[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. III-1 MATHEM., 1958]

ACTA

FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. III. FASC. I.

MATHEMATICA

PUBL. V.

1958

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

Sborník Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Vydáva Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasinkova 5, čís. tel. 458-51. Povolilo Povereníctvo kultúry číslom 2265/56-IV/1. — Tlač: Brněnské knihtiskárny, n. p., zákl. závod, Brno, ul. 9. května 7.
F 15 1248 — R

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. III-1, MATHEM., 1958]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. III. FASC. I. MATHEMATICA 1958

Die Bewegungen mit n Freiheitsgraden, wo die kinetische und die potentionelle Energie mit der quadratischen Form gegeben ist

J. HRONEC

I

Das Differentialsystem mit konstanten Koefficienten

Die Behandlung dieses Problems geht aus dem Differentialsystem von Lagrange mit konstanten Koefficienten hervor.

Das allgemeine Differentialsystem mit konstanten Koefficienten ist

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{=1}^{n} a_{i\lambda} y_\lambda, \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

wo $a_{i\lambda}$ die Konstanten sind.

Mit der Substitution

$$z_i = \sum_{\lambda=1}^{n} g_{i\lambda} y_\lambda, \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

wo $g_{i\lambda}$ Konstanten sind und die Determinante $\| g_{ik} \| \neq 0$ ist, transformiert sich das Differentialsystem (1) in

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{i\lambda} z_\lambda, \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

wo die Matrix

$$(b_{ik}) = (g_{ik})\,(a_{ik})\,(g_{ik})^{-1} \tag{4}$$

ist.

Es sei

$$(y_{ik}) = (a_{ik})\,(\eta_{ik}),$$
$$(\zeta_{ik}) = (g_{ik})\,(\eta_{ik}),$$

dabei nach (2) ist

$$(z_{ik}) = (g_{ik})\,(y_{ik}).$$

Aus diesen folgt

(5) $$(z_{ik}) = (g_{ik})\,(a_{ik})\,(g_{ik})^{-1}\,(\xi_{ik}) = (b_{ik})\,(\zeta_{ik}).$$

Die charakteristische Gleichung des Differentialsystems (1) ist

(6) $$A(r) = \|\, a_{ik} - \delta_{ik} r \,\| = 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

wo

$$\delta_{ik} = \left.\begin{matrix} 1 \\ \\ 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{bei } i = k, \\ \\ \text{bei } i \neq k \end{matrix}$$

ist. Bei dieser Gleichung existieren die Systeme von Gleichungen

(7) $$\sum_{\lambda=1}^{n} g_\lambda(a_{\lambda k} - \delta_{\lambda k} r_i) = 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

wo r_i die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (6) sind. Nehmen wir zuerst an, dass alle Wurzeln verschieden sind.

Aus (7) folgt

(8) $$(g_{ik})\,(a_{ik}) = (\delta_{ik} r_i)\,(g_{ik})$$

und dann folgt aus (4)

(9) $$(b_{ik}) = (\delta_{ik} r_i).$$

Bei der Substitution (2), also wenn die $g_{i\lambda}$ durch das Gleichungsystem (7) bestimmt sind, geht das Differentialsystem (1) nach (3) in das Differentialsystem

(10) $$\frac{dz_i}{dx} = r_i z_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \text{ über.}$$

Die Lösungen des Differentialsystems (1) sind dann nach (2) mit dem System

(11) $$\sum_{\lambda=1}^{n} g_{i\lambda} y_\lambda = c_i e^{r_i x}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gegeben.

Wenn zwischen den Wurzeln r_i der charakteristischen Gleichung (6) auch gleiche (mehrfache) sind, dann lösen wir das Problem folgendermassen: Es sei $r = r_0$ eine $(n - \varkappa)$ fache wurzel, dann sind die Minoren vom Grade $\varkappa$ der Determinante

$$\|\, a_{ik} - \delta_{ik} r_0 \,\|, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

nicht alle gleich Null. Wenn

$$\|\, a_{ik} - \delta_{ik} r_0 \,\| \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, \varkappa,$$

sind, dann besteht (7) aus $\varkappa + 1$ Systemen und jedes System hat $\varkappa$ unabhängige Gleichungen. In jeder solchen Gleichung sind die n Unbekanten

$g_{i\lambda}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa + 1$. Diese kann man so bestimmen, dass $\| \gamma_{i\lambda} \| \neq 0$, $i, \lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa + 1$, ist.

Bei dieser Bedingung für $\gamma_{i\lambda}$, $i = 1, \ldots, \varkappa + 1$, $\lambda = 1, \ldots, n$, nehmen wir die Substitution

$$z_i = \sum_{\lambda=1}^{n} \gamma_{i\lambda} y_\lambda, \qquad i = 1, \ldots, \varkappa + 1. \tag{12}$$

Bei dieser Substitution geht das Differentialsystem (1) in die kanonische Form (10) über, wo $i = 1, \ldots, \varkappa + 1$ ist und daraus folgt

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \gamma_{i\lambda} y_\lambda = c_i e^{r_i x}, \qquad i = 1, \ldots, \varkappa + 1. \tag{13}$$

Daraus folgt weiter

$$y_\lambda = \sum_{i=1}^{x+1} d_{\lambda i} c_i e^{r_i x} + \sum_{i=x+2}^{n} d'_{\lambda i} y_i, \qquad \lambda = 1, \ldots, \varkappa + 1,$$

wo $d_{\lambda i}$ und $d'_{\lambda i}$ Konstanten und Determinanten sind.

Wenn wir die so bestimmten y_λ, $\lambda = 1, \ldots, \varkappa + 1$, in die Differentialgleichungen des Differentialsystems (1) einsetzen, in welchen $\frac{dy_{\varkappa+2}}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ vorkommen, so erhalten wir für $y_{\varkappa+2}, \ldots, y_n$ ein lineares Differentialsystem, welches nicht homogen ist.

II.

Quadratische Formen mit n unabhängigen Variabeln, die kleine Bewegungen bestimmen

Nehmen wir ein frei bewegliches System, welches mit den Koordinaten y_1, y_2, y_3 bestimmt ist. Diese seien Funktionen von n unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ (Freiheitsgraden)

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Wenn keine von den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ die Zeit t bedeutet, dann ist die kinetische Enerhie eines solchen Systems durch die homogene quadratische Form

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i' x_k', \qquad x_\nu' = \frac{dx_\nu}{dt} \tag{14}$$

gegeben, wo die $a_{ik} = a_{ki}$ Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind.

Wenn die Bewegungen so klein sind, dass man in den Taylorschen Reihen der Funktionen $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ die Glieder mit höheren als erster Dimension weglassen kann, dann sind die a_{ik} Konstanten und die kinetische Energie ist durch die quadratische Form (14) gegeben.

Wenn wir den Ursprung des Koordinatensystems in dem Punkt der Gleichgewichtslage verlegen, dann ist die potentielle Energie eines solchen Systems mit kleinen Bewegungen durch die quadratische Form

$$U = b_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_i x_k \tag{15a}$$

gegeben, wo die b_0, $b_{ik} = b_{ki}$ Konstanten sind. Es sei einfachheitshalber

$$2U_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_i x_k. \tag{15}$$

Wir transformieren durch die Substitution[1]

$$x_k' = \sum_{\nu=k}^{n} D_{\nu k}^{(n-\nu+1)} \xi_\nu', \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

die quadratische Form (14), wo $D_{\nu k}^{(n-\nu+1)}$ die Minoren der Determinante

$$D^{(n-\nu)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu 1} & \ldots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}, \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

sind und welche zu den Elementen $a_{\nu k}$ gehören. Es sei $D_{11}^{(n)} = D^{(n)} = 1$, $D^{(0)} = D$, wo D die Determinante der quadratischen Form (14) ist. Bei dieser Substitution ist die quadratische Form (14) in die Normalform transformiert

$$2\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n} D^{(n-i+1)} D^{(n-i)} \xi_i'^2, \qquad \xi_i' = \frac{d\xi_i}{dt}. \tag{16}$$

Gerade so ist die quadratische Form (15) mit der Substitution

$$x_k = \sum_{\nu=k}^{n} \Delta_{\nu k}^{(n-\nu+1)} \xi_\nu, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

in die Normalform

$$2U_1 = \sum_{i=1}^{n} \Delta^{(n-i+1)} \Delta^{(n-i)} \xi_i^2 \tag{18}$$

[1]) Hronec J., Algebr. rovnice, S. 115—117.

transformiert, wo $\Delta_{\nu k}^{(n-i-1)}$ die Minoren der Determinante

$$\Delta^{(n-\nu)} = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1\nu} \\ b_{\nu 1} & \ldots & b_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

sind und die zu den Elementen $b_{\nu k}$ gehören. Es sei ferner $\Delta_{11}^{(n)} = \Delta^{(n)} = 1$ und wo $\Delta^{(0)} = \Delta$ die Determinante der quadratischen Form (15) ist.

Soll die Bewegung eine Funktion von n Veränderlichen sein, dann darf kein Glied in den Reihen

$$D^{(n)}, D^{(n-1)}, \ldots, D^{(1)}, D \tag{19}$$
$$\Delta^{(n)}, \Delta^{(n-1)}, \ldots, \Delta^{(1)}, \Delta$$

Null sein.

Die kinetische Energie ist immer ein positiver Wert, so dass die quadratische Form (14) positiv definit ist, darum $D^{(n)} = 1$ ist, deshalb müssen alle Glieder von (19) positiv sein.

Das allgemeine Differentialsystem der Bewegung nach Lagrange ist

$$\frac{\partial T}{\partial x_i'} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Benützen wir die Normalformen (16) und (18), so geht das Lagrangesche Differentialsystem in die kanonische Form

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2} = -\frac{\Delta^{(n-i+i)}\Delta^{(n-i)}}{D^{(n-i+1)}D^{(n-i)}}\xi_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad \text{über.} \tag{21}$$

Ferner sei

$$\frac{\Delta^{(n-i+1)}\Delta^{(n-i)}}{D^{(n-i+1)}D^{(n-i)}} = s_i, \qquad s_i \gtrless 0,$$

dann folgt aus (21)

$$\xi_i = c_{1i} \sin t\sqrt{s_i}.$$

Die zweite Intergrationskonstante ist Null, da der Ursprung des Koordinatensystems in den Gleichgewichtspunkt fällt. Bei der Benützung dieses Wertes von ξ_i geht (16) in die Form

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \Delta^{(n-i+1)}\Delta^{(n-i)}c_{1i}^2 \cos^2 t \, {}^2_1\!\sqrt{s_i} \qquad \text{über.}$$

Aus dieser folgt ferner

$$\Delta^{(n-i+1)}\Delta^{(n-i)} > 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Da nun $\Delta^{(n)} = 1$ ist, folgt, dass auch die quadratische Form der potentiellen Energie positiv definit ist.

III

Die Koordinaten der Bewegung. Zusammenhang der kinetischen Energie und der potentiellen Energie

Nach dem vorherigen Kapitel ist

$$\frac{\Delta^{(n-i+i)}\Delta^{(n-1)}}{D^{(n-i+1)}D^{(n-1)}} = q_i^2$$

ein positiver Wert und die Lösung des Differentialsystems (21) ist

$$\xi_i = c_{1i} \sin q_i t, \tag{22}$$

wo c_{1i} die Amplituden in der Richtung ξ_i sind. Wenn $q_i t = \frac{\pi}{2}$ ist, dann sind die Werte der Amplituden $c_{1i} = \xi_i$. Wenn wir die Werte von (22) in (17) einsetzen, bekommen wir die allgemeinen Koordinaten der Bewegung

$$x_i = \sum_{\nu=i}^{n} \Delta_{i_\nu}{}^{(n-\nu+1)} \; c_{1\nu} \sin q_\nu t, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{23}$$

wo einige von den q_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, auch gleich sein können. Wenn wir (22) in (16) und (18) einsetzen, so bekommen wir

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \Delta^{(n-i+1)}\Delta^{(n-i)} c_{1i}^2 \cos^2 q_i t$$

$$2U_1 = \sum_{i=1}^{n} \Delta^{(n-i+1)}\Delta^{(n-i)} c_{1i}^2 \sin^2 q_i t$$

und aus diesen folgt

$$T + U_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta^{(n-i+1)}\Delta^{(n-i)} c_{1i}^2$$

oder

$$T + U = b_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta^{(n-i+1)}\Delta^{(n-i)} c_{1i}^2.$$

Die Summe der kinetischen Energie und der potentiellen Energie hat einen konstanten Wert.

Wo T das Maximum hat, dort hat U das Minimum und umgekehrt.

IV.

Das Lagrangesche System der Bewegung bei den allgemeinen quadratischen Formen

Gemäss (14) und (15a) sind:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i'} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k', \qquad \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k$$

und dann ist das Lagrangesche Differentialsystem durch

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{d^2x_k}{dt^2} = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{24}$$

gegeben. Dieses Differentialsystem bestimmt ungedämpfte Schwingungsbewegungen mit n Freiheitsgraden mit dem Mittelpunkt im Gleichhgewichtspunkt. Sind die Schwingungen aber gedämpft, so können die Lösungen dieses Differentialsystems auf das vorhergehende Differentialsystem (24) zurück geführt werden.

Das Differentialsystem (24) kann mann in der Form

$$(a_{ik})\left(\frac{d^2x_{ik}}{dt^2}\right) = -(b_{ik})\,(x_{ik})$$

schreiben. Die Bewegung ist mit n Freiheitsgraden gegeben, deshalb ist $\| a_{ik} \| = D \neq 0$, aber dann ist weiter

$$\left(\frac{d^2x_{ik}}{dt^2}\right) = -(a_{ik})^{-1}\,(b_{ik})\,(x_{ik})$$

oder, wenn wir

$$(a_{ik})^{-1}\,(b_{ik}) = (B_{ik}), \qquad B_{ik} = \frac{1}{D}\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\lambda i}b_{\lambda k}, \tag{25}$$

setzen, bekommen wir

$$\left(\frac{d^2x_{ik}}{dt^2}\right) = -(B_{ik})\,(x_{ik})$$

und das Differentialsysetm (24) geht in

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\sum_{\lambda=1}^{n} B_{i\lambda}x_\lambda, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{26}$$

über. *Zerlegung der schwingenden Bewegung mit n Freiheitsgraden in ihre Komponenten.* Wir transformieren mit der Substitution

(27)
$$z_i = \sum_{\nu=1}^{n} g_{i\nu} r_\nu, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

das Differentialsystem (26), wo $g_{i\nu}$ mit den hom. lin. Systemen

(28)
$$\sum_{\lambda=1}^{n} g_{i\lambda}(B_{\lambda k} - \delta_{\lambda k} r_i) = 0, \qquad i, k = 1, \ldots, n,$$

gegeben sind und wo $\delta_{ik} = 1$ bei $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ bei $i \neq k$ sind. r_i sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

(29)
$$\| B_{ik} - \delta_{ik} r \| = 0.$$

Bei dieser Substitution geht das Differentialsystem (26) in die kanonische Form

(30)
$$\frac{d^2 z_i}{dt^2} = -r_i z_i \qquad \text{über.}$$

Die Wurzeln r_i können alle verschieden sein, d. i. $i = 1, \ldots, n$, oder einige können mehrfache sein, d. i. $i = 1, \ldots, m$, wo $m < n$ ist. Aus (28) folgt

(31)
$$\sum_{\lambda=1}^{n} B_{i\lambda} G_{\lambda k} = G_{ik} r_k, \qquad i, k = 1, \ldots, n,$$

wo G_{ik} die Minoren der Determinante $\| g_{ik} \| = G$ sind, welche zu den Elementen g_{ik} gehören.

V.

Die Eigenschaften der Wurzeln der charakteristischen Gleichungen

a) Die charakteristischen Gleichungen (29) sind sekulär, *ihre Wurzeln sind daher alle reell.*

b) *Die Wurzeln r_i haben keinen Nullwert,* dann ist das absolute Glied der Gleichungen (29) die Determinante $\| B_{ik} \|$. Nach (25) ist

$$\| B_{ik} \| = \| a_{ik} \|^{-1} \| b_{ik} \| = \frac{\Delta}{D}.$$

Aber bei n Freiheitsgraden sind $\Delta \neq 0$, $D \neq 0$.

c) *Die Wurzeln r_i sind alle positiv.* Nehmen wir vorläufig $r_i \gtrless 0$ an, dann folgt aus (30)

(32)
$$z_i = c_{i1} \sin t\sqrt{r_i}.$$

Die zweiten Intergrationskonstanten c_{2i} sind Null, da der Ursprung mit dem Punkte der Gleichgewichtstlage zusammenfällt.

Aus dieser Tatsache folgt gemäss (27)

$$G \,.\, x_k = \sum_{\nu=1}^{n} h_{\nu k} \quad \sin t\sqrt{r_\nu}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

wo die $h_{\nu k}$ die freien Konstanten c_{1i} enthalten. Wenn wir die so bestimmten x_k in das Differentialsystem (24) einsetzen, bekommer win

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} h_{\nu k}(-a_{ik}r_\nu + b_{ik}) \sin t\sqrt{r_\nu} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

und aus diesen folgt weiter

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} H_{\nu k}(-a_{ik}r_\nu + b_{ik}) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, n. \tag{33}$$

Die $H_{\nu k}$ haben die freien Konstanten c_{1i}. Setzen wir

$$H_{\nu k} = y_i \,.\, \overline{y_k},$$

wo y_i und $\overline{y_k}$ konjugierte komplexe Werte sind und setzen wir

$$y_i = \alpha_i + \beta_i\sqrt{-1},$$

und wenn wir in Betracht ziehen, dass T und U_1 definit positive quadratische Formen sind, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\alpha_i + \beta_i\sqrt{-1})\,(\alpha_k - \beta_k\sqrt{-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_i\alpha_k + \sum_{i=}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\beta_i\beta_k = T(\alpha) + T(\beta) > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(\alpha_i + \beta_i\sqrt{-1})\,(\alpha_k - \beta_k\sqrt{-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\alpha_i\alpha_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\beta_i\beta_k = U_1(\alpha) + U_1(\beta) > 0.$$

Mit der Benützung von (33) folgt, dass

$$r_\nu = \frac{U_1(\alpha) + U_1(\beta)}{T(\alpha) + T(\beta)} > 0,$$

deshalb können wir

$$r_i = p_i^2, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{setzen.}$$

VI.

Die Koordinaten der Bewegung

Die Koordinaten der Komponenten der Bewegung sind nach (32)

$$z_i = c_{1i} \sin p_i t, \tag{34}$$

wo $i = 1, \ldots, n$ ist ,falls die charakterische Gleichung (29) lauter verschiedene Wurzeln hat und $i = 1, \ldots, m$, $m < n$ ist, falls die charakterische Gleichung mehrfache Wurzeln hat.

Die Zeitperioden dieser Komponenten sind $\frac{2k\pi}{p_i}$. Haben die c_{1i} dasselbe Vorzeichen und ist k gemeinsame Vielfache von allen p_i, so sind die Komponenten in gleichen Phasen und die Bewegung zeigt die grössten Schwingungen.

Die Koordinaten der Bewegung a) *im Falle, dass die Wurzeln alle verschieden sind.* Aus (27) mit der Benützung von (34) haben wir

$$G \,.\, x_i = \sum_{\nu=1}^{n} G_{i\nu} c_{1\nu} \sin p_\nu t, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{35}$$

oder wenn wir

$$G_{i\nu} c_{1\nu} = h_{i\nu}, \tag{36}$$

setzen, bekommen wir

$$G \,.\, x_i = \sum_{\nu=1}^{n} h_{i\nu} \sin p_\nu t. \tag{36a}$$

Die Berechnung von $c_{1\nu}$ folgt aus dem System (35).

b) *Die charakterische Gleichung* (29) *hat mehrfache Wurzeln.* Einfachheitshalber nehmen wir an, dass ein $r = r_\alpha$ $(n - m + 1)$-fache Wurzel sei und die anderen seien alle einfach, dann ist

$$z_i = \sum_{\nu=1}^{n} g_{i\nu} x_\nu, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad m < n. \tag{37}$$

Da $G^* = \| g_{ik} \| \neq 0$, $i, k = 1, \ldots, m$, ist, aus (37) folgt

$$G^* \,.\, x_i = \sum_{\nu=1}^{m} G_{i\nu} z_\nu - \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\varkappa=m+1}^{n} G^*_{i\nu} g_{\nu\varkappa} x_\varkappa, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

wo $G^*_{i\nu}$ die Minoren der Determinante G^* sind, die zu den Elementen $g_{i\nu}$ gehören.

Wenn wir diese in die Gleichungen des Differentialsystems (26) setzen, wo die $\frac{d^2x_{m+1}}{dt^2}, \ldots, \frac{d^2x_n}{dt^2}$ auftreten, so erhalten wir für $x_{m+1}, \ldots, x_n$ das nichthomogene Differentialsystem

$$G^* \frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{\lambda=m+1}^{n} s_{i\lambda}x_\lambda - \sum_{\lambda=1}^{m} \overset{*}{s}_{i\nu}z_\lambda, \qquad i = m+1, \ldots, n,$$

wo

$$s_{i\lambda} = \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\varkappa=1}^{m} B_{i\varkappa}\overset{*}{G}_{\varkappa\nu}g_{\nu\lambda} - B_{i\lambda}, \qquad \overset{*}{s}_{i\lambda} = \sum_{\nu=1}^{m} B_{i\nu}\overset{*}{G}_{\nu\lambda}$$

sind.

Bei den letzten Differentialsystem kommen wieder zwei Fälle vor und zwar a) wenn die charakteristische Gleichung $\| s_{ik} - \delta_{ik}r \| = 0$ lauter verschiedene Wurzeln hat, b) wenn sie mehrfache Wurzeln hat. In diesem zweiten Falle wiederholt sich das Verfahren, deshalb nehmen wir nur den ersten Fall.

Da $\| s_{ik} \| \neq 0$ ist, hat die charakteristische Gleichung nur Wurzeln, die nicht Null sind. Die Wurzeln sind dann alle positiv. Dann folgt

$$x_i = \sum_{\nu=m+1}^{n} h_{i\nu}(t) \sin p_\nu t, \qquad i = m+1, \ldots, n,$$

wo man noch die Funktionen $h_{i\nu}(t)$ bestimmen muss. Diese Bestimmung führt zum nichthomogenen Differentialsystem.

Wenn $r_{\alpha 1}$ eine $\alpha_{\alpha 1}$fache, ..., $r_{\alpha m}$ eine α_m-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung (29) ist, wobei $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = n$ ist, bleibt das Verfahren dasselbe wie früher.

VII.

Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der quadratischen Formen der kinetischen Energie und der potentiellen Energie bei gegebener Bewegung

Es sei die Bewegung mit den Gleichungen (34) gegeben. Aus dem System (31) kann man die B_{ik} bestimmen, falls r_k, $k = 1, \ldots, n$, verschieden sind, dann ist gemäss (25)

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda}B_{\lambda k} = b_{ik}, \qquad i, k = 1, \ldots, n, \tag{38}$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$ sind.

Ist zwischen den r_k eine mehrfache Wurzel, $k = 1, \ldots, m$, $m < n$, dann hat das System (31) für B_{ik} nur m lineare Gleichungen, wo $\| G_{ik} \| \neq 0$, $i, k = 1, \ldots, m$. Aus diesen kann man B_{ik}, $i, k = 1, \ldots, m$ als Funktionen von B_{ik}, $i, k = m + 1, \ldots, n$, bestimmen.

Wenn die Bewegung durch die Gleichungen

$$x_i = h_{ii} \sin p_i t, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{39}$$

gegeben ist, wo $c_{1i} \neq 0$ sind, aus (36) folgt $G_{ik} = 0$, $i \neq k$, aber dann aus (31) sind $B_{ii} = r_i$, $B_{ik} = 0$ bei $i \neq k$, deshalb nach (38) sind

$$a_{ik} r_k = b_{ik}, \qquad a_{ki} r_i = b_{ki}.$$

Wenn wir $r_i \neq r_k$ voraussetzen, folgt dann aus diesen zwei Systemen bei $i \neq k$, dass $a_{ik} = 0$, $b_{ik} = 0$ sind, das heist: die quadratischen Formen T und U_1 sind normal und die Koordinaten (39) haben auch normale Gestalt.

VIII.

Die Koordinaten der schwingenden Bewegung sind Koordinaten der quadratischen Kurven und der quadratischen Flächen

Aus (36a) folgt

$$G \sum_{i=1}^{n} H_{i\nu} x_i = H \sin p_\nu t, \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

wo $H_{i\nu}$ die Minoren der Determinante $\| h_{i\nu} \| = H$ sind und zu den Elementen $h_{i\nu}$ gehören. Setzen wir $p_\nu t = pt + \beta_\nu t$, wo die $\beta_\nu t$ die Phase einer Komponente ν der Bewegung in de Zeit t ist. Nach Eliminierung von $\sin pt$ und $\cos pt$, bekommen wir:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} H_{i\nu} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} H_{i\lambda} x_i\right)^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} H_{i\nu} x_i \sum_{i=1}^{n} H_{i\lambda} x_i \cos(\beta_\nu - \beta_\lambda)\, t =$$
$$= \left(\frac{H}{g}\right)^2 \sin^2 (\beta_\nu - \beta_\lambda)\, t, \qquad \nu, \lambda = 1, \ldots, n, \qquad \nu < \lambda. \tag{40}$$

Jede dieser Gleichungen bedeutet ein System von quadratischen Flächen mit n Veränderlichen mit dem Parameter $(\beta_\nu - \beta_\lambda)\, t$.

Wen die Phasen der einzelnen Bewegungskomponenten konstant sind $p_\nu t = pt + \beta_\nu$, wo β_ν die Konstanten sind, dann bedeutet jede Gleichung eine quadratische Fläche mit n Veränderlichen, welche nur dann ihre Form verändert, wenn die Phasen der einzelnen Komponenten der Bewegung sich ändern.

Im euklidischen Raume bei $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ bewegt sich der Punkt der schwingenden Bewegung auf einer quadratischen Fläche. Die

Gleichung dieser Fläche bekommen wir, wenn wir die beiden Gleichungen von (40) addieren, dabei $n = 3$ nehmen. Im Falle $n = 2$ bewegt sich der Punkt auf einer quadratischen Kurve.

Wird die schwingende Bewegung durch normale Koordinaten (39) gegeben und wenn wir in diese $q_i t = qt + \gamma_i t$ setzen, wo $\gamma_i t$ die Phase der schwingenden Bewegung bezüglich der Koordinatenachse ξ_i in der Zeit t ist, dann hat das System der quadratischen Gleichungen (40) die Form

$$\left(\frac{\xi_i}{c_{1i}}\right)^2 + \left(\frac{\xi_k}{c_{ik}}\right)^2 - 2\frac{\xi_i}{c_{1i}}\frac{\xi_k}{c_{ik}} \cos(\gamma_i - \gamma_k)\, t = \sin^2(\gamma_i - \gamma_k)\, t,$$

$$i, k = 1, \ldots, n, \qquad i < k.$$

Jede Gleichung von diesem System bestimmt in der Ebene $\xi_i \xi_k$ ein System von quadratischen Kurven mit dem Parameter $(\gamma_i - \gamma_k)\, t$.

Wenn $\gamma_i t = \gamma_i$ eine Konstante ist, so bestimmt jede Gleichung in der Ebene $\xi_i \xi_k$ nur eine quadratische Kurve, diese ändert nur dann ihre Gestalt, wenn $\gamma_i - \gamma_k$ sich ändert. Bei $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ bewegt sich der Punkt der schwingenden Bewegung in der Ebene $\xi_1 \xi_2$ auf der quadratischen Kurve mit der Gleichung[2])

$$\left(\frac{\xi_1}{c_{11}}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{c_{12}}\right)^2 - 2\frac{\xi_1}{c_{11}} \cdot \frac{\xi_2}{c_{12}} \cos(\gamma_1 - \gamma_2) = \sin^2(\gamma_1 - \gamma_2).$$

Bei $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ bewegt sich der Punkt der schwingenden Bewegung auf der quadratischen Fläche mit der Gleichung

$$\left(\frac{\xi_1}{c^*_{11}}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{c^*_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\xi_3}{c^*_{13}}\right)^2 - 2\frac{\xi_1}{c_{11}} \cdot \frac{\xi_2}{c_{12}} \cos(\gamma_1 - \gamma_2) -$$

$$- 2\frac{\xi_1}{c_{11}} \cdot \frac{\xi_2}{c_{13}} \cos(\gamma_1 - \gamma_3) - 2\frac{\xi_2}{c_{12}} \cdot \frac{\xi_3}{c_{13}} \cos(\gamma_2 - \gamma_3) =$$

$$= \sin^2(\gamma_1 - \gamma_2) + \sin^2(\gamma_1 - \gamma_3) + \sin^2(\gamma_2 - \gamma_3),$$

wo $c^*_{11} = \frac{c_{11}}{\sqrt{2}}$, u. w. sind. Bei jeder Änderung der Phasen $\gamma_i - \gamma_k$ ändert sich auch die Gestalt der Fläche.

---

[2]) Vergl. Chvolson O. D., Lehrbuch der Physik, 1902, I. S. 146.

Pohyby o n nezávislých voľnostiach s kinetickou a potenciálnou energiou danou kvadratickou formou

J. Hronec

Obsah

O týchto pohyboch sa tu pojednáva pomocou diferenciálnych systémov s konštantnými koeficientami; stať I zaoberá sa preto takýmito diferenciálnymi systémami. Vyjde z dif. systému (1) a tento pomocou substitúcie (2) transformuje do dif. systému (3). Tento, keď koeficienty substitucie určí systémami (7), dif. systém (3) prejde do kanonického tvaru (10). Tu vystupujúce r_i sú korene charakteristických rovníc (6). Rozoznáva dva prípady: a) keď charakteristická rovnica má len rozličné korene, b) keď má viacnásobné korene. V prvom prípade riešenia sú dané systémom (11), v druhom prípade zas systémom (13) a nehomogénnym diferenciálnym systémom.

V stati II definuje kmitavý pohyb o n voľnostiach, daný kvadratickými formami. Tieto formy prevedie do normálneho tvaru a použije Lagrangeovu rovnicu pohybu. Takto dostane kanonický dif. systém (21) a rieši ho.

V stati III ukáže, že súčet kinetickej a potenciálnej energie pohybu v určitom bode je daná konštantná hodnota.

V stati IV určí všeobecný diferenciálny systém pohybu vo tvare (26) a ukáže, že pohyb je zložený z n zložkových pohybov.

V stati V ukáže, že korene charakteristickej rovnice (29) dif. systému sú reálne, nie sú nula a sú všetky kladné.

V stati VI určí súradnice pohybu, a) keď všetky korene charakteristickej rovnice sú rozličné, b) keď sú medzi nimi viacnásobné korene.

V stati VII zas opačne ku kmitavému pohybu, danému rovnicami (34), určí koeficienty kvadratických foriem kinetickej a potenciálnej energie.

V stati VIII ukáže, že kmitavý pohyb, daný kvadratickými formami kinetickej a potenciálnej energie, v rovine deje sa po kvadratických krivkách, v priestore zase po kvadratických plochách a v n rozmernom priestore v $n - 1$ rozmernej kvadratickej variete.

Došlo 1. XI. 1957

Движение как функция от n степеней свободы с потенциальной и кинетической энергией, данной квадратичной формой

Ю. Гронец

Содержание

Эти движения здесь исследуются помощью дифференциальных систем с постоянными коэффициентами, поэтому в первой главе автор занимается именно такими дифференциальными системами. Исходит из дифференциальной системы (1) и эту, применяя подстановку (2), преобразует к дифференциальной системе (3), которая, если определить коэффициенты подстановки системами (7), преобразуется к каноническому виду (10). Здесь выступающие r_i являются корнями характеристических уравнений (6). Различает два случая: а) если все корни характеристического уравнения различны, б) если корни характеристического уравнения кратны. В первом случае решения даны системой (11), во втором случае опять системой (13) и неоднородной дифференциальной системой.

Во второй главе автор определяет колебание как функцию от n степеней свободы данное квадратичными формами. Эти формы преобразует к нормальному виду и воспользуется уравнением Лагранжа. Таким образом получит каноническую дифференциальную систему и решает ее.

В третьей главе показывает, что суммой кинетической и потенциальной энергии движения в определенной точке является данная постоянная величина.

В четвертой главе определяет общую дифференциальную систему движения в виде (26) и покажет, что движение сложено из n компонентов движения.

В пятой главе покажет, что корни характеристического уравнения (29) дифференциальной системы действительны, не равны нулю и все они положительны.

В шестой главе определит координаты движения, а) если все корни характеристического уравнения различны, б) если между ними содержатся также кратные корни.

В седьмой главе опять, наоборот, к колебанию, данному уравнениями (34), определит коэффициенты квадратичных форм кинетической и потенциальной энергии.

В восьмой главе покажет, что колебание, данное квадратичными формами кинетической и потенциальной энергии, в плоскости совершается по кривым второго порядка, в пространстве опять по поверхностям второго порядка и в n-мерном пространстве по $(n - 1)$-мерной квадратной вариете.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. III-1, MATHEM., 1958]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. III. FASC. I. MATHEMATICA 1958

Bemerkung über die Ketten in teilweise geordneten Mengen

M. KOLIBIAR

In der Arbeit [1] untersuchte O. Ore unter anderem die Gültigkeitsbedingungen der Jordan-Dedekindschen Kettenbedingung in längenendlichen teilweise geordneten Mengen.[1]) (Wir nennen eine teilweise geordnete Menge *längenendlich*, wenn jede Kette, die irgend zwei Elemente miteinander verbindet, endlich ist.) Einige Resultate der Arbeit [1], resp. [3] für solche teilweise geordneten Mengen verschärfte M. Benado [2]. (In der Arbeit [2] wird eine mit der Längenendlichkeit äquivalente Bedingung benutzt.)

Die Untersuchungen in der Arbeit [2] sind auf die Tatsache gestützt, daß die längenendlichen teilweise geordneten Mengen Vielverbände [4] sind. In der vorliegenden Note zeigen wir, daß man die Ergebnisse der Arbeit [2] (und zwar in einer etwas verschärften Form) auch auf eine breitere Klasse der teilweise geordneten Mengen übertragen kann, die nicht Vielverbände zu sein brauchen.

In der ganzen Arbeit wird P eine teilweise geordnete Menge bedeuten.

1. Definitionen und einleitende Bemerkungen

1.1. Ein Paar von Ketten $u \leqq a \leqq v$, $u \leqq b \leqq v$ in P wird ein *Viereck* [4] heißen und durch $(u, v; a, b)$ bezeichnet werden. Wir sagen, daß das Viereck $(u, v; a, b)$ *einfach* [2][2]) ist, wenn in P keine drei solche Elemente p, q, r existieren, für welche irgendeine von den Bedingungen (a), (b) erfüllt wäre:

(a) $\quad a \leqq p < v, \quad b \leqq q < v, \quad u < r \leqq p, \quad r \leqq q;$

(b) $\quad u < p \leqq a, \quad u < q \leqq b, \quad p \leqq r < v, \quad q \leqq r.$

1.2. Ein Paar von maximalen Ketten A, B von u nach v $(u < v)$ wird ein *Zyklus* [1] genannt und mit (A, B) bezeichnet. Einen solchen Zyklus nennen wir *irreduzibel*, wenn für jede zwei Elemente $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, $a, b \neq u, v$, das Viereck $(u, v; a, b)$ einfach ist.

Wir sagen in Übereinstimmung mit [2], daß der Zyklus (A, B) auf den

[1]) Siehe auch [3].

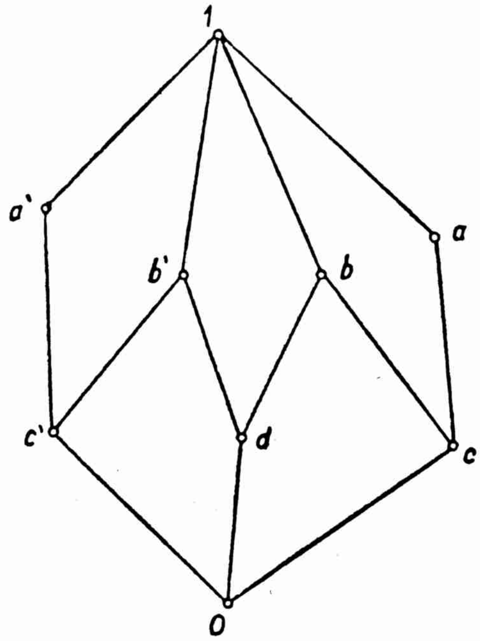
[2]) Die vorliegende Definition unterscheidet sich nur formell von der in [2] benutzten Definition (wir wählen eine andere Formulation um die Begriffe der Vielverbände zu vermeiden).

Seiten des Vierecks $(u, v; a, b)$ liegt, wenn die Ketten A, B u mit v verbinden und $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$.

1.3. A, B seien maximale Ketten von u nach v. Wir sagen, daß die Kette B aus der Kette A durch eine *einfache Deformation* abgeleitet werden kann, wenn es die Elemente u', v' gibt, so daß $u \leqq u' < v' \leqq v$, $A_u^{u'} = B_u^{u'}$, $A_{v'}^{v} = B_{v'}^{v}$ [3]) gilt und die Ketten $A_{u'}^{v'}$, $B_{u'}^{v'}$ einen irreduziblen Zyklus bilden. Wenn die Kette B aus der Kette A durch endlich viele aufeinanderfolgende einfache Deformationen abgeleitet werden kann, so sagen wir, die Ketten A, B seien *verbunden*.

B e m e r k u n g e n. 1. Der irreduzible Zyklus ist ein einfacher Zyklus [1], also ist die einfache Deformation die „simple deformation' im Ore-schen Sinne [1]. Man sieht leicht, daß die Umkehrung nicht gilt. (In dem im weiteren angeführten Beispiele bilden die Ketten (1) einen einfachen Zyklus, der nicht irreduzibel ist.)

2. Wenn die Kette B aus der Kette A durch eine einfache Deformation abgeleitet werden kann, so ist B eine einfache Verbiegung von A [2](§ 2.6). Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel des Verbandes aus [2] (§ 2.3) zeigt, dessen Diagramm in der Abbildung 1 ist. Eine von der Ketten



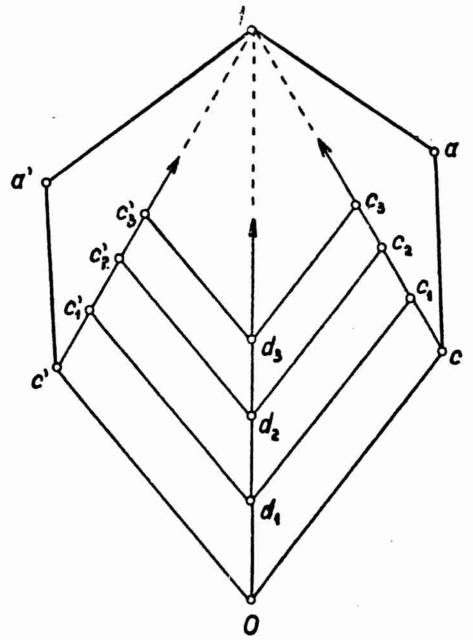
$$0 < c < a < 1, \quad 0 < c' < a' < 1 \tag{1}$$

ist eine einfache Verbiegung der anderen (so ist z. B. das Viereck $(0, 1; a, a')$ einfach), aber die Relation „einfache Deformation" besteht zwischen diesen Ketten nicht.

3. Aus der Bemerkung 2 folgt: Wenn die Ketten A, B verbunden sind, so

[3]) Wir benützen die Bezeichnungen aus [1].

sind sie „gebunden" im Sinne [2] (§ 2.6). In den längenendlichen teilweise geordneten Mengen sind je zwei u mit v $(u < v)$ verbindende Ketten verbunden (Satz 2.1) und auch „gebunden" ([2], Satz 3.2). Die Sache ist ganz anders, wenn P nicht längenendlich ist. Im Verbande, dessen Diagramm Abb. 2 zeigt, sind die Ketten (1) „gebunden" (da das Viereck (0, 1; a, a') einfach ist, ist eine der Ketten eine einfache Verbiegung der anderen), wobei sie aber nicht „verbunden" sind.



1.4. Wir werden die Bedingungen untersuchen, bei welchen in P gelten wird:

(A) Wenn es für die Elemente u, v eine endliche maximale Kette von u nach v gibt, so sind alle maximalen u mit v verbindenden Ketten endlich und haben die gleiche Länge.

2. Einige Sätze über Ketten

2.1. Hilfssatz. *u und v seien Elemente von P $(v < u)$. Ist P längenendlich, so sind je zwei maximale Ketten von v nach u verbunden.*

Bemerkung. Aus der Bemerkung 3 in 1.3 folgt, daß man aus diesem Satze den Satz 3.2 [2] erhält (und natürlich auch den Satz der Arbeit [3]; den Bemerkungen 1 und 2 in 1.3 entsprechend, ist die Behauptung 2.1 schärfer als die hier erwähnten Sätze).

Der Beweis der Behauptung 2.1 läßt sich genau so wie in [3] mit Hilfe des folgenden Hilfssatzes durchführen:

2.2. *Gibt es in P zwei maximale Ketten A, B von v nach u $(v < u)$, die nicht* *verbunden sind, so gibt es in P Elemente $v' < u'$ und maximale Ketten A', B' von v' nach u' die nicht verbunden sind, so daß $v \leqq v'$, $u' \leqq u$ und dabei gilt wenigstens eine von den Bedingungen: $u' < u$, $v < v'$.*

Bemerkung. In diesem Hilfssatze nehmen wir nicht an, daß P längenendlich ist. Der Beweis des Hilfssatzes 2.2 ist ähnlich, wie die Beweise der analogen Sätze in [2] resp. [3].

Beweis. Die Ketten A, B bilden nicht einen irreduziblen Zyklus, denn sonst wären die Ketten A, B verbunden. Also muß ein Viereck $(v, u; a, b)$, $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, $a, b \neq u, v$ vorhanden sein, daß nicht einfach ist. Es gibt also Elemente x_1, y_1, m, für welche die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{(a)} \qquad a \leqq x_1 < u, \qquad b \leqq y_1 < u, \qquad v < m \leqq x_1, \qquad m \leqq y_1,$$

oder dual (b). Es genügt sich mit dem Falle (a) zu beschäftigen (im zweiten Falle kann man dualerweise schließen). Der weitere Verlauf des Beweises ist der gleiche, wie in [2] (3.2.1 Hilfssatz; man muß nur überall den Begriff „gebundene Reihen" durch den Begriff „verbundene Reihen" ersetzen).

2.3. Satz. *Eine teilweise geordnete Menge P hat dann und nur dann die Eigenschaft (A), wenn sie eine von diesen zwei Bedingungen erfüllt:*

(I) *Ist eine Kette des irreduziblen Zyklus endlich, so ist es auch die andere Kette dieses Zyklus, wobei sie dieselbe Länge hat.*

(II) *Wenn es für ein einfaches Viereck $(u, v; a, b)$, $a, b \neq u, v$, eine endliche maximale Kette von u nach v über eines der Elemente a, b gibt, dann gibt es einen auf den Seiten dieses Vierecks liegenden Zyklus, dessen Komponenten endlich und von gleicher Länge sind.*

Bemerkung. Die Bedingung (II) unterscheidet sich von der „verallgemeinerten viereckigen Bedingung" [2] nur dadurch, daß sie auch für den Fall, wenn P nicht längenendlich ist, formuliert wird und daß sie von dem in Betracht gezogenen Zyklus die Einfachheit (im Ore-schen Sinne [1]) nicht fordert.

Beweis des Satzes. Es ist klar, daß die Bedingungen (I), (II) notwendig für die Gültigkeit der Eigenschaft (A) sind. Man hat zu zeigen, daß jede von ihnen auch hinreichend ist.

1. Nehmen wir an, daß die Bedingung (I) erfüllt ist. $V(n)$ sei die Aussage: Gibt es eine maximale Kette von u nach v der Länge n, so hat jede u mit v verbindende maximale Kette die Länge n.

Offensichtlich ist die Aussage $V(1)$ richtig. Nehmen wir an, daß $V(n)$ für alle $n < k$ richtig ist. A_u^v sei eine maximale Kette der Länge k, K_u^v eine andere maximale Kette. Ist der Zyklus (A_u^v, K_u^v) irreduzibel, hat die Kette K_u^v der Bedingung (I) gemäß die Länge k. Setzen wir also voraus, der Zyklus (A_u^v, K_u^v) ist nicht irreduzibel. Dann gibt es solche Elemente $a \varepsilon A_u^v$, $b \varepsilon K_u^v$, $a, b \neq u, v$, daß das Viereck $(u, v; a, b)$ nicht einfach ist. Es gibt also die Elemente p, q, r, welche die Bedingungen

$$\text{(a)} \qquad a \leqq p < v, \qquad b \leqq q < v, \qquad u < r \leqq p, \qquad r \leqq q$$

oder die dualen Bedingungen erfüllen.

Es gelte (a) (in dem zweiten Falle kann man dualerweise schließen). B_p^v, C_q^v, D_a^p, E_b^q, F_r^p, G_r^q, H_u^r seien maximale, die entsprechenden Elemente verbindenden Ketten.[4])

[4]) Hier wird das Auswahlaxiom verwendet.

Da $\| A_a^v \| < k$[5]) ist, gilt nach der Induktionsvoraussetzung $\| D_a^p + B_p^v \| = \| A_a^v \|$.[6]) Es gilt daher $\| A_u^a + D_a^p + B_p^v \| = \| A_u^v \| = k$. Die Länge der Kette $A_u^a + D_a^p$ ist kleiner als k und nach der Induktionsvoraussetzung hat die Kette $H_u^r + F_r^p$ dieselbe Länge. Daraus folgt, daß die Kette

$$H_u^r + F_r^p + B_p^v \tag{1}$$

mit der Kette $A_u^a + D_a^p + B_p^v$ und so auch mit der Kette A_u^v die gleiche Länge besitzt.

Durch dieselbe Schlußweise stellen wir fest, daß jede der Ketten

$$H_u^r + G_r^q + C_q^v, \tag{2}$$

$$K_u^b + E_b^q + C_q^v, \tag{3}$$

$$K_u^v \tag{4}$$

mit der vorhergehenden Kette [die Kette (2) mit der Kette (1)] die gleiche Länge hat. [Wir verwenden dabei nacheinander die Induktionsvoraussetzung für die Zyklen $(F_r^p + B_p^v,\ G_r^q + C_q^v)$, $(H_u^r + G_r^q,\ K_u^b + E_b^q)$, $(E_b^q + C_q^v,\ K_b^v)$.]

Daher folgt $\| K_u^v \| = \| A_u^v \|$, d. h. die Aussage $V(k)$ ist richtig, w. z. z. w.

2. Es sei die Bedingung (II) erfüllt. $V(n)$ habe dieselbe Bedeutung, wie im 1. Teile des Beweises.

$V(1)$ ist richtig. Setzen wir voraus, daß $V(n)$ für $n < k$ richtig ist. A_u^v sei eine maximale Kette der Länge $k > 1$ und K_u^v eine andere maximale Kette. Da $k > 1$ ist, existieren Elemente $a \varepsilon A_u^v$, $b \varepsilon K_u^v$, $a, b \neq u, v$. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall a). Das Viereck $(u, v; a, b)$ ist einfach. Dann folgt aus der Bedingung (II), daß zwei maximale Ketten C_u^v, D_u^v von gleicher Länge existieren, wobei $a \varepsilon C_u^v$, $b \varepsilon D_u^v$. Da die Längen der Ketten A_u^a, A_a^v kleiner sind als k, besitzen nach der Induktionsvoraussetzung die Paare von Ketten A_u^a, C_u^a; A_a^v, C_a^v gleiche Längen. Daraus folgt $\| C_u^v \| = \| A_u^v \| = k$. Die Kette D_u^v hat also die Länge k und durch dieselbe Schlußweise wie bei Ketten A_u^v, C_u^v, stellen wir fest, daß die Ketten D_u^v, K_u^v die gleiche Länge besitzen. Die Kette K_u^v hat also die Länge k.

Fall b). Das Viereck $(u, v; a, b)$ ist nicht einfach. Dann existieren Elemente p, q, r, welche den Beziehungen (a) oder den dualen Beziehungen genügen. Weiter kann man wie im 1. Teile des Beweises schließen.

2.4. Satz. *P erfülle eine der Bedingungen (I), (II). Es existiere eine endliche maximale Kette A von u nach v $(u < v)$. Dann ist jede u mit v verbindende Kette (endlich und) mit A verbunden.*

B e w e i s. Aus dem Satze 2.3 folgt, daß das Intervall $\langle u, v \rangle$ längenendlich ist. Jetzt folgt der Satz 2.4 aus dem Hilfssatze 2.1 (welcher auf das Interwall $\langle u, v \rangle$ verwendet ist).

B e m e r k u n g. Aus den Sätzen 2.3 und 2.4 folgt die Behauptung über die hinreichende Bedingung in den Sätzen 3.1 [2], 2 [1] und der Satz 3 [1].

---

[5]) Mit $\| X \|$ wird im Weiteren die Länge der Kette X bezeichnet.

[6]) Wir verwenden die Bezeichnungsweise aus [1]: $D_a^p + B_p^v$ bedeutet die Kette, die durch die Zusammensetzung der Ketten D_a^p, B_p^v gebildet wird.

Literatur

1. Öystein Ore, Chains in partially ordered sets, Bull. Amer. Math. Soc. 49, 1943, 558–566.
2. Mihail Benado, Bemerkungen zu einer Arbeit von Öystein Ore, Revue de Mathématiques pures et appliquées, 1, 1956, 5–12.
3. Saunders Mac Lane, A conjecture of Ore on chains in partially ordered sets, Bull. Amer. Math. Soc., 49, 1943, 567–568.
4. Mihail Benado, Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier, II (Théorie des multistructures), Czechoslov. Math. J., 5 (80), 1955, 308–344.

Došlo 23. XI. 1957.

Poznámka o reťazcoch v čiastočne usporiadaných množinách

M. Kolibiar

Obsah

V práci [1] zaoberal sa O. Ore okrem iného skúmaním podmienok, za ktorých je splnená Jordan-Dedekindova podmienka o reťazcoch v čiastočne usporiadaných množinách, v ktorých každý reťazec medzi dvoma prvkami $u < v$ je konečný. M. Benado [2] zostril niektoré výsledky z práce [1], resp. [3] pre takéto čiastočne usporiadané množiny. Úvahy v práci [2] sa opierajú o fakt, že uvažované čiastočne usporiadané množiny sú multisväzmi [4]. V tejto poznámke sa ukazuje, že výsledky práce [2] možno preniesť (a to vo forme o niečo zosilnenej) aj na širšiu triedu čiastočne usporiadaných množín, ktoré nemusia byť multisväzmi.

Замечание о цепях в частично упорядоченных множествах

М. Колибиар

Резюме

В работе [1] рассматривал О. Орэ между прочим условия, при которых выполнено условие Жордана — Дедекинда в частично упорядоченных множествах, в которых всякая цепь между двумя элементами конечна. Некоторые теоремы содержащиеся в работе [1] (или [3]) и касающиеся этих частично упорядоченных множеств усилил М. Бенадо [2]. Исследования в работе [2] опираются о тот факт,что такие частично упорядоченные множества-мултиструктуры [4]. В предложенном замечании показывается, что результаты работы [2] можно перенести и на более широкий класс частично упорядоченных множеств (а то в несколько усиленной форме), которые не должны быть мултиструктурами.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. III-1, MATHEM., 1958]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM III. FASC. I. MATHEMATICA 1958

Poznámka k oscilátorickým vlastnostiam riešení lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu

M. GREGUŠ

1. V práci [1] M. Zlámal dokázal niekoľko viet týkajúcich sa asymptotických vlastností riešení a oddeľovania nulových bodov oscilátorických riešení diferenciálnej rovnice tretieho rádu tvaru:

$$y''' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{a}$$

za určitých predpokladov o koeficientoch.

V tejto práci vyslovíme vety M. Zlámala pre riešenia diferenciálnej rovnice

$$y''' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]\, y = 0 \tag{b}$$

a dokážeme, že množina riešení diferenciálnej rovnice (b), ktoré osciľujú na celej číselnej osi, vyhovuje určitej diferenciálnej rovnici druhého rádu; pritom ich nulové body sa oddeľujú. Okrem toho dokážeme ešte dve vety týkajúce sa vzdialeností nulových bodov diferenciálnej rovnice (b), z ktorých jedna udáva nevyhnutnú a postačujúcu podmienku pre vzdialenosť dvoch za sebou nasledujúcich nulových bodov riešení diferenciálnej rovnice (b).

2. M. Zlámal [1] dokázal nasledujúce dve vety, týkajúce sa riešení diferenciálnej rovnice (a):

Veta A: *Nech $p(x)$ a $q(x)$ sú spojité funkcie $x \in (a, \infty)$ a nech $p(x)$ je nezáporná. Nech ďalej*

$$M = \limsup_{x \to \infty} \frac{p(x)}{\sqrt{x}} < \infty, \qquad m = \limsup_{x \to \infty} \sqrt{x}\, q(x) < 0$$

a

$$p'(x) - 2q(x) \geqq 0.$$

Potom každé netriviálne riešenie $y(x)$ diferenciálnej rovnice (a) je buď oscilátorické, alebo diverguje do $\pm\infty$ rýchlejšie než určitá kladná mocnina x.

Riešenie diferenciálnej rovnice (a) je oscilátorické v (a, ∞) vtedy a len vtedy, keď pre každé $x \in (a, \infty)$ je

$$yy'' - \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}py^2 < 0.$$

Veta B: *Nech sú splnené predpoklady vety* A *a nech nie je* $p'(x) - 2q(x) \equiv 0$ *v žiadnom intervale. Nech* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *sú dve nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice* (a).

Potom medzi každými dvoma za sebou nasledujúcimi nulovými bodmi riešenia y_1 *leží práve jeden nulový bod riešenia* y_2 *a naopak.*

Vety A a B vyslovíme teraz pre diferenciálnu rovnicu (b) takto:

Veta $\bar{\mathrm{A}}$: *Nech* $A'(x)$, $b(x)$ *sú spojité funkcie premennej* $x \in (-\infty, a)$. *Nech* $A(x)$ *je záporná a nech*

$$M = \limsup_{x \to -\infty} \frac{2A(x)}{\sqrt{-x}} < \infty, \qquad m = \limsup_{x \to -\infty} \sqrt{-x}[A'(x) + b(x)] > 0.$$

Nech ešte $b(x) \geqq 0$ *pre* $x \in (-\infty, a)$.

Potom ak $y(x)$ *je netriviálne riešenie diferenciálnej rovnice* (b), *je buď oscilátorické, alebo diverguje do* $\pm\infty$ *pre* $x \to -\infty$. *rýchlejšie než určitá kladná mocnina* $-x$.

Riešenie $y(x)$ *je oscilátorické v intervale* $(-\infty, a)$ *vtedy a len vtedy, ak pre všetky* $x \in (-\infty, a)$ *je*

$$yy'' - \frac{1}{2}y'^2 + Ay^2 < 0.$$

Veta $\bar{\mathrm{A}}$ je vyslovená veta A pre diferenciálnu rovnicu (a) transformovanú substitúciou $x = -x$. Samozrejme aj predpoklady o koeficientoch A, A', b sú tie isté, ako by boli predpoklady o koeficientoch transformovanej diferenciálnej rovnice (a). Preto aj dôkaz vety $\bar{\mathrm{A}}$ je analogický dôkazu vety A, a preto ho neuvádzame.

Veta $\bar{\mathrm{B}}$: *Nech* $A'(x)$, $b(x)$ *sú spojité funkcie* $x \in (-\infty, \infty)$. *Nech ďalej o koeficientoch* A, A', b *sú splnené predpoklady vety* $\bar{A}$ *a nech* $b(x) \geqq 0$ *pre* $x \in (-\infty, \infty)$; *pritom nech* $b(x)$ *nie je nula v žiadnom intervale.*

Potom ak sú $y_1(x)$, $y_2(x)$ *dve oscilátorické riešenia diferenciálnej rovnice* (b) *v celom intervale* $(-\infty, \infty)$, *ich nulové body sa oddeľujú.*

Dôkaz vety $\bar{\mathrm{B}}$ je úplne podobný dôkazu vety B [1] M. Zlámala.

3. O koeficientoch diferenciálnej rovnice (b) predpokladajme, že $A'(x)$, $b(x)$ sú spojité funkcie v intervale $(-\infty, \infty)$ a $A(x) > 0$, $b(x) \geqq 0$ pre $x \in (-\infty, \infty)$ Nech ešte $b(x) \equiv 0$ nie je splnené v žiadnom intervale.

Diferenciálna rovnica adjungovaná k rovnici (b) je

$$y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) - b(x)]\, y = 0. \tag{c}$$

Riešenia diferenciálnej rovnice (b) spĺňajú tzv. Mammanovu integrálnu identitu:

$$yy'' - \frac{1}{2}y'^2 + Ay^2 + \int_{x_0}^{x} by^2 dt = \text{konšt.} \tag{1}$$

Veta 1: *Nech* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *sú dve nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice* (b), *oscilátorické v intervale* $(-\infty, \infty)$ *a nech ich nulové body sa oddeľujú.*

Potom ich wronskian $\omega(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$, *ktorý je riešením diferenciálnej rovnice* (c) [2], *je rôzny od nuly pre všetky* $x \in (-\infty, \infty)$.

D ô k a z : Predpokladajme opak, t. j. že $\omega(\xi) = 0$, kde $\xi \in (-\infty, \infty)$ je nejaké číslo. Potom existuje riešenie $y(x) = y_2(\xi)\, y_1(x) - y_1(\xi)\, y_2(x)$ diferenciálnej rovnice (b) tej vlastnosti, že $y(\xi) = y'(\xi) = 0$.

Z integrálnej identity (1) však vyplýva, že $y(x) \neq 0$ pre $x < \xi$.

Ukážme, že to nie je možné. Nech totiž $x_1 < x_2 < \xi$ sú dva za sebou nasledujúce nulové body riešenia y_1. Zrejme $sgny_2(x_1) \neq sgny_2(x_2)$; pritom

$$y(x_1) = -y_1(\xi) \,.\, y_2(x_1), \qquad y(x_2) = -y_1(\xi) \,.\, y_2(x_2),$$

a teda $sgny(x_1) \neq sgny(x_2)$ a to je spor s tvrdením, že $y(x) \neq 0$ pre $x < \xi$. Tým sme vetu dokázali.

Veta 2: *Nech y_1, y_2 sú dve nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice* (b), *ktoré osciľujú na celej číselnej osi a ktorých nulové body sa oddeľujú*

Potom každé riešenie diferenciálnej rovnice (b) *tvaru $c_1y_1 + c_2y_2$ osciľuje na celej číselnej osi a vyhovuje určitej diferenciálnej rovnici druhého rádu; pritom nulové body dvoch nezávislých riešení diferenciálnej rovnice* (b) *tvaru $c_1y_1 + c_2y_2$ sa navzájom oddeľujú.*

D ô k a z : Nech y_1, y_2 sú dve nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (b), ktoré osciľujú na celej číselnej osi a ktorých nulové body sa oddeľujú Podľa vety 1 ich wronskian $\omega(x) \neq 0$ pre $x \in (-\infty, \infty)$.

Ukážme, že všetky riešenia $y = c_1y_1 + c_2y_2$ vyhovujú určitej diferenciálnej rovnici druhého rádu. Zrejme

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2; \\ y' &= c_1y_1' + c_2y_2'; \\ y'' &= c_1y_1'' + c_2y_2''. \end{aligned}$$

Vylúčme z posledných troch rovníc c_1, c_2. Po úprave dostávame:

$$y(y_1''y_2' - y_1'y_2'') + y'(y_1y_2'' - y_1''y_2) = \omega y''. \tag{2}$$

Ak berieme do úvahy skutočnosť, že y_1 a y_2 sú riešeniami diferenciálnej rovnice (b), ľahko ukážeme, že

$$\begin{aligned} y_1y_2'' - y_1''y_2 &= \omega', \\ y_1'y_2'' - y_1''y_2' &= \omega'' + 2A\omega. \end{aligned}$$

Po dosadení do (2) ľahko zistíme, že

$$\omega y'' - \omega' y + [\,\omega'' + 2A\omega]\, y = 0. \tag{3}$$

Keďže $\omega(x) \neq 0$ pre $x \in (-\infty, \infty)$, možno rovnicu (3) previesť na samoadjungovaný tvar pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$, ktorý je:

$$\left[\frac{1}{\omega}y'\right]' + \left[\frac{2A}{\omega} + \frac{\omega''}{\omega^2}\right] y = 0. \tag{d}$$

Keďže y_1, y_2 osciľujú na celej číselnej osi a vyhovujú rovnici (d), každé riešenie $y = c_1y_1 + c_2y_2$, ktoré vyhovuje rovnici (2), osciľuje na celej číselnej osi a ich nulové body sa oddeľujú. Tým sme vetu dokázali.

P o z n á m k a 1 : *Ak sú splnené predpoklady vety* $\bar{B}$, *potom nulové body riešení diferenciálnej rovnice* (b), *ktoré oscilujú na celej číselnej osi, sa oddeľujú.*

Veta 3: *Ak je* $y(x)$ *riešením diferenciálnej rovnice* (b) *vlastnosti* $y(x_1) = y(x_2) = 0$, $x_1 < x_2 \in (-\infty, \infty)$, *pritom* $y(x)$ *nemá v* (x_1, x_2) *nulové body, tak každé riešenie* $\bar{y}(x)$ *diferenciálnej rovnice* (b) *vlastnosti* $\bar{y}(\bar{x}) = \bar{y}(x_2) = 0$, $x_1 \leq \bar{x} \leq x_2$ *nemá v intervale* $(\bar{x}, x_2)$ *nulové body.*

D ô k a z : Nech $y(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (*b*) vlastnosti $y(x_1) = y(x_2) = 0$ a nech nemá v intervale (x_1, x_2) nulové body. Nech $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ a nech $\bar{y}(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (b) vlastnosti $\bar{y}(\bar{x}) = \bar{y}(x_2) = 0$.

Nech $y^*(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (b) s dvojnásobným nulovým bodom v bode x_1. Jeho ďalší nulový bod je [3] väčší, alebo sa rovná x_2.

Predpokladajme, že $\bar{y}(x)$ má v $(\bar{x}, x_2)$ ďalší nulový bod. Potom ak zostrojíme riešenie diferenciálnej rovnice (b) vychádzajúce z bodu x_1, ktoré má nulový bod v bode $\bar{x}$, tak musí mať aj nulový bod medzi $\bar{x}$ a x_2, pretože podľa [3] nulové body dvoch riešení, ktoré vychádzajú z toho istého bodu, napravo od tohto bodu sa oddeľujú.

To však je spor s tým, že medzi nulovými bodmi riešenia y^* má každé riešenie vychádzajúce z bodu x_1 práve jeden nulový bod [3].

P o z n á m k a 2 : *Z vety 3 ako dôsledok vyplýva tvrdenie, že riešenie* $\bar{y}(x)$ *vlastnosti* $\bar{y}(\bar{x}) = \bar{y}(x_2) = 0$, $x_1 \leq \bar{x} \leq x_2$, *nemá žiadny nulový bod ani medzi* x_1 *a* $\bar{x}$.

Nech riešenie $\omega(x)$ diferenciálnej rovnice (c) vlastnosti $\omega(a) = \omega'(a) = 0$, kde $a \in (-\infty, \infty)$, je ľubovoľné, ale pevné číslo, má aspoň jeden nulový bod naľavo od a. Potom platí veta:

Veta 4: *Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby nemalo riešenie* $y(x)$ *diferenciálnej rovnice* (b) *vlastnosti* $y(x_1) = y(x_2) = 0$, $x_1 < x_2 \in (-\infty,\infty)$, *medzi* x_1 *a* x_2 *nulové body, je, aby bola splnená nerovnosť:*

$$0 < x_2 - x_1 < x_2 - x_\alpha, \tag{4}$$

kde x_α *je prvý nulový bod riešenia* $\omega(x)$ *diferenciálnej rovnice* (c), *s dvojnásobným nulovým bodom v bode* x_2, *naľavo od* x_2.

D ô k a z : a) Predpokladajme, že medzi bodmi x_1, x_2, x_α platí nerovnosť (4). Nech $\omega(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (c) vlastnosti $\omega(x_2) = \omega'(x_2) = \omega(x_\alpha) = 0$. Nech $y(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (b) vlastnosti $y(x_1) = y(x_2) = 0$ a nech má v intervale (x_1, x_2) ďalší nulový bod. Ukážeme, že to nie je možné

Je známe [4], že z bodu x_α vychádza riešenie $Y(x)$ diferenciálnej rovnice (b) s dvojnásobným nulovým bodom v bode x_α, ktoré prechádza bodom x_2. Za predpokladu, že $Y(x)$ nemá v intervale (x_α, x_2) ďalšie nulové body, z vety 3 vyplýva, že ani $y(x$ nemôže mať v intervale (x_1, x_2) nulové body.

Ukážme, že $Y(x)$ nemá v intervale (x_α, x_2) nulový bod. Predpokladajme opak. Nech totiž $Y(\bar{x}) = 0$, kde $\bar{x} \in (x_\alpha, x_2)$. Riešenie Y dá sa písať v tvare[3], $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, kde y_1, y_2 sú riešenia diferenciálnej rovnice (b) vlastností: $y_1(x_2) = y_1'(x_2) = 0$, $y_2(x_2) = y_2''(x_2) = 0$, a $y_1(x)$ nemá naľavo od x_2 žiadny nulový bod.

Utvorme si výraz:

$$\left(\frac{c_1y_1 + c_2y_2}{y_1}\right)' = c_2\frac{\omega}{y_1^2},$$

kde $\omega = y_1y_2' - y_1'y_2$ je riešením diferenciálnej rovnice (c) vlastnosti $\omega(x_2) = \omega'(x_2) = \omega(x_\alpha) = 0$. Integrujme poslednú rovnosť v intervale $\langle x_\alpha, \bar{x} \rangle$. Na ľavej strane dostaneme nulu a na pravej výraz rôzny od nuly, čo však je spor. Teda $Y(x)$ nemá v intervale (x_α, x_2) nulove body.

b) Predpokladajme, že $x_1 < x_\alpha < x_2$. Ukážme, že v tomto prípade riešenie $y(x)$ diferenciálnej rovnice (b) vlastnosti $y(x_1) = y(x_2) = 0$ má medzi x_α a x_2 aspoň jeden nulový bod.

Podľa predchádzajúceho z bodu x_α vychádza riešenie $y(x)$ diferenciálnej rovnice (b) s dvojnásobným nulovým bodom v bode x_α, ktoré prechádza bodom x_2. Nech $\bar{y}(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (b) vlastnosti $\bar{y}(x_1) = \bar{y}(x_\alpha) = 0$. Podľa vety 8 [3] má toto riešenie práve jeden nulový bod medzi x_α a x_2, a teda každé riešenie diferenciálnej rovnice (b) vlastnosti $y(x_1) = 0$ má medzi x_α a x_2 nulový bod, pretože nulové body riešení diferenciálnej rovnice (b) vlastnosti $y(x_1) = 0$ sa napravo od x_1 oddeľujú [3]. Tým sme vetu dokázali.

Došlo 19. XI. 1957.

Literatúra

[1] Zlámal M.: Asymptomic properties of the third order linear differential equations, Spisy Přírodoved. fakulty Masarykovy univerzity, 329, 159, Brno 1951.

[2] Sansone G.: Studi sulle equazioni differenziali lineari omogene di terzo ordine nel campo reale, Revista p. 195, Tucuman 1948.

[3] Greguš M.: O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice homogénnej tretieho rádu, Matematicko-fyzikálny časopis SAV, 2, 73, Bratislava 1955.

[4] Greguš M.: O niektorých vzťahoch medzi integrálmi navzájom adjungovaných lineárnych diferenciálnych rovníc tretieho rádu a o jednom okrajovom probléme,

Примечание к осциляторическим свойствам решений дифференциального уравнения третьего порядка

М. Грегуш

Выводы

В этой работе прежде всего высказаны некоторые теоремы М. Зламала [1], касающееся дифференциально уравнения

$$y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + b(x)]y = 0. \qquad \text{(b)}$$

Дальше показывается, что при некоторых условиях о коэффициентах дифференциального уравнения (b), которые являются осциляторическими на целой числовой оси, исполняют некоторое уравнение второго порядка типа

$$\left[\frac{1}{\omega}\, y'\right]' + \left[\frac{2A}{\omega} + \frac{\omega''}{\omega^2}\right] y = 0, \qquad \text{(d)}$$

где $\omega(x)$ является решением сопряженного уравнения к уравнению (b), при том $\omega(x) \neq 0$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$.

В дальшем показаны две теоремы, из которых вторая дает необходимое и достаточное условие для расстояния двух по себе идущих нулевых точек решения дифференциального уравнения (b).

Bemerkungen zu den oscilatorischen Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung

M. Greguš

Zusammenfassung

In dieser Arbeit sind vor allem einige Sätze von M. Zlámal [1] für die Differentialgleichung

$$y''' + 2A(x)\, y' + [A(x) + b(x)]\, y = 0 \qquad \text{(b)}$$

ausgesprochen.

Weiter ist gezeigt, dass bei bestimmten Voraussetzungen für die Koeffizienten der Differentialgleichung (b) die Menge der Lösungen der Differentialgleichung (b), welche Lösungen auf der ganzen Zahlenachse oscilatorisch sind, die folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$\left[\frac{1}{\omega} y'\right]' + \left[\frac{2A}{\omega} + \frac{\omega''}{\omega^2}\right] y = 0 \qquad \text{(d)}$$

erfüllt.

Dabei ist $\omega(x)$ eine Lösung der adjungierten Differentialgleichung zu der Differentialgleichung (b) und $\omega(x) \neq 0$ ist für alle $x \,\varepsilon\, (-\infty, \infty)$.

Im weiteren sind zwei Sätze und zwar Satz 3 und 4 bewiesen, von welchen der zweite eine notwendige und genügende Bedingung fü die Entfernung zweier nacheinander folgenden Nullstellen der Lösung der Differentialgleichung (b) angibt.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. III-1. MATHEM., 1958]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. III, FASC. I MATHEMATICA 1958

O niektorých problémoch z teórie nekonečných radov

T. ŠALÁT

V tejto práci budeme študovať viaceré vlastnosti nekonečných radov, pričom v prvej a druhej časti práce nadviažeme na výsledky prác [4], [5].

1.

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s komplexnými členmi. Nech M_i $(i = 1, 2, \ldots)$ sú konečné neprázdne množiny komplexných čísel. Utvorme všetky rady tvaru:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_i a_i + \ldots,$$

kde $\varepsilon_i \in M_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Označme znakom X množinu všetkých týchto radov x. Definujme na $\mathsf{X} \times \mathsf{X}$ funkciu ϱ takto: Nech $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n' a_n; \quad x, y \in \mathsf{X}.$$

1. Ak $y = x$, tak $\varrho(x, y) = 0$.

2. Ak $x \neq y$, položme $\varrho(x, y) = \dfrac{1}{l}$, kde l je najmenší index s vlastnosťou: $\varepsilon_l \neq \varepsilon_l'$.

Ľahko sa dá ukázať (podobne ako v práci [4]), že funkcia $\varrho(x, y)$ je metrikou na množine X.

Označme v ďalšom znakom (X, ϱ) metrický priestor vytvorený množinou X a metrikou ϱ. Teda (X, ϱ) je priestor s Baireovskou metrikou. Preberieme niektoré vlastnosti tohto priestoru, ktoré budeme potrebovať pri riešení istého problému z teórie nekonečných radov.

Veta 1,1. Priestor (X, ϱ) je úplný.

D ô k a z. Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská postupnosť bodov z X. Nech $x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{(n)} a_i$. Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje teda prirodzené číslo $n_0(\varepsilon)$ tak, že pre $n, m > n_0(\varepsilon)$ je $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Položme postupne $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots$, teda všetky rady s indexom väčším než $n_0\left(\frac{1}{k}\right)$ sa zhodujú v prvých k členoch. Zostrojme rad $x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i$, kde $\varepsilon_k = \varepsilon^{(n)}$ pre $n > n_0\left(\frac{1}{k}\right)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Tvrdíme: $x_n \to x$. Nech $\varepsilon > 0$, ε ľubovoľné, zvoľme k tak, aby $\frac{1}{k} \leqq \varepsilon$. Potom pre všetky $n > n_0\left(\frac{1}{k}\right)$ platí $\varrho(x_n, x) < \frac{1}{k} \leqq \varepsilon$. Takto sme dôkaz vykonali.

Veta 1,2. Priestor (X, ϱ) je relatívne kompaktný.

Dôsledok: V dôsledku viet 1,1 a 1,2 je (X, ϱ) kompaktný priestor.

D ô k a z : Stačí ukázať, že ku každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-ová sieť priestoru (X, ϱ). Nech $\varepsilon > 0$; zvoľme prirodzené N tak, aby $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Označme znakom $A(\varepsilon)$ množinu všetkých tých radov x, ktoré majú tvar:

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_N a_N + \overset{0}{\varepsilon}_{N+1} a_{N+1} + \overset{0}{\varepsilon}_{N+2} a_{N+2} + \ldots,$$

kde ε_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ prebieha všetky prvky množiny M_i a ε_i^0 $(i = N + 1, N + 2, \ldots)$ je pevne zvolený prvok množiny M_i. Zrejme $A(\varepsilon)$ je konečná množina a ku každému $y \in X$ existuje $x \in A(\varepsilon)$ tak, že $\varrho(x, y) < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Označme v ďalšom znakom K_i číslo $\max\limits_{z \in M_i} |z|$, $i = 1, 2, \ldots$. Nech $\sum_{i=1}^{\infty} K_i |a_i| < +\infty$ (1). Definujme na priestore (X, ϱ) funkciu $S(x)$ takto: $S(x)$ značí súčet radu x. Vzhľadom na podmienku (1) je zrejme každý rad x konvergentný (dokonca absolútne), takže uvedeným predpisom je na celom priestore (X, ϱ) definovaná komplexná funkcia $S(x)$ (jej hodnoty sú komplexné čísla, teda prvky priestoru (K, ϱ_1) všetkých komplexných čísel s obvyklou metrikou $\varrho_1(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$).

Veta 1,3. Funkcia $S(x)$ je spojitá na (X, ϱ).

D ô k a z. $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Zvoľme prirodzené N tak, aby $\sum_{i=N+1}^{\infty} K_i |a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$, To je možné vzhľadom na (1). Nech $x \in \Omega\left(x_0, \frac{1}{N}\right)$, kde $\Omega\left(x_0, \frac{1}{N}\right)$ je guľové okolie bodu x_0. Nech $x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^0 a_i$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i$. Potom zrejme platí:

$$| S(x) - S(x_0) | \leqq | \sum_{i=N+1}^{\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon^0) a_i | \leqq 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} K_i | a_i | < \varepsilon.$$

Takto sme dôkaz vety vykonali.

Označme znakom W množinu súčtov všetkých radov $x \in X$. Problémom patriacim do teórie nekonečných radov je preskúmať vlastnosti množiny $W \subset (K, \varrho_1)$. Podľa známych viet o spojitom zobrazení kompaktných priestorov vyplýva z práve dokázanej vety, že W je kompaktná množina. Je teda W uzavretá a ohraničená v (K, ϱ_1).

Ak o množinách M_i predpokladáme, že pre nekonečne mnoho i M_i obsahuje aspoň dva prvky, tak ukážeme, že W je perfektná množina. Stačí ukázať, že W je husto rozložená. Nech $x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^0 a_i$, $x_0 \varepsilon X$; teda $S(x_0) \in W$. Nech $\varepsilon > 0$. Podľa (1) $K_i | a_i | \to 0$. Existuje teda taký index n, pre ktorý súčasne platí:

1. $K_n | a_n | < \frac{\varepsilon}{2}$;

2. množina M_n obsahuje aspoň dva rôzne prvky. Jedným z týchto prvkov je ε_n, druhý (rôzny od predošlého), označme znakom ε_n'. Utvorme rad $x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i' a_i$, kde $\varepsilon_i' = \varepsilon_i^0$ pre $i \neq n$. Potom zrejme $x \neq x_0$, $S(x) \neq S(x_0)$ a $| S(x) - S(x_0) | = | \varepsilon_n' - \varepsilon_n^0 | | a_n | \leqq 2K_n | a_n | < \varepsilon$. Teda v ľubovoľnom okolí bodu $S(x_0)$ leží aspoň jeden prvok množiny W rôzny od $S(x_0)$. Takto sme tvrdenie dokázali.*)

Všetky tieto výsledky o množine W zhrnieme do vety:

Veta 1,4. Nech $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel; nech M_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) sú konečné neprázdne množiny komplexných čísel. Označme $K_i = \max_{z \varepsilon M_i} | z |$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$) a nech $\sum_{i=1}^{\infty} K_i | a_i | < +\infty$. Označme znakom W množinu všetkých súčtov radov $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i$, kde $\varepsilon_i \varepsilon M_i$ ($i = 1, 2, \ldots$). Potom W je kompaktná množina.

*) V úvahe sa predpokladalo: $a_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \ldots$)

Ak okrem uvedených predpokladov platí pre nekonečne mnoho i: M_i je aspoň dvojbodová množina a pre všetkp i je $a_i \neq 0$, tak W je dokonca perfektná množina.

Dokázaná veta je špeciálnym prípadom všeobecnejšieho výsledku, ktorý dosiahol autor v práci [7] použitím výsledkov práce [6]. No túto vetu sme predsa uviedli, aby sme ukázali užitočnosť použitia Baireovských metrických priestorov v teórii nekonečných radov.

2.

V tejto časti práce budeme študovať niektoré vlastnosti priestorov (X, ϱ) zavedených v prvej časti.

Budeme sa zaoberať predovšetkým stanovením dimenzie priestoru (X, ϱ) v zmysle definície dimenzie v [1].

Veta 2,1. Pre dimenziu dim X priestoru (X, ϱ) platí: $\dim X = 0$.

D ô k a z. Podľa [1] stačí ukázať, že $\dim X = 0$ v každom bode $x \in X$, t. j. ku každej otvorenej množine G, $x \in G$ existuje otvorená množina G_1, $x \in G_1$ tak, že $G_1 \subset G$, $H(G_1) = \varnothing$. [$H(M)$ značí hranicu množiny M.] Nech teda $x \in G$. Zvoľme prirodzené N tak, aby $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right) \subset G$. Nech $x_n \in \Omega\left(x, \frac{1}{N}\right)$, $x_n \to y$. Potom pre všetky $n \geqq n_0$ bude $\varrho(x_n, y) < \frac{1}{N}$, a teda rad y bude mať prvých N členov rovnakých ako rad x_{n_0}, ktorý má prvých N členov rovnakých ako rad x. Teda $\varrho(x, y) < \frac{1}{N} \Rightarrow y \in \Omega\left(x, \frac{1}{N}\right)$. Teda $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right)$ je obojetná množina [z dôkazu je jasné, že $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right)$ je obojetná pri ľubovoľnom N]. Položme $G_1 = \Omega\left(x, \frac{1}{N}\right)$. Potom $x \in G_1 \subset G$, $H(G_1) = \overline{G}_1 - G_1 = \varnothing$, a tak sme vetu dokázali.

Poznatok, že $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right)$ je pri ľubovoľnom x a ľubovoľnom N obojetnou množinou, použijeme na dôkaz nasledujúcej vety o podmnožinách priestoru (X, ϱ), pričom budeme predpokladať, že rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je divergentný rad s kladnými reálnymi členmi, $a_i \to 0$ a $M_i = \{-1, 1\}$ pre $i = 1, 2, 3, \ldots$. V práci [9] sa dokázalo, že množina X_2' všetkých týchto radov $x \in X$, pre ktoré $\lim\limits_{n\to\infty} \inf S_n(x) = -\infty$ [$S_n(x)$ značí n-tý čiastočný súčet radu x] a súčasne $\lim\limits_{n\to\infty} \sup S_n(x) = +\infty$ je množinou druhej kategórie v (X, ϱ) a množina $X_1' = X - X_2'$ je množinou prvej kategórie v (X, ϱ).

Ešte by sa mohlo stať, že existujú body $x \in X_2'$, v ktorých je X_2' prvej kategórie, pričom množina X_2'' všetkých týchto bodov je, ako vieme, vždy množinou prvej kategórie v (X, ϱ). (Pozri [8].) Ukážeme, že $X_2'' = \emptyset$.

Veta 2,2. Nech P je množina všetkých tých $x \in X$, v ktorých je X_2' množinou prvej kategórie. Potom $P = \emptyset$.

Dôsledok. $X_2'' \subset P \Rightarrow X_2'' = \emptyset$.

D ô k a z. Nech $x \in X$. Nech N je ľubovoľné prirodzené číslo. Stačí ukázať, že množina $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right) . X_2'$ je množinou druhej kategórie v (X, ϱ). Keby totiž X_2' bola množinou prvej kategórie v bode x, potom by existovala otvorená množina G, $x \in G$ tak, že $G . X_2'$ by bola množinou prvej kategórie v (X, ϱ). Pre všetky dosť veľké N je $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right) \subset G$, teda množina $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right) . X_2'$ by bola množinou prvej kategórie pre všetky dosť veľké N.

Postupujme pri dôkaze nepriamo. Nech množina $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right) . X_2'$ je množinou prvej kategórie v (X, ϱ). Keďže množina $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right) . X_1'$, $X_1' = X - X_2'$ je množinou prvej kategórie v X (pozri [9]), je aj

$$x, \frac{1}{N}\Big) . X_1' \cup \Omega\left(x, \frac{1}{N}\right) . X_2' = \Omega\left(x, \frac{1}{N}\right)$$

množinou prvej kategórie v (X, ϱ), t. j. $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sú množiny riedke v (X, ϱ). Z otvorenosti $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right)$ v (X, ϱ) vyplýva, že A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sú riedke množiny v $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right) \Rightarrow \Omega\left(x, \frac{1}{N}\right)$ je množinou prvej kategórie v $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right)$. Došli sme tak ku sporu, keďže $\Omega\left(x, \frac{1}{N}\right)$ je uzavretá neprázdna podmnožina úplného priestoru, teda sama je neprázdnym úplným priestorom, ktorý je množinou druhej kategórie (veta Baireova).

Poznamenajme ešte, že (X_1', ϱ), $X_1' = X - X_2'$ nie je kompaktným metrickým priestorom, ako ihneď vidieť, ale nie je ani lokálne kompaktným priestorom. Vyplýva to napríklad z toho, že množina X_1' nie je otvorená v $\overline{X_1'} = X$ (každé okolie bodu $x \in X_1'$ obsahuje body z X_2', ako sa ľahko zistí pomocou Riemannovej vety — pozri [5], [9]). Dokonca ľahko nahliadneme, že žiadny bod $x \varepsilon (X_1', \varrho)$ nie je pre (X_1', ϱ) bodom lokálnej kompaktnosti.

Teda (X_1', ϱ) je príkladom metrického priestoru so spočetnou bázou. Tento priestor nie je ani úplný, ani lokálne kompaktný. To isté platí aj o priestore (X_2', ϱ).

3.

V tejto časti práce budeme sa zaoberať niektorými príbuznými otázkami, ktoré sa vyskytujú pri prerovnávaní nekonečných radov a pri štúdiu radov, o ktoré ide v práci [5].

Nech (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s komplexnými členmi, $a_n \to 0$. Potom, ako je známe (veta Steinitzova — pozri [3]), pre množinu M súčtov všetkých prerovnaní radu (1) nastáva práve jeden z týchto prípadov:

a) $M = \{z\}$, kde z je súčet radu (1). Tento prípad nastáva, ak rad (1) absolútne konverguje.

b) M je priamka v komplexnej rovine.

c) M je celá komplexná rovina.

Ďalej je známe, že množina T všetkých prerovnaní radu (1) má mohutnosť kontinua c, ako ukázal H. M. Sengupta v práci [2] pri štúdiu vlastností istého priestoru, vytvoreného radmi s Fréchetovskou metrikou, zavedeného v teórii nekonečných radov R. P. Agnewom*).

Naskytá sa tu prirodzená otázka, ako vyzerá, čo do mohutnosti, množina všetkých tých prerovnaní radu (1), ktoré majú ten istý súčet $s \in M$, alebo všeobecnejšie, ktorých rady reálnych a imaginárnych častí členov oscilujú v predpísaných medziach.

Ak (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolútne konvergentný rad s reálnymi členmi, tak množina M súčtov všetkých prerovnaní radu je, ako vieme (Riemannova veta), množina všetkých reálnych čísel a k ľubovoľným dvom reálnym číslam $\varkappa$, μ; $\varkappa \leqq \mu$ možno zostrojiť prerovnanie radu (2), ktoré osciluje medzi $\varkappa$ a μ. Riešenie otázky, analogickej k tej, ktorú sme položili pri štúdiu radov (1), podal pre rady (2) H. M. Sengupta v práci [2]. Tu podáme iný dôkaz Senguptovej vety. V ďalšom $\overline{\overline{M}}$ bude značiť mohutnosť (kardinálne číslo) množiny M.

Veta 3,1. Nech $\varkappa$, μ sú dve reálne čísla, $\varkappa \leqq \mu$, $-\infty \leqq \varkappa \leqq +\infty$, $-\infty \leqq \mu \leqq +\infty$. Nech $T_{\varkappa\mu}$, je množina všetkých tých prerovnaní $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ radu (2), pre ktoré platí: $\liminf_{k\to\infty} S_k(x) = \varkappa$, $\limsup_{k\to\infty} S_k(x) = \mu$.

Potom $\overline{\overline{T}}_{\varkappa\cdot\mu} = c$.

---

*) R. P. Agnew: On rearrangements of series, Bull. Amer. Math. Soc. (1940) 46, 797—799.

D ô k a z. Podľa Riemannovej vety existuje rad $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ tak, že

$$\liminf_{k\to\infty} S_k(x_0) = \varkappa, \qquad \limsup_{k\to\infty} S_k(x_0) = \mu.$$

Vyberme z radu x_0 absolútne konvergentný rad (3) $\sum_{l=1}^{\infty} b_l$ (to je možné, keďže $a_{nk} \to 0$). Ak prerovnáme rad (3), nemá to vplyv na zmenu jeho súčtu. Vyjdúc z radu x_0 prerovnávame v ňom tie a len tie a_{nk}, ktoré patria do radu (3). Takto dostávame množinu $T^0_{\varkappa,\mu}$ prerovnaní x radu (2), pre ktoré

$$\liminf_{k\to\infty} S_k(x) = \varkappa, \qquad \limsup_{k\to\infty} S_k(x) = \mu.$$

Zrejme $\overline{\overline{T}}{}^0_{\varkappa,\mu} = c$ a keďže $T^0_{\varkappa,\mu} \subset T_{\varkappa,\mu} \subset T$, kde T značí množinu všetkých prerovnaní radu (2), vyplýva na základe vety Cantor-Bernštejnovej tvrdenie našej vety.

Analogické tvrdenie možno dokázať aj pre rady (1), pričom dôkaz sa zakladá zase na tej istej myšlienke ako dôkaz vety 3,1.

Veta 3,2. Nech $\varkappa_i$, μ_i $(i = 1, 2)$ sú reálne čísla (môžu byť aj nevlastné), nech $\varkappa_i \leqq \mu_i$ $(i = 1, 2)$. Nech $T_{\varkappa,\mu}$ je množina všetkých tých prerovnaní

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = x_1 + ix_2, \qquad x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} R(a_{nk}), \qquad x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} I(a_{nk})^{*})$$

radu (1), pre ktoré platí:

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x_j) = \varkappa_j, \qquad \limsup_{n\to\infty} S_n(x_j) = \mu_j \qquad (j = 1, 2).$$

Tvrdenie: $T_{\varkappa,\mu}$ je buď prázdna množina, alebo $\overline{\overline{T}}_{\varkappa,\mu} = c$.

D ô k a z. Nech zase T značí množinu všetkých prerovnaní radu (1). Ak v množine T neexistuje rad x s požadovanými vlastnosťami, je tvrdenie triviálne. Nech teda existuje $x \in T$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = x_1 + ix_2$ taký, že platí:

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x_j) = \varkappa_j, \qquad \limsup_{n\to\infty} S_n(x_j) = \mu_j \qquad (j = 1, 2).$$

Zase vyčleníme z radu $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ absolútne konvergentný rad $\sum_{l=1}^{\infty} b_l$ a postupujeme ďalej ako pri dôkaze vety 3,1.

*) $R(a)$ značí reálnu, $I(a)$ imaginárnu časť čísla a.

Rovnakým úsudkom dokážeme i nasledujúcu vetu, analogickú k vete 3,1 a vzťahujúcu sa na rady $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, kde $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, $a_n \to 0$; $\varepsilon_n = 1$ alebo -1 pre $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ako je známe, možno ku každým dvom číslam $\varkappa$, μ, $\varkappa \leqq \mu$ zostrojiť takú postupnosť čísel 1 a -1 označme ju $\{\varepsilon_n\}_1^{\infty}$, že rad $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ osciluje medzi $\varkappa$ a μ (Riemannova veta). Nech X značí množinu všetkých radov x.

Veta 3,3. Nech $\sum_1^{\infty} a_n = +\infty$, $a_n > 0$, $a_n \to 0$ a nech $\varkappa$, μ sú dve reálne čísla (môžu byť aj nevlastné), $\varkappa \leqq \mu$. Potom pre množinu $X_{\varkappa,\mu}$ všetkých tých radov $x = \sum_1^{\infty} \varepsilon_n a_n$, $\varepsilon_n = 1$ alebo -1 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, ktoré oscilujú medzi $\varkappa$ a μ, platí: $\overline{\overline{X}}_{\varkappa,\mu} = c$.

D ô k a z. Podľa citovanej Riemannovej vety ku každej dvojici reálnych čísel $\varkappa$, μ, $\varkappa \leqq \mu$ existuje rad $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \in X$ tak, že

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x) = \varkappa, \quad \limsup_{n\to\infty} S_n(x) = \mu.$$

Vyčleňme z radu x absolútne konvergentný rad (A) $\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_{k_l} a_{k_l}$, $k_1 < k_2 < \ldots < k_l < \ldots$. Zvyšný rad označme (B). Teda rad (B) je tvorený (v pôvodnom poradí) tými a len tými $\varepsilon_n a_n$, ktoré nie sú v rade (A). Ak namiesto $\{\varepsilon_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ zvolíme nejakú inú postupnosť čísel 1, -1, dostaneme namiesto (A) iný rad (A'), ktorého súčet nech je a'. Keďže (B) je zrejme neabsolútne konvergentný rad, môžeme pri číslach a_n vystupujúcich v rade (B) zvoliť podľa Riemannovej vety faktory 1 a -1 tak, aby sme dostali rad (B'), oscilujúci medzi $\varkappa - a'$ a $\mu - a'$. Zložením radov (A'), (B') dostaneme rad $x' \in X$ oscilujúci medzi $\varkappa$ a μ. Označme znakom $X_{\varkappa,\mu}^0$ množinu všetkých radov x' oscilujúcich medzi $\varkappa$ a μ, ktoré dostaneme uvedenou konštrukciou. Keďže existuje c navzájom rôznych postupností $\{\varepsilon_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ čísel 1 a -1, je zrejme $\overline{\overline{X}}_{n,\mu}^0 = c$. Uvážme ešte, že $X_{n,\mu}^0 \subset X_{n,\mu} \subset X$; z toho dostaneme na základe Cantor-Bernštejnovej vety správnosť tvrdenia vety.

Práve dokázaná veta je zovšeobecnením jedného výsledku autora, dosiahnutého už prv v práci [5].

L i t e r a t ú r a

[1] W. H u r e w i t z — H. W a l l m a n n : Dimension theory, Princeton, 1948.
[2] H. M. S e n g u p t a : On rearrangements of series, Proc. Amer. Math. Soc., (1950), I., 71—75.
[3] W. N e s s : Umordnung von bedingt konvergent Reihen, Math. Zeit., (1937), 42, 31—50.
[4] T. Š a l á t : O súčtoch istých konvergentných radov, Mat.-fyz. čas. SAV, IV., (1954), 203—211.
[5] T. Š a l á t : Poznámky k Riemannovej vete o divergentných radoch, Mat.-fyz. čas. SAV, V., (1955), 94—100.
[6] J. J a k u b í k : Poznámka o absolútne konvergentných radoch, Mat.-fyz. čas. SAV, V., (1955), 133—136.
[7] T. Š a l á t : K absolútne konvergentným radom, Mat.-fyz. čas. SAV, VII., (1957), 139—142.
[8] S t. B a n a c h : Théorème sur les ensembles de première catégorie, Fund. Math., XVI., (1930), 395—398.
[9] T. Š a l á t : O istých priestoroch radov s Baireovskou metrikou, Mat.-fyz. čas. SAV, (1957), 193—206.

Došlo 20. II. 1958.

О некоторых проблемах из теории рядов

Т. Шалат

Резюме

Эта работа является обобщением и расширением результатов, полученных автором раньше.

В первой части этой работы автор определяет пространство (X, ϱ), где X-множество всех рядов $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_n a_n$, притом $\sum\limits_1^\infty a_n$ фиксированный ряд с комплексными членами, $\varepsilon_n \in M_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, M_n — конечное непустое множество комплексных чисел, ϱ — Беровская метрика $(x, y \in X,\ x \neq y,\ x = \sum\limits_1^\infty \varepsilon_n a_n,\ y = \sum\limits_1^\infty \varepsilon_n' a_n$, потом $\varrho(x, y) = \frac{1}{l}$, где l первый индекс такой, что $\varepsilon_l \neq \varepsilon_l'$ — см. [4]).

Автор изучает некоторые свойства пространства (X, ϱ) и приходит к результату (теорема 1,4), который является обобщением одного результата автора (см. [4]), но содержится как частный случай в одном результате работы [7] (в работе [7] употреблен иной метод).

В другой части работы автор доказывеат, что $\dim X = 0$ (в смысле [1]). Дальше автор доказывает следующую теорему:

Пусть (1) $\sum\limits_1^\infty a_n = +\infty$, $a_n > 0$, $a_n \to 0$, $M_n = \{-1, +1\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. К ряду (1) построим пространство (X, ϱ). Автор уже раньше доказал, что множество X_2' всех $x \in X$, для которых имеет место $\varliminf\limits_{n\to\infty} S_n(x) = -\infty$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} S_n(x) = +\infty$ [$S_n(x)$ значит n-тую частичную сумму ряда x] является множеством второй категории, множество $X_1' = X - X_2'$ является множеством первой категории. Пусть теперь P значит множество всех $x \in X$, в которых X_2' представляет множество первой категории (см. [8] — это значит: суще-

ствует открытое множество G, $x \in G$ такое, что $G \cap X_2'$ есть множество первой категории). Теорема утверждает: P пустое множество.

Пространства (X_1', ϱ) и (X_2', ϱ) являются пространствами с счетной базой, не полными и не локално компактными.

В третьей части работы автор приводит простые доказательства некоторых теорем из теории перестановок рядов и рядов, о которых автор писал в работе [5]. Доказывается теорема:

Пусть $\sum\limits_1^\infty a_n = +\infty$, $a_n > 0$, $a_n \to 0$. Пусть X значит множество всех $x = \sum\limits_1^\infty \varepsilon_n a_n$, $\varepsilon_n = 1$ или -1 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Пусть $\varkappa$, μ действительные числа, $\varkappa \leq \mu$. Пусть $X_{\varkappa, \mu}$ значит множество всех $x \in X$, для которых имеет место $\varliminf\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \varkappa$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \mu$. Потом $X_{\varkappa, \mu}$ имеет мощность континуа.

Эта теорема является обобщением одного результата, полученного автором раньше (см. [5]).

Подобные теоремы (3,1; 3,2) автор доказывает и для перестановок рядов с комплексными и действительными членами. Между прочим автор приводит простое доказательство следующей теоремы Г. М. Сенгупты (см. [2]):

Пусть $T_{\varkappa, \mu}$, $\varkappa \leq \mu$ значит множество всех перестановок x одного не абсолютно сходящегося ряда с действительными членами, для которых имеет место

$$\varliminf_{n\to\infty} S_n(x) = \varkappa, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} S_n(x) = \mu.$$

Потом $T_{\varkappa, \mu}$ имеет мощность континуа.

Über einige Probleme aus der Theorie der unendlichen Reihen

T. Šalát

Zusammenfassung

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung und Erweiterung der früheren Ergebnissen des Verfassers.

Im ersten Teil der Arbeit definiert der Verfasser den Raum (X, ϱ), wo X die Menge aller Reihen $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_n a_n$ ist, wobei $\sum\limits_1^\infty a_n$ eine feste Reihe mit komplexen Gliedern ist, $\varepsilon_n \in M_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, M_n sind endliche, nicht leere Mengen von komplexen Zahlen. ϱ ist die Bareische Metrik, welche folgend definiert ist: $x, y \in X$, $x \neq y$, $x = \sum\limits_1^\infty \varepsilon_n a_n$,

$$y = \sum_1^\infty \varepsilon_n' a_n, \text{ dann } \varrho(x, y) = \frac{1}{l}, \text{ wo } l \text{ die kleinste Zahl ist, so dass } \varepsilon_l \neq \varepsilon_l' \text{ gilt.}$$

(Siehe [4].)

Der Verfasser untersucht einige Eigenschaften des Raumes (X, ϱ) und kommt zum Ergebniss (Satz 1,4), welches eine Erweiterung des früheren Ergebnisses des Verfassers ist (siehe [4]) und dieses Ergebniss ist im Ergebniss der Arbeit [7] (in der Arbeit [7] arbeitet man mit anderer Methode) enthalten.

Im zweiten Teil der Arbeit zeigt der Verfasser, dass $\dim X = 0$ (im Sinne [1]). Weiter beweist der Verfasser den folgenden Satz: Es sei $\sum\limits_1^{\infty} a_n = +\infty$, $a_n > 0$, $a_n \to 0$, $M_n = \{-1, 1\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Konstruieren wir den Raum (X, ϱ). Der Verfasser hat schon früher gezeigt (siehe [9]), dass die Menge X_2 aller derjenigen $x \in X$, für die $\underline{\lim}_{n \to \infty} S_n(x) = -\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} S_n(x) = +\infty$ gilt ($S_n(x)$ bedeutet die n-te Teilsumme der Reihe x), ist eine Menge von der zweiten Kategorie, die Menge $X_1' = X - X_2'$ ist eine Menge von der ersten Kategorie. Es sei jetzt P die Menge aller derjenigen $x \in X$, in denen X_2' eine Menge von der ersten Kategorie ist (siehe [8]). Dann gilt: $P = \varnothing$.

Die Räume (X_1', ϱ) und (X_2', ϱ) sind die Beispiele der separabeln Räume, welche entweder vollständig oder lokal kompakt sind.

Im dritten Teil gibt der Verfasser einige einfache Beweise einiger Sätze aus der Theorie der Umordnung der unendlichen Reihen und aus der Theorie der Reihen, über welche in Arbeit [5] geschrieben ist. Beweist man der Satz:

Es sei $\sum\limits_1^{\infty} a_n = +\infty$, $a_n > 0$, $a_n \to 0$. Es bedeute X die Menge aller Reihen $x = \sum\limits_1^{\infty} \varepsilon_n a_n$; $\varepsilon_n = 1$ oder -1 $(n = 1, 2, \ldots)$. Es seien $\varkappa$, μ reelle Zahlen (eigentliche oder nicht eigentliche), $\varkappa \leqq \mu$. Es bedeute $X_{\varkappa,\mu}$ die Menge aller derjenigen $x \in X$, für welche $\underline{\lim}_{\infty \to \infty} S_n(x) = \varkappa$, $\overline{\lim}_{n \to \infty} S_n(x) = \mu$ gilt. Dann hatt $X_{\varkappa,\mu}$ die Mächtigkeit des Kontinuums.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines früheren Ergebnisses des Verfassers (siehe [5]).

Analogische Sätze (3,1; 3,2) beweist der Verfasser auch für die Umordnungen der Reihen mit komplexen und reellen Gliedern. Unter anderen gibt der Verfasser einen einfachen Beweis dieses Satzes von H. M. Sengupta (siehe [2]).

Es sei $T_{\varkappa,\mu}$, $\varkappa \leqq \mu$ die Menge aller derjenigen Umordnungen x einer nicht absolut konvergenten Reihe mit reellen Gliedern, für welche $\underline{\lim}_{n \to \infty} S_n(x) = \varkappa$, $\overline{\lim}_{n \leftarrow \infty} S_n(x) = \mu$ gilt. Dann hat die Memge $T_{\varkappa,\mu}$ die Mächtigkeit des Kontinuums.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. III-1. MATHEM., 1958]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. III., FASC. I. MATHEMATICA 1958

O zovšeobecnených algebraických systémoch

P. BRUNOVSKÝ

I

Pod pojmom algebry A rozumieme množinu A s nejakou množinou operácií $F = \{f_\alpha\}$. Pod operáciou f_α (n-árnou) rozumieme jednoznačnú funkciu, ktorá každej postupnosti o $n = n(\alpha)$ (n závisí od operácie) prvkoch priraďuje jednoznačne nejaký prvok z množiny A.

Špeciálnymi prípadmi algebry sú napríklad grupa, sväz, okruh atď.

Podobne ako sa zovšeobecňuje pojem funkcie na viacznačnú funkciu, dá sa zovšeobecniť aj pojem operácie na viacznačnú operáciu. Niektoré špeciálne typy algebier (grupa, sväz) boli týmto spôsobom už zovšeobecnené (multigrupa — pozri [3], multisväz — pozri [4]).

V tejto práci je zovšeobecnený pojem algebry na algebru s viacznačnými operáciami a sú pre ňu definované pojmy vytvárajúceho rozkladu, homomorfného zobrazenia, faktorovej algebry. Ďalej je ukázané, že pre ne platia niektoré obdobné vety, ako pre algebry s jednoznačnými operáciami.

V práci sa používajú pojmy, označenia a niektoré jednoduché vety z knihy [1].

II

Definícia 1. *Zovšeobecnenou operáciou* f_α na množine A budeme nazývať funkciu, ktorá každej postupnosti o $n = n(\alpha)$ prvkoch priraďuje jednoznačne nejakú podmnožinu (môže byť aj prázdna) z A.

Definícia 2. Nech je A nejaká množina, $F = \{f_\alpha\}$ množina zovšeobecnených operácií na množine A. Potom množinu A s množinou zovšeobecnených operácií F budeme nazývať *multialgebrou* A. Množinu A budeme nazývať *poľom multialgebry* A.[1])

P o z n á m k a 1. Špeciálnymi typmi multialgebry sú napríklad multigrupa [3] a multisväz [4].

[1]) Iste nenastane nedorozumenie, ak budeme multialgebru a jej pole označovať tým istým písmenom.

P o z n á m k a 2. Špeciálnym prípadom multialgebry je algebra a „čiastočná" algebra[2]) (t. j. množina s operáciami, ktoré nie sú definované pre všetky jej prvky — napríklad operácia delenia nie je v telese definovaná, ak je deliteľom nulový prvok).

P r í k l a d 1. Nech je A ľubovoľná množina. Množinu operácií $F = \{f_n\}$ definujeme takto:

Pre ľubovoľné prvky $x_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, n$ je

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

P r í k l a d 2. Nech je P množina nezáporných celých čísel. Množina zovšeobecnených operácií bude obsahovať jedinú binárnu operáciu f, ktorá každým dvom číslam z P priraďuje množinu ich spoločných násobkov.

Definícia 3. Nech je F množina zovšeobecnených operácií multialgebry A, G množina zovšeobecnených operácií multialgebry B. Ak existuje prosté zobrazenie množiny F na množinu G také, že odpovedajúce si zovšeobecnené operácie sa vzťahujú na taký istý počet prvkov, budeme hovoriť, že *multialgebry A, B sú toho istého typu.*

Ak sú multialgebry A, B toho istého typu, množiny zovšeobecnených operácií na týchto multialgebrách, ako aj odpovedajúce si operácie, budeme značiť rovnakými písmenami.

V ďalšom budeme uvažovať o multialgebrách s pevne danou množinou operácií $F = \{f_\alpha\}$.

Jedným zo základných pojmov v teórii algebier je pojem homomorfného zobrazenia. Tento pojem definujeme pre multialgebry obdobne ako pre algebry.

Definícia 4. Nech sú A, B multialgebry toho istého typu. Nech je h zobrazenie multialgebry A na multialgebru B. Zobrazenie h budeme nazývať *homomorfným,* ak má túto vlastnosť: Pre každú zovšeobecnenú n-árnu operáciu $f_\alpha \in F$ a ľubovoľnú postupnosť o n prvkoch $x_1, \ldots, x_n$ z A platí:

$$h[f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)] = f_\alpha[h(x_1), \ldots, h(x_n)].^{3)} \tag{1}$$

Ak je zobrazenie h naviac prosté, budeme ho nazývať izomorfným. Ak existuje homomorfné (izomorfné) zobrazenie multialgebry A na multialgebru B, budeme hovoriť, že *multialgebra B je homomorfná (izomorfná) s multialgebrou A.*

P o z n á m k a 3. Rovnosť (1) je formálne tá istá, ako pri obyčajných algebrách. Rozdiel je v tom, že tu ide o rovnosť množín.

P o z n á m k a 4. Zrejme môžeme hovoriť, že „multialgebry A, B sú izomorfné" pretože vzťah izomorfizmu je zrejme symetrický (k izomorfnému zobrazeniu totiž existuje inverzné zobrazenie, ktoré je tiež izomorfné).

Zrejme platí

Veta 1. *Ak multialgebra B je homomorfná s multialgebrou A a multialgebra C je homomorfná s multialgebrou B, tak je multialgebra C homomorfná s multialgebrou A.*

[2]) Presne vzaté, je tu určitý rozdiel, pretože výsledkom operácie je prvok, kým výsledkom zovšeobecnenej operácie by bola jednobodová množina.

[3]) Ak je X podmnožina množiny A, značí $h(X)$ množinu obrazov prvkov z X.

III

Ďalším zo základných pojmov je pojem vytvárajúceho (regulárneho) rozkladu. Keďže rozklad algebry príslušný k homomorfnému zobrazeniu (t. j. rozklad, ktorého triedami sú množiny vzorov jedného obrazu) je vytvárajúci, definujeme vytvárajúci rozklad tak, aby platila obdobná veta aj pre multialgebry.

Na to potrebujeme pojem obalu (pozri [1]).

Definícia 5. Nech je B podmnožina množiny A a nech $\overline{R}$ je rozklad množiny A. Potom *obalom* $B \square \overline{R}$ *množiny* B *v rozklade* $\overline{R}$ nazývame systém tried rozkladu $\overline{R}$ incidentných s množinou B.

Definícia 6. Rozklad $\overline{R}$ multialgebry A nazývame *vytvárajúcim*, ak pre každú n-árnu zovšeobecnenú operáciu $f_\alpha \in F$ platí:[4])

ak

$$x_i \equiv y_i(\overline{R}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

tak

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \square \overline{R} = f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \square \overline{R}.$$

Poznámka 5. Na ľubovoľnej multialgebre existujú aspoň dva vytvárajúce rozklady, a to rozklad $\overline{R}_{\max}$, ktorý sa skladá z jedinej triedy je ňou pole multialgebry), a rozklad $\overline{R}_{\min}$, ktorého triedami sú jednobodové množiny.

Príklad 3. Každý rozklad multialgebry A z príkladu 1 je vytvárajúci.

Príklad 4. Nech je P multialgebra z príkladu 2. Nech je m ľubovoľné nezáporné celé číslo. Rozklad $\overline{R}_m$ multialgebry P na zvyškové triedy modulom je vytvárajúci.

Veta 2. *Nech je h homomorfné zobrazenie multialgebry A na multialgebru B. Potom rozklad $\overline{H}$ multialgebry A, príslušný k zobrazeniu h je vytvárajúci.*

Dôkaz. Nech $x_i \equiv y_i(\overline{H})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a $f_\alpha \in F$.

Keďže $\overline{H}$ je rozklad príslušný k h, vyplýva z toho

$$h(x_i) = h(y_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

a teda

$$f_\alpha[h(x_1), \ldots, h(x_n)] = f_\alpha[h(y_1), \ldots, h(y_n)].$$

Táto rovnosť je zrejme ekvivalentná s rovnosťou

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \square \overline{H} = f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \square \overline{H},$$

z čoho vyplýva tvrdenie vety.

Nech sú $\overline{R}$, $\overline{S}$ dva rozklady množiny A. Ak je každá trieda rozkladu $\overline{R}$ obsiahnutá v nejakej triede rozkladu $\overline{S}$, potom hovoríme, že rozklad $\overline{S}$ je *zákrytom* rozkladu $\overline{R}$, $\overline{R}$ je *zjemnením* rozkladu $\overline{S}$ a zapisujeme to $\overline{R} \leq \overline{S}$. Je známe, že relácia $\leq$ je čiastočným usporiadaním v množine rozkladov množiny A a že množina rozkladov množiny A tvorí pri tomto usporiadaní

[4]) Symbolom $x \equiv y(\overline{R})$ označujeme, že x, y sú prvky tej istej triedy rozkladu $\overline{R}$.

úplný sväz, t. j. k ľubovoľnej množine rozkladov $\{\overline{R}_\gamma\}_{\gamma \varepsilon G}$ existuje ich *najmenší spoločný zákryt* $\bigvee_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma$ *a najväčšie spoločné zjemnenie* $\bigwedge_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma$.

Veta 3. *Nech* $\{\overline{R}_\gamma\}_{\gamma \varepsilon G}$ *je nejaká množina vytvárajúcich rozkladov multialgebry* A. *Potom aj rozklad* $\bigvee_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma$ *je vytvárajúci.*

Dôkaz. Nech $f_\alpha \in F$ a $x_i \equiv y_i \ (\bigvee_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Potom existujú také konečné postupnosti prvkov ([pozri 2]) $x_i = x_i^{(0)}$, $x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(ki)} = y_i$, že sú splnené vzťahy

$$x_i^{(0)} \equiv x_i^{(1)} \ (\overline{R}_{\gamma_i^{(1)}}),$$

$$x_i^{(1)} \equiv x_i^{(2)} \ (\overline{R}_{\gamma_i^{(2)}}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_i^{(ki-1)} \equiv x_i^{(ki)} \ (\overline{R}_{\gamma_i^{(ki)}}),$$

kde $\gamma_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \ldots, \gamma_i^{(ki)} \in G$.

Z platnosti

$$x_1^{(0)} \equiv x_1^{(1)} \ (\overline{R}_{\gamma_1^{(1)}})$$

vyplýva

$$f_\alpha(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n) \square \overline{R}_{\gamma_1^{(1)}} = f_\alpha(x_1^{(1)}, x_2, \ldots, x_n) \square \overline{R}_{\gamma_1^{(1)}}.$$

Keďže $\overline{R}_{\gamma_1^{(1)}} \leq \bigvee_{\gamma \varepsilon G} R_\gamma$, vyplýva z toho:[5])

$$f_\alpha(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n) \square \bigvee_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma = f_\alpha(x_1^{(1)}, x_2, \ldots, x_n) \square \bigvee_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma. \tag{2}$$

Takto postupným „nahradzovaním" prvku $x_1^{(j)}$ prvkom $x_1^{(j+1)}$ v rovnosti (2), dostaneme rovnosť

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \square \bigvee_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma = f_\alpha(y_1, x_2, \ldots, x_n) \square \bigvee_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma.$$

Tento postup môžeme postupne zopakovať pre prvky na druhom až n-tom mieste, až nakoniec dostaneme rovnosť

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \square \bigvee_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma = f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \square \bigvee_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma,$$

z čoho vyplýva tvrdenie vety.

Dôsledok. Z vety 3 vyplýva, že množina všetkých vytvárajúcich rozkladov multialgebry A tvorí úplný podpolosväz (vzhľadom na operáciu $\bigvee$) úplného svázu všetkých rozkladov multialgebry A.

Poznámka 6. Obdobná veta pre najväčšie spoločné zjemnenie neplatí, čo vidieť z nasledujúceho príkladu:

Multialgebra A nech sa skladá z piatich prvkov a, b, c, d, e s jednou unárnou operáciou f, definovanou takto:

[5]) Zrejme platí veta: Ak sú $\overline{R}, \overline{S}$ rozklady množiny A, $\overline{R} \leq \overline{S}$ a M, N sú podmnožiny množiny A, tak zo vzťahu $M \square \overline{R} = N \square \overline{R}$ vyplýva vzťah $M \square \overline{S} = N \square \overline{S}$.

$$f(a) = \{a, c, d\}, \qquad f(b) = \{c, d, e\}, \qquad f(c) = f(d) = f(e) = \{c, d\}.$$

Rozklady

$$\overline{R}_1 = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\},$$
$$\overline{R}_2 = \{\{a, b, d\}, \{c, e\}\}$$

sú vytvárajúce, ale ich najväčšie spoločné zjemnenie nie je vytvárajúci rozklad, pretože

$$f(a) \sqcap \bigwedge_{i=1,2} \overline{R}_i \neq f(b) \sqcap \bigwedge_{i=1,2} \overline{R}_i.$$

Naskytá sa otázka, aké podmienky musí splňovať multialgebra, aby najväčšie spoločné zjemnenie každej množiny jej vytvárajúcich rozkladov bol vytvárajúci rozklad.

Definícia 7. Nech je A multialgebra, B jej podmnožina. Budeme hovoriť, že B je *podmultialgebra* multialgebry A, ak pre každú n-árnu zovšeobecnenú operáciu $f_\alpha \in F$ a pre ľubovoľnú postupnosť prvkov $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z B platí

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset B.$$

Veta 4. *Nech je B podmultialgebra multialgebry A a $\overline{R}$ vytvárajúci rozklad multialgebry A. Potom priesek $B \sqcap \overline{R}$ množiny B s rozkladom $\overline{R}$ je vytvárajúci rozklad podmultialgebry B.* (Pojem prieseku pozri v [1].)

D ô k a z. Nech $f_\alpha \in F$, $x_i \equiv y_i \ (B \sqcap \overline{R})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, čo znamená v podstate

$$x_i \equiv y_i \ (\overline{R}), \qquad x_i, y_i \in B.$$

Z toho vyplýva

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \sqcap \overline{R} = f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \sqcap \overline{R}. \tag{3}$$

Keďže $x_i \in B$, $y_i \in B$, musí byť

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \subset B \tag{4}$$
$$f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \subset B.$$

Z rovnosti (3) a vzťahov (4) vyplýva

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \sqcap (B \sqcap \overline{R}) = f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \sqcap (B \sqcap \overline{R}),$$

z čoho vyplýva tvrdenie vety.

IV

Podobne, ako sa na algebrách definujú faktorové algebry, dajú sa na multialgebrách definovať faktorové multialgebry.

Definícia 8. Nech je $\overline{R}$ vytvárajúci rozklad multialgebry A. Nech je F množina zovšeobecnených operácií multialgebry A. Na množine $\overline{R}$ definujeme zovšeobecnené operácie takto:

Nech $f_\alpha \in F$, $\overline{r}_i \in \overline{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n(\alpha)$.
Potom

$$f_\alpha(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_n) = f_\alpha(r_1, \ldots, r_n) \,\square\, \overline{R},$$

kde $r_i \in \overline{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Množinu $\overline{R}$ s takto definovanou množinou zovšeobecnených operácií F budeme nazývať *faktorovou multialgebrou* $\overline{R}$ na multialgebre A.

Poznámka 7. Z vlastností vytvárajúceho rozkladu vyplýva, že definícia operácie f_α na faktorovej multialgebre $\overline{R}$ nezávisí od výberu prvkov $r_i \in \overline{r}_i$.

Poznámka 9. Je zrejmé, že multialgebra a ľubovoľná faktorová multialgebra na nej sú toho istého typu.

Poznámka 9. Na každej multialgebre existujú aspoň dve faktorové multialgebry, a to faktorové multialgebry $\overline{R}_{\min}$ a $\overline{R}_{\max}$ (pozn. 5).

Nech je $\overline{R}$ faktorová multialgebra na multialgebre A. Nech je $\overline{\overline{R}}$ rozklad multialgebry $\overline{R}$. Ak utvoríme súčty tých tried $\overline{r} \in \overline{R}$, ktoré sú obsiahnuté v jednom prvku $\overline{\overline{r}} \in \overline{\overline{R}}$, dostaneme rozklad $\overline{S}$ multialgebry A, ktorý bude zákrytom rozkladu $\overline{R}$. Nazývame ho zákryt rozkladu $\overline{R}$ vynútený rozkladom $\overline{\overline{R}}$.

Veta 5. *Nech je $\overline{R}$ faktorová multialgebra na multialgebre A. Nech je $\overline{\overline{R}}$ rozklad faktorovej multialgebry $\overline{R}$. Nech $\overline{S}$ je zákryt rozkladu $\overline{R}$, vynútený rozkladom $\overline{\overline{R}}$. Potom rozklad $\overline{S}$ je vytvárajúci vtedy a len vtedy, ak je vytvárajúci rozklad $\overline{\overline{R}}$ (na $\overline{R}$).*

Dôkaz. Nech je $\overline{\overline{R}}$ vytvárajúci rozklad.
Nech $f_\alpha \in F$ a $x_i \equiv y_i(\overline{S})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Nech $\overline{s} \in f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \,\square\, \overline{S}$,
čo znamená v podstate

$$\overline{s} \in \overline{S}, \qquad \overline{s} \cap f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \neq \varnothing. \tag{5}$$

Nech sú $\overline{x}_i$ také prvky rozkladu $\overline{R}$, že $x_i \in \overline{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Nech sú $\overline{y}_i$ také prvky rozkladu $\overline{R}$, že $y_i \in \overline{y}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Potom zrejme platí

$$\overline{x}_i \equiv \overline{y}_i(\overline{\overline{R}}).$$

Nech je $\overline{\overline{r}}$ taký prvok z $\overline{\overline{R}}$, že $\overline{s} = \bigcup_{\overline{r} \in \overline{\overline{r}}} \overline{r}$.

Potom z (5) vyplýva

$$f_\alpha(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \cap \overline{\overline{r}} \neq \varnothing.$$

Keďže $\overline{\overline{R}}$ je vytvárajúci rozklad, vyplýva z toho, že

$$f_\alpha(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \cap \overline{\overline{r}} \neq \varnothing,$$

čo znamená, že existuje taký prvok $\overline{r} \in \overline{R}$, že

$$\overline{r} \in \overline{\overline{r}}, \qquad \overline{r} \in f_\alpha(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n).$$

Z toho a z definície faktorovej multialgebry $\overline{R}$ vyplýva

$$f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \cap \overline{r} \neq \varnothing.$$

Ale z $\overline{r} \in \overline{\overline{r}}$ vyplýva $\overline{r} \subset \overline{s}$, a teda

$$f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \cap \overline{s} \neq \emptyset,$$

čo znamená

$$\overline{s} \in f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \square \overline{S}.$$

Z dokázaného vyplýva

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \square \overline{S} \subset f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \square \overline{S}.$$

Zámenou označenia by sme dostali opačnú inklúziu, z čoho vyplýva rovnosť

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \square \overline{S} = f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \square \overline{S},$$

a teda rozklad $\overline{S}$ je vytvárajúci.

Nech teraz $\overline{S}$ je vytvárajúci rozklad.
Nech $f_\alpha \in F$, $\overline{x}_i \equiv \overline{y}_i(\overline{\overline{R}})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Nech $\overline{\overline{r}} \in f_\alpha(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \square \overline{\overline{R}}$,
čo znamená

$$\overline{\overline{r}} \in \overline{\overline{R}}, \qquad f_\alpha(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \cap \overline{\overline{r}} \neq \emptyset.$$

Musí existovať také $\overline{r} \in \overline{R}$, že

$$\overline{r} \in \overline{\overline{r}}, \qquad \overline{r} \in f_\alpha(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n).$$

Keďže $\overline{R}$ je faktorová multialgebra, musí pre ľubovoľné prvky $x_i \in \overline{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ platiť

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \cap \overline{r} \neq \emptyset.$$

Nech $\overline{s}$ je taká trieda rozkladu $\overline{S}$, že $\overline{s} = \bigcup_{\overline{r} \in \overline{\overline{r}}} \overline{r}$.

Keďže $\overline{r} \subset \overline{s}$, musí byť

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \cap \overline{s} \neq \emptyset.$$

Nech $y_i \in \overline{y}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Potom zrejme platí

$$x_i \equiv y_i(\overline{S}),$$

a teda, keďže $\overline{S}$ je vytvárajúci rozklad,

$$f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \cap \overline{s} \neq \emptyset.$$

To znamená, že musí existovať také $\overline{r}_1 \in \overline{\overline{r}}$, že

$$f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \cap \overline{r}_1 \neq \emptyset,$$

a teda

$$\overline{r}_1 \in f_\alpha(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n).$$

Z toho vyplýva

$$f_\alpha(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \cap \overline{\overline{r}} \neq \emptyset,$$

čo znamená

$$\overline{\overline{r}} \in f_\alpha(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \,\square\, \overline{\overline{R}}.$$

Z dokázaného vyplýva

$$f_\alpha(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \,\square\, \overline{\overline{R}} \subset f_\alpha(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \,\square\, \overline{\overline{R}}.$$

Zámenou označenia by sme dostali opačnú inklúziu, z čoho vyplýva rovnosť

$$f_\alpha(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \,\square\, \overline{\overline{R}} = f_\alpha(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \,\square\, \overline{\overline{R}},$$

a teda rozklad $\overline{\overline{R}}$ je vytvárajúci.

P r í k l a d 4. Nech je P multialgebra z príkladu 2. Označme $\overline{r}_0, \overline{r}_1, \overline{r}_2, \ldots, \overline{r}_{m-1}$ prvky jej rozkladu $\overline{R}_m$ (príklad 4). Nech je n deliteľom čísla m. Utvorme rozklad $\overline{\overline{R}}_n$ multialgebry $\overline{R}_m$ tak, že do jednej triedy dáme tie prvky rozkladu $\overline{R}_m$, ktorých indexy dávajú ten istý zvyšok pri delení číslom n. Potom zákryt rozkladu $\overline{R}_m$, vynútený rozkladom $\overline{\overline{R}}_n$, je rozklad $\overline{R}_n$ multialgebry P na zvyškové triedy modulo n. Keďže rozklad $\overline{R}_n$ je vytvárajúci, musí byť aj rozklad $\overline{\overline{R}}_n$ faktorovej multialgebry $\overline{R}_m$ vytvárajúci.

Veta 6. *Nech je $\overline{R}$ faktorová multialgebra na multialgebre A a nech B je podmultialgebra multialgebry A. Potom $B \,\square\, \overline{R}$ je podmultialgebra faktorovej multialgebry $\overline{R}$.*

D ô k a z. Nech $f_\alpha \in F$ a $\overline{x}_i \in B \,\square\, \overline{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$,
čo znamená

$$\overline{x}_i \in \overline{R}, \qquad \overline{x}_i \cap B \neq \emptyset, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nech $x_i \in \overline{x}_i \cap B$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Keďže B je podmultialgebra multialgebry A, musí byť

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \subset B,$$

z čoho vyplýva

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \,\square\, \overline{R} \subset B \,\square\, \overline{R}.$$

Pretože

$$f_\alpha(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \,\square\, \overline{R},$$

je

$$f_\alpha(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \subset B \,\square\, \overline{R}.$$

V

Dokážeme tri vety o izomorfizme faktorových multialgebier.

Veta 7. a) *Ak je multialgebra B homomorfná s multialgebrou A, potom je izomorfná s istou faktorovou multialgebrou na nej.*

b) *Ak je multialgebra B izomorfná s nejakou faktorovou multialgebrou na multialgebre A, potom je homomorfná s multialgebrou A.*

D ô k a z. a) Nech je h homomorfné zobrazenie A na B. Rozklad $\overline{H}$ multialgebry A, príslušný k zobrazeniu h, je podľa vety 2 vytvárajúci, a teda je poľom faktorovej multialgebry $\overline{H}$. Keď ku každému prvku $\overline{a} \in \overline{H}$ priradíme ten prvok $h \in B$, z ktorého vzorov sa prvok $\bar{a}$ skladá, dostaneme prosté zobrazenie $\bar{H}$ na B, ktoré označíme i.

Nech $f_\alpha \in F$ a $\bar{x}_i \in \bar{H}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Nech $x_i \in \bar{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Potom

$$i[f_\alpha(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)] = i[f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \square \bar{H}].$$

Ale

$$i[f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \square \bar{H}] = h[f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)] = f_\alpha[h(x_1), \ldots, (x_n)] =$$
$$= f_\alpha[i(\bar{x}_1), \ldots, i(\bar{x}_n)].$$

Teda zobrazenie i je izomorfné.

b) Nech $\bar{R}$ je nejaká faktorová multialgebra na multialgebre A a nech i je izomorfné zobrazenie faktorovej multialgebry $\bar{R}$ na multialgebru B. Definujeme zobrazenie h multialgebry A na multialgebru B takto:
Nech $a \in A$. Potom $h(a) = i(\bar{a})$, kde $\bar{a}$ je taký prvok z $\bar{R}$, že $a \in \bar{a}$.
Nech $f_\alpha \in F$ a $x_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Nech $\bar{x}_i$ sú také prvky z $\bar{R}$, že $x_i \in \bar{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Potom

$$h[f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)] = i[f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \square \bar{R}] = i[f_\alpha(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)] =$$
$$= f_\alpha[i(\bar{x}_1), \ldots, i(\bar{x}_n)] = f_\alpha[h(x_1), \ldots, h(x_n)].$$

čo znamená, že zobrazenie h je homomorfné.

Dôsledok. Z tvrdenia b) tejto vety špeciálne vyplýva (ak je i identické zobrazenie), že *každá faktorová multialgebra $\bar{R}$ na multialgebre A je s multialgebrou A homomorfná.*

Veta 8. *Nech je $\bar{R}$ faktorová multialgebra na multialgebre A a nech je $\bar{\bar{R}}$ vytvárajúci rozklad na faktorovej multialgebre $\bar{R}$. Nech je $\bar{S}$ zákryt rozkladu $\bar{R}$, vynútený rozkladom $\bar{\bar{R}}$. Potom faktorové multialgebry $\bar{\bar{R}}$ a $\bar{S}$* (pozri vetu 5) *sú izomorfné.*

D ô k a z. Podľa dôsledku vety 7 je faktorová multialgebra $\bar{R}$ homomorfná s multialgebrou A a faktorová multialgebra $\bar{\bar{R}}$ s multialgebrou $\bar{R}$. Podľa vety 1 je teda multialgebra $\bar{\bar{R}}$ homomorfná s multialgebrou A. Podľa vety 7 existuje faktorová multialgebra $\bar{H}$ na multialgebre A, ktorá je izomorfná s multialgebrou $\bar{\bar{R}}$. Z konštrukcie faktorovej multialgebry $\bar{H}$ v dôkaze vety 7 vidieť, že táto je totožná s faktorovou multialgebrou $\bar{S}$, z čoho vyplýva, že multialgebra $\bar{S}$ je s multialgebrou $\bar{\bar{R}}$ izomorfná.

Veta 9. *Nech je B podmultialgebra multialgebry A a nech je $\bar{R}$ vytvárajúci rozklad multialgebry A. Potom podmultialgebra $B \square \bar{R}$ faktorovej multialgebry $\bar{R}$* (veta 6) *a faktorová multialgebra $B \sqcap \bar{R}$ na multialgebre B* (veta 4) *sú izomorfné.*

D ô k a z. Nech $\bar{r} \in B \square \bar{R}$. Definujeme

$$i(\bar{r}) = B \cap \bar{r}.$$

Je zrejmé, že i je prosté zobrazenie $B \,\square\, \overline{R}$ na $B \sqcap \overline{R}$.

Nech $f_\alpha \in F$ a $\overline{x_i} \in B \,\square\, \overline{R}$, $x_i \in B \cap \overline{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Potom

$$f_\alpha(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \,\square\, \overline{R},$$
$$i[f_\alpha(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})] = B \sqcap [f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \,\square\, \overline{R}]. \tag{5}$$

Keďže $x_i \in B$, $i = 1, 2, \ldots, n$, musí byť

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \subset B.$$

Na základe toho ľahko zistíme, že je

$$B \sqcap [f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \,\square\, \overline{R}] = f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \,\square\, (B \sqcap \overline{R}). \tag{6}$$

Ale

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \,\square\, (B \sqcap \overline{R}) = f_\alpha[i(\overline{x_1}), \ldots, i(\overline{x_n})]. \tag{7}$$

Z (5), (6), (7) vyplýva

$$i[f_\alpha(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})] = f_\alpha[i(\overline{x_1}), \ldots, (\overline{x_n})],$$

a teda zobrazenie i je izomorfné.

Literatúra

1. O. Borůvka: Úvod do theorie grup, Praha 1952. 2. O. Borůvka: O rozkladech množin. Rozpravy II. tř. Čes. Akad. roč. 53 (1943), č. 23. 3. O. Ore — Dresher: Theory of multigroups. Amer. J. Math. 60 (1938), 705—733. 4. M. Benado: Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de rafinnement de Schreier. II. Čechoslov. mat. ž. 5 (80), 1955, 308—344.

Došlo 23. XI. 1957

Об обобщенных алгебраических системах

П. Бруновскы

Резюме

I.

Алгеброй A разумеется множество A с каким-то множеством операций $F = \{f_\alpha\}$. Под операцией f_α понимаем однозначную функцию, сопоставляющую в соответствие каждой последовательности $n = n(\alpha)$ элементов из A какой-то элемент из A.

Подобно, как проводится обобщение понятия функции в многозначную функцию, можно обобщить понятие операции в многозначную операцию. Некоторые специальные типы алгебр были уже таким образом обобщены (мултигруппа, мултиструктура — смотри [3], [4]).

II.

Определение 1. *Обобщенной операцией* (n-арной) f_α на множестве A будем называть функцию, однозначно сопоставляющую в соответствие каждой последовательности $n = n(\alpha)$ элементов из A какое-то подмножество множества A.

Определение 2. Пусть A — множество, $F = \{f_\alpha\}$ — множество обобщенных операций на множестве A. Множество A с множеством обобщенных операций F будем называть *мултиалгеброй* A.

Определение 3. Пусть F — множество обобщенных операций мултиалгебры A, G— множество обобщенных операций мултиалгебры B. Если существует такое простое отображение множества F на множество G, что соответствующие операции относятся к тому же числу элементов, то будем говорить, что *мултиалгебры A, B того же типа.*

Определение 4. Пусть A, B — две мултиалгебры того же типа. Отображение $\boldsymbol{h}$ мултиалгебры A на мултиалгебру B будем называть *гомоморфным*, если для каждой n-арной операции f_α и любой последовательности $n(\alpha)$ элементов $x_1, \ldots, x_n \in A$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{h}[f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)] = f_\alpha[\boldsymbol{h}(x_1), \ldots, \boldsymbol{h}(x_n)].$$

Если отображение $\boldsymbol{h}$ кроме того просто, то будем его называть *изоморфным*. Если существует гомоморфное (изоморфное) отображение мултиалгебры A на мултиалгебру B, то будем говорить, что *мултиалгебра B гомоморфна (изоморфна) с мултиалгеброй A.*

Теорема 1. *Если мултиалгебра B гомоморфна с мултиалгеброй A и мултиалгебра C гомоморфна с B, то C гомоморфна с A.*

III.

Определение 5. Пусть B — подмножество множества A. Пусть $\overline{R}$ — разбиение в классы множества A. Через $B \sqcap \overline{R}$ обозначим множество классов разбиения $\overline{R}$, инцидентных с B.

Определение 6. Разбиение $\overline{R}$ мултиалгебры A будем называть *регулярным*, если для каждой обобщенной операции $f_\alpha \in F$ выполняется:
Если $x_i \equiv y_i \; (\overline{R})$, $i = 1, 2, \ldots, n(\alpha)$
то

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \sqcap \overline{R} = f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \sqcap \overline{R}.$$

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{h}$ — гомоморфное отображение мултиалгебры A на мултиалгебру B. Потом разбиение $\overline{H}$, которого классы — множества прообразов одного образа в отображении $\boldsymbol{h}$, регулярно.*

Теорема 3. *Пусть $\{R_\gamma\}_{\gamma \in G}$ какое-то множество регулярных разбиений мултиалгебры A. Потом их соединение $\bigvee_{\gamma \in G} R_\gamma$ (в смысле структуры разбиений множества A) регулярно.*

Подобная теорема для пересечения не верна, что показывает пример.

Определение 7. Подмножество B мултиалгебры A будем называть *подмултиалгеброй мултиалгебры* A, если для каждой обобщенной операции $f_\alpha \in F$ и любой последовательности $n(\alpha)$ элементов $x_1, \ldots, x_n \in B$ выполняется

$$f\alpha(x_1, \ldots, x_n) \subset B.$$

Теорема 4. *Пусть B — подмултиалгебра мултиалгебры A, $\overline{R}$ — регулярное разбиение мултиалгебры A. Тогда множество $B \sqcap \overline{R}$ не пустых пересечений множества B с классами разбиения $\overline{R}$ — регулярное разбиение мултиалгебры B.*

IV.

Определение 8. Пусть $\overline{R}$ — регулярное разбиение мултиалгебры A. Пусть F — множество обобщенных операций мултиалгебры A. На множестве $\overline{R}$ определим обобщенные операции следующим образом:

Пусть $f_\alpha \in F$, $\overline{r}_i \in \overline{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Потом

$$f_\alpha(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_n) = f_\alpha(r_1, \ldots, r_n) \sqcap \overline{R},$$

где $r_i \in \overline{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Множество $\overline{R}$ с таким образом определенными обобщенными операциями будем называть *фактор — мултиалгеброй* $\overline{R}$ на мултиалгебре A.

Пусть $\overline{R}$ — фактор-мултиалгебра на мултиалгебре A, $\overline{\overline{R}}$ — разбиение фактор-мултиалгебры $\overline{R}$. Если образуем соединения тех классов $\overline{r} \in \overline{R}$, которые содержатся в одном классе $\overline{\overline{r}} \in \overline{\overline{R}}$, получим *„разбиение $\overline{S}$ мултиалгебры A, определенное разбиением $\overline{\overline{R}}$".*
Теорема 5. *Пусть $\overline{R}$ — фактор-мултиалгебра на мултиалгебре A, $\overline{\overline{R}}$ — разбиение фактор-мултиалгебры $\overline{R}$. Пусть $\overline{S}$ — разбиение мултиалгебры A, определенное разбиением $\overline{\overline{R}}$. Разбиение $\overline{S}$ регулярно тогда и только тогда, если регулярно разбиение $\overline{\overline{R}}$.*
Теорема 6. *Пусть $\overline{R}$ — фактор-мултиалгебра на мултиалгебре A, B — подмултиалгебра мултиалгебры A. Потом $B \sqcap \overline{R}$ — подмултиалгебра фактор-мултиалгебры $\overline{R}$.*

V.

Теорема 7. а) *Если мултиалгебра B гомоморфна с мултиалгеброй A, то она изоморфна с некоторой ее факторовой мултиалгеброй.*
б) *Если мултиалгебра B изоморфна с какой-то фактор-мултиалгеброй на мултиалгебре A, то она гомоморфна с A.*
Теорема 8. *Пусть $A, \overline{R}, \overline{\overline{R}}, \overline{S}$ — как в теореме 5. Тогда фактор-мултиалгебра $\overline{S}$ изоморфна с фактор-мултиалгеброй $\overline{\overline{R}}$.*
Теорема 9. *Пусть $A, B, \overline{R}$ — как в теореме 6. Потом подмултиалгебра $B \sqcap \overline{R}$ фактор-мултиалгебры $\overline{R}$ изоморфна с фактор-мултиалгеброй $B \sqcap \overline{R}$ на B.*

Über verallgemeinerte algebraische Systeme

P. Brunovský

Zusammenfassung

I.

Unter einer *Algebra* verstehen wir eine Menge A mit irgendeiner Menge von Operationen $F = \{f_\alpha\}$. Unter einer (n-aren) Operation verstehen wir eine eindeutige Funktion, die jeder Folge von $n = n(\alpha)$ Elementen aus A irgendein Element aus A zuordnet.

Ähnlich, wie man den Begriff einer Funktion auf den Begriff einer nicht eindeutigen Funktion verallgemeinert, kann man auch den Begriff der Operation auf den Begriff einer nicht eindeutigen Operation verallgemeinern. Manche spezielle Algebras wurden schon auf diese Art verallgemeinert (Multigruppe, Vielverband — siehe [3], [4]).

II.

Definition 1. Unter einer *verallgemeinerten Operation* (n-aren) f_α in der Menge A werden wir eine Funktion, die jeder Folge von $n = n(\alpha)$ Elementen aus A eindeutig irgendeine Untermenge der Menge A zuordnet, verstehen.

Definition 2. Es sei A eine Menge, $F = \{f_\alpha\}$ irgendeine Menge von verallgemeinerten Operationen in A. Die Menge A mit der Menge F werden wir als *Multialgebra A* bezeichnen.

Definition 3. Es sei F die Menge der verallgemeinerten Operationen der Multialgebra A, G die Menge der verallgemeinerten Operationen der Multialgebra B. Wenn so eine eineindeutige Abbildung der Menge F auf die Menge G existiert, dass sich die entsprechenden Operationen auf dieselbe Zahl von Elementen beziehen, werden wir sagen, dass *die Multialgebras A und B von denselben Typus sind.* (Im weiterem werden wir die entsprechende verallgemeinerte Operationen mit derselber Buchstabe bezeichnen.)

Definition 4. Es seien A, B zwei Multialgebras von denselben Typus. Es sei h eine Abbildung der Menge A auf die Menge B. Die Abbildung h werden wir als ***homomorph*** bezeichnen, wenn für jede n-are verallgemeinerte Operation $f_\alpha \varepsilon F$ und für jede Folge $x_1, \ldots, x_n$ von Elementen aus A

$$h[f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)] = f_\alpha[h(x_1), \ldots, h(x_n)]$$

gilt.

Ist die Abbildung h auserdem eineindeutig, werden wir sie als ***isomorph*** bezeichnen. Wenn eine homomorphe (isomorphe) Abbildung der Multialgebra auf die Multialgebra existiert, dann werden wir sagen, dass B *mit* A *homomorph* (*isomorph*) *ist*.

Satz 1. *Ist die Multialgebra B mit der Multialgebra A und die Multialgebra C mit der Multialgebra B homomorph, so ist auch C mit A homomorph.*

III.

Definition 5. Es sei B eine Untermenge der Menge A, $\overline{R}$ eine Zerlegung der Menge A. Mit $B \sqcap \overline{R}$ werden wir das Sytem derjenigen Klassen der Zerlegung $\overline{R}$ bezeichnen, die mit B inzident sind.

Definition 6. Die Zerlegung $\overline{R}$ der Multialgebra A werden wir als *regulär* bezeichnen, wenn für jede verallgemeinerte Operation $f_\alpha \varepsilon F$ gilt:

Ist

$$x_i \equiv y_i(\overline{R}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

so ist

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \sqcap \overline{R} = f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \sqcap \overline{R}.$$

Satz 2. *Es sei h die homomorphe Abbildung der Multialgebra A an die Multialgebra B. Dann ist die Zerlegung $\overline{H}$ der Multialgebra A, derer Klassen aus derjenigen Elementen bestehen, die sich auf ein und dasselbe Element bei der Abbildung h abbilden, regulär.*

Es ist bekannt, dass die Zerlegungen einer Menge einen vollständigen Verband bilden, d. h., dass zu jeder Menge $\{\overline{R}_\gamma\}_{\gamma \varepsilon G}$ von Zerlegungen der Menge A die Zerlegungen $\bigvee_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma$ und $\bigwedge_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma$ existieren.

Satz 3. *Es sei $\{\overline{R}_\gamma\}_{\gamma \varepsilon G}$ irgendeine Menge von regulären Zerlegungen der Multialgebra A. Dann ist auch die Zerlegung $\bigvee_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma$ regulär.*

Bemerkung. Ein ähnlicher Satz für $\bigwedge_{\gamma \varepsilon G} \overline{R}_\gamma$ gilt nicht, wie man auf einem einfachen Beispiele zeigen kann.

Definition 7. Es sei B eine Untermenge der Multialgebra A. B werden wir als *Teilmultialgebra* der Multialgebra A bezeichnen, wenn für jede n-are verallgemeinerte Operation $f_\alpha \varepsilon F$ und jede Folge $x_1, \ldots, x_n$ von Elementen aus B

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \subset B$$

Satz 4. *Es sei B eine Teilmultialgebra der Multialgebra A, $\overline{R}$ eine reguläre Zerlegung der Multialgebra A. Dann ist das System $B \sqcap \overline{R}$ nicht leerer Durchschnitte der Menge B mit den Klassen der Zerlegung $\overline{R}$ eine reguläre Zerlegung der Multialgebra B.*

IV.

Definition 8. Es sei $\overline{R}$ eine reguläre Zerlegung der Multialgebra A, F die Menge der verallgemeinerten Operationen der Multialgebra A. Es sei $f_\alpha \varepsilon F$, $\overline{r}_i \varepsilon \overline{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dann definieren wir

$$f_\alpha(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_n) = f_\alpha(r_1, \ldots, r_n) \sqcap \overline{R},$$

wo $r_i \varepsilon \overline{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Die Menge $\overline{R}$ mit den so definierten verallgemeinerten Operationen werden wir als *Faktor-multialgebra* $\overline{R}$ *an der Multialgebra* A bezeichnen.

Satz 5. *Es sei* $\overline{R}$ *eine Faktor-multialgebra an der Multialgebra* A, $\overline{\overline{R}}$ *eine Zerlegung der Menge* $\overline{R}$. *Wenn wir die Summen derjenigen Klassen* $\overline{r} \varepsilon \overline{R}$ *schaffen, die in einer und derselben Klasse* $\overline{\overline{r}} \varepsilon \overline{\overline{R}}$ *enthalten sind, bekommen wir eine Zerlegung* $\overline{S}$ *der Multialgebra* A. *Die Zerlegung* $\overline{S}$ *ist dann und nur dann regulär, wenn die Zerlegung* $\overline{\overline{R}}$ *regulär ist.*

Satz 6. $A, B, \overline{R}$ — *wie im Satz 4. Dann ist* $B \sqcap \overline{R}$ *eine Teilmultialgebra der Faktor-multialgebra* $\overline{R}$.

V.

Satz 7. a) *Ist die Multialgebra* B *mit der Multialgebra* A *homomorph, so ist sie mit einer bestimmten Faktor-multialgebra an* A *isomorph.*

b) *Ist die Multialgebra* B *mit irgendeiner Faktor-multialgebra an der Multialgebra* A *isomorph, so ist sie mit der Multialgebra* A *homomorph.*

Satz 8. $A, \overline{R}, \overline{\overline{R}}, \overline{S}$ — *wie im Satz 5. Die Faktor-multialgebras* $\overline{\overline{R}}$ *und* $\overline{S}$ *sind isomorph.*

Satz 9. $A, B, \overline{R}$ — *wie im Satz 6. Dann ist* $B \sqcap \overline{R}$ *mit* $B \sqcap \overline{R}$ *isomorph.*

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. III-1, MATHEM., 1958]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM.III, FASC I. MATHEMATICA 1958

O činnosti JČMF na Slovensku

M. HARANT

Dňa 13. XII. 1957 zišiel sa Slovenský výbor JČSM na svoje tretie zasadnutie od svojho založenia (26. X. 1956), aby zhodnotil činnosť za minulé obdobie a prejednal rad dôležitých úloh.

JČMF je dobrovoľná vedecká výberová spoločnosť pridružená k ČSAV v Čechách a na Morave a k SAV na Slovensku. Má už takmer storočnú tradíciu (založená r. 1862). V minulosti aj dnes má za úlohu starať sa o rozvoj matematických a fyzikálnych vied. Pred druhou svetovou vojnou vydávala JČMF vysokoškolské a stredoškolské učebnice, edície populárnych ai vedeckých kníh, mala svoj vlastný časopis „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky" — dnes zmenený na časopisy ČSAV — a pre žiakov bývalých stredných škôl vydávala „Rozhledy", ktoré sa tešili veľkej popularite a z radov študujúcich získali veľa záujemcov o matematiku a fyziku. Sedemdesiatpäť ročníkov „Časopisu" dôstojne reprezentovalo našu matematicko-fyzikálnu vedu na medzinárodnom fóre.

V prvých desaťročiach existencie JČMF sa život spoločnosti sústreďoval v Prahe, a až obdobie po založení lekárskej fakulty UK znamenalo prvé začiatky schádzania sa záujemcov aj v Bratislave (okolo prof. Teyslera). Po založení vysokej školy technickej a jej prenesení do Bratislavy r. 1939 rozprúdil sa záujem o JČMF v omnoho väčšej miere. Publikácie JČMF stávali sa veľmi vítanou, niekedy jedinou učebnou pomôckou pre našu študujúcu mládež, ktorá už skôr na strednej škole bola odberateľom „Rozhledov". Okolo prof. Hronca sa sústredilo asi 120 záujemcov. Príspevky sa platili (za tzv. Slovenského štátu) ilegálne, časopis a knihy dochádzali. Po oslobodení, 6. II. 1946 bola ustavujúca schôdza novej „Bratislavskej odbočky JČMF" s prvou prednáškou. A až do októbra 1956 prednášková činnosť neprestajne trvala. Konalo sa 5—15 prednášok ročne, často prednášali aj zahraniční hostia. Aj Košice začali menšiu činnosť. Stanovy JČMF sa znova neschválili, a tak celá činnosť pokračujúc v tradíciách schôdzok JČMF sa obmedzovala len na prednáškovú činnosť.

Prelomom v činnosti bolo vypracovanie nových stanov a ich schválenie, ustanovenie Ústredného výboru (predseda doc. dr. Fr. Kahuda, min. školstva) a napokon ustanovenie Slovenského výboru.

Na ustanovujúcej schôdzke v Bratislave dňa 26. X. 1956 bol zvolený Slovenský výbor JČMF v tomto zložení:

Predseda: Akademik dr. Jur Hronec, profesor UK v Bratislave
Podpredseda: Akademik dr. D. Iľkovič, profesor SVŠT v Bratislave
Tajomník: dr. M. Harant, docent UK v Bratislave
Členovia: Anton Dubec, zást. doc. VŠP v Bratislave
dr. J. Fischer, doc. UK v Bratislave
dr. V. Hajko, docent VŠT v Košiciach
dr. A. Huťa, docent UK v Bratislave
dr. Ľ. Kresák, ved. pracovník SAV v Bratislave
dr. Fr. Krňan, odb. asist. SVŠT v Bratislave
Karol Rovan, profesor I. JSŠ v Bratislave
dr. J. Vanovič, profesor VPŠ v Bratislave
Akademik dr. Štefan Schwarz, profesor SVŠT v Bratislave
Náhr. členovia: Pavol Bartoš, profesor JSŠ v Zl. Moravciach
Ladislav Berger, profesor JSŠ v Žiline
dr. inž. P. Gál, profesor SVŠT v Bratislave
dr. E. Jucovič, odb. asist. VŠP v Prešove
dr. M. Kolibiar, doc. UK v Bratislave
dr. Cyril Palaj, doc. VŠLD vo Zvolene
Revízori účtov: dr. V. Medek, docent SVŠT v Bratislave
dr. V. Svitek, profesor VŠP v Bratislave

Práve schôdza 13. XII. 1957 ukázala, ako sa rozvinula činnosť JČMF na Slovensku za posledné ročné obdobie.

Prvou prácou nového výboru, ktorý súčasne reprezentuje výbor pre kraj Bratislava, bolo organizačne zachytiť činnosť pre celé Slovensko. Tak vznikajú krajské pobočky v Nitre (10. XI. 1956), v Košiciach (23. XI. 56), vo Zvolene (24. XI. 56) — pre Bansko-bystrický kraj, v Nitre (5. XII. 56) a v Prešove (13. IV. 57). Až do otvorenia pobočky v Prešove, členovia z prešovského a košického kraja mali spoločnú pobočku v Košiciach. Na otvorení pobočiek sa zúčastnili akademik Hronec a docent Harant. Počet členov vzrástol na 320.

Rozprúdila sa živá prednášková činnosť. Za pomoci aj bratislavských prednášateľov v pobočkách odznelo do 50 prednášok — čo je asi 4—5-krát viac než za minulé roky za to isté obdobie. Pekne sa rozvinuli pobočky tam, kde sú v kraji vysoké školy. Priemerná návšteva prednášok je od 30—100. Najrozsiahlejšiu činnosť mala pobočka v Bratislave, v Košiciach a vo Zvolene. Prednášalo aj viac zahraničných hostí.

Popri prednáškach vedeckého, popularizačného a metodicko-didaktického zamerania konali sa aj prednášky pre pomoc polytechnizácii v školskom vyučovaní (praktická geometria, pokusy vo fyzike), prednášky pre prax (v Nitre a v Bratislave), ktoré boli najpočetnejšie navštevované — až 150 účastníkov.

Vytvorili sa predpoklady konania seminárov s vedeckou tematikou v Bratislave, v Košiciach a vo Zvolene.

Veľká starostlivosť sa venovala zvyšovaniu pomoci našim JSŠ, či už formou prednášok s vhodnou tematikou pre vyučujúcich, praktickými seminármi v spolupráci s Krajskými ústavmi ďalšieho vzdelávania učiteľov, alebo s prednáškami vysokoškolských pracovníkov hodnotiacimi vedomosti žiakov JSŠ, zameranými na odstránenie nedostatkov vo vyučovaní matematiky.

Nepriaznivé výsledky v MO (matematická olympiáda) za posledný rok podnietili zvýšiť starostlivosť o tento druh činnosti. V poslednom období konali sa v krajoch semináre na tematiku nedostatkov, chýb, metód riešenia, vyskytujúcich sa pri riešeniach úloh v MO. Uvažuje sa o rozšírení na časť fyzikálnu. Očakáva sa skvalitnenie práce nielen členov, ale aj študujúcich. Popri hodnotení činnosti výbor sa zapodieval ďalšími dôležitými problémami.

Treba predovšetkým poznamenať, že činnosť JMČF na Slovensku je finančne zabezpečená v SAV, takže JČMF môže plniť všetky úlohy, ktoré mu boli na poli vedy, školy, popularizácie, pomoci praxe, v organizovaní MO atď. zverené.

Výbor privítal, že „Rozhledy", ktoré v roku 1957 oslávili 35. ročník, stávajú sa znova vyhľadávané študujúcimi a že doc. dr. Palaj si zasluhuje pochvalu za ich rozširovanie v kraji Banská Bystrica (426 odberateľov). Skonštatovalo sa, že časopis „Pokroky matematiky, fyziky a astronómie".ešte v plnej miere neplní poslanie členského časopisu.

Veľmi dôležitým bodom jednania bola debata o liste ÚV KSČ na zlepšenie práce v JČMF a najmä o plánovanom prípravnom ročníku pre vysoké školy. Podrobný rozbor a návrh sa zaslal na kompetentné miesta.

Ďalej sa skonštatovalo, že na celoštátnom sjazde fyzikov v Prahe v septembri 1957 zúčastnilo sa 10 členov z pobočiek na Slovensku, pričom pobočky nevyužili všetky možnosti pre väčšiu účasť.

Prediskutoval sa plán prednášok pre budúce obdobie a už dnes je prihlásených asi 40 tém.

Ako najväčšie podujatie pre rok 1958 sa plánuje pracovná schôdza (konferencia) Jednoty na Slovensku s matematickou problematikou. Cieľ konferencie bude:

a) zistiť možnosti zlepšenia vyučovania matematiky na JSŠ zo stránky výchovnej, organizačnej, odbornej a metodickej. V rámci tohto bodu odznejú prednášky o celkovom stave matematiky, o problémoch ideologickej, politickej a polytechnickej výchovy v matematike;

b) oboznámiť sa s najdôležitejšími matematickými problémami vo výskumníctve prírodných a technických vied.

Na konferencii sa má zúčastniť 100 záujemcov (z toho 30 z Čiech a Moravy) a má sa konať od 15. do 20. septembra 1958 v Smoleniciach.

V priebehu roku plánuje sa umiestiť pamätná tabuľa na dome, v ktorom sa narodil veľký slovenský matematik a fyzik J. Petzval, z príležitosti jeho 150. narodenín.

Činnosť Slovenského výboru JČMF je bohatá a prispením ÚV JČMF a pobočiek možno očakávať jej ďalšie zintenzívnenie. Takto sa slovenskí matematici a fyzici v spolupráci s českými pripravujú na zvládnutie zvýšených úloh v prospech rozvoja našej vedy a ku skvalitneniu vyučovania a socialistickej výchovy študujúcich na našich školách všetkých stupňov.

Došlo dňa 28. II. 1958

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

je fakultný sborník určený k publikáciám vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých ašpirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracovávajú materiál získaný za dobu pobytu na našej fakulte. Redakčná rada vyhradzuje si právo z tohto pravidla urobiť výnimku.

Práce profesorov a docentov nepodliehajú recenzii. Práce ostatných učiteľov musia byť odporúčané katedrou. Práce študentov musia byť odporúčané študentskou vedeckou spoločnosťou a príslušnou katedrou.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom alebo anglickom, francúzskom alebo nemeckom. Práce podané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, ob riadok, tak aby jeden riadok tvorilo 60 úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na účet autora.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšete názov práce, pod to meno autora s plným titulom. Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, sa uvádzajú všetky pracoviská. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba ich obidve uviesť.

Fotografie načim podať na čiernom lesklom papieri a uviesť zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba previesť tušom na priehľadnom papieri (pauzák) alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať rezumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam, publikovaným v cudzom jazyku, načim pripojiť rezumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom v prípade publikácie v ruskom jazyku alebo v ruskom jazyku v prípade publikácie v jazyku západnom. **Nezabudnite pri rezumé uviesť vždy názov práce a meno autora v rovnakom poradí ako v základnom texte.** Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a zalomené korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny počas korektúry idú na ťarchu autorského honoráru. Každý autor dostane okrem príslušného honoráru i 50 separátov.

Redakčná rada

OBSAH