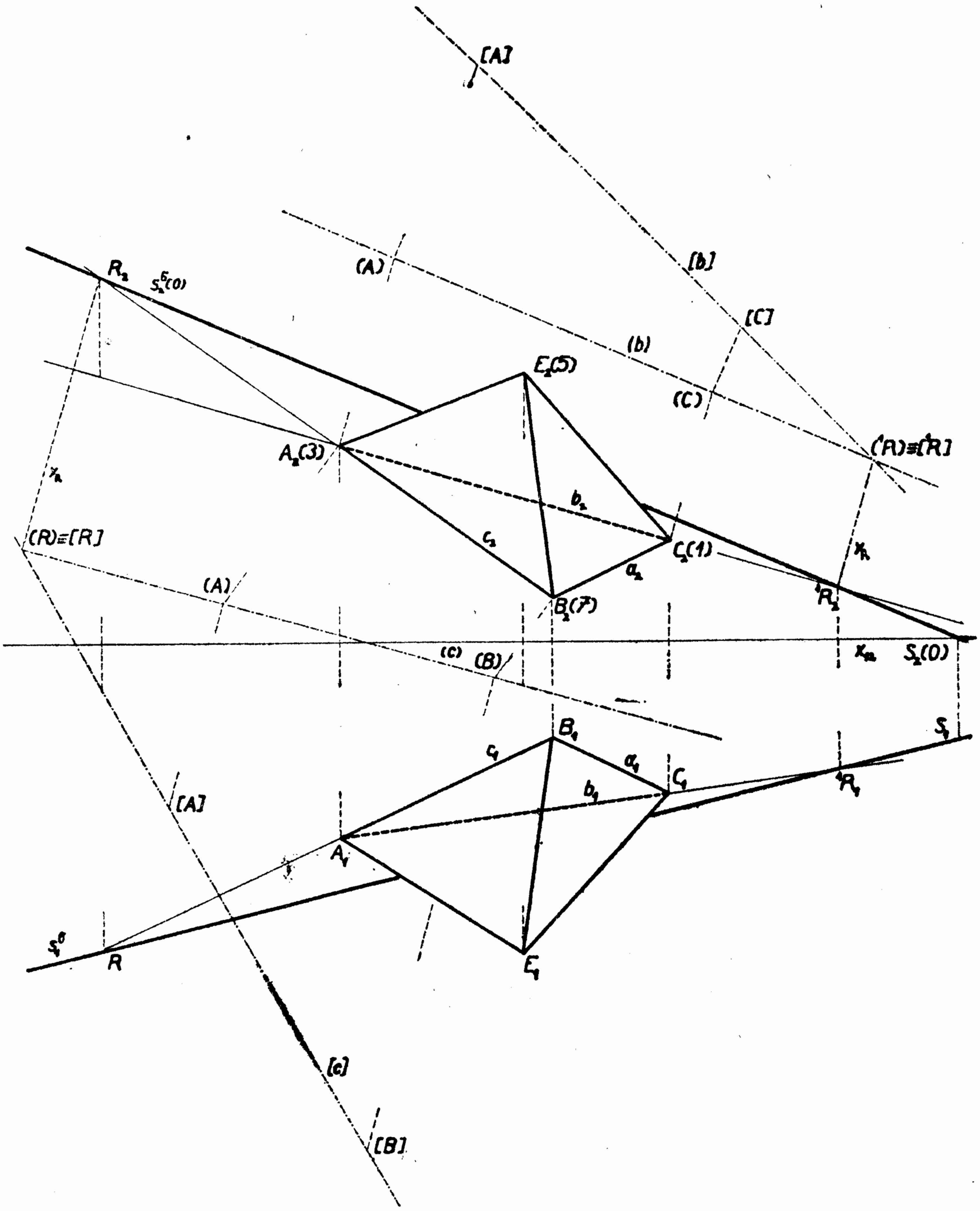
$W, Z)$, $\Pi \equiv (\overline{U}(t_U), \overline{V}(0), \overline{W}(0), \overline{Z}(0))$. Zoberme body $A \not\equiv B$, aby $A \in UW$, $B \in UW$. Potom z vlastnosti c) vyplýva: $\overline{A} \in \overline{UV}$, $\overline{B} \in \overline{UW}$. Keďže $A\overline{A} \parallel B\overline{B} \parallel t$ body $A, B, \overline{A}, \overline{B}$ ležia v rovine ϱ, čiže buď $AB \wedge \overline{AB}$, buď $AB \parallel \overline{AB}$.

Priesečník priamok AB, $\overline{AB}$ označme ako $C : AB \cap \overline{AB} \equiv C$. Nech roviny ϱ, σ majú spoločný bod $G \not\equiv C$. Rovina ϱ je samodružná rovina, lebo $V \equiv \overline{V}$, $W \equiv W$, $Z \equiv Z$. Rozoznajme 2 prípady: 1. $G \in AB$, 2. $G \notin AB$. V obidvoch prípadoch by existoval bod $G \not\equiv G$, afinne zodpovedajúci bodu G; to je spor s tým, že $G \in \sigma$, preto musí byť $G \equiv C$. Obdobne by sme vykonali úvahu pre $AB \parallel \overline{AB}$.

Z vety 1,1 a 3,3 ľahko dokážeme, že platí:

Veta 4,4. *Združené obrazy* σ_i, $E_i(\sigma \not\ni E)$ *priestoru* $\Sigma \nparallel \Pi$, *ktorý nie je kolmý na* Π, *dostaneme Mongeovým zobrazením, keď za vzory zoberieme podpriestory priestoru* $\Sigma \equiv \Pi \equiv (\sigma, E(t_E))$ *a k* E_2 *pripíšeme jeho kótu* t_E.

Def. 4,2 *Rovnobežné roviny, v ktorých pretínajú priestory* $\Pi' \parallel \Pi$ *priestor* Σ, *nazveme hlavnými rovinami* σ^L *o kóte* $t = vz(\Pi, \Pi')$. *Priamky* $o^\Sigma \subset \Sigma$, *ktoré sú*



Obr. 7.

kolmé na tieto roviny, nazveme spádovými (odchýlkovými) priamkami priestoru Σ. *Odstupňovanú spádovú priamku* Σ_0 *nazveme spádovým meradlom priestoru, jej interval* i^Σ *zase intervalom priestoru.*

Konštr. 4,1. *V priestore* $\Sigma \equiv (\sigma, E)$ *sú dané vo všeobecných polohách: bod* L, *priamka* g, *rovina* λ. *Treba zobraziť tieto podpriestory* (obr. 5).

Riešenie. Pre dané podpriestory zvoľme tieto údaje: $p_1^\sigma, n_2^\sigma, E_1, E_2$ (4), $L_1, L_2, g_1 \ni L_1, g_2 \ni L_2, s_2^\lambda$. Kótu t_L bodu L odvodíme pomocou spojnice EL a jej priesečníka S s rovinou σ. Stopník G priamky g dostaneme pomocou nárysu ψ_2 kolmopremietajúcej rovinny. Nakoniec s_1^λ odvodíme z podmienky $s^\lambda \in \sigma$.

Konštr. 4,2. *V priestore $\Sigma \equiv (\sigma, E)$ je daný bod L. Treba ním viesť hlavnú rovinu σ^L a odchýľkovú (spádovú) priamku o^Σ* (obr. 6).

Riešenie. Kótu t_L bodu L určíme ako v konštr. 7.1. Cez L_2 vedieme $h_2 \| x_{1.2}$, cez L_1 $h_1 \| p_1$. Pomocou h_1, h_2 stanovíme už stopník N_2, cez ktorý pôjde $n_2^{\sigma L} \| n_2^\sigma$ (pretože stopy všetkých hlavných rovín sú rovnobežné oriamky). Pre spádovú priamku o^Σ priestoru Σ, ktorá prechádza cez L, platí $o_2^\Sigma \perp n_2^\sigma$. Prvý obraz o_1^Σ dostaneme z podmienky, že stopník S^o leží v σ.

Poznámka 4,1. Z axiomatiky 4-rozmerného priestoru (pozri [1] str. 4) vyplýva, že priestor sa dá určiť aj štyrmi rôznymi bodmi neležiacimi ani v rovine, ktorá je určená zvyšnými troma bodmi, ani na priamkach určených ďalšími dvoma bodmi, ďalej dvoma mimobežnými priamkami, ďalej dvoma rovnobežnými rovinami. Z týchto príkladov sme zobrazili prvý na obr. 7, kde $\Sigma \equiv (A, B, C, E)$, $t_A = 3$, $t_B = 7$, $t_C = 1$, $t_E = 5$. Zároveň sme tam ukázali, že toto zadanie je ekvivalentné so zadaním $\Sigma \equiv (\sigma, E)$, lebo sme našli stopu s^σ roviny σ (popis konštrukcie pozri pod vetou 3,4; σ tu nie je stopnou ale všeobecnou rovinou).

III. Základné úlohy polohy

Tu mienime spomenúť hlavne úlohy o incidencii a rovnobežnosti lineárnych podpriestorov a úlohy o prenikových a spojovacích priestoroch týchto podpriestorov.

5. Úlohy o incidencii lineárnych podpriestorov a o spojovacích priestoroch,

ako napríklad $L \in a, E \in \alpha, L \in \Sigma; l \subset \alpha, l \subset \Sigma; l \subset \Pi$, ďalej $a \equiv \overline{AB}$, $\alpha \equiv (s^\alpha, D)$, $\alpha \equiv (A, B, C)$ $\Sigma \equiv (A, B, C, E)$, $\Sigma \equiv (\sigma, E)$ atď. sme vyriešili v odseku II pri zobrazení bodu, priamky, roviny a priestoru. Preto sa tu s nimi nebudeme zaoberať.

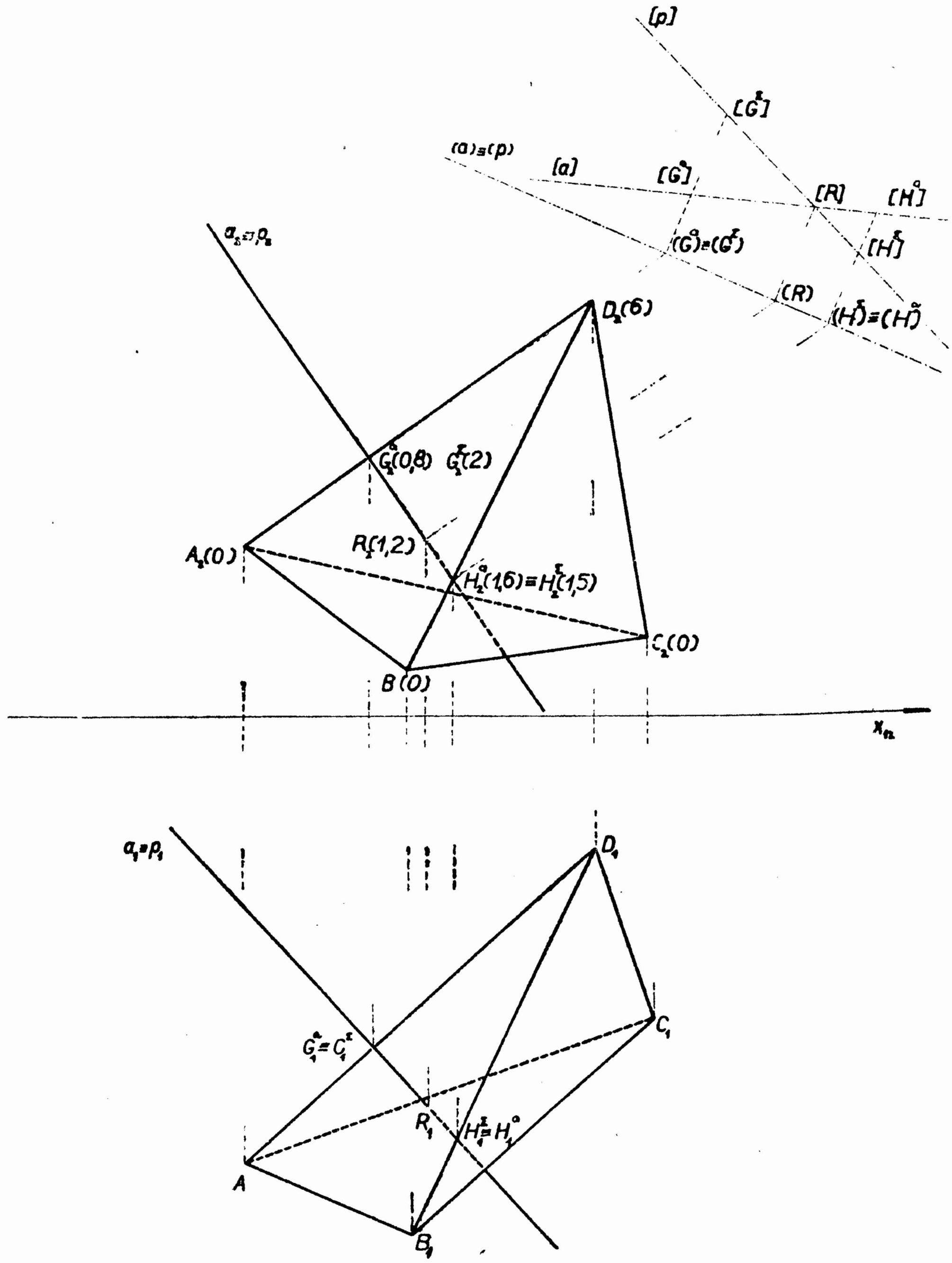
6. Úlohy o prenikových priestoroch lineárnych podpriestorov

Def. 6,1. *Majme priestor Σ a priamku $a \nparallel t$. Kolmopremietajúcu rovinu priamky a označme $\varkappa^a$. Potom krycou priamkou (vzhľadom na Σ, a vzhľadom na smer t) nazveme priamku $p \equiv \varkappa^a \cap \Sigma$, a krycími bodmi (vzhľadom na Σ, a, smer t) nazveme všetky body $G \in p$.*

Konštr. 6,1. *Dané sú: priestor $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$ a priamka $a \equiv G^a H^a$. Zostrojiť ich priesečník $R \equiv a \cap \Sigma$ (obr. 8).*

Riešenie. Zadanie zvoľme údajmi $A_1, B_1, C_1, D_1, G_1^a, H_1^a$; $A_2(0)$, $B_2(0)$, $C_2(0)$, $D_2(6)$, $G_2^a(0,8)$, $H_2^a(1,6)$. Pre jednoduchosť nech sú G^a, H^a krycie body. V kolmopremietajúcej rovine $\varkappa^a$ priamky a zvoľme kryciu priamku $p \subset \Sigma$. Sklopme $\varkappa^a$

okolo $(a) \equiv [a]$ do polohy $(\varkappa^a) \equiv [a] \wedge [p]$. Takto dostaneme kóty $t_{G\Sigma} \equiv [G^\Sigma]$ (G^Σ), $t_{H\Sigma} = [H^\Sigma]$ (H^Σ) krycích bodov G^Σ, H^Σ, pre ktoré je $G_i^\Sigma \equiv G_i^a$, $H_i^\Sigma \equiv H_i^a$, ďalej kótu t_R a obrazy R_i hľadaného bodu R.

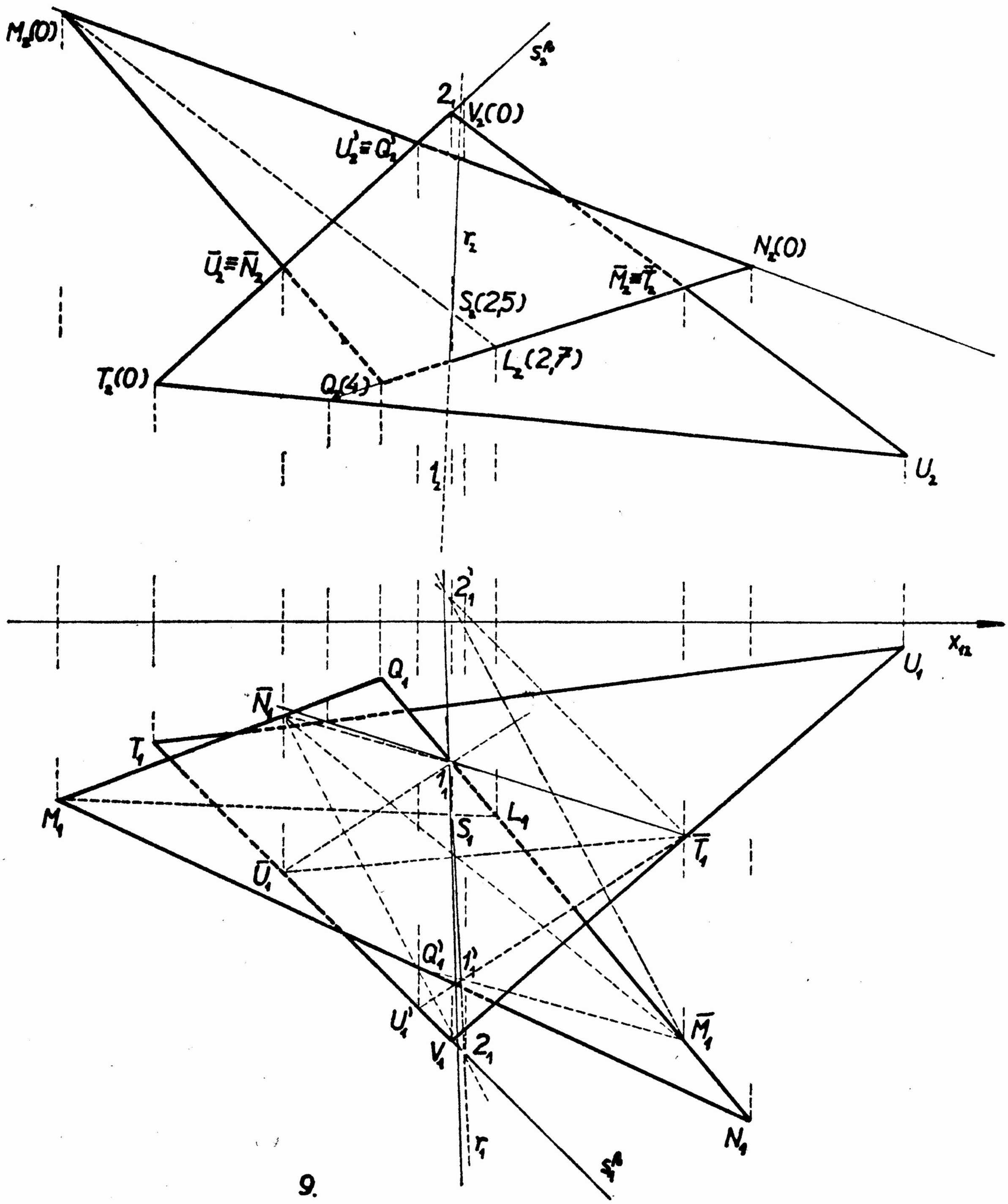


Obr. 8.

Konštr. 6,2. *Dané sú 2 roviny $\alpha, \beta \subset \Sigma$. Treba zostrojiť ich priesečný bod S (obr. 9).*

Riešenie. Zvoľme združené obrazy daných rovín bodmi M_1, N_1, Q_1, V_1, T_1, U_1, $M_2(0)$, $N_2(0)$, $Q_2(4)$, $T_2(0)$, $V_2(0)$, $U_2(2)$. Priesečné body nárysov strán obidvoch trojuholníkov označme $U_2' \equiv Q_2' \equiv T_2V_2 \cap M_2N_2$, $\overline{U}_2 \equiv \overline{N}_2 \equiv M_2Q_2 \cap T_2V_2$, $\overline{M}_2 \equiv \overline{T}_2 \equiv Q_2N_2 \cap V_2U_2$. V náryse totožné trojuholníky $U_2'\overline{U}_2\overline{M}_2$ a $Q_2'\overline{N}_2\overline{T}_2$ budú mať prvé obrazy v trojuholníkoch $U_1'\overline{U}_1\overline{M}_1$, $Q_1'\overline{N}_1\overline{T}_1$.

Hľadajme spoločný bod súmiestnych afinných polí $U_1'\overline{U}_1\overline{M}_1$, $Q_1'\overline{N}_1\overline{T}_1$, (pozri [11], str. 228). Nájdený samodružný bod S_1 je už pôdorys priesečníka obidvoch rovín. Nárys bodu S aj s príslušnou kótou $t_S = 2{,}5$ zistíme pomocou priamky $ML \subset \alpha$ a jej odstupňovaním vzhľadom na kóty t. Podľa polohy bodu S zistíme, či je $\alpha, \beta \subset \Sigma$, alebo $\alpha \frac{1}{2} \parallel \beta$, alebo $\alpha \parallel \beta$.



Obr. 9.

Konštr. 6,3. *Dané sú: priestor* $\Sigma \equiv (\sigma, E)$ *a rovina* $\alpha \subset \Sigma$, $\alpha \nparallel \Sigma$; *zostrojiť ich priesečnicu* $p \equiv \alpha \cap \Sigma$.

Riešenie. V Σ zistíme kryciu priamku g^Σ vzhľadom na priamku $g^\alpha \equiv E^\alpha D^\alpha \subset \alpha$; potom platí $g_i^\Sigma = g_i^\alpha$. Podľa konštr. 10,2 zistíme priesečník Z priamky g^α

s priestorom Σ. Celý proces zopakujeme pre iné dvojice priamok ${}^1g^\Sigma$, ${}^1g^\alpha$ a tak dostaneme priesečník $U \equiv {}^1g^\alpha \cap \Sigma$. Spojnica bodov U, Z je už hladaná priesečnica p.

Konštr. 6,4. *Nech sú dané dve rôzne a nerovnobežné priestory Σ, Σ'. Treba zostrojiť ich priesečnú rovinu $\alpha \equiv \Sigma \cap \Sigma'$.*

Riešenie. Nech sú spomenuté priestory dané svojimi stopnými rovinami a bodmi E, E' : $\Sigma \equiv (\sigma, E)$, $\Sigma' \equiv (\sigma', E')$. Priesečnica r rovín σ' σ, je už stopa s^α hľadanej roviny, ktorú metódami, známymi z E_3, ľahko zostrojíme. Teraz zoberieme ľubovoľnú priamku $l \subset \Sigma$ a pomocou konštr. 2,2 zistíme jej priesečník D s priestorom Σ. Takto sme pre hľadanú priesečnú rovinu $\alpha \equiv (s^\alpha, D)$ našli združené obrazy jej stopy a jedného jej bodu.

Konštr. 6,5. *Dané sú rovina λ a priamka l, pričom $l \not\subset \lambda$, $l \nparallel \lambda$, $l, \lambda \subset \Sigma$. Nájsť ich priesečník $X \equiv l \cap \lambda$.*

Riešenie. Priestor Σ nech je daný rovinou $\lambda \equiv (s^\lambda, D)$ a ďalším bodom $E \notin \lambda$. Nech priamka l ide bodom E. Priamkou l položíme ľubovoľnú rovinu $\varkappa$, pre jednoduchšie riešenie konštrukcie $\varkappa \frac{1}{2} \perp \Pi$. Zistíme priesečnicu z rovín λ, $\varkappa$; v našom prípade sa priamky r, l kryjú v smere t. Potom platí $r \cap l \equiv X$

7. Úlohy v rovnobežnosti

Veta 7,1. *Dve nesplývajúce rovnobežné priamky môžu mať za združené obrazy buď a) dve a dve rovnobežky, buď b) dve a dve splývajúce priamky, buď c) dva a dva body, buď d) dva body a dve rovnobežné priamky, buď e) dva body a dve splývajúce priamky.*

Dôkaz. Majme najprv priamky $a \not\equiv b$, o ktorých platí $a \parallel b$. Potom pre ich kolmopremietajúce roviny $\varkappa^a$, $\varkappa^b$ — ak $a \nparallel t$ — platí buď $\varkappa^a \parallel \varkappa^b$, buď $\varkappa^a \equiv \varkappa^b$. V prvom prípade tieto roviny pretnú priemetný priestor Π v priamkach $\overline{a} \parallel \overline{b}$, v druhom prípade v priamkach $\overline{a} \equiv \overline{b}$. V prípadoch $a \parallel b \parallel t$, resp. $a \parallel b \parallel \pi$, resp. $a \parallel b \parallel \nu$, resp. $(a \parallel b) \equiv \varrho \perp \pi$, $a \perp \pi$, resp. $(a \parallel b) \equiv$ $= \varrho \perp \nu$, $a \perp \nu$, dostaneme tvrdenia viet 7,1 c)—e).

Dôkaz nasledujúcej vety je analogický s dôkazom obdobnej vety z Mongeovej projekcie:

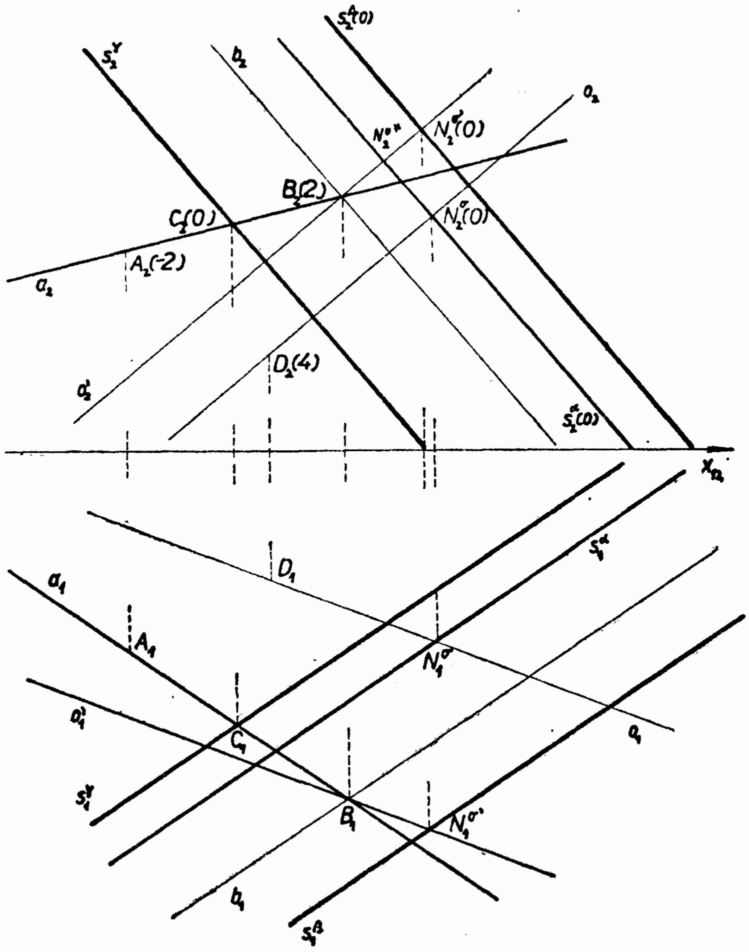
Veta 7,2. *Ak nastane jeden z prípadov a), b), vyslovených vo vete 7,1, tak $i^a = i^b$.*

Konštr. 7,1. *Daná je priamka a dvoma bodmi $N^a(2)$, $S^a(0)$ a bod $N^b(3)$. Zostrojiť priamku $b \parallel a$ idúcu cez N^a (obr. 10).*

Riešenie. Využijúc vetu 7,1 vedieme priamky $b_i \parallel a_i$, pričom $b_i \ni N^b_i$. Nájdeme sklopené polohy (a), $[a]$ priamky a, s ktorými už priamky (b), $[b]$ budú rovnobežné. Priamky (b), $[b]$ pôjdu cez sklopené obrazy (N^b), $[N^b]$ bodu N^b. O správnosti konštrukcie sa môžeme presvedčiť skontrolovaním platnosti vzťahu $|N^b_2 S^b_2| = \left|\frac{3}{2} N^a_2 S^a_2\right|$.

Veta 7,3. *Dve nesplývajúce roviny, ktoré nie sú rovnobežné s Π, sú totálne rovnobežné vtedy a len vtedy, ak sú ich spádové meradlá rovnobežné a ak sa ich intervaly rovnajú.*

Dôkaz. Ak sú dve roviny α, β rovnobežné, tak je $o^\alpha \parallel o^\beta$. Na posledné dve priamky použijeme teraz vetu 7,2 [prípady a)—e) podľa predpokladu nemôžu nastať] a vetu 7,2. Ale podľa def. 3,4 je $i^o = i^\alpha$, čím sme prvú časť vety 7,3 dokázali. Druhú časť dokážeme napríklad takto: Podľa predpokladu je $o^\alpha \parallel o^\beta$ (alebo $o^\alpha \equiv o^\beta$) a súčasne $i^\alpha = i^\beta$. Z prvého a druhého vzťahu vyplýva, že roviny α, β majú ten istý spád vzhľadom na Π, a to je možné len vtedy, ak je $\alpha \parallel \beta$.



Obr. 10.

Konštr. 7,2. *Daná je priamka $a \equiv AB$ a rovina $\alpha \equiv (s^\alpha, D)$. Priamkou a treba zostrojiť rovinu γ, polorovnobežnú s danou; bodom B zase rovinu β (totálne) rovnobežnú s α* (obraz 11).

Riešenie. Združené obrazy daných útvarov zvoľme údajmi A_1, B_1, C_1, D_1, s_1^α; $A_2(-2)$, $B_2(2)$, $s_2^\alpha(0)$, $D_2(4)$. Polorovnobežnosť rovín α a γ (pozri [1] str. 20) znamená, že v γ existuje jediná sústava rovnobežiek, ktoré sú rovnobežné s nejakým smerom k rovine α. Veďme preto $s_i^\gamma \ni C_i$, $s_i^\gamma \parallel s_i^\alpha$, pričom platí $A_iC_i = C_iB_i$. Preto s_i^γ sú združené obrazy stopy hľadanej roviny γ. Je zrejmé, že takýchto rovín je nekonečne mnoho.

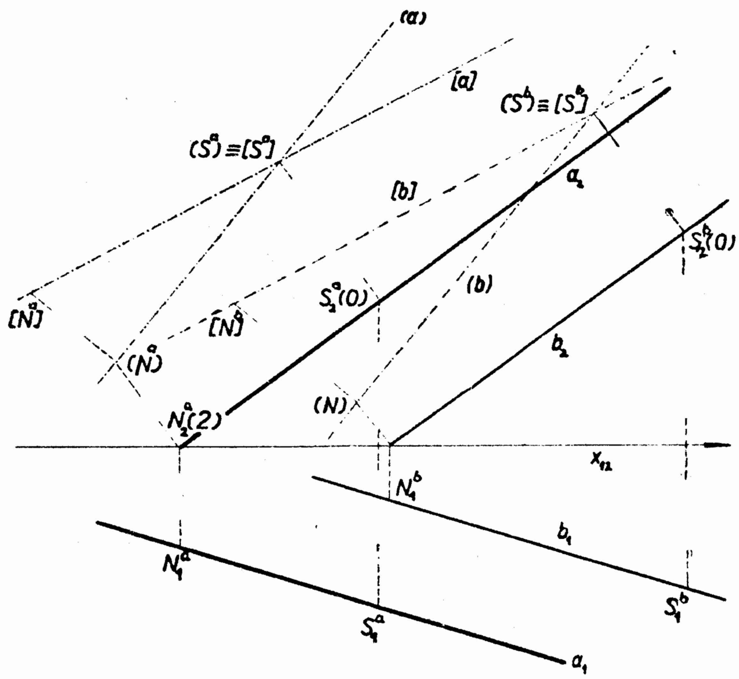
Totálna rovnobežnosť rovín α, β (pozri [4] str. 20) znamená, že v obidvoch rovinách existujú dva systémy rovnobežiek, ktoré sú vždy s príslušným smerom v druhej rovine rovnobežné. Cez body B_i veďme preto priamky $o_i' \parallel o_i$, $b_i' \parallel s_i^\alpha$, kde o_i sú združené obrazy ľubovoľných priamok roviny α idúcich bodmi D_i. Priamky o_i', b_i', určia už združené obrazy roviny β, pre ktorú ľahko nájdeme združené obrazy stopy s_i^β zo vzťahu $B_iN_i^o = \frac{1}{2} D_iN_i^o$.

Obdobná veta, ako platila pre rovnobežnosť priamok a rovín a ich združené obrazy, platí aj pre rovnobežnosť priestorov:

Veta 7,4. *Dva netotožné priestory, ktoré nie sú rovnobežné s Π, sú rovnobežné vtedy a len vtedy, ak sú ich spádové meradlá rovnobežné a ich intervaly rovnaké.*

Dôkaz. Je analogický s dôkazom vety 7,3.

Konštr. 7,3. *Danou rovinou $\alpha \equiv (s^\alpha, D)$ preložiť priestor Σ, $\frac{1}{3}$ rovnobežný s danou priamkou l ($l \nparallel \alpha$, $l \subset \alpha$).*



Obr. 11.

Riešenie. V rovine α si zvolíme ľubovoľný bod D, ktorým vedieme priamku $l' \parallel l$ podľa konštr. 7,1. Takto sme už hľadaný priestor Σ určili: $\Sigma \equiv (\alpha, l')$. Z tohto zadania ľahko prejdeme na zadanie $\Sigma \equiv (\sigma, E)$, keď si na priamke l zvolíme ľubovoľný bod $E \not\equiv D$ a keď zostrojíme stopník N^l spojnice ED.

IV. Ďalšie úlohy

Je zrejmé, že sme nemohli vyčerpať celú problematiku úloh polohy. Obmedzili sme sa iba na najzákladnejšie, resp. sme poukázali na niektoré ich aplikácie z množstva ďalších úloh. Z týchto by sme ako príklady mohli uviesť:

a) *ďalšie úlohy o rovnobežnosti:*

1. Priamkou viesť rovinu, $\frac{1}{2}$ rovnobežnú s danou rovinou.
2. Bodom viesť priestor, totálne rovnobežný s daným priestorom.
3. Priamkou viesť priestor $\frac{2}{3}$ rovnobežný s daným priestorom;

b) *úlohy v príčkových podpriestoroch (priečkach):*

1. Bodom viesť rovinu, pretínajúcu dané dve roviny.
2. Bodom viesť priamku, pretínajúcu dané dve roviny atď.

V ďalšej práci budeme riešiť metrické úlohy v uvedenej zobrazovacej metóde.

Literatúra

[1] Baumgartner L., Geometrie im Raum von vier Dimensionen, München—Düsseldorf, 1952.
[2] Bertini, Introduzzione alla geometria projectiva degli iperspazi, 1923. Die deutsche Übersetzung ist von Duschek, Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionalen Räume, 1924, Wien.
[3] Čech E., Základy analytické geometrie, Praha, 1951.
[4] Čech E., Základy analytické geometrie, Praha, 1952.
[5] Eckhardt, Der vierdimensionale Raum, 1929.
[6] Gyarmathi L., A négydimenziós lineáris tér metrikus feladatainak megoldása a Maurin-féle leképzés alapján, Az első magy. matem. kongresszus közleményei, Budapest, 1951.
[7] Gyarmathi L., A vetítő térelemek alkalmazása a négydimenziós lineáris tér Maurin-féle leképzésében, Matem. Lapok. V. évf., 4. sz., Budapest, 1954.
[8] Harant M., Kótovano-axonometrická zobrazovacia metóda vo štvorrozmernom Euklidovskom priestore. Spisy, vyd. Přír. fak. MU, č. 379. Brno, 1956.
[9] Harant M., Klinogonálno zobrazovacia metóda v E_4, Acta facul. rerum nat., tom II, fasc. V—VII., Bratislava, 1957.
[9*] Harant M., Analytická geometria lineárnych útvarov II, skriptá, Bratislava, 1957.
[10] Hilbert D., Grundlagen der Geometrie, 7. Auflage, Leipzig—Berlin, 1930. Русский перевод от Градштейна, Основания геометрии, Москва-Ленинград, 1948.
[11] Hlavatý V., Projektívní geometrie II, Praha, 1946.
[12] Klíma J., Deskriptívní geometrie čtyřrozměrného prostoru, Sborník SVŠT, spis, 44, Brno, 1938.
[12*] Klíma J., K určení úhlu dvou rovin v prostoru čtyřrozměrném a některé úlohy s tím souvisící, Čas. pro pěst. mat. a fys., roč. 62, Praha, 1933.
[13] Láska V., Užití kótovaného promítání v nomografii. Čas. pro pěst, mat. a fys., Praha, 1923.
[14] Marletta, Sulla projezzione quotata sopra un piano dello S_4, 1904.
[15] Maurin, Lecons de la position par une projection ortogonale dans E_4, Comptes Rendus Acad. Sci., p. 560—562, Paris, 1947.
[16] Mehmke, Leitfaden zum grahischen Rechnen, 1907.
[17] Mehmke, Darstellende Geometrie der Räume von vier und mehrere Dimensionen, Württenberg. Math. nat. Mittgl., 6., 1904.
[18] Müller E., Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. I, bearbeitet von Kruppa, Die linearen Abbildungen, Leipzig—Wien, 1923.
[19] Schoute, Mehrdimensionale Geometrie, Teil, Die linearen Räume, Leipzig, 1902.
[20] Методы начертательнсй геометрии и его приложениа, сборник статей под редакцией Четверухина, Москва, 1955.
[20*] Veronese, Sulla geometria descrittiva a quatro dimensioni, Atti del seale Instituto Veneto, 1882.
[21] Vries H. de, Die vierte Dimension, Leipzig—Berlin, 1926.
[21*] Vries H. de, Zentralprojektionen im vierdimensionale Raume, Leipzig, 1905.
[22] Young W., Projective Geometry, 1938. Русский перевод под редакцией Кагана, Пройективная геометриа, Москва, 1949.
[23] Weitzenböck, Der vierdimensionale Raum, Braunschweig, 1929.

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2.

Do redakcie dodané 18. XI. 1958

Задачи положения в альтитудо-монжовом изображении в E_4

Л. Надь

Резюме

Пусть $[O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t}]$ ортогональный базис в линейном четырехмерном пространстве E_4, которое назвем *оперативным*. Пространство $\Pi = [O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ изберем за пространство проекций, при чем $t \perp \Pi$.

Альтитудо-Монжовые (ниже только сопряженные) изображения A_1, A_2 (t_A) точки $A(x_A, y_A, z_A, t_A) \in E_4$ мы получим следующим образом: Точку A (образец) спроектируем ортогонально в пространство Π в точку $\overline{A}$, которая изображается в проекции Монжа, как пара точек A_i, где $i = 1,2$. К точке A_2 припишем альтитуду t_A (черт. 2). Теорема 1,1 говорит, что это изображение-(1,1) значное. На чертеже 1. изображена сопровождающая гиперпризма точки.

На черт. 3. изображена *прямая* a, дана точками $A(t_A)$, $N(0)$. Здесь тоже построены: истинная величина отрезка $d = AN$ и след S прямой, помощью совмещения ортогонально проектирующей плоскости $\varkappa^a$ прямой a вокруг линии пересечения $(a) = \varkappa^a \cap \Pi$ в $\nu \equiv (0; \vec{x}, \vec{x})$ (причем воспользуемся альтитудами t_A, t_N). В теореме 2,2 утверждается, что приведенное изображение-линейное.

На основании теоремы 3,1 сопряженные изображения общей *плоскости* α (1,1)-значно становлены сопряженными изображениями прямой $s^\alpha \equiv \alpha \cap \Pi$ и точки D — $D \in \alpha$, $D \notin s^\alpha$ (черт. 4). Контср. 3,1, через данную точку L данной плоскости α вести следующие прямые: общую l, главную h — проведена в черт. 4. В определениях 3,1—4 мы введем понятия: след s^α (в П), проектирующие пространство Ω^α, след ${}^2S^\alpha$ (в ν), след ${}^1S^\alpha$ (в π), главные линии h^α и линии найбольшего ската o, масштаб o^α плоскости. Теорема 3,5 говорит о перспективно аффинном соответствии между каждой парой плоскости из тройки $(\overline{\alpha}, \alpha_1, \alpha_2)$; теорема 3,6 опять о общем аффинном соответствии между плоскостью α и одной из плоскостей α, α_1, α_2. Теорема 3,4 утверждает, что прямые s_i^α, x_i^α пересекаются в точке только тогда, если $\alpha \subset \Pi$, или $\alpha \parallel \Pi$. На основании примечания 3,1 мы знаем становить S_i^α, D_i для плоскости, данной тремья неколлинеарными точками (черт. 7), или двумя пересекающимися прямыми, или параллелными прямыми.

На основании теоремы 4,1 *пространство* проще всего изобразить, если построить сопряженные изображения s_i^σ, D_i его следа σ в Π и одной его точки E (черт. 5). На чертеже проведена тоже констр. 4,1: построить изображения точки L, прямой g^a и плоскости λ, лежащих в данном пространстве Σ. В определениях 4,1—3 введены понятия: след σ^Σ (в Π), главные плоскости σ^L, линии найбольшего ската o^Σ и масштаб ската Σ_O пространства Σ. В теореме 4,3 доказывается перспективно аффинное соответствие между пространствами Σ, $\overline{\Sigma}$. По примечании 4,1 мы знаем определить $\Sigma_i \equiv s_i^\sigma$, D_i, E_i, где σ не является следом и пространство Σ дано двумя непересекающимися прямыми, или четырмя некомпланарными точками (черт. 7), или — двумя плоскостьями параллельными, или двумя плоскостьями, пересекающимися в точке. На черт. 6 проведена констр. 4,2: через данную точку L данного пространства Σ вести главную плоскость σ^L и линию найбольшего ската Σ_O.

В дальнем решены задачи о пространствах пересечения. Помощью введения понятия кющей прямой P и кроющей точки G построена констр. 6,1: построить точку пересечения прямой a и пространства Σ на черт. 8. Констр. 6,2, построить: точку пересечения S плоскостей α, $\beta \subset \Sigma$ проведена на черт. 9. помощью аффинитета между треуголниками MNQ, VTU, для которых $M_2N_2Q_2 \not\equiv V_2T_2U_2$. Констр. 6,3—5, построить: линию пересечения P плоскости α и пространства Σ, плоскость пересечения α двух пространств Σ, Σ', точку пересечения S прямой I и плоскости $\lambda(I, \lambda \subset \Sigma)$ проведены помощью констр. 6,1—2.

В задачах, касающихся параллельности мы воспользуемся теоремами 7,1—4, говорящими о сопряженных изображениях (впольне) нараллелных прямых, плоскостей или пространств. Констр. 7,1, построить прямую b, параллельную к данной прямой a и проходящей через данную точку N^a проведена на черт. 10. На черт. 11 проведена

констр. 7,3 построить: плоскость γ, проходящую черѐз данную прямую a и полопараллельную с данной плоскостью α; точкой B опять плоскость β, (вполько) параллельную с α. В констр. 7,3 построено пространство Σ проходящее через данную плоскость α и $\frac{2}{3}$ параллельную к данной проскости β.

В заключении приведены примеры, касающиеся дальших задач — параллельностии и о перегородных пространствах. Здесь указано, что некоторые из этих задач принадлежат уже к задачам метрическим. Эти будут автором исследованы последующей работе.

Lagenaufgaben in Kotierte-Monge-Abbildung in E_4

L. Nagy

Zusammenfassung

Es sei $[0; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t}]$ eine ortogonale Basis im linearen euklidischen Raum von vier Dimensionen E_4, welchen wir *Operationsraum* nennen. Den Raum $\Pi \equiv [0; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ wählen wir zum *Projektionsraum*, wo bei $t \perp \Pi$ ist.

Die kotierte — Monge Abbildungen (im Weiteren nur zugeordnete Abbildungen) A_1, $A_2(t_A)$ *des Punktes* $A(x_A, y_A, z_A, t_A) \in E_4$ bekommen wir so: Wir prijizieren sehnkrecht den Punkt A in den Raum Π in den Punkt $\bar{A}$, welchen wir in der Monge-Projektion wie eines Punktpaar A_i abbilden (im Weiteren $i = 1,2$). Die Kote t_A des Punktes A wird zum Punkt A_2 dazugeschrieben (Abb. 2). Der Satz 1,1 spricht davon, daß diese Abbildung (1,1)-deutig ist. In der Abb. 1 ist der Geleitshyperquader des Punktes dargestellt.

In der Abb. 3 ist *die Gerade a* abgebildet, welche durch der Punkte $A(t_A)$, $N(0)$ geführt ist. Hier wird auch bestimmt: die wahre Länge $d = AN$, und der Spurpunkt S mittels Umlegung der ortogonalprojizierenden Ebene $\varkappa^a$ der Geraden a um die Spurgerade $(a) \equiv \varkappa^a \cap \Pi$ in $\nu \equiv [0; \vec{x}, \vec{z}]$ (wobei wir die Koten t_A, t_N benützen). Im Satz 2,2 wird behauptet, daß die angeführte Abbildung linear ist.

Nach dem Satz 3,1 die zugeordnete Abbildungen *der allgemeinen Ebene* wird (1,1)-deutig mittels den zugeordneten Abbildungen der Geraden $s^\alpha \equiv \alpha \cap \Pi$ und des Punktes D bestimmt, wobei $D \in \alpha$, $D \notin s^\alpha$ (Abb. 4). In der Abb. 4 ist die Konstr. 3,1 durchgeführt: Durch den gegebenen Punkt L der gegebenen Ebene α werden die folgenden Geraden geführt: eine allgemeine l, und eine Hauptgerade h. In den Definitionen 3,1—3,4 werden folgende Begriffe eingeführt: die Spurgerade s^α, der projizierende Raum Ω^ι, die Spurpunkten ${}^1S^\alpha$, ${}^2S^\iota$, die Haupt- (h^ι) und Fall- (o)-Geraden, der Interval i^α und der Fallmaßstab o^α der Ebene. Der Satz 3,5 spricht von der perspektiven Affinität zwischen allen Paaren der Ebenen $\bar{\alpha}$, α_1, α_2. Der Satz 3,1 behauptet, daß die Geraden s_i, x_i dann und nur dann einzigen gemeinsamen Punkt haben, wenn etweder $\alpha \parallel \Pi$, oder $\alpha \subset \Pi$ ist. Nach der Bemerkung 3,1 können wir die Abbildungen s_i^α, D_i^α für eine Ebene, die durch drei nichtkollineare Punkte (Abb. 7), oder durch zwei sich schneidenden Geraden oder Parallelen gegeben ist, bestimmen.

Nach dem Satz 4,1 am einfachsten bilden wir *den Raum* ab, wenn wir die zugeordnete Abbildungen s_i^σ, D_i der Spurebene σ und eines ihres Punktes E konstruieren (Abb. 5). In dieser Abb. sehen wir auch die Konstr. 4,1,; es wird konstruiert: Die Abbildungen des Punktes L, der Geraden a und der Ebene λ, welche in gegebenen Raume liegen. In den Definitionen 4,1—4,2 werden folgende Begriffe eingeführt: die Spurebene σ^Σ, die Hauptebenen σ^L, die Fallgeraden o^Σ, der Fallmaßstab ${}^\Sigma o$ und der Interval i^Σ des Raumes Σ.

Der Satz 4,3 spricht von perspektiver Affinität zwischen den Räumen Σ, $\bar{\Sigma}$. Nach der Bemerkung 4,1 wissen wir die Abbildungen $\Sigma_i \equiv (s_i^\sigma, D_i, E_i)$ zu bestimmen, wenn ein Raum Σ durch zwei nicht sich schneidenden Geraden, oder durch vier nicht komplanare Punkte, (Abb. 7), oder durch zwei parallele Ebenen, oder durch zwei Ebenen, die einzigen Schnittpunkt haben, gegeben ist. In der Abb. 6 ist die Konstr. 4,2 durchgeführt: Durch den gegebenen Punkt L des gegebenen Raumes Σ wird eine Hauptebene σ^L und eine Fallgerade o^Σ geführt.

Weiter werden hier *die Schnittsraumaufgaben* gelößt. Mittels der Bedeckungsgeraden p und des Bedeckungspunktes G ist die Konstr. 6,1 gelößt: Es wird der Schnittpunkt R der Geraden a und des Raumes Σ konstruiert (Abb. 8). Die Konstr. 6,2, in welcher die Schnittpunkt S zweier Ebenen α, $\beta \subset \Sigma$ konstruiert wird, ist in Abb. 9 mit Hilfe der Affinität zwischen Normalrißbedeckungsdreiecken $U'\overline{UM}$, $Q'\overline{NT}$ durchgeführt. Die Konstruktionen 6,3—6,5, in welchen werden die Schnittpunkt S der Geraden l und der Ebene $\lambda(l, \lambda \subset \Sigma)$ konstruiert, sind mittels der Konstr, 6,1—6,2 durchgeführt.

In den Aufgaben über Parallelizmus benützen wir die Sätze 7,1—7,4, welche über die zugeordneten Abbildungen zweier parallelen Geraden, (total) parallelen Ebenen, resp.

Räume aussagen. Die Konstr. 7,1, einer Gerade b, die mit der gegebenen Geraden a parallel ist, und die durch einen gegebenen Punkt N^a geht, ist in der Abb. 10 gelößt. In der Abb. 11 ist die Konstr. 7,3 durchgeführt, eine Ebene γ, die durch die gegebene Gerade a geführt wird, und zur gegebenen Ebene α halbparallel ist; durch den Punkt B wider die Ebene β, die (total) parallel zu α ist. Die Konstr. 7,3, in welcher der Raum Σ, der durch die gegebene Ebene α geht, und zur gegebenen Ebene β $\frac{2}{3}$ parallel ist, wird mittels der Konstr. 7,1 gelößt.

Im Abschluß sind Beispiele für weitere Aufgaben über den Parallelismus, resp. der Queren angeführt. Es wird hier auch darauf hingewesen, daß einige der gelößten Aufgaben auch in die metrischen Aufgaben eingreifen. Diese werden vom Autor in der nächsten Arbeit gelößt.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

O jednej podmienke pre vnútornú regularitu niektorých mier

T. NEUBRUNN

V práci [1] R. E. Zink sa zaoberá otázkou vnútornej a vonkajšej regularity miery $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$, kde $f \geqq 0$ je merateľná funkcia a (X, S, μ) je priestor s mierou, pričom na X je daná nejaká topológia. Dokazuje sa veta:

I. *Ak μ je vnútorne regulárna miera,*[1]) *je aj ν vnútorne regulárna.*

Ďalej sa uvádza dôsledok, ktorý vyplýva z vety I pre miery ν absolútne spojité vzhľadom na vnútorne regulárnu a σ-konečnú mieru μ. Nech $\nu \ll \mu$,[2]) nech μ je vnútorne regulárna a σ-konečná; potom je aj ν vnútorne regulárna. Uvádza sa príklad, ktorý ukazuje, že ak upustíme od σ-konečnosti miery μ, veta nemusí platiť.

Ukážeme podmienku (slabšiu než σ-konečnosť), ktorá stačí na to, aby z vnútornej regularity miery μ plynula vnútorná regularita miery ν.

Budeme hovoriť, že miera μ je vnútorne regulárna v užšom zmysle, ak existuje pre každú množinu $E \in \mathrm{S}$ neklesajúca postupnosť kompaktných množín $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$, $C_n \subset E$, $C_n \in \mathrm{S}$ tak, že $\lim_{n\to\infty} C_n = C$ a $\mu(E - C) = 0$.

Veta 1. *Nech je μ vnútorne regulárna miera v užšom smysle a nech je ν absolútne spojitá vzhľadom na μ; potom ν je vnútorne regulárna.*

Dôkaz: Nech $\mu(E) < \infty$. Vtedy berieme do úvahy E ako priestor s mierou, kde $F \subset E$ je merateľná práve vtedy, ak $F = H \cap E$, $H \in \mathrm{S}$, pričom $\mu(F) = \mu(H \cap E)$. Podľa vety I je ν vnútorne regulárna na tom priestore, teda je regulárna aj na množine E.

Nech $\mu(E) = \infty$. Existujú kompaktné množiny $C_n \subset C_{n+1}$ pre $n = 1, 2 \ldots$ tak, že $\lim_{n\to\infty} C_n = C$, $\mu(E - C) = 0$

$$\nu(E) = \nu(C) + \nu(E - C)$$

Pretože $\nu \ll \mu$, je $\nu(E - C) = 0$. Teda $\nu(E) = \gamma(C) = \lim_{n\to\infty} \nu(C_n) = \sup \{\nu(C) : E \supset C, C \in \mathbf{C}\}$, kde $\mathbf{C}$ je systém všetkých kompaktných merateľných množín.

[1]) Množina $E \in \mathrm{S}$ sa nazýva vnútorne regulárnou, ak

$$\mu(E) = \sup \{\mu(c) : E \supset C, \ C \in \mathbf{C}\},$$

kde C je systém všetkých kompaktných merateľných množín.

Miera μ sa nazýva vnútorne regulárnou, ak je každá množina $E \in \mathrm{S}$ vnútorne regulárna.

[2]) $\nu \ll \mu$ znamená, že ν je absolútne spojitá vzhľadom na μ. Pozri [2].

Takto sme vetu dokázali. Teraz ukážeme, že σ-konečná miera je vždy regulárna v užšom zmysle. Ďalej ukážeme príklad miery, ktorá je regulárna v užšom zmysle a nie je σ-konečná.

Veta 2. *Nech μ je σ-konečná a vnútorne regulárna miera; potom je μ regulárna v užšom zmysle.*

a) Nech $E \in \mathrm{S}$, $\mu(E) < \infty$. Potom takáto postupnosť $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ zrejme existuje tak, že $C_n \subset C_{n+1}$, $n = 1, 2 \ldots \lim_{n=\infty} C_n = C$, $\mu(E - C) = 0$. Pretože $\mu(E) = \sup\{\mu(C) : E \supset C, C \in \mathrm{C}\}$, existuje pre $n = 1, 2 \ldots$ kompaktná množina $H_n \subset E$ tak, že $\mu(H_n) \geqq \mu(E) - \frac{1}{n}$. Stačí položiť $C_1 = H_1$, $C_n = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ a dostaneme hľadanú postupnosť.

b) Nech $\mu(E) = \infty$. Potom existuje postupnosť $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n \in \mathrm{S}$, $\mu(F_n) < \infty$ pre $n = 1, 2 \ldots$ Podľa a) existuje $H_k^n \subset F_n$, $H_k^n \subset H_{k+1}^n$, $\lim H_k^n = H^n$ $\mu(F_n - H^n) = 0$, pre ľubovoľné n a $k = 1, 2 \ldots$, pričom $H_k^n \in \mathrm{C}$. K číslu $\frac{\varepsilon}{2^n}$ existuje $H_{k_n}^n$ tak, že $\mu(F_n - H_{k_n}^n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Utvorme $C_r = \bigcup_{n=1}^{r} H_{k_n}^n$, C_r sú kompaktné množiny $C_r \subset C_{r+1}$, $\lim_{r\to\infty} C_r = \overline{C}$.

$$0 \leqq \mu(E - \overline{C}) \leqq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{Kn}^n\right) \leqq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n - H_{Kn}^n)\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n - H_{kn}^n) \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Za hľadaní množinu C stačí zobrať súčet množín $\overline{C_n}$ patriacich k nejakej postupnosti čísiel $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujúcej k nule.

Uvedieme teraz príklad priestoru s mierou (X, S, μ), v ktorom μ je vnútorne regulárna v užšom zmysle a pritom nie je σ-konečná.

Nech X je množina celých nezáporných čísel. Zaveďme topológiu tak, že všetky množiny sú otvorené. Potom kompaktné sú práve ohraničené množiny. S nech je systém všetkých podmnožín $E \subset X$. Miera μ je definovaná takto:

Pre jednobodovú množinu $\{c\}$ nech $\mu(\{c\}) = \int_c^{c'} \frac{1}{x-5}\, dx$, kde $c' = c + 1$, ak $c \geqq 5$, $c' = c - 1$, ak $c < 5$ a $\int_c^{c'} \frac{1}{x-5}\, dx$ je Lebesgueov integrál v širšom zmysle. Pre ľubovoľnú množinu $E \subset X$ nech je $\mu(E)$ súčtom mier jednobodových množín, ktoré ju tvoria.

Miera μ je vnútorne regulárna. Na konečných množinách je to zrejmé. Nech $E \in \mathrm{S}$ je nekonečná a nech $\mu(E) < \infty$. Potom $E = \{a_1, a_2, \ldots\}$ a môžeme ju považovať za množinu členov postupnosti $a_1, a_2, \ldots$, kde $a_1 < a_2 < \ldots$, $\mu(E) = \mu(\{a_1\}) + \mu(\{a_2\}) + \ldots$ Množiny $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ sú kompaktné pre $k = 1, 2, \ldots$ Nech $\varepsilon > 0$; potom existuje n tak, že $\mu(E) \leqq$

$\leqq \sum_{i=1}^{n} \mu(\{a_i\}) + \varepsilon = \mu(A_n) + \varepsilon$, teda $\mu(E) \leqq \sup\{\mu(C) : C \subset E,\ C \in \mathbf{C}\}$. Opačná nerovnosť vyplýva z monotónie miery.

Nech teraz $\mu(E) = \infty$ a E je nekonečná. Aj tento prípad sa dokáže jednoducho.

Nerovnosť $\sup\{\mu(C) : C \subset E,\ C \in \mathbf{C}\} \leqq \mu(E)$ dostaneme opäť z monotónie miery a opačná nerovnosť vyplýva zo vzťahu

$$\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\{a_i\}) > K$$

pre ľubovoľné K a vhodne volené n.

Miera μ je dokonca vnútorne regulárna v užšom zmysle. Ak je množina E σ-konečná, jej regularita vyplýva z vety 1.

Nech E nie je σ-konečná. Potom:

a) E je konečná, a vtedy stačí zvoliť $C_n = E$, $n = 1, 2, \ldots$

b) E je nekonečná. Potom $5 \in E$ (inak by E bola σ-konečná). $E = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Považujme ju zase za množinu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} a_n < a_{n+1}$. Zvoľme $C_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, C_n je kompaktná. Od istého n je $\mu(C_n) = \infty$, $C = \lim_{n\to\infty} C_n = E$, teda $\mu(E - C) = 0$.

Miera μ nie je σ-konečná. Stačí zobrať množinu $\{5\}$.

Literatúra

[1] Zink Robert E.: A Note Concerning Regular Measures, Duke Mathematical Journal, Vol. 24 Number 2, 1957.

[2] Halmos Paul: Measure Theory, New York, 1950.

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2.

Došlo: 28. II. 1958

Об одном условии внутренней регулярности некоторых мер

Т. Неубрунн

Резюме

Все рассуждения совершаются в топологическом пространстве, где $(X, \mathbf{S}, \mu)$ присоединенное пространство с мерой.

В работе (1) доказывается следующая теорема: Если μ σ-конечна внутренне регулярна мера и если ν абсолютно непрерывна по μ, то ν также внутренне регулярна.

В этом примечании дано другое условие. Если на меру μ наложить ограничение данное этим условием, то предыдущая теорема также верна. Это условие следующее: Мы будем говорить, что мера μ внутренне регулярна в более узком смысле, если для кажогот множества $E \in \mathbf{S}$ существует такая последовательность комактных измеримых множеств $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $C_n \subset C_{n+1}$, $\lim_{\infty\to n} C_n = C$, $\mu(E - C) = 0$.

Чтобы показать что условие внутренней регулярности в более узком смысле слабее внутренней регулярности вместе с σ-конечностью, доказывается теорема показывающая, что всякая σ-конечная и рагулярная мера, регулярна в более узком смысле.

Наконец приведен пример показывающий существование меры регулярной в более узком смысле и не σ-конечной.

On a Certain Condition for Inner Regularity of some Measures

T. Neubrunn

Abstract

All the considerations are made in a topological space X where $(X, \mathbf{S}, \mu)$ is an associated measure space.

In the paper [1] the following theorem is proved: If μ is a σ-finite inner regular measure and if ν is absolutely continuous with respect to μ, then ν is inner regular.

In this note is introduced another condition. Measure μ restricted by this condition influences the validity of the previous theorem. This condition will be called inner regularity in a narrow sense. It is as follows: We shall say that the measure μ is inner regular in a narrow sense, if there exists for every set $E \in \mathbf{S}$ a sequence of compact measurable sets $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, such that $C_n \subset C_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$ and $\mu(E - C) = 0$.

To prove that the condition of inner regularity is in narrow sense weaker than that of σ-finity both with inner regularity a theorem is proved showing that every σ-finite and regular measure is regular in a narrow sense.

Then an example is given showing the existence of measure which is regular in a narrow sense and which is not σ-finite.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV — 3–5, MATHEM., 1959]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

Poznámka k merateľným transformáciám

T. NEUBRUNN

1. Známa Jegorovova veta pre merateľné funkcie ([1] str. 90) bola zovšeobecnená v práci [2] pre merateľné transformácie do separabilných metrických priestorov. V tejto poznámke dokážeme jednu vetu pre merateľné transformácie do istej triedy topologických priestorov. Z tejto vety, ako sa ukáže, vyplýva Jegorovova veta pre merateľné transformácie do istej triedy metrických merateľných priestorov, zahrňujúcej separabilné merateľné metrické priestory.

2. Pojem merateľného priestoru (X, S) a priestoru s mierou(x, S, μ) budeme používať v zmysle ([1] str. 78). Budeme však predpokladať, že množina X je zo σ-okruhu S, aby sme mali jednotne definovanú merateľnú funkciu ([1] str. 80), aj merateľnú transformáciu ([1] str. 160).

Ak je (X, S) merateľný priestor a na $X \times X$ je daná metrika ϱ, resp. na 2^x topológia $\mathfrak{A}$, budeme hovoriť o metrickom merateľnom, resp. topologickom meratelnom priestore a označovať ich (X, S, ϱ); $(X, \mathrm{S}, \mathfrak{A})$.

Znakom $(X \times Y, \varrho_1 \times \varrho_2)$ rozumieme kartézsky súčin metrických priestorov (X, ϱ_1); (Y, ϱ_2) s metrikou $\varrho_1 \times \varrho_2[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \max [\varrho(x_1, x_2); \varrho(y_1, y_2)]$ a znakom $(X \times Y, \mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$ topologicky súčin priestorov $(X, \mathfrak{A})$, $(Y, \mathfrak{B})$.

Nech φ je funkcia definovaná na množine $X \times X$ s týmito vlastnosťami:

1° *Pre* $x, y \in X$ *platí* $\varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2° $x_n, x; y \in X_1$ $\varphi(x_n, x) \to 0, \varphi(x_n, y) \to 0 \Rightarrow x = y$.

Budeme hovoriť, že postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_\iota \in X$ konverguje k bodu $x \in X$, ak postupnosť $\{\varphi(x_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule.

Ak je (X, ϱ) metrický priestor, stačí za φ voliť metriku ϱ a dostávame konvergenciu podľa metriky. Ľahko sa nahliadne, že funkcia φ je všeobecnejšia než metrika.

Nech X, Y sú dve množiny. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť zobrazení definovaných na množine X s oborom hodnôt v množine Y. Nech na množine $Y \times Y$ je definovaná funkcia φ spĺňajúca vlastnosti 1° a 2°. Budeme hovoriť, že postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (rovnomerne) k zobrazeniu $f(x)$, ak postupnosť $\{\varphi(f_n(x), f)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (rovnomerne) k nule.

Za predpokladu, že zobrazenia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú definované na priestore s mierou, môžeme pomocou funkcie φ definovať konvergenciu takmer všade.

V prípadoch, kde by mohli vzniknúť nejasnosti, budeme konvergenciu transformácií definovanú pomocou funkcie φ nazývať konvergenciou v zmysle φ.

3. Na dôkaz vety spomenutej v 1 budeme potrebovať niektoré lemmy.

Lemma 1. *Nech* $(X, \mathbf{S})$; $(Y, \mathbf{T})$ *sú meratelné priestory, f, g nech sú meratelné transformácie* $(X, \mathbf{S})$ *do* $(Y, \mathbf{T})$ *a φ nech je meratelná funkcia na* $(Y \times Y, \mathbf{T} \times \mathbf{T})$. *Potom je funkcia* $\varphi[f, g]$ *merateľná na* $(X, \mathbf{S})$.

Dôkaz: Uvažujme o zobrazení $z = (f, g)$ priestoru (X, S) do priestoru $(Y \times Y, \mathbf{T} \times \mathbf{T})$. Nech $E \in \mathbf{T} \times \mathbf{T}$ je merateľný obdĺžnik $E = E_1 \times E_2$, $E_1, E_2 \in \mathbf{T}$; potom $z^{-1}(E) = f^{-1}(E_1) \cap g^{-1}(E_2) \in \mathbf{S}$.

Nech $\mathbf{E}$ je systém takých množín $E \in \mathbf{T} \times \mathbf{T}$, o ktorých platí $z^{-1}(E) \in \mathbf{S}$. Potom $\mathbf{E}$ je σ-okruh, pretože pre ľubovoľné E, $F \in T \times T$, E, $F \in \mathbf{E}$ a $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n \in \mathbf{T} \times \mathbf{T}$ platí $z^{-1}(E - F) = z^{-1}(E) - z^{-1}(F)$ a $z^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} z^{-1}(E_n)$.

Keďže $\mathbf{E}$ je σ-okruh nad všetkými merateľnými obdĺžnikmi, je $\mathbf{E} \supset \mathbf{T} \times \mathbf{T}$. Takto sme dokázali, že φ je merateľná transformácia. Pretože φ je merateľná funkcia, je transformácia $z = \varphi[f, g]$ merateľná.

Lemma 2. Nech $(X, \mathbf{S})$ je merateľný priestor, pričom na X je daná nejaká topológia. Nech $\mathbf{S}$ obsahuje všetky otvorené množiny príslušného topologického priestoru. Potom φ je merateľná funkcia na $(X, \mathbf{S})$, ak je spojitá na príslušnom topologickom priestore.

Dôkaz: Nech G je ľubovoľná otvorená množina na číselnej osi. Zo spojitosti φ vyplýva, že množina $\varphi^{-1}(G)$ je otvorená, teda merateľná. Pretože systém borelovských množín je najmenší σ-okruh nad všetkými otvorenými množinami, je $\varphi^{-1}(B)$ merateľná množina pre ľubovoľnú borelovskú množinu B. (Dôkaz sa urobí takou istou metódou ako v predošlej vete.)

Budeme uvažovať o takom topologickom priestore $(Y, \mathbf{T}, \mathfrak{A})$, aby systém $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$ obsahoval všetky otvorené množiny priestoru $(Y \times Y, \mathfrak{A} \times \mathfrak{A})$. Takýto topologicky priestor $(Y, \mathfrak{A})$ nazveme prípustným.

Z lemmy 1 a 2 vyplýva tento dôsledok:

Nech f, g sú meratelné transformácie priestoru $(X, \mathbf{S})$ *do prípustného topologického priestoru* $(Y, T, \mathfrak{A})$. *Nech φ je spojitá funkcia na* $(Y \times Y, \mathfrak{A} \times \mathfrak{A})$. *Potom funkcia* $\varphi(f, g)$ *je meratelná na* $(X, \mathbf{S})$.

Ak je $(Y, \mathbf{T}, \varrho)$ prípustný metrický priestor [to znamená, že systém $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$ obsahuje všetky otvorené množiny priestoru $(Y \times Y, \varrho \times \varrho)$], tak predchádzajúci dôsledok môžeme sformulovať takto:

Nech f, g sú meratelné transformácie priestoru $(X, \mathbf{S})$ *do prípustného priestoru* (Y, T, ϱ). *Potom funkcia* $\varrho(f, g)$ *je meratelná na* $(X, \mathbf{S})$.

Veta 1. *Nech* $(X, \mathbf{S}, \mu)$ *je priestor s úplne konečnou mierou a nech* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť meratelných transformácií priestoru* $(X, \mathbf{S}, \mu)$ *do prípustného topologického priestoru* $(Y, \mathbf{T}, \mathfrak{A})$. *Nech φ je spojitá funkcia na* $(Y \times Y, \mathfrak{A} \times \mathfrak{A})$ *splňajúca vlastnosti* 1° *a* 2°. *Nech* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje skoro všade v zmysle φ k meratelnej transformácii f. Potom pre lubovolné $\varepsilon > 0$ existuje množina $Q \subset X$ taká, že* $\mu(X - Q) < \varepsilon$ a $\{f_{n(x)}\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje na Q rovnomerne k f v zmysle φ.*

Dôkaz: Postupnosť $\{\varphi(f_n, f)\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť merateľných funkcií na (X, S, μ), ktorá konverguje skoro všade k nule. Podľa Jegorovovej vety pre funkcie existuje množina $Q \subset X$ taká, že $\mu(X - Q) < \varepsilon$ a na množine Q konverguje $\{\varphi(f_n, \varphi)\}_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne k nule — teda $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na Q rovnomerne k f v zmysle φ.

Z tejto vety špeciálne vyplýva platnosť Jegorovovej vety pre transformácie do prípustného metrického priestoru. Sformulujme to v tomto dôsledku:

Nech $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť merateľných transformácií definovaných na úplne konečnom merateľnom priestore s konečnou mierou do prípustneho metrického priestoru* $(Y, \mathbf{T}, \varrho)$. *Nech* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje skoro všade podľa metriky* ϱ *k merateľnej transformácii* f. *Potom k ľubovolnému* $\varepsilon > 0$ *existuje množina* $Q \subset X$ *tak, že* $\mu(X - Q) < \varepsilon$ *a na množine* Q *postupnosť* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje rovnomerne k* f *podľa metriky* ϱ.

Nasledujúca veta ukazuje, že existuje široká trieda metrických prípustných merateľných priestorov.

Veta 2. *Nech* $(Y, \mathbf{T}, \varrho)$ *je separabilný metrický merateľný priestor, v ktorom* $\mathbf{T}$ *obsahuje všetky otvorené množiny. Potom priestor* $(Y, \mathbf{T}, \varrho)$ *je prípustný.*

Dôkaz: Ukážeme, že $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$ obsahuje všetky otvorené množiny priestoru $(Y \times Y, \varrho \times \varrho)$. Nech $(x_1, y_1) \in Y \times Y$. Uvažujme o ε-okolí bodu (x_1, y_1), t. j. o množine bodov (x, y) (označíme ju $\Omega[(x_1, y_1), \varepsilon]$) takej, že $\max\{\varrho(x_1, x), \varrho(y_1, y)\} < \varepsilon$. Táto množina je vlastne množinou $\Omega(x_1, \varepsilon) \times \Omega(y_1, \varepsilon)$, kde $\Omega(x_1, \varepsilon), \Omega(y_1, \varepsilon)$ sú ε-okolia bodov x_1, y_1 v priestore (Y, ϱ). Pretože $\Omega(x_1, \varepsilon)$, $\Omega(y_1, \varepsilon) \in \mathbf{T}$, je $\Omega(x_1, \varepsilon) \times \Omega(y_1, \varepsilon) \in \mathbf{T} \times \mathbf{T}$. Priestor $(Y \times Y, \varrho \times \varrho)$ je separabilný, má teda spočetnú bázu typu $\Omega[(x_n, y_n), \varepsilon]$; $n = 1, 2, \ldots$ ε rac. číslo. Keďže $\Omega[(x_n, y_n), \varepsilon]$ sú merateľné množiny, je každá otvorená množina v priestore $(Y \times Y, \varrho \times \varrho)$ merateľná.

Z vety 2 a z dôsledku vety 1 vyplýva platnosť Jegorovovej vety pre merateľné transformácie do separabilných metrických priestorov v takom prípade, keď systém $\mathbf{T}$ obsahuje všetky otvorené množiny uvažovaného separabilného priestoru. Toto nastane napríklad vtedy, ak je systém $\mathbf{T}$ systém všetkých borelovských množín. Pre taký dokázal Jegorovovu vetu M. Kvačko v práci [2].

Literatúra

[1] П. Халмош: Теория меры, Москва, 1953.

[2] М. Квачко: Измеримые отображения пространств, Вестник Ленинградского университета, 13, 1958.

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2.

Do redakcie dodané 25. III. 1959

Заметка к измеримым отображениям

Т. Неубрунн

Резюме

В работе изучаются измеримые отображения в специальные измеримые пространства в которых дана некоторая топология.

Доказывается одна теорема для таких отображений. Из этой теоремы вытекает теорема Егорова для измеримых отображений в некоторый класс метрических пространств. Показывается что этот последний класс содержает все сепарабельные метрические измеримые пространства, в которых класс измеримых множеств совпадает с Борелевскими множествами. Из последнего факта вытекает теорема Егорова в той форме, в которой она была доказана в работе (2) при помощи простых измеримых отображений.

A Note to Measurable Transformations

T. Neubrunn

Summary

In the paper are studied measurable transformations in a special class of the measurable spaces, in which a topology is given.

A theorem is proved for such transformations. From that theorem the theorem of Jegorov follows, for measurable transformations in a class of measurable metrical spaces. The author shows that this last class contains all the separable metrical measurable spaces in which the system of the measurable sets is that of Borel's sets. From this fact especially foollows the validity of Jegorov's theorem in a form, in which the last was proved in the paper [2] by means of simple measurable transformations.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV – 3–5, MATHEM., 1959]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

Poznámka k usporiadaným množinám[1])

T. KATRIŇÁK

V niektorých prípadoch je výhodné charakterizovať usporiadanie množiny pomocou vzťahu „medzi". E. Čech v knihe [1] udáva týchto 8 vlastností vzťahu „medzi" potrebných na to, aby sme mohli množinu usporiadať:[2])

Nech P je daná množina, ktorá má aspoň 3 rôzne prvky. Nech je daná množina $M \subset P \times P \times P$ s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. $(a, c, b) \in M \Rightarrow a \neq b$
2. $(a, c, b) \in M \Rightarrow (b, c, a) \in M$
3. $(a, c, b) \in M \Rightarrow a \neq c$
4. $(a, d, c) \in M,\ (d, c, b) \in M \Rightarrow (a, c, b) \in M$
5. $(a, d, c) \in M,\ (a, c, b) \in M \Rightarrow (a, d, b) \in M$
6. $(a, x, b) \in M,\ (a, y, b) \in M,\ x \neq y \Rightarrow$ buď $(a, x, y) \in M$ alebo $(a, y, x) \in M$
7. $(a, c, x) \in M,\ (a, c, y) \in M,\ x \neq y \Rightarrow$ buď $(c, x, y) \in M$ alebo $(c, y, x) \in M$
8. $a \neq b \neq c \neq a \Rightarrow$ buď $(a, b, c) \in M$ alebo $(b, c, a) \in M$ alebo $(c, a, b) \in M$

Potom existujú práve dve usporiadania množiny P, vzhľadom na ktoré je c „medzi" a i b ($a < c < b$, $b < c < a$) vtedy a len vtedy, ak $(a, c, b) \in M$. Tieto usporiadania sú navzájom inverzné.

V tejto poznámke ukážeme, že vlastnosti 1 a 6 vyplývajú z ostatných. Ostávajúce vlastnosti 2, 3, 4, 5, 7, 8 sú navzájom nezávislé. Vlastnosti 3, 5, 6 vyplývajú z ostatných a ostávajúce vlastnosti 1, 2, 4, 7, 8 sú už navzájom nezávislé. Ešte si ukážeme, že vlastnosť 4 vyplýva z ostatných, pričom vlastnosti 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 sú už navzájom nezávislé.

Lemma 1. *Nech M spĺňa vlastnosti 2, 3, 5 alebo 1, 4. Nanajvýš jedna z trojíc (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b) patrí do M.*

Dôkaz. Najprv vykonáme dôkaz pomocou vlastností 2, 3, 5. Nech $(a, b, c) \in M$. Ak $(b, c, a) \in M$ potom podľa vlastnosti 2 $(a, c, b) \in M$, čo zase podľa vlastnosti 5 dáva, že $(a, b, b) \in M$, čo je spor s vlastnosťami 2, 3. $(a, b, c) \in M$, tak podľa vlastnosti 2 $(c, b, a) \in M$. Ak $(c, a, b) \in M$, tak podľa vlastnosti 5 $(c, b, b) \in M$, čo je spor s vlastnosťami 2,3. Prípady $(b, c, a) \in M$, $(c, a, b) \in M$ dostaneme z prípadu $(a, b, c) \in M$ výmenou označenia.

Teraz vykonáme dôkaz pomocou vlastností 1, 4. Nech $(a, b, c) \in M$. Ak $(b, c, a) \in M$, tak podľa vlastnosti 4 $(a, c, a) \in M$, čo je spor s vlastnosťou 1. Ak $(c, a, b) \in M$, tak podľa vlastnosti 4 $(c, b, c) \in M$, čo je spor s vlastnosťou 1.

---

[1]) Referát na študentskej vedeckej konferencii r. 1958.
[2]) Znak $\Rightarrow$ značí implikáciu.

Prípady $(b, c, a) \in M$, $(c, a, b) \in M$ dostaneme z prípadu $(a, b, c) \in M$ výmenou označenia.

Lemma 2. *Vlastnosť 6 vyplýva z ostatných.*

Dôkaz. Nech $(a, x, b) \in M$, $(a, y, b) \in M$, $x \neq y$. Podľa vlastnosti 3 $a \neq x \neq \neq y \neq a$. Podľa vlastností 2 a 8 buď $(a, x, y) \in M$, buď $(a, y, x) \in M$, buď $(x, a, y) \in M$. Podľa vlastnosti 2$(b, x, a) \in M$. Nech $(x, a, y) \in M$; potom podľa vlastnosti 4 $(b, a, y) \in M$, čo spolu s $(a, y, b) \in M$ dáva podľa vlastnosti 4 $(b, y, b) \in M$, čo je v spore s vlastnosťou 1.

Lemma 3. *Nech platia vlastnosti 2, 3, 4, 5, 7, 8; potom z $(a, b, c) \in M$, $(a, c, d) \in M$ vyplýva, že $(b, c, d) \in M$.*

Dôkaz. Z vlastností 2 a 3 vyplýva, že $b \neq c \neq d$. Ak by $d = b$, tak by súčasne platilo $(a, b, c) \in M$, $(a, c, b) \in M$, čo však podľa lemmy 1 vedie k sporu. Teda $b \neq c \neq d \neq b$. Podľa vlastnosti 8 buď $(b, c, d) \in M$, buď $(c, d, b) \in M$, buď $(d, b, c) \in M$. Z $(a, b, c) \in M$, $(a, c, d) \in M$ vyplýva podľa vlastnosti 5 $(a, b, d) \in M$. Nech $(c, d, b) \in M$. Z $(a, c, d) \in M$, $(c, d, b) \in M$ vyplýva podľa vlastnosti 4 $(a, d, b) \in M$, čo však vedie k sporu, pretože $(a, d, b) \in M$ i $(a, b, d) \in M$ podľa lemmy 1 nemôže súčasne nastať. Nech $(d, b, c) \in M$. Z $(d, b, a) \in M$, $(d, b, c) \in M$, pričom $a \neq c$ podľa vlastnosti 3, vyplýva podľa vlastnosti 7 buď $(b, a, c) \in M$, buď $(b, c, a) \in M$, čo však vedie k sporu s tým, že $(a, b, c) \in M$ (lemma 1 a vlastnosť 2).

Lemma 4. *Vlastnosť* 1 *vyplýva z vlastností 2, 3, 4, 5, 7, 8.*

Dôkaz. Podľa predpokladu existujú aspoň 3 také prvky $a, c, x \in P$, že $a \neq c \neq x \neq a$. Z toho vyplýva podľa vlastností 2 a 8, že buď $(a, c, x) \in M$, buď $(a, x, c) \in M$, buď $(x, a, c) \in M$. Nech $(a, c, b) \in M$, $a = b$. Z $(a, c, a) \in M$, $(a, c, x) \in M$ vyplýva podľa vlastnosti 7 buď $(c, a, x) \in M$, buď $(c, x, a) \in M$, čo vedie k sporu podľa lemmy 1 a vlastnosti 2 s $(a, c, x) \in M$. Z $(a, c, a) \in M$, $(a, x, c) \in M$ vyplýva podľa lemmy 3 $(x, c, a) \in M$, čo je však podľa lemmy 1 a vlastnosti 2 v spore s $(a, x, c) \in M$. Z $(a, c, a) \in M$, $(x, a, c) \in M$ vyplýva podľa vlastnosti 4 $(x, c, a) \in M$, čo je v spore podľa lemmy 1 s $(x, a, c) \in M$.

Veta 1. *Vlastnosti 1 a 6 vyplývajú z vlastností 2, 3, 4, 5, 7, 8. Vlastnosti 2, 3, 4, 5, 7, 8 sú navzájom nezávislé.*

Dôkaz. Prvá časť vety vyplýva z lemmy 2 a 4. Druhú časť vety dokážeme patričnými modelmi: Príklad 1. $P = \{a, b, c\}$, $M = \{(a, b, c), (b, a, c)\}$. M spĺňa vlastnosti 3, 4, 5, 7, 8, vlastnosť 2 nespĺňa.

Príklad 2. $P = \{a, b, c, d\}$, $M = \{(a, b, c), (b, c, d), (a, c, d), (a, b, d), (c, b, a), (d, c, b), (d, c, a), (d, b, a), (a, a, a)\}$. M spĺňa vlastnosti 2, 4, 5, 7, 8, vlastnosť 3 nespĺňa.

Príklad 3. $P = \{a, b, c, d\}$, $M = \{(a, b, c), (b, c, d), (a, c, d), (a, b, d), (c, b, a), (d, c, b), (d, c, a), (d, b, a), (c, d, c)\}$. M spĺňa vlastnosti 2, 3, 5, 7, 8, vlastnosť 4 nespĺňa.

Príklad 4. $P = \{a, b, c, d\}$, $M = \{(a, b, c), (b, c, d), (a, c, d), (a, b, d), (c, b, a), (d, c, b), (d, c, a), (d, b, a), (a, d, a)\}$. M spĺňa vlastnosti 2, 3, 4, 7, 8, vlastnosť 5 nespĺňa.

Príklad 5. $P = \{a, b, c, d\}$, $M = \{(a, b, c), (b, c, d), (a, c, d), (a, b, d), (c, b, a), (d, c, b), (d, c, a), (d, b, a), (a, b, a)\}$. M spĺňa vlastnosti 2, 3, 4, 5, 8, vlastnosť 7 nespĺňa.

Príklad 6. $P = \{a, b, c, d, e\}$, $M = \{(a, b, c), (b, c, d), (a, c, d), (a, b, d), (c, b, a), (d, c, b), (d, c, a), (d, b, a)\}$. M spĺňa vlastnosti 2, 3, 4, 5, 7, vlastnosť 8 nespĺňa.

Lemma 5. *Vlastnosť 3 vyplýva z vlastností 1, 2, 4.*

Dôkaz. $(a, a, c) \in M$, podľa vlastnosti 2 vyplýva, že $(c, a, a) \in M$, ďalej podľa vlastnosti 4 $(c, a, c) \in M$, čo je v spore s vlastnosťou 1.

Lemma 6. *Vlastnosť 5 vyplýva z vlastností 1, 2, 4, 8.*

Dôkaz. Nech $(a, b, c) \in M$, $(a, c, d) \in M$. Podľa lemmy 5 platí vlastnosť 3. Podľa vlastností 1 a 3 $a \neq b \neq c \neq a$, $a \neq c \neq d \neq a$. Keby $b = d$, potom súčasne $(a, b, c) \in M$, $(a, c, b) \in M$, čo je v spore s lemmou 1. Teda $a \neq b \neq \neq d \neq a$, z čoho podľa vlastnosti 8 buď $(a, b, d) \in M$, buď $(b, d, a) \in M$, buď $(d, a, b) \in M$. Nech $(d, a, b) \in M$. Potom $(c, b, a) \in M$ a $(b, a, d) \in M$ podľa vlastnosti 2. Teda podľa vlastnosti 4 $(c, a, d) \in M$, čo je podľa lemmy 1 v spore s $(a, c, d) \in M$. Nech $(b, d, a) \in M$. Pretože $b \neq d \neq c \neq b$, podľa vlastností 2 a 8 buď $(b, c, d) \in M$, buď $(c, d, b) \in M$, buď $(d, b, c) \in M$. Ak $(b, c, d) \in M$, podľa vlastnosti 2 $(d, c, b) \in M$, $(c, b, a) \in M$. Z toho podľa vlastnosti 4 vyplýva $(d, b, a) \in M$, čo je však podľa lemmy 1 a vlastnosti 2 v spore s $(b, d, a) \in M$. Ak $(c, d, b) \in M$, podľa vlastnosti 2 $(b, d, c) \in M$, $(d, c, a) \in M$. Z toho podľa vlastnosti 4 vyplýva, že $(b, c, a) \in M$, čo je podľa lemmy 1 a vlastnosti 2 v spore s $(a, b, c) \in M$. Ak $(d, b, c) \in M$, aj $(c, b, d) \in M$. Z $(c, b, d) \in M$ a $(b, d, a) \in M$ podľa vlastnosti 4 vyplýva, že $(c, d, a) \in M$, čo je podľa lemmy 1 a vlastnosti 2 v spore s $(a, c, d) \in M$.

Veta 2. *Vlastnosti 3, 5, 6 vyplývajú z ostatných. Vlastnosti 1, 2, 4, 7, 8 sú navzájom nezávislé.*

Dôkaz. Prvá časť vyplýva z lemm 2, 5, 6. Druhú časť vety dokážeme patričnými modelmi: Model v príklade 2 spĺňa vlastnosti 2, 4, 7, 8, vlastnosť 1 nespĺňa. Model v príklade 1 spĺňa vlastnosti 1, 4, 7, 8, vlastnosť 2 nespĺňa.

Príklad 7. $P = \{a, b, c, d\}$, $M = \{(a\ b, c), (b, c, d), (a, c, d), (a, b, d), (c, b, a), (d, c, b), (d, c, a), (d, b, a), (a, a, d), (d, a, a)\}$. M spĺňa vlastnosti 1, 2, 7, 8, vlastnosť 4 nespĺňa.

Príklad 8. $P = \{a, b, c, d\}$, $M = \{(a,b,c), (c,b,d), (a,c,d), (a,b,d), (c,b,a), (d, b, c), (d, c, a), (d, b, a)\}$. M spĺňa vlastnosti 1, 2, 4, 8, vlastnosť 7 nespĺňa.

Model v príklade 6 spĺňa vlastnosti 1, 2, 4, 7, vlastnosť 8 nespĺňa.

Lemma 7. *Vlastnosť 4 vyplýva z vlastností 1, 2, 3, 5, 6, 8.*

Dôkaz. Nech $(a, b, c) \in M$, $(b, c, d) \in M$. Podľa vlastností 1, 2, 3 $a \neq c \neq d$. Keby $a = d$, tak by $(d, b, c) \in M$ a $(b, c, d) \in M$, čo však podľa lemmy 1 vedie k sporu. Teda $a \neq c \neq d \neq a$. Podľa vlastnosti 8 buď $(a, c, d) \in M$, buď $(c, d, a) \in M$, buď $(d, a, c) \in M$. Nech $(c, d, a) \in M$. Podľa vlastnosti 2 $(c, b, a) \in M$. Podľa vlastnosti 1 z $(b, c, d) \in M$ vyplýva $b \neq d$. Teda podľa vlastnosti 6 buď $(c, b, d) \in M$, buď $(c, d, b) \in M$, čo však podľa lemmy 1 vedie k sporu s $(b, c, d) \in M$. Nech $(d, a, c) \in M$. Potom $(c, a, d) \in M$. Z $(c, b, a) \in M$, $(c, a, d) \in M$ vyplýva podľa vlastnosti 5, že $(c, b, d) \in M$, čo je však podľa lemmy 1 v spore s $(b, c, d) \in M$.

Veta 3. *Vlastnosť 4 vyplýva z vlastností 1, 2, 3, 5, 6, 8. Vlastnosti 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 sú už nezávislé.*

Dôkaz. Prvú časť vety sme dokázali v lemme 7. Druhú časť dokážeme patričnými modelmi:

Príklad 9. $P = \{a, b, c\}$, $M = \{(b, a, c), (c, a, b), (a, b, a)\}$. M spĺňa vlastnosti 2, 3, 5, 6, 7, 8, vlastnosť 1 nespĺňa.

Model v príklade 1 spĺňa vlastnosti 1, 3, 5, 6, 7, 8, vlastnosť 2 nespĺňa.

Príklad 10. $P = \{a, b, c\}$, $M = \{(a, a, b), (b, a, a), (a, a, c), (c, a, a), (a,b,c), (c, b, a)\}$. M spĺňa vlastnosti 1, 2, 5, 6, 7, 8, vlastnosť 3 nespĺňa.

Príklad 11. $P = \{a, b, c, d\}$, $M = \{(a, b, c), (a, c, d), (b, d, a), (b, d, c), (c, b, a), (d, c, a), (a, d, b), (c, d, b)\}$. M spĺňa vlastnosti 1, 2, 3, 6, 7, 8, vlastnosť 5 nespĺňa.

Príklad 12. $P = \{a, b, c, d\}$, $M = \{(a, b, d), (a, c, d), (b, a, c), (b, d, c), (d, b, a), (d, c, a), (c, a, b), (c, d, b)\}$. M spĺňa vlastnosti 1, 2, 3, 5, 7, 8, vlastnosť 6 nespĺňa.

Model v príklade 8 spĺňa vlastnosti 1, 2, 3, 5, 6, 8, vlastnosť 7 nespĺňa. Model v príklade 6 spĺňa vlastnosti 1, 2, 3, 5, 6, 7, vlastnosť 8 nespĺňa.

Literatúra

[1] E. Čech, Bodové množiny. Praha 1936.

Adresa autora: Katedra matematiky U. K., Bratislava, Šmeralova 2.

Do redakcie dodané 7. V. 1959.

Note sur les ensembles ordonnés

T. Katriňák

Résumé

Cet article traite des postulates marqués dans le texte par les numéros 1—8 qui sont suffisants pour que l'ensemble puisse s'ordonner à l'aide de relation „entre". On dit que l, élément c se trouve „entre" a et b et on note $(a, b, c) \in M$ si l'on a l'une des rélations: $a < c < b$, $b < c < a$. On peut choisir du systéme des postulats 1—8 au maximum ces sous- systémes indépendants des postulats: 2, 3, 4, 5, 7, 8; 1, 2, 4, 7, 8; 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8.

Замечание о упорядоченных множествах

Т. Катриняк

Выводы

В этой работе автор приводит постулаты, означенные в тексте номерами 1—8, которые являются достаточными условиями для упорядочения множества при помощи отношения ,,между''. Говорим, что элемент c лежит между элементами a, b и пишем $(a, c, b) \in M$, если имеет место одно из отношений $a < c < b$, $b < c < a$. Из системы постулатов 1—8 можно выбрать подсистемы с максимальным числом независимых постулатов. Эти подсистемы следующие: 2,3,4,5,7,8; 1,2,4,7,8; 1,2,3,5,6,7,8.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. IV – 3–5, MATHEM., 1959]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. IV., FASC. III-V MATHEMATICA 1959

O konferencii matematikov v Smoleniciach

M. HARANT

Pracovníci matematických vied, združení v Jednote československých matematikov a fyzikov, zišli sa v dňoch 15.—20. IX. 1958 v domove vedeckých pracovníkov v Smoleniciach na I. konferencii matematikov usporiadanej na Slovensku.

Cieľom konferencie bolo, aby sa v zmysle uznesení XI. sjazdu KSČ rokovalo o skvalitnení politicko-výchovnej práce vo vyučovaní matematiky na našich školách, najmä stredných, o rozvoji matematických vied, ako aj o pomoci matematických vied teoretickému rozvíjaniu prírodovedeckého, technického a ekonomického bádania. Účastníci konferencie sa radili a diskutovali o tom, ako sa stane matematika ešte účinnejším prostriedkom v prírodných a technických vedách pri dovŕšení socializmu v našej vlasti.

Podnetom pre takto zameranú prácu konferencie bol program konferencie:

15. IX. 1958: Príchod a spoločná večera.

16. IX. 1958: Otvorenie konferencie, voľba pracovného predsedníctva a pozdravné prejavy.
A. Dubecký, pracovník VÚP v Bratislave: „O politicko-výchovnej práci pri vyučovaní matematiky". M. Jelínek, ústredný inšpektor matematiky na MŠK: „O organizácii školstva v ČSR". Dr. J. Kabele, pracovník VÚP v Prahe: „Základné učivo matematiky na všeobecne vzdelávacích školách".

17. IX. 1958: Doc. A. Dubec, VŠP, Bratislava: „O polytechnizácii vyučovania matematiky". Dr. F. Krňan, SVŠT Bratislava: „O vyučovaní funkcií na stredných školách". Prof. dr. O. Borůvka, člen korešp. ČSAV; Univerzita Brno. „Niektoré pohľady na modernú matematiku z hľadiska vedeckej práce u nás".

18. IX. 1958: Prof. dr. Ján Srb, univerzita v Bratislave: „O vývoji geometrie, najmä neeuklidovských geometrií". Akademik Št. Schwarz, SVŠT, Bratislava: „O rozvoji algebry". K. Rovan, JSŠ, Bratislava: „O rovniciach a nerovnostiach vo vyučovaní na stredných školách".

19. IX. 1958: Doc. dr. A. Huťa, univerzita v Bratislave: „O spolupráci matematikov s praxou". Doc. dr. M. Harant, univerzita

v Bratislave: „Matematické problémy v technickom a prírodovedeckom výskume". Dr. E. Jucovič, VŠP Prešov: „Typy konštrukcií trojuholníkov a ich riešenie". Dr. M. Fiedler, MU ČSAV, Praha: „O zovšeobecnení pojmu trojuholníka".

20. IX. 1958: Doc. dr. Fr. Balada, VŠP Brno: „Pokrokové tradície československej matematiky". Akademik Jur Hronec, univerzita Bratislava: „Zhodnotenie, rezolúcia a záver konferencie."

Konferenciu viedlo pracovné predsedníctvo:

Predseda: akademik Jur Hronec, univerzita — Bratislava,
akademik V. Kořínek, univerzita — Praha,
prof. dr. O. Borůvka, člen korešpondent ČSAV, univerzita — Brno,
akademik Št. Schwarz, technika — Bratislava,
doc. dr. M. Harant, univerzita — Bratislava,
K. Rovan, JSŠ — Bratislava,
L. Berger, JSŠ — Žilina.

Na záver konferencie účastníci prijali rezolúciu:

1. Vítame postupný prechod 11-ročných stredných škôl na 12-ročnú strednú školu. Sme presvedčení, že tento povedie k zlepšeniu politicko-výchovných výsledkov a k príprave nášho dorastu pre život. Účastníci konferencie pre dosiahnutie tohto cieľa budú sa usilovať zvýšiť úroveň vyučovania matematiky. Znovu si uvedomujeme svoju zodpovednosť a v rámci nových opatrení budeme hľadať všetky možnosti dosiahnuť tieto ciele.

2. Účastníci konferencie navrhujú Jednote, aby usporadúvala vo vhodných časových intervaloch konferencie a pracovné schôdze o aktuálnych otázkach vyučovania matematiky, prípadne aj o špeciálnych témach tohto odboru.

3. Konferencia vychádza z toho, že matematika je po materskom jazyku najdôležitejší vzdelávací predmet na škole a tvorí základ vyučovania fyziky a iných prírodných vied, ako aj základ pre výrobnú prax.

4. Konferencia navrhuje, aby pri Jednote bola zriadená pedagogická komisia pre otázky osnov, učebníc a vyučovania matematiky. S výsledkami práce komisie budú oboznámené inštitúcie zapodievajúce sa touto problematikou. Komisia bude v spojení s pedagogickou komisiou pre fyziku.

5. Konferencia sa ztotožňuje so základnými tézami uvedenými v úvodných poznámkach k novým učebným osnovám, t. j. že cieľom vyučovania matematiky je

a) výchova k abstraktnému a logickému mysleniu,
b) dokonalý výcvik v praktickom počítaní.

Účastníci konferencie sa zaväzujú, že využijú všetky možnosti, ktoré poskytuje vyučovanie matematiky pre harmonický rast socialistického človeka.

6. Vychádzajúc z toho, že dvanásťročná stredná škola má za cieľ poskytnúť vyššie všeobecné vzdelanie, účastníci konferencie sa domnievajú, že nemôže byť zameraná pre potreby všetkých druhov vysokých škôl. Konferencia preto odporúča kompetentným miestam, aby otázku prechodu z dvanásťročnej strednej školy na vysoké školy vyriešili v čase čo najkratšom. Zdá sa, že najvhodnejším by bolo uvažovať o tom, aby sa pre niektoré druhy vysokých škôl zriadili jednoročné špeciálne prípravky.

7. Najdôležitejším činiteľom v novej škole bude dobre politicky uvedomelý, pedagogicky a odborne pripravený učiteľ. So zreteľom na súčasný stav prírodných a technických vied odporúčame pre učiteľov 10—12-tej triedy dvanásťročenky dvojpredmetové kombinácie. Za najdôležitejšie pre matematiku pokladáme dvojkombinácie: Matematika—fyzika, matematika—deskriptívna geometria.

8. Budúci učitelia matematiky a fyziky mali by byť pripravovaní rovnocenným spôsobom v obidvoch predmetoch najlepšie tak, že by mali prvé dva roky jednotný študijný plán.

9. Konferencia odporúča, aby sa vypracoval plán, podľa ktorého by sa odstránili prípady vyučovania matematiky nekvalifikovanými silami v čo možno najkratšom čase.

10. Účastníci konferencie sú presvedčení, že kvôli zvýšeniu úrovne vyučovania matematiky na stredných školách je nevyhnutné zaviesť odborný dozor, vykonávaný skúsenými, kvalifikovanými a osvedčenými odborníkmi.

11. Účastníci konferencie odporúčajú Jednote, aby pouvažovala aj o pravidelnom usporiadaní prázdninových kurzov za účelom ďalšieho odborného vzdelania učiteľov matematiky stredných škôl. Účastníci konferencie sú ochotní prispieť všetkými silami k realizovaniu tohto programu. Iným vhodným prostriedkom k zvyšovaniu odborného vzdelania učiteľov by bolo obnoviť vydávanie zbierky: „Cesta k vědění“.

12. Ak má Jednota prispieť k skvalitneniu vyučovania matematiky, je nevyhnutné, aby sa u nás sprístupnila zahraničná literatúra z metodiky matematiky. Je potrebné zúčastňovať sa na medzinárodných podnikoch, ktoré sa zaoberajú vyučovaním matematiky.

13. Účastníci konferencie sa domnievajú, že by bolo prospešné, aby bola námetom niektorej z budúcich konferencii problematika vyučovania matematiky a deskriptívnej geometrii na vysokých školách. Odporúčajú preto Jednote, aby pripravili takúto konferenciu.

14. Účasť predovšetkým mladších vedeckých pracovníkov na zahraničných sjazdoch, konferenciách, kolokviách matematiky by veľmi účinne napomáhala žiadúcemu rastu našej nastupujúcej mladej matematickej generácie.

15. V hlavnom referáte z XI. sjazdu KSČ sa ukladá, aby matematika pomáhala pri teoretickom napredovaní prírodných a technických vied. Týmto problémom sa venovala na konferencii osobitná pozornosť. Konštatovalo sa, že mnohé pracoviská vysokých škôl a ústavov urobili už veľmi sľubné kroky, ktoré priniesli pomoc nášmu národnému hospodárstvu. V tejto práci budeme vo zvýšenej miere pokračovať.

Jedna z foriem, o ktorej sa v tejto súvislosti tiež diskutovalo, bola výchova ašpirantov prírodovedeckých a technických odborov v teoretických predmetoch, najmä v matematike.

Inou formou pomoci praxi je zameranie výskumných plánov pracovníkov vysokých škôl k najdôležitejším potrebám praxe.

16. Konferencia považuje za veľmi dôležité propagovať dosah matematických metód v odborných kruhoch. Považuje tiež za dôležité popularizovať matematiku, preto odporúča členom Jednoty zúčastňovať sa na tejto práci najmä v rámci Spoločnosti pre šírenie politických a vedeckých poznatkov.

Na konferencii sa zúčastnilo 115 účastníkov z celej ČSR, takže mala celoštátny charakter. Boli zastúpené vysoké školy, akadémie, výskumné ústavy a výberové školy III. stupňa. Po prednáškach nasledovali diskusie, v ktorých vystúpilo 109 diskutérov. Bohaté diskusie sa týkali problematiky vyučovania matematiky a výchovy v matematike na stredných aj vysokých školách a novej pripravenej organizácii týchto škôl. Hovorilo sa o vedeckých výsledkoch na našich katedrách a kladne sa hodnotila spolupráca s praxou, ktorá priniesla už dosiaľ značné národohospodárske výsledky.

Poukázalo sa na to, akú dôležitosť pre vyučovanie, ale aj kultúrnu hodnotu majú dejiny matematiky, ktoré u nás majú veľkú tradíciu a ktorým treba takisto venovať pozornosť.

Záverom pri celkovom hodnotení konferencie treba konštatovať, že konferencia plne splnila vytýčený cieľ. Zo stránky obsahovej náplne sa ukázalo, že program obsahoval najaktuálnejšie problémy, ktoré hýbu našimi školami všetkých stupňov. Široká diskusia ukázala, že matematici majú prvoradý záujem na plnení uznesení XI. sjazdu KSČ. Vzhľadom na široký výber účastníkov dá sa očakávať, že výsledky konferencie preniknú do širokého okruhu záujemcov nielen v školách, ale aj vo verejnosti. K tomu prispelo a prispeje publikovanie výsledkov, články v dennej tlače, relácie v rozhlase, preverenie výsledkov na schôdzi krajských pobočiek, prednášky pre učiteľov a rodičov atď. O výsledkoch konferencie dal sa informovať osobitnou delegáciou aj minister školstva dr. Fr. Kahuda. Konferencia plnila aj politický účel, lebo v zmysle XI. sjazdu KSČ nielen vypracovala, ale naplnila konkrétnosťami jeho uznesenia na školskom úseku v matematike.

Príjemné prostredie a spoločenské posedenia prispeli k ďalšiemu utužovaniu spolupráce medzi matematikmi obidvoch našich bratských národov.

Redakčná rada sborníka

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

oznamuje trúchlivú zprávu, že jej predseda a spoluzakladateľ sborníka

akademik SAV Jur HRONEC

Ph. Dr., Ped. Dr. h. c., doktor vied matematicko-fyzikálnych, nositeľ Radu práce, profesor Univerzity Komenského etc., etc.

zomrel dňa 1. decembra 1959.

V budúcom matematickom zväzku sborníka vydáme podrobný nekrológ.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

je fakultný sborník určený k publikáciám vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých ašpirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracovávajú materiál získaný za doby pobytu na našej fakulte. Redakčná rada vyhradzuje si právo z tohto pravidla urobiť výnimku.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom, anglickom, francúzskom alebo nemeckom. Práce podané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, ob riadok, tak aby jeden riadok tvorilo **60** úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na účet autora.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšete názov práce, pod to meno autora s plným titulom. Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, sa uvádzajú všetky pracoviská. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba ich obidve uviesť.

Fotografie načim podať na čiernom lesklom papieri a uviesť zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba previesť tušom na priehľadnom papieri (pauzák), alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať resumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam publikovaným v cudzom jazyku, načim pripojiť resumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom v prípade publikácie v ruskom jazyku alebo v ruskom jazyku v prípade publikácie v jazyku západnom. **Nezabudnite pri resumé uviesť vždy názov práce a meno autora v rovnakom poradí ako v základnom texte.** Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a zalomené korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny počas korektúry idú na ťarchu autorského honoráru. Každý autor dostane okrem príslušného honoráru i 50 separátov.

Redakčná rada