

Werk

Titel: Physica

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?312899653_0003|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ACTA
FACULTATIS RERUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. III.

FASC. IX.

PHYSICA

PUBL. II.

7

1959

SLOVENSKE PEDAGOGICKE NAKLADATELSTVO BRATISLAVA

REDAKČNÁ RADA:

Akad. Jur HRONEC
Prof. Dr. O. FERIANC

Prof. Ing. M. FURDÍK
Prof. Dr. J. A. VALŠÍK

REDAKČNÝ KRUH:

Prof. Dr. M. Dillinger

Doc. Dr. J. Fischer

Doc. Dr. M. Harant

Doc. Dr. A. Huťa

Doc. Dr. M. Kolibiar

Člen korešp. SAV prof. Dr. M. Konček

Doc. Dr. L. Korbel

Doc. Dr. J. Májovský

Člen korešp. SAV prof. Dr. L. Pastýrik

Prof. Dr. J. Srb

Prof. Ing. S. Stankoviansky

Doc. Dr. M. Sypták

Equilibrium Concentrations of Ions at Multiple Thermal Ionization of A Gas. A Further Increase of The Accuracy of The Saha Equation

Š. VEIS

I. Introduction

In an earlier work [1], the Saha equation with increased accuracy was derived for the equilibrium concentrations of ions at multiple thermal ionization of a gas in the form

$$\frac{c_{n-1}}{c_n c} = p K_p^{(n)}(T) \exp \left(-\frac{1}{2} (Z_n^2 - Z_{n-1}^2 + 1) \frac{e^2 \alpha}{kT} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{4e\sqrt{\pi}}{\alpha kT} (\sum p_i Z_i^2)^{1/2} \right]^{-1/2} \right\} \right) \quad (1)$$

where

$$K_p^{(n)}(T) = \frac{g_{n-1}}{2g_n} \left(\frac{2\pi}{m} \right)^{3/2} \frac{h^3}{(kT)^{3/2}} e^{\frac{I_n}{kT}} \quad (2)$$

is the equilibrium constant; $c_0, c_1, c_2, \dots$ are the equilibrium concentrations of the neutral, once, twice and many times ionized atoms, c is the equilibrium concentration for electrons, p the pressure, Z_i positive or negative integers determining the charge of the ion, e is the charge of the electron, m the mass of the electron, k the Boltzmann constant, h the Planck constant, α a constant $\sim 10^8 \text{ cm}^{-1}$, T temperature, g_{n-1}, g_n the statistical weights, I_n the ionization energy of the n -th atom.

The Saha equation with an increased degree of accuracy [1] was derived using the potential function for the interaction of ions in the form

$$\varphi_{ab} = \frac{e_a e_b}{r} (1 - e^{-\alpha r}) \quad (3)$$

as a boundary case of the more general-type for the definition of the potential function

$$\varphi_{ab} = \frac{e_a e_b}{r} [1 - A(r) e^{-\alpha r}] \quad (4)$$

and of the binary distribution function in the first approximation

$$F_{ab} = 1 - v \frac{e_a e_b}{4\pi \sum n_i e_i^2} \cdot \frac{p^2 q^2}{p^2 - q^2} \frac{e^{-qr} - e^{-pr}}{r} \quad (5)$$

The interpretation of all the symbols used in this formula is given in [1, 2, 3, 4].

Using the potential functions for the interaction of ions in the form (3), a certain simplification was performed, because, instead of the polynome $A(r)$ in equation (4) for the potential function, only its first member, i. e. 1 has been taken into consideration. Doing this, a certain error was introduced computing the free energy of totally ionized gas, and, thus, the derived Saha equation with an increased degree of accuracy (1) for the equilibrium concentrations of ions has to be considered merely as a certain degree of approximation.

The scope of this work was to determine the higher degree of accuracy of the Saha equation obtained on substituting $A(r) = 1 + \gamma r$ into (4), or on using the potential function for the interaction of ions in the form

$$\varphi_{ab} = \frac{e_a e_b}{r} [1 - (1 + \gamma r) e^{-ar}] \quad (6)$$

In this work, the influence of the linear member is considered, i. e. it is presumed to hold for $A(r) = 1 + \gamma r$, γ being a constant.

II. Free energy and chemical potential of a totally ionized gas

Using the potential function for the interaction of ions in the form (6) and the binary distribution function in the form (5), it is possible to write the free energy of a totally ionized gas as the sum of free energy F_e given by formula (15) in work [1], and the free energy increment ΔF_e corresponding to the difference of the potential functions, namely

$$\Delta \varphi_{ab} = -\gamma e_a e_b e^{-ar} \quad (7)$$

The constant γ may be determined experimentally, or estimated by comparing the equation for the potential functions of ions with the Coulombic interaction omitted, with the member $\Delta \varphi_{ab}^*$ for the potential function of interaction between ions and polarized ions [5, 6, 7]. Thus, the constant γ may be computed by comparison from the equation

$$\gamma = -\frac{1}{r} \left(1 + \frac{\Delta \varphi_{ab}^* r}{e_a e_b} e^{ar} \right)$$

Obviously, the constant γ is negative and has a value of about 10^8 .

The free energy increment ΔF_e corresponding to the potential function differences (7) is given by the relation

$$\Delta F_e = -T \int \frac{\Delta \bar{U}_N}{T^2} dT \quad (8)$$

where $\Delta \bar{U}_N$ is the mean potential energy increment for the interaction of ions

$$\Delta \bar{U}_N = \frac{4\pi}{V} \sum_{a,b} \frac{1}{2} N_a N_b \int \Delta \varphi_{ab}(r) F_{ab}(r) r^2 dr \quad (9)$$

where $\Delta \varphi_{ab}(r)$ is the difference of potential functions given by relation (7), and $F_{ab}(r)$ is the binary distribution function in the first approximation [3, 4] given by equation (5). In this relation $v = \frac{V}{N}$, where V is the volume of the system, N the total number of ions, $n_i = \frac{N_i}{N}$ the concentration of particles of the i -th kind, $p^2 q^2 = \frac{\alpha^2}{r_d^2}$, $p^2 + q^2 = \alpha^2$, and

$$\frac{1}{r_d} = \kappa = \frac{2e\sqrt{\pi}}{\sqrt{kT}} \left(\sum_i N_i Z_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

where r_d is the Debye-Hückel radius.

After having performed the substitution for $\Delta \varphi_{ab}(r)$ and $F_{ab}(r)$, equation (9) for the increment of the mean potential energy of the interaction between ions, $\Delta \bar{U}_N$, is transferred to the form

$$\Delta \bar{U}_N = \frac{\gamma e^2}{2} \sum_i N_i Z_i^2 \frac{p^2 q^2}{p^2 - q^2} \frac{(p - q)(2\alpha + p + q)}{[pq + \alpha(p + q) + \alpha^2]^2} \quad (11)$$

The increment of free energy, ΔF_e , is computed by substituting for $\Delta \bar{U}_N$ from (11) into (8), namely

$$\Delta F_e = - \frac{\gamma e^2 T}{2} \sum_i N_i Z_i^2 J \quad (12)$$

The integral J in (12) is given by the relation

$$J = \int \frac{\left(2 + \sqrt{1 + \frac{2c}{\sqrt{T}}} \right) dT}{\alpha^2 a^2 T^3 \sqrt{1 + \frac{2c}{\sqrt{T}} \left[\frac{c}{\sqrt{T}} + \sqrt{1 + \frac{2c}{\sqrt{T}}} + 1 \right]^2}} \quad (13)$$

where $a = r_d/\sqrt{T}$ and $c = 1/\alpha a$.

After the computation of the integral J , we get for the increment of free energy, ΔF_e , the equation

$$\Delta F_e = \frac{\gamma e^2 T}{2} \sum_i N_i Z_i^2 \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{4} y^4 - \frac{5}{6} y^3 + 3y^2 + 4y - 8 \lg |y| \right) \right\} \quad (14)$$

where $y = \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha r_d}} + 1$.

Substituting into this equation for y , and for $\sum_i N_i Z_i^2$ from equation (10), ΔF_e , after a rearrangement, is transferred to

$$\Delta F_e = \frac{\gamma \alpha^2 kT}{8\pi} \left[\frac{16}{3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha r_d}} \right) - \frac{4}{3\alpha r_d} \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha r_d}} + \frac{1}{\alpha^2 r_d^2} - 8 \lg \left| 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha r_d}} \right| \right] \quad (15)$$

and the total free energy of interaction between ions may be written in the definitive form

$$F = F_e + \Delta F_e = -\frac{\alpha^3 kT}{12\pi} \left\{ \left[1 - \left(\frac{1}{\alpha r_d} - 1 \right) \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha r_d}} + \frac{3}{\alpha^2 r_d^2} \right] - \frac{3\gamma}{2\alpha} \left[\frac{16}{3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha r_d}} \right) - \frac{4}{3\alpha r_d} \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha r_d}} + \frac{1}{\alpha^2 r_d^2} - 8 \lg \left| 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha r_d}} \right| \right] \right\} \quad (16)$$

where, for F_e , the rearranged equation (15) from [1] was used.

The chemical potential, μ_i , is determined from the relation

$$\mu_i = \left(\frac{\partial F}{\partial N_i} \right)_{V,T} \quad (17)$$

and, thus, the increment of the chemical potential is calculated by deriving equation (15) with respect to N_i , namely

$$\Delta \mu_{ie} = \frac{\gamma e^2 Z_i^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha r_d}}} \left(2 - 2\alpha r_d \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha r_d}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha r_d}} + 1} \right) \right\} \quad (18)$$

and the chemical potential of the totally ionized gas formed as a consequence of the interaction between ions, is

$$\mu_i = \mu_{ie} + \Delta \mu_{ie} \quad (19)$$

where μ_{ie} is defined by equation (17) in [1].

The total chemical potential μ_n of an n -times ionized gas is

$$\mu_n = \mu_{nid} + \mu_{ne} + \Delta \mu_{ne} \quad (20)$$

and, after performing the substitution, the equation for the chemical potential is transferred to the final form

$$\begin{aligned} \mu_n = kT \lg p_n - kT \lg \left\{ \left(\frac{m_n kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{ki} \exp \left[-\frac{\epsilon_{ki}}{kT} \right] \right\} - kT \lg (kT) - \\ - \frac{1}{2} e^2 Z_n^2 \alpha \left\{ 1 - \left[1 + \frac{4e\sqrt{\pi}}{\alpha kT} (\sum_i p_i Z_i^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} + \\ Z_n^2 \left\{ 1 - \left[1 + \frac{4e\sqrt{\pi}}{\alpha kT} (\sum_i p_i Z_i^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[2 - \frac{kT}{e\sqrt{\pi}} (\sum_i p_i Z_i^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\left[1 + \frac{4e\sqrt{\pi}}{\alpha kT} (\sum_i p_i Z_i^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} - 1}{\left[1 + \frac{4e\sqrt{\pi}}{\alpha kT} (\sum_i p_i Z_i^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} + 1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

The equations derived for free energy (16) and the chemical potential (21) of the totally ionized gas were determined by using the binary distribution function in the first approximation. It would be possible to use the binary distribution function in the second, or, eventually, in a higher approximation for the determination of these quantities calculated by J. R. Juchnovskij [8].

Using the binary distribution function with an accuracy corresponding to the second degree of approximation, the free energy as well as the chemical potential of the totally ionized gas could be determined more precisely. The calculations would be, however, very complex and not sufficiently clear. The use of the binary distribution functions in a higher approximation would, as it seems, have no substantial effect on free energy or the chemical potential.

III. Equilibrium concentrations of ions

For a gas with the thermodynamic equilibrium at a determined temperature T , an equilibrium between the atoms of a gas with the n -th and the $(n - 1)$ -th degree of ionization will be established after some time. For the case of the thermodynamic equilibrium for the chemical potentials, the validity of equation (22) is presumed, that is

$$\mu_n + \mu = \mu_{n-1} \quad (22)$$

where μ_{n-1} and μ_n are the chemical potentials of $(n - 1)$ and n -times ionized atoms, and μ is the chemical potential of electrons.

Substituting the chemical potentials μ_n , μ_{n-1} and μ determined from equation (21), into equation (22), and proceeding in an analogous way as in [1], a further increase of the accuracy of the Saha equation is obtained, namely

$$\begin{aligned} \frac{c_{n-1}}{c_n c} = p K_p^{(n)}(T) \exp \left(-\frac{1}{2} (Z_n^2 - Z_{n-1}^2 + 1) \frac{e^2 \alpha}{kT} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{4e\sqrt{\pi}}{\alpha kT} \left(\sum_i p_i Z_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{2} (Z_n^2 - Z_{n-1}^2 + 1) \frac{e^2}{kT} \left\{ 1 + \left[1 + \frac{4e\sqrt{\pi}}{\alpha kT} \left(\sum_i p_i Z_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha kT}{e\sqrt{\pi}} \left(\sum_i p_i Z_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{\left[1 + \frac{4e\sqrt{\pi}}{\alpha kT} \left(\sum_i p_i Z_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} - 1}{\left[1 + \frac{4e\sqrt{\pi}}{\alpha kT} \left(\sum_i p_i Z_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} + 1} - 2 \right) \right\} \right) \right) \quad (23) \end{aligned}$$

Equation (23) is transferred to the Saha equation (21) of [1], when the constant γ is put equal to zero.

When the temperature T with predominantly $(n - 1)$ -times ionized atoms is chosen, equation (23) can be simplified to the form

$$\begin{aligned} \frac{c_{n-1}}{c_n c} = p K_p^{(n)}(T) \exp \left(-\frac{1}{2} (Z_n^2 - Z_{n-1}^2 + 1) \frac{e^2 \alpha}{kT} \left\{ 1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[1 + \frac{4e}{\alpha kT} \sqrt{\frac{\pi p}{n} (Z_{n-1}^2 + n - 1)} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{2} (Z_n^2 - Z_{n-1}^2 + 1) \frac{e^2}{kT} \left\{ 1 + \left[1 + \frac{4e}{\alpha kT} \sqrt{\frac{\pi p}{n} (Z_{n-1}^2 + n - 1)} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \right. \\ \left. \cdot \left(\frac{\alpha kT}{e \sqrt{\frac{\pi p}{n} (Z_{n-1}^2 + n - 1)}} - \frac{\left[1 + \frac{4e}{\alpha kT} \sqrt{\frac{\pi p}{n} (Z_{n-1}^2 + n - 1)} \right]^{\frac{1}{2}} - 1}{\left[1 + \frac{4e}{\alpha kT} \sqrt{\frac{\pi p}{n} (Z_{n-1}^2 + n - 1)} \right]^{\frac{1}{2}} + 1} - 2 \right) \right) \end{aligned} \quad (24)$$

The conditions of equilibrium for a once and a twice ionized gas are to be discussed more in detail. The Saha equation for this case may be determined from equation (24) provided that $n = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{c_2 c} = p K_p^{(2)}(T) \exp \left(-\frac{2e^2 \alpha}{kT} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{4e}{\alpha kT} \sqrt{\pi p} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} + \right. \\ \left. + \gamma \frac{2e^2}{kT} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{4e}{\alpha kT} \sqrt{\pi p} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\alpha kT}{e \sqrt{\pi p}} \frac{\left(1 + \frac{4e}{\alpha kT} \sqrt{\pi p} \right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\left(1 + \frac{4e}{\alpha kT} \sqrt{\pi p} \right)^{\frac{1}{2}} + 1} - 2 \right] \right\} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

To compare the increased degree of accuracy of the Saha equation derived in this work with that of the Saha equations with a higher degree of accuracy given in [1, 9, 10], the ionization degree for twice ionized oxygen atoms at a temperature of 20 000 °C in dependence on pressure will be calculated as an example.

The ionization degree for twice ionized oxygen atoms is given by the relation

$$\begin{aligned} \alpha_2 = 2 : p K_p^{(2)}(T) \exp \left(-\frac{2e^2 \alpha}{kT} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{4e}{\alpha kT} \sqrt{\pi p} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} + \right. \\ \left. + \gamma \frac{2e^2}{kT} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{4e}{\alpha kT} \sqrt{\pi p} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\alpha kT}{e \sqrt{\pi p}} \frac{\left(1 + \frac{4e}{\alpha kT} \sqrt{\pi p} \right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\left(1 + \frac{4e}{\alpha kT} \sqrt{\pi p} \right)^{\frac{1}{2}} + 1} - 2 \right] \right\} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

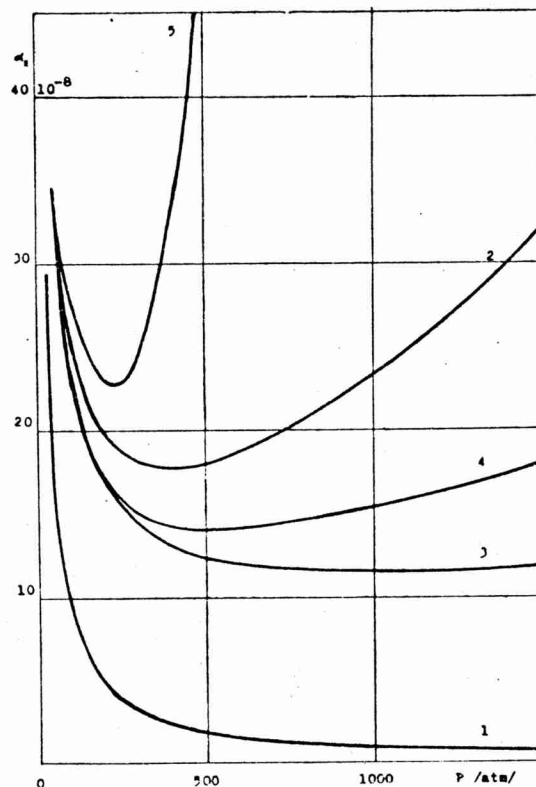


Fig. 1.

Dependence of the ionization degree of twice ionized oxygen atoms on pressure for a temperature of 20 000 °C. 1 — from the Saha equation regardless of the interaction between ions; 2 — from the higher precision Saha equation derived by Timan; 3 — from the Saha equation determined from equation (1); 4 and 5 — from the Saha equation determined from equation (25), for $\gamma = -10^7$ and -10^8 .

Figure 1 shows the dependence of the ionization degree α_2 on pressure for twice ionized oxygen atoms for comparison. α_2 was calculated from the Saha equations with different degrees of accuracy. Curve 1 shows the dependence of α_2 on pressure resulting from the Saha equation regardless of the influence of the interaction between ions. Curve 2 shows the dependence of α_2 resulting from the higher-precision form of the Saha equation derived by Timan which takes into consideration the Coulombic interaction between ions. Curve 3 shows the dependence of α_2 resulting from equation (1). Curves 4 and 5 illustrate the dependence of α_2 on pressure resulting from equation (25) for $\gamma = -10^7$ and -10^8 . As can be seen from Fig. 1, curve 5 for $\gamma = -10^8$ shows that the results for α_2 computed from the higher-precision Saha equation (25) are higher than it would be expected from the higher-precision form of the Saha equation derived by Timan. This fact is in perfect agreement with the supposition of B. L. Timan that, for higher

pressure, the interaction between ions has a still greater importance, that is the twofold ionization degree α_2 has to be greater than would be expected from the higher-precision form of the Saha equation derived by Timan, to which curve 2 is corresponding. From the facts mentioned it follows that the constant γ has to be greater than $-5 \cdot 10^7$ what is also in accordance with the value estimated for the constant γ determined by us.

IV. Conclusion

In this paper, a higher degree of accuracy for the Saha equation based on the theory of N. N. Bogolyubov was reached by using the potential function of interaction between ions in the form (6) as well as by using the polynome $A(r)$ for the potential function of interaction between ions in the form $A(r) = 1 + \gamma r$. Provided that the polynome $A(r)$ with higher powers of r were used, it should be possible to obtain Saha equations with a still higher degree of accuracy and still more truly illustrating the dependence of α_2 on pressure.

Finally, it has to be noted that the higher-precision form of the Saha equation derived by Timan and based on the Debye — Hückel theory, provides no possibility for an additional increase of precision, while the Saha equation, resulting from the theory of N. N. Bogolyubov, makes, for the case of using the potential function of interaction between ions in the form (4), an additional increase of the precision possible. This can be proved also by the Saha equation with a higher degree of accuracy derived in this paper.

References

- [1] Š. Veis, Mat. fyz. čas., 8, 40, 1958.
- [2] A. E. Glauberman, Dokl. Akad. Nauk SSSR 78, 883, 1951.
- [3] A. E. Glauberman, J. R. Juchnovskij, Zhurn. eksper. tekhn. Fiz. 22, 562, 1952.
- [4] A. E. Glauberman, J. R. Juchnovskij, Zhurn. eksper. tekhn. Fiz. 22, 572, 1952.
- [5] O. K. Rice, Electronic Structure and Chemical Binding, London, 1940.
- [6] Handbuch der Physik vol. XXI, Elektronen-Emission-Gasentladungen I, Berlin, 1956.
- [7] J. O. Hirschfelder, Ch. F. Curtiss, R. B. Bird, Molecular Theory of Gases and Liquids, Wisconsin, 1954.
- [8] J. R. Juchnovskij, Zhurn. eksper. tekhn. Fiz. 27, 690, 1954.
- [9] B. L. Timan, Dokl. Akad. Nauk SSSR 97, 1013, 1954.
- [10] B. L. Timan, Zhurn. eksper. tekhn. Fiz. 27, 708, 1954.

Do redakcie dodané 1. VI. 1958.

Равновážне концентра́cie iónov pri viacnásobnej termickej ionizácii plynu. Ďalšie spresnenie Sahovej rovnice

Š. V E I S

S ú h r n

V práci sa uvádza spresnená Sahova rovnica pre rovnovážne koncentrácie iónov pri viacnásobnej termickej ionizácii plynu. Na rozdiel od [1] sme použili potenciálnu funkciu vzájomného pôsobenia iónov vo tvare

$$\varphi_{ab} = \frac{e_a e_b}{r} [1 - (1 + \gamma r) e^{-\alpha r}],$$

kde γ je konštanta, ktorú možno určiť experimentálne. Rovná sa približne -10^8 . Ďalšie spresnenie Sahovej rovnice má tvar (23). Toto spresnenie vedie pri vyšších tlakoch napríklad k väčším hodnotám pre stupeň dvojnásobnej ionizácie atómového kyslíka, ako plynie z Timanovho spresnenia. Vo svojej práci [10] B. L. Timan vyslovil predpoklad, že vzájomné pôsobenie iónov pri vyšších tlakoch bude hrať ešte väčšiu úlohu a jeho vplyv bude efektívnejší ako v prípade Coulombovho vzájomného pôsobenia. Tento predpoklad je v plnom súlade s našim spresnením Sahovej rovnice.

Равновесные концентрации ионов в случае многократной термической ионизации газа. Дальнейшее уточнение уравнения Саха.

Ш. В е и с

(Р е з ю м е)

В докладе приводится уточненное уравнение Саха для равновесных концентраций ионов в случае многократной термической ионизации газа. В отличие от [1] мы приняли потенциальную функцию взаимодействия ионов в виде

$$\varphi_{ab} = \frac{e_a e_b}{r} [1 - (1 + \gamma r) e^{-\alpha r}],$$

где γ постоянная, которую можно определить экспериментальным методом; она приблизительно равна -10^8 . Дальнейшее уточнение уравнения Саха принимает вид (23). Это уточнение в случае очень высоких давлений приводит например к большим значениям для степени двукратной ионизации атомарного кислорода, как следует из уточнения Тимана. В своей работе [10] Б. Л. Тиман высказал предположение, что взаимодействие ионов в случае очень высоких давлений будет играть большую роль, и влияние взаимодействия ионов будет еще более эффективным, чем в случае кулоновского взаимодействия. Это предположение есть в полном согласии с нашим уточнением уравнения Саха.

A Simple Geometric Model of the Quantum Field Theory

M. PETRÁŠ

In this work, a model of the quantum field theory in which the Green's functions have the significance of contravariant components of a metric tensor, is suggested.

Introduction

The purpose of this paper is to indicate the analogy between the equations valid for the Green's functions in the quantum field theory as well as between the equations used for the computation of contravariant components of the metric tensor from given covariant components. Based on this analogy, it is possible to build a geometric model of the quantum field theory, for which the Green's functions have the significance of contravariant components of the metric tensor. The most simple geometric model can be found in the case of the so-called linear interaction. By „linear interaction“, such an interaction is understood which, for each elementary act, causes the annihilation of one particle, and the creation of a new one. Though the examination of the linear interaction is of no practical importance, because interactions of this kind do not occur in nature, this examination has, at least, a heuristic significance, because it permits us to draw certain conclusions concerning also cases of more complex interactions, which are of practical importance.

1. Metrics and Green's functions

Let us examine the fictive particles A and B which are in linear interaction leading to their mutual transmutation according to the scheme:

$$A \rightleftharpoons B$$

The geometric model of the interaction theory for the particles A and B will be developed in the following way: Let us examine an n -dimensional metric space R_n with the metric tensor G_{ik} . The contravariant components of the metric tensor are determined by the equation

$$G_{ik}G^{ks} = \delta_i^s \quad (1,1)$$

The indices i, k, s , which run from 1 to n , are divided now into two groups. The indices running from 1 to n_1 will be indicated by the symbols $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda$ and the indices running from $n_1 + 1$ to n by the symbols $\mu, \nu, \varrho, \sigma, \tau, \pi$. Equation (1,1) may be written in the following way

$$G_{\alpha\gamma} G^{\gamma\beta} + G_{\alpha\mu} G^{\mu\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} \quad (1,2)$$

$$G_{\alpha\gamma} G^{\gamma\nu} + G_{\alpha\mu} G^{\mu\nu} = 0 \quad (1,3)$$

$$G_{\nu\gamma} G^{\gamma\beta} + G_{\nu\mu} G^{\mu\beta} = 0 \quad (1,4)$$

$$G_{\nu\gamma} G^{\gamma\mu} + G_{\nu\varrho} G^{\varrho\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (1,5)$$

The system of equations (1,2) to (1,5) may be rewritten as

$$G^{\delta\beta} = \gamma^{\delta\beta} + \gamma^{\delta\alpha} \Sigma_{\alpha\gamma}^* G^{\gamma\beta} \quad (1,6)$$

$$G^{\mu\beta} = -\gamma^{\mu\nu} G_{\nu\gamma} G^{\gamma\beta} \quad (1,7)$$

$$G^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\varrho} \Sigma_{\varrho\sigma}^* G^{\sigma\nu} \quad (1,8)$$

$$G^{\gamma\mu} = -\gamma^{\gamma\alpha} G_{\alpha\nu} G^{\nu\mu} \quad (1,9)$$

where

$$\Sigma_{\alpha\gamma}^* = G_{\alpha\mu} \gamma^{\mu\nu} G_{\nu\gamma} \quad (1,10)$$

$$\Sigma_{\nu\varrho}^* = G_{\nu\beta} \gamma^{\beta\alpha} G_{\alpha\varrho} \quad (1,11)$$

and the tensors $\gamma^{\delta\beta}$ and $\gamma^{\mu\nu}$ are defined by the equations

$$G_{\alpha\delta} \gamma^{\delta\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} \quad (1,12)$$

$$G_{\varrho\mu} \gamma^{\mu\nu} = \delta_{\varrho}^{\nu} \quad (1,13)$$

Equations (1,6) and (1,8) have a form similar to Dyson's equation for the Green's function $G(x, y)$ of an electron

$$G(x, y) = S^c(x - y) + \int S^c(x - x') \Sigma^*(x', y') G(y', y) dx' dy' \quad (1,14)$$

By comparison, it will be found that the tensors $G^{\delta\beta}$ and $G^{\mu\nu}$ correspond to a Green function $G(x, y)$, whereas the tensors $\gamma^{\delta\beta}$ and $\gamma^{\mu\nu}$ correspond to the function $S^c(x - y)$, and the tensors $\Sigma_{\alpha\beta}^*$, $\Sigma_{\varrho\sigma}^*$ to the function $\Sigma^*(x', y')$. The summation performed in equations (1,6) and (1,8) corresponds to the integration performed in the Dyson's equation. In addition to this analogy, equations (1,12) and (1,13) may be related to the equation for the causal function $S^c(x - y)$, that is

$$-(i\hat{p} + m) S^c(x - y) = \delta(x - y) \quad (1,15)$$

whence it is obvious that the tensors $G_{\alpha\delta}$ and $G_{\varrho\mu}$ correspond to the operator $-(i\hat{p} + m)$ and, finally, the function $\delta(x - y)$ corresponds to the Kronecker symbols δ_{α}^{β} and δ_{ϱ}^{ν} . It is, however, necessary to note, that the solution of equations (1,12) and (1,13) has one solution only, while to the solution of equation (1,15), obviously, an arbitrary solution of a homogeneous equation may be added. It is, therefore, necessary to add the corresponding boundary conditions for equation (1,15). Then, the equation (1,15) plus boundary conditions correspond to the equations (1,12) and (1,13). With respect to this analogy, the tensor G^{ik} will be called also Green's tensor.

This correspondence leads to a geometrical interpretation of the Green's functions for the particles A and B as covariant components of a metric tensor, whereby we are transferring the quantum theory for particles A and B to the theory of metric space. A fundamental task is the solution of the equation (1,1), that is the calculation of the contravariant components G^{ks} from the known covariant components G_{ik} . In the following the equation (1,1) will be solved by means of the perturbation theory.

Let us assume that the mixed components $G_{\alpha\nu} = G_{\alpha}^{\nu}$ have the form $G_{\alpha\nu} = \alpha \Gamma_{\alpha\nu}$, where α is a small coupling parameter, and the components $\Gamma_{\alpha\nu}$ are of the same order as compared with the components $G_{\alpha\beta}$ and $G_{\mu\nu}$. Let us expand $G^{\delta\beta}$ and $G^{\mu\nu}$ into a power series of α . When we consider that $\Sigma_{\alpha\nu}^*$ and $\Sigma_{\rho\sigma}^*$ are proportional to α^2 , it can be easily found that both series contain only terms with even powers, so that they have the form

$$\begin{aligned} G^{\delta\beta} &= G_{(0)}^{\delta\beta} + G_{(2)}^{\delta\beta} + G_{(4)}^{\delta\beta} + \dots \\ G^{\mu\nu} &= G_{(0)}^{\mu\nu} + G_{(2)}^{\mu\nu} + G_{(4)}^{\mu\nu} + \dots \end{aligned}$$

Substituting these series into equations (1,6) and (1,8), we get a system of recurrent equations

$$\left. \begin{aligned} G_{(0)}^{\delta\beta} &= \gamma^{\delta\beta} \\ G_{(n)}^{\delta\beta} &= \gamma^{\delta\alpha} \Sigma_{\alpha\gamma}^* G_{(n-2)}^{\gamma\beta} \end{aligned} \right\} (n \geq 2) \quad (1,16)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{(0)}^{\mu\nu} &= \gamma^{\mu\nu} \\ G_{(n)}^{\mu\nu} &= \gamma^{\mu\rho} \Sigma_{\rho\sigma}^* G_{(n-2)}^{\sigma\nu} \end{aligned} \right\} (n \geq 2) \quad (1,17)$$

Solving these equations, we get

$$\left. \begin{aligned} G_{(0)}^{\delta\beta} &= \gamma^{\delta\beta} \\ G_{(2)}^{\delta\beta} &= \gamma^{\delta\alpha} \Sigma_{\alpha\gamma}^* \gamma^{\gamma\beta} \\ G_{(4)}^{\delta\beta} &= \gamma^{\delta\alpha} \Sigma_{\alpha\gamma}^* \gamma^{\gamma\epsilon} \Sigma_{\epsilon\lambda}^* \gamma^{\lambda\beta} \end{aligned} \right\} \quad (1,18)$$

and so on.

$$\left. \begin{aligned} G_{(0)}^{\mu\nu} &= \gamma^{\mu\nu} \\ G_{(2)}^{\mu\nu} &= \gamma^{\mu\rho} \Sigma_{\rho\sigma}^* \gamma^{\sigma\nu} \\ G_{(4)}^{\mu\nu} &= \gamma^{\mu\rho} \Sigma_{\rho\sigma}^* \gamma^{\sigma\tau} \Sigma_{\tau\pi}^* \gamma^{\pi\nu} \end{aligned} \right\} \quad (1,19)$$

and so on.

From the equations (1,7) and (1,9), we determine the expansion of the Green's tensors $G^{\mu\beta}$ and $G^{\nu\mu}$. Thus, we get the following recurrent equations

$$G_{(n)}^{\mu\beta} = -\gamma^{\mu\nu} G_{\nu\gamma} G_{(n-1)}^{\gamma\beta} \quad (n \geq 1) \quad (1,20)$$

$$G_{(n)}^{\beta\mu} = -\gamma^{\beta\alpha} G_{\alpha\nu} G_{(n-1)}^{\nu\mu} \quad (n \geq 1) \quad (1,21)$$

hence

$$\left. \begin{aligned} G_{(1)}^{\mu\beta} &= -\gamma^{\mu\nu} G_{\nu\gamma} \gamma^{\gamma\beta} \\ G_{(3)}^{\mu\beta} &= -\gamma^{\mu\nu} G_{\nu\gamma} \gamma^{\gamma\delta} \Sigma_{\delta\alpha}^* \gamma^{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (1,22)$$

and so on.

$$\left. \begin{aligned} G_{(1)}^{\beta\mu} &= -\gamma^{\beta\alpha} G_{\alpha\nu} \gamma^{\nu\mu} \\ G_{(3)}^{\beta\mu} &= -\gamma^{\beta\alpha} G_{\alpha\nu} \gamma^{\nu\sigma} \sum_{\sigma}^* \gamma^{\sigma\mu} \end{aligned} \right\} (1,23)$$

and so on.

The solutions (1,18), (1,19), (1,22) and (1,23) may be represented by means of the Feynman diagrams. We are showing some Feynman diagrams with the corresponding terms in the expansion of the Green's tensors. For the particles A , the solid lines, whereas for the particles B , the dashed lines will be used.

1. Transmutation of particle B to particle A .
2. Transmutation of particle A to particle B .
3. Diagram of the self-energy of particle A .
4. Diagram of the self-energy of the particle B .

For the general Feynman diagram, the corresponding term of the series can be constructed in such a way that to each dashed line, a tensor $\gamma^{\alpha\beta}$, to each solid line, a tensor $\gamma^{\alpha\beta}$, and to each contact point the tensor $-G_{\alpha\nu} = -G_{\nu\alpha}$ is associated.

2. Creation and annihilation operators

Let us define the operators φ_c^i and φ_a^i by means of commutation equations

$$\left. \begin{aligned} [\varphi_a^i; \varphi_c^k] &= G^{ik} \\ [\varphi_a^i; \varphi_a^k] &= 0 \\ [\varphi_c^i; \varphi_c^k] &= 0 \end{aligned} \right\} (2,1)$$

By these operators, it is possible to construct the operators

$$I^{ik} = \varphi_c^i \varphi_a^k - \varphi_c^k \varphi_a^i \quad (2,2)$$

which satisfy the commutation rules

$$[I^{ik}; I^{ls}] = G^{is} I^{kl} + G^{kl} I^{is} - G^{il} I^{ks} - G^{ks} I^{il} \quad (2,3)$$

We see that operators I^{ik} are infinitesimal rotation operators, and therefore they generate a rotation group. This group may be extended after the introduction of additional operators K^{ik} using the equation

$$K^{ik} = \varphi_c^i \varphi_a^k + \varphi_c^k \varphi_a^i \quad (2,4)$$

The commutation rules for these operators are obtained in the same way as for the operators I^{ik} using equations (2,1). We find that

$$[K^{ik}; K^{ls}] = G^{kl} I^{is} + G^{il} I^{ks} + G^{ks} I^{il} + G^{is} I^{kl} \quad (2,5)$$

Finally, the correctness of the equation

$$[I^{ik}; K^{ls}] = G^{kl}K^{is} + G^{ks}K^{li} - G^{il}K^{ks} - G^{is}K^{lk} \quad (2,6)$$

is proved in an analogical way.

Equations (2,3), (2,5) and (2,6) define a certain group of transformations, the subgroup of which are rotations. By a detailed analysis, it can be proved that this group is isomorphic with a group of general linear homogeneous transformations. From the point of view of the further analysis, it is important to investigate the one-parameter subgroup created by the generator $K = \frac{1}{2}K^{ik}G_{ik}$. We shall look for such vectors Φ which, when applying some of the transformations taken from the subgroup considered, do not change their directions. These vectors evidently satisfy the condition

$$K\Phi = N\Phi \quad (2,7)$$

where N is the c -number, a characteristic value for the operator K . For solving the eigenvalue equation (2,7), it is substantial for the operator K to commute with the operators of the infinitesimal rotations I^{ik} , that is

$$[I^{ik}; K] = 0 \quad (2,8)$$

That means that, for a given characteristic value N of the operator K , several linearly independent vectors Φ exist, which after having performed an infinitesimal rotation $R = I + \frac{1}{2}I^{ik}\varepsilon_{ik}$ are transformed into themselves. Hence we deduce that the characteristic vectors of equation (2,7) may be arranged in the following sequence

$$\Phi_0; \Phi^i; \Phi^{ik}; \Phi^{iks}; \dots$$

These vectors may be determined in the following way. We suppose that there is a vector Φ_0 defined by the equation

$$\varphi_a^i \Phi_0 = 0 \quad (2,9)$$

The other vectors will be determined by means of Φ_0 in the following way

$$\left. \begin{aligned} \Phi^i &= \varphi_c^i \Phi_0 \\ \Phi^{ik} &= \varphi_c^i \varphi_c^k \Phi_0 \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi^{i_1 \dots i_n} &= \varphi_c^{i_1} \dots \varphi_c^{i_n} \Phi_0 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (2,10)$$

From equations (2,1) and (2,9) then it follows that the operators φ_a^i act on the vectors Φ in the following way

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a^i \Phi^k &= G^{ik} \Phi_0 \\ \varphi_a^i \Phi^{ks} &= G^{ik} \Phi^s + G^{is} \Phi^k \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_a^i \Phi^{k_1 \dots k_n} &= G^{ik_1} \Phi^{k_2 \dots k_n} + \dots \\ &\dots + G^{ik_n} \Phi^{k_1 \dots k_{n-1}} \end{aligned} \right\} \quad (2,11)$$

For the normalization of the vectors Φ a Hermitian matrix D (metric matrix) is introduced, for which it holds

$$\left. \begin{aligned} D\varphi_c^i &= \varphi_a^{i+} D \\ \varphi_c^{i+} D &= D\varphi_a^i \end{aligned} \right\} \quad (2,12)$$

where the symbol $+$ indicates the Hermitian conjugation. Vector Φ_0 is normalized by means of the equation

$$(\Phi_0, \Phi_0) = \Phi_0^+ D \Phi_0 = 1 \quad (2,13)$$

For the normalization of the remaining vectors Φ , we obtain from equation (2,3)

$$\left. \begin{aligned} (\Phi^i, \Phi^k) &= G^{ik} \\ (\Phi^{ik}, \Phi^{ls}) &= G^{kl} G^{is} + G^{ks} G^{il} \end{aligned} \right\} \quad (2,14)$$

It can be proved, moreover, that the following orthogonality conditions are fulfilled

$$(\Phi^{i_1 \dots i_n}, \Phi^{k_1 \dots k_m}) = 0 \quad (n \neq m) \quad (2,15)$$

We may return now to equation (2,7). By means of equations (2,9) to (2,11), it may be proved that the characteristic value N of the operator K may acquire the values of 0, 1, 2, 3, ... The characteristic vector belonging to the characteristic value N is $\Phi^{i_1 \dots i_N}$. The results derived entitle us to interpret the operators φ_c^i and φ_a^i as creation and annihilation operators, and the operator K as an operator for the total number of particles. With regard to the first equation of (2,1), with the tensor G^{ik} on the right side, which is analogous to the corresponding Green's function, the operators φ_c^i and φ_a^i are not creation and annihilation operators of usual types. These rather belong to the category of the so-called causal operators introduced by Novozhiloff [2], Golfand [3], and Goester [1]. In the following, we shall call them, however, the creation and annihilation operators. For the computation of the vacuum values of products of these operators, it is possible to use the equations (2,14) and (2,15).

The developed formalism allows us to introduce the Green's tensors for an arbitrary number of particles. The Green tensor for n -particles is defined by the equation

$$G^{i_1 \dots i_{2n}} = (\Phi_0, \varphi^{i_1} \dots \varphi^{i_{2n}} \Phi_0) \quad (2,16)$$

where $\varphi^i = \varphi_c^i + \varphi_a^i$. We are going to deduce the equation for the generating function $Z(I_i)$ of the Green's tensors. For this purpose, let us multiply equation (2,16) with the tensor G_{k_i} . Then we get

$$\begin{aligned} G_{ik} G^{k i_1 \dots i_{2n-1}} &= \delta_i^{i_1} G^{i_2 \dots i_{2n-1}} + \delta_i^{i_2} G^{i_1 i_3 \dots i_{2n-1}} + \dots \\ &\dots + \delta_i^{i_{2n-1}} G^{i_1 i_2 \dots i_{2n-2}} \end{aligned} \quad (2,17)$$

Multiplying the last equation with the product $I_{i_1} I_{i_2} \dots I_{i_{2n-1}}$ (where I_k have the sense of external sources), it will be found to hold i_{2n-1}

$$G_{ik} G^{k i_1 i_2 \dots i_{2n-1}} I_{i_1} I_{i_2} \dots I_{i_{2n-1}} = (2n-1) G^{i i_1 i_2 \dots i_{2n-2}} I_{i_1} I_{i_2} \dots I_{i_{2n-2}} I_i$$

Let us divide this equation by the number $(2n-1)!$ and sum up the equations beginning from 2 to ∞ , and add the identity

$$G_{ik} G^{k i} I_i = I_i$$

Thus, we get the equation

$$\begin{aligned} G_{ik} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} G^{k i_1 i_2 \dots i_{2n-1}} I_{i_1} I_{i_2} \dots I_{i_{2n-1}} = \\ = I_i \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} G^{i i_1 i_2 \dots i_{2n}} I_{i_1} I_{i_2} \dots I_{i_{2n}} \right) \end{aligned}$$

which may be written in the form

$$G_{ik} \frac{\partial Z}{\partial I_k} = I_i Z \quad (2,18)$$

where

$$Z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} G^{i i_1 i_2 \dots i_{2n}} I_{i_1} I_{i_2} \dots I_{i_{2n}}$$

Equation (2,18) is the one required for the generating function Z . It should be necessarily completed with the condition $Z(0) = 1$.

In Paragraph 1, it has been seen that the one-particle Green tensor G^{ik} has the sense of the contravariant components of the metric tensor. It will be shown that this generally holds for the tensor $G^{i_1 \dots i_n}$. The tensor G^{ik} was related to the space with basic vectors Φ^i . To interpret $G^{i_1 \dots i_n}$ as contravariant components of a metric tensor, the space has to be extended, and an infinite number of additional, linearly independent vectors

$$\chi^{i_1 \dots i_n} = \varphi^{i_1} \dots \varphi^{i_n} \Phi_0 \quad (2,19)$$

has to be added. The mutual scalar products of these basic vectors give us the metrics of the extended space

$$G^{i_1 \dots i_n} = (\chi^{i_1 \dots i_k}, \chi^{i_{k+1} \dots i_n}) \quad (2,20)$$

By a comparison with equation (2,16), it will be found that these scalar products are identical with the Green tensors.

3. Matrix S

The mathematical formalism developed in the last Paragraph, may be used in the theory of the linear interaction between the particles A and B . It is sufficient to pass from Latin indices to Greek ones according to the method given in Section 1. The equation for the generating function Z , for instance, will be of the form

$$\left. \begin{aligned} G_{\alpha\beta} \frac{\partial Z}{\partial I_\beta} + G_{\alpha\mu} \frac{\partial Z}{\partial I_\mu} &= I_\alpha Z \\ G_{\mu\nu} \frac{\partial Z}{\partial I_\nu} + G_{\alpha\mu} \frac{\partial Z}{\partial I_\alpha} &= I_\alpha Z \end{aligned} \right\} \quad (3,1)$$

The creation and annihilation operators φ_c^i and φ_a^i will be considered identical with the creation and annihilation operators φ_c^i and φ_a^i for particles A, and φ_c^i and φ_a^i for particles B. In addition to these operators, it is possible to introduce the operators $\psi_c^i, \psi_a^i, \psi_c^i, \psi_a^i$ using the following commutation rules (only commutators differing from zero will be given)

$$\left. \begin{aligned} [\psi_a^\alpha, \psi_c^\beta] &= \gamma^{\alpha\beta} \\ [\psi_a^\mu, \psi_c^\nu] &= \gamma^{\mu\nu} \end{aligned} \right\} \quad (3,2)$$

where $\gamma^{\alpha\beta}$ and $\gamma^{\mu\nu}$ are given by the equations (1,12) and (1,13). Since $\gamma^{\alpha\beta}$ and $\gamma^{\mu\nu}$ are the zero approximations of the Green's tensors $G^{\alpha\beta}$ and $G^{\mu\nu}$, the operators $\psi_a^\alpha, \psi_c^\alpha, \psi_a^\mu, \psi_c^\mu$ must be interpreted as the creation and annihilation operators of the bare particles A and B, in contrast to the operators $\varphi_a^\alpha, \varphi_c^\alpha, \varphi_a^\mu, \varphi_c^\mu$ which are related to the physical (dressed) particles. With the help of the operators ψ , we may define the operators for the total number of bare particles A and B, namely

$$K' = \psi_c^\alpha \psi_a^\alpha G_{\alpha\beta} + \psi_c^\mu \psi_a^\mu G_{\mu\nu}$$

The eigenvalue problem

$$K'\Psi = N'\Psi \quad (3,3)$$

will be solved in an analogical way as problem (2,7). It is found that $N' = 0, 1, 2, \dots$. The corresponding characteristic vectors are

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 \\ \Psi_a^\alpha, \Psi_c^\beta \\ \Psi_a^{\alpha\beta}, \Psi_a^{\alpha\mu}, \Psi_c^{\mu\nu} \\ \dots \\ \Psi_{a_1 \dots a_n / \mu_1 \dots \mu_m} \end{aligned} \right\} \quad (3,4)$$

where

$$\Psi_{a_1 \dots a_n / \mu_1 \dots \mu_m} = \psi_c^{a_1} \dots \psi_c^{a_n} \psi_c^{\mu_1} \dots \psi_c^{\mu_m} \Psi_0$$

The annihilation operators $\psi_a^\alpha, \psi_a^\mu$ act on the vectors $\Psi_{a_1 \dots a_n / \mu_1 \dots \mu_m}$ in the following way

$$\left. \begin{aligned} \psi_a^\alpha \Psi_{a_1 \dots a_n / \mu_1 \dots \mu_m} &= \gamma^{\alpha a_1} \Psi_{a_2 \dots a_n / \mu_1 \dots \mu_m} + \dots \\ &\dots + \gamma^{\alpha a_n} \Psi_{a_1 \dots a_{n-1} / \mu_1 \dots \mu_m} \\ \psi_a^\mu \Psi_{a_1 \dots a_n / \mu_1 \dots \mu_m} &= \gamma^{\mu \mu_1} \Psi_{a_1 \dots a_n / \mu_2 \dots \mu_m} + \dots \\ &\dots + \gamma^{\mu \mu_m} \Psi_{a_1 \dots a_n / \mu_1 \dots \mu_{m-1}} \end{aligned} \right\} \quad (3,5)$$

The normalization of the vector Ψ follows from the normalization of the

vector corresponding to the vacuum $(\Psi_0, \Psi_0) = 1$. The orthogonality equations have the form

$$(\Psi^{\alpha_1, \dots, \alpha_n \mu_1, \dots, \mu_m}, \Psi^{\beta_1, \dots, \beta_n \nu_1, \dots, \nu_{m'}}) = 0 \quad \begin{matrix} n \neq n' \\ m \neq m' \end{matrix} \quad (3,6)$$

Let us introduce the matrix S by means of the equation

$$S = e^{-G_{\alpha\mu} \psi^\alpha \psi^\mu} \quad (3,7)$$

where

$$\psi^\alpha = \psi_a^\alpha + \psi_c^\alpha \quad \psi^\mu = \psi_a^\mu + \psi_c^\mu$$

It will be proved by us that the Green's tensors may be written, using matrix S , in the form

$$G^{\alpha_1 \dots \alpha_n \mu_1 \dots \mu_m} = \frac{1}{S_0} (\Psi_0, \psi^{\alpha_1} \dots \psi^{\alpha_n} \psi^{\mu_1} \dots \psi^{\mu_m} S \Psi_0) \quad (3,8)$$

where

$$S_0 = (\Psi_0, S \Psi_0)$$

Prior to performing the actual proof of equation (3,8), we are going to derive two auxiliary equations, that is

$$\left. \begin{aligned} [\psi_a^\beta, S] &= -\gamma^{\beta\alpha} G_{\alpha\mu} \psi^\mu S \\ [\psi_a^\mu, S] &= -\gamma^{\mu\alpha} G_{\mu\alpha} \psi^\alpha S \end{aligned} \right\} \quad (3,9)$$

We expand the matrix S in a power series according the powers of the coupling parameter α

$$S = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n$$

where

$$V = -G_{\alpha\mu} \psi^\alpha \psi^\mu$$

From this, it follows that

$$[\psi_a^\beta, V^n] = -n \gamma^{\beta\alpha} G_{\alpha\mu} \psi^\mu V^{n-1}$$

Thus

$$[\psi_a^\beta, S] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [\psi_a^\beta, V^n] = -\gamma^{\beta\alpha} G_{\alpha\mu} \psi^\mu S$$

There-by, the first equation (3,9) is proved. It is possible to prove also the second equation in an analogical way. We proceed to the proof of equation (3,8). Using equation (3,9), we get

$$\begin{aligned} & G_{\beta\alpha} G^{\alpha\alpha_1 \dots \alpha_n \mu_1 \dots \mu_m} + G_{\beta\mu} G^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_n \mu_1 \dots \mu_m} = \\ & = \delta_{\beta}^{\alpha_1} G^{\alpha_2 \dots \alpha_n \mu_1 \dots \mu_m} + \dots + \delta_{\beta}^{\alpha_n} G^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \mu_1 \dots \mu_m} \end{aligned}$$

This equation is, however, identical with equation (2,17) for the Green's tensors introduced by equation (2,16). Thus, the Green's tensors defined by equation (3,8) are identical with the Green's tensors defined by equation (2,16), what had to be proved.

References

- [1] G. Coester, Phys. Rev. 95, 1318 (1954).
 - [2] Yu. V. Novozhiloff, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 99, 533 (1954).
 - [3] Yu. A. Golfand, Zhurn. eksper. teoret. Fiz., 28, 140 (1955).
- Do redakcie dodané 1. VI. 1958.

Простая геометрическая модель квантовой теории поля

М. П е т р а ш

(Р е з ю м е)

В работе предлагается модель квантовой теории поля с линейным взаимодействием в котором функции Грина имеют значение контравариантных компонент метрического тензора. Выводится ковариантное уравнение для производящей функции «тензоров Грина» и устанавливается матрица $\hat{S}$.

Jednoduchý geometrický model kvantovej teórie poľa

M. P E T R Á Š

S ú h r n

V práci je navrhnutý geometrický model kvantovej teórie poľa s lineárnou interakciou, v ktorom Greenove funkcie majú význam kontravariantných komponent metrického tenzora. Je odvodená kovariantná rovnica pre vytvárajúcu funkciu Greenových tenzorov a je udaná matica $\hat{S}$.

Возникновение экситона неизлучающей рекомбинацией электрона и дырки

Л. ГРИВНАК

В работе исследуется вероятность возникновения возбужденного экситона однофононовой неизлучающей рекомбинацией электрона и дырки в полярных кристаллах.

Введение

Исследования Гросса [1] показали, что в полярных кристаллах могут существовать возбужденные экситоны, которые в первом приближении хорошо определяются моделью Мотта [2]. Согласно этой модели экситон можно представлять как квазिवодородный атом, состоящий из электрона и дырки. Такое несвободное состояние электрона и дырки можно характеризовать квантовым числом n . В кристалле могут встречаться экситоны в различных состояниях. Наличие таких экситонов в Si_2O подтверждается сериями водородоподобных линий в спектре поглощения. Известно, что экситоны могут возникать в полярном кристалле в результате поглощения фотонов, энергия которых меньше энергии, потребной для возникновения свободного электрона и дырки или неизлучающей рекомбинацией свободного электрона и дырки. Непосредственная неизлучающая рекомбинация электрона и дырки мало вероятна, потому что при ней должно было бы образоваться чрезвычайно много (100) фононов одновременно. Этот вопрос исследовал Пейерлс [3], показавший, что теоретически такой процесс возможен только при условии чрезвычайно сильной связи между электроном и колебаниями решетки. Вопросом неизлучающей рекомбинации электронов и дырок занимались также Френкель [4] и Мотт [2]. Однако более вероятно, что рекомбинация электрона и дырки совершается не прямо, а через промежуточное состояние, в котором электрон и дырка образуют экситон [1]. Покажем, что экситоны с достаточно большим n могут возникнуть и неизлучающей рекомбинацией электрона и дырки, при которой образуется один фонон. Насколько автору известно, такой механизм образования экситонов не был до настоящего времени количественно исследован.

В последнее время были разработаны квантовомеханические теории однофононовой рекомбинации электрона на центрах возмущения кулоновского типа, причем эти центры рассматривались как неподвижные. Водородоподобные серии в спектре поглощения CuO_2 , как это обнаружил Гросс, соответствуют т. наз. неполяризующим экситонам, которые согласно Дыкмана и Пекера [7] возникают в ионовых кристаллах, у которых эффективная масса электрона мало разнится от эффективной массы дырки. На этом основании не можем рассматривать дырку как неподвижную в кристалле а движение приписывать только электронам. В этом направлении наша работа является обобщением исследований М. Трлифай-а [6] для случая, когда центр возмущения движущийся.

Гамильтониан системы

Рассматриваем проводящий электрон и дырку в полярном кристалле, который будем представлять себе как диэлектрическую среду, характеризованную статической диэлектрической постоянной ϵ и оптической диэлектрической постоянной ϵ_0 . Электрон и дырку будем считать свободными частицами с определенными эффективными массами m_1 и m_2 . В результате взаимодействия с оптическими колебаниями решетки эти частицы часть своей энергии могут отдать решетке и перейти из свободного состояния в связанное. Гамильтониан системы электрон + дырка + колебания решетки можем написать в форме [8]:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 - \frac{e^2}{\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} - e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_2}\} - \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}^+ \{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} - e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_2}\}, \quad (1)$$

$$A_{\vec{k}} = -A_{\vec{k}}^* = -ie \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega C}{V}}; \quad C = \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon}. \quad (2)$$

В этом выражении индекс 1 относится к электрону, индекс 2 к дырке, $\vec{k}$ — волновой вектор фонона, $\hbar\omega$ энергия фонона (ввиду малой дисперсии оптических колебаний предполагаем, что они отличаются одной частотой ω). $a_{\vec{k}}$, $a_{\vec{k}}^+$ представляют собой соответственно операторы уничтожения и рождения фонона с волновым вектором $\vec{k}$. Значение отдельных членов в гамильтониане (1) следующие: первый член представляет собой оператор кинетической энергии электрона, второй член — оператор кинетической энергии дырки, третий член выражает кулоновское взаимодействие электрона и дырки в среде с диэлектрической постоянной ϵ_0 , четвертый член соответствует энергии свободного фононового поля и наконец, последние два члена выражают взаимодействие электрона и дырки с колебаниями решетки.

Удобно перейти к координатной системе, с началом координат в центре тяжести системы электрон + дырка. Новые координаты определяются соотношениями

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}; \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad (3)$$

где $\vec{R}$ — вектор положения центра тяжести и $\vec{r}$ — вектор положения электрона по отношению к дырке. В новых координатах будет гамильтониан нашей системы следующий:

$$\begin{aligned} H = & -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\vec{R}} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\vec{r}} - \frac{e^2}{\epsilon_0 r} + \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k^+ a_{\vec{k}}^+ + \\ & + \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \{ e^{i \frac{m_2}{M} \vec{k} \cdot \vec{r}} - e^{-i \frac{m_1}{M} \vec{k} \cdot \vec{r}} \} + \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}^+ e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} \{ e^{-i \frac{m_2}{M} \vec{k} \cdot \vec{r}} - \\ & - e^{i \frac{m_1}{M} \vec{k} \cdot \vec{r}} \} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$M = m_1 + m_2; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

В представлении, в котором общее количество движения системы с-числом a в системе координат, относительно которой центр тяжести системы электрон + дырка неподвижен, гамильтониан имеет форму [8]:

$$H = H_e + H_f + V(r) + H_t + \frac{1}{2M} (\sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}})^2 \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_e = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} = & -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\vec{r}}; \quad H_f = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k^+ a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}; \quad V(r) = -\frac{e^2}{\epsilon_0 r}; \\ H_t = & \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} \{ a_{\vec{k}} e^{i \frac{m_2}{M} \vec{k} \cdot \vec{r}} - a_{\vec{k}}^+ e^{-i \frac{m_2}{M} \vec{k} \cdot \vec{r}} \} - \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^+ \{ a_{\vec{k}} e^{-i \frac{m_1}{M} \vec{k} \cdot \vec{r}} - a_{\vec{k}}^+ e^{i \frac{m_1}{M} \vec{k} \cdot \vec{r}} \} \end{aligned}$$

Последним членом в гамильтониане (6) пренебрегаем, поскольку в дальнейшем будем предполагать существование только таких фононов, у которых $k \sim 0$. Именно с такими фононами между электроном либо дыркой возникает максимальное взаимодействие. При этом условии наш гамильтониан будет формально тождественный с гамильтонианом [1] в работе (6). Гамильтониан (6) (в дальнейшем будем всегда подразумевать под (6) выражение (6) без последнего члена) выражает движение электрона в поле дырки. Влияние движения дырки зашито в том, что вместо массы электрона

выступает в нем приведенная масса μ . Как электрон, так и дырка взаимодействуют с оптическими колебаниями решетки, что выражено членом H_i . В результате этого взаимодействия перейдут электрон и дырка в поляроновое состояние. Гамильтониан, выражающий относительное движение этих двух поляронов, будет иметь форму:

$$H_P = \frac{\vec{P}^2}{2\mu^*} - \frac{e^2}{\varepsilon R}, \quad (7)$$

причем $\frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{m_1^*} - \frac{1}{m_2^*}$, где m_1^* — эффективная масса отрицательного полярона и m_2^* — эффективная масса положительного полярона. Это представление подтвердим тем, что гамильтониан нашей системы представим в форме

$$H = H_P + H_f + H_i, \quad (8)$$

где H_P представлено выражением (7), H_f соответствует свободному фононовому полю и H_i представляет взаимодействие поляронов с фононовым полем. Этого достигнем следующей унитарной трансформацией (см. напр. [6]):

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \exp[-iS/\hbar] \vec{P} \exp[iS/\hbar] \\ \vec{r} &= \exp[-iS/\hbar] \vec{R} \exp[iS/\hbar] \\ a_k &= \exp[-iS/\hbar] \alpha_k \exp[iS/\hbar] \end{aligned} \quad (9)$$

Гамильтониан в новых координатах будет иметь форму

$$\begin{aligned} H &= \exp[-iS/\hbar] A \exp[iS/\hbar] = \\ &= \exp[-iS/\hbar] [A_e + A_f + A_i + V(R)] \exp[iS/\hbar] = \\ &= A_e + A_f + V(R) - i/\hbar [S, A_e + A_f] + A_i - \\ &- \frac{1}{2\hbar^2} [S, [S, A_e + A_f]] - \frac{i}{\hbar} [S, A_i] - \frac{i}{\hbar} [S, V(R)] + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

где A — гамильтониан, который получим, если в (6) напишем вместо старых переменных новые $\vec{P}, \vec{R}, \alpha_k$ и подобное значение имеют A_e, A_f, A_i .

Пока неопределенный оператор S выберем так, чтобы

$$-\frac{i}{\hbar} [S, A_e + A_f] + A_i = 0, \quad (11)$$

Тогда выражение (10) приобретет форму

$$H = A_e + A_f + V(R) - \frac{i}{2\hbar} [S, A_i] - \frac{i}{\hbar} [S, V(R)] + \dots \quad (12)$$

Уравнению (11) удовлетворяет оператор

$$S = -i\hbar \sum_{\vec{k}} \left[\frac{A_{\vec{k}}}{\hbar\omega - \frac{\hbar}{m_1} \vec{k} \cdot \vec{P} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1}} \alpha_{\vec{k}} e^{i\frac{m_2}{M} \vec{k} \cdot \vec{R}} + e^{-i\frac{m_2}{M} \vec{k} \cdot \vec{R}} \frac{A_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^+}{\hbar\omega - \frac{\hbar}{m_1} \vec{k} \cdot \vec{P} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1}} \right] +$$

$$+ i\hbar \sum_{\vec{k}} \left[\frac{A_{\vec{k}}}{\hbar\omega + \frac{\hbar}{m_2} \vec{k} \cdot \vec{P} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_2}} \alpha_{\vec{k}} e^{-i\frac{m_1}{M} \vec{k} \cdot \vec{R}} + e^{i\frac{m_1}{M} \vec{k} \cdot \vec{R}} \frac{A_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^+}{\hbar\omega + \frac{\hbar}{m_2} \vec{k} \cdot \vec{P} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_2}} \right] \quad (13)$$

Коммутаторы в (12) при этом следующие

$$-\frac{i}{2\hbar} [S, A_i] = -\alpha_1 \hbar\omega - \frac{\alpha_1}{6} \cdot \frac{P^2}{2m_1} - \alpha_2 \hbar\omega - \frac{\alpha_2}{6} \frac{P^2}{2m_2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{e^2 C}{R} \left[1 - \exp \left(\frac{-\alpha_1 \hbar\omega}{\frac{1}{2} \frac{e^2 C}{R}} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{e^2 C}{R} \left[1 - \exp \left(\frac{-\alpha_2 \hbar\omega}{\frac{1}{2} \frac{e^2 C}{R}} \right) \right] + O(P^4); \quad (14)$$

$$\alpha_1 = \frac{Ce^2}{2\hbar\omega} \frac{\sqrt{2m_1 \hbar\omega}}{\hbar}; \quad \alpha_2 = \frac{Ce^2}{2\hbar\omega} \frac{\sqrt{2m_2 \hbar\omega}}{\hbar}. \quad (15)$$

Коммутатор $-i/\hbar [S, V(R)]$ определим разложением S по степеням $\vec{P}$ и органичимся членами, в которых показатель $\vec{P}$ не превышает единицу. При этом заменим оператор $\vec{P}$ выражением $-i\hbar \nabla$.

Так получим:

$$-i/\hbar [S, V(R)] = -\frac{i\hbar^2}{m_1} \sum_{\vec{k}} \frac{A_{\vec{k}}}{\left(\hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1} \right)^2} \vec{k} \cdot \text{grad } V(R) \{ \alpha_{\vec{k}} e^{i\frac{m_2}{M} \vec{k} \cdot \vec{R}} +$$

$$+ e^{-i\frac{m_2}{M} \vec{k} \cdot \vec{R}} \alpha_{\vec{k}}^+ \} + \frac{i\hbar^2}{m_2} \sum_{\vec{k}} \frac{A_{\vec{k}}}{\left(\hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_2} \right)^2} \vec{k} \cdot \text{grad } V(R) \{ \alpha_{\vec{k}} e^{-i\frac{m_1}{M} \vec{k} \cdot \vec{R}} +$$

$$+ e^{i\frac{m_1}{M} \vec{k} \cdot \vec{R}} \alpha_{\vec{k}}^+ \} \quad (16)$$

Для случая значительных R , т. е. при

$$R \gg \frac{1}{2} \frac{e^2 C}{\alpha_1 \hbar\omega}; \quad R \gg \frac{1}{2} \frac{e^2 C}{\alpha_2 \hbar\omega} \quad (17)$$

получим для гамильтониана следующее выражение:

$$H = -\alpha_1 \hbar \omega - \alpha_2 \hbar \omega + \frac{P^2}{2\mu^*} - \frac{e^2}{\epsilon R} + \sum_{\vec{k}} \hbar \omega \alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} -$$

$$- \frac{i\hbar^2}{m_1} \sum_{\vec{k}} \frac{A_{\vec{k}}}{\left(\hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1}\right)^2} \vec{k} \cdot \text{grad } V(R) \{ \alpha_{\vec{k}} e^{i\frac{m_2}{M}\vec{k} \cdot \vec{R}} + e^{-i\frac{m_2}{M}\vec{k} \cdot \vec{R}} \alpha_{\vec{k}}^+ \} + \quad (18)$$

$$+ \frac{i\hbar^2}{m_2} \sum_{\vec{k}} \frac{A_{\vec{k}}}{\left(\hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_2}\right)^2} \vec{k} \cdot \text{grad } V(R) \{ \alpha_{\vec{k}} e^{-i\frac{m_1}{M}\vec{k} \cdot \vec{R}} + e^{i\frac{m_1}{M}\vec{k} \cdot \vec{R}} \alpha_{\vec{k}}^+ \}$$

где

$$V(R) = -\frac{e^2}{\epsilon_0 R}; \frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}; \frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_1} \left(1 - \frac{\alpha_1}{6}\right); \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_2} \left(1 - \frac{\alpha_2}{6}\right). \quad (19)$$

Члены $-\alpha_1 \hbar \omega$, $-\alpha_2 \hbar \omega$ представляют в гамильтониане аддитивную постоянную и при вычислении вероятности перехода полярона из свободного состояния в связанное не играют роли. Член

$$H_P = \frac{P^2}{2\mu^*} - \frac{e^2}{\epsilon R} \quad (20)$$

представляет оператор энергии отрицательного полярона в поле положительного полярона, причем влияние движения положительного полярона учтено в том, что вместо эффективной массы отрицательного полярона выступает в нем приведенная масса μ^* . Член

$$H_f = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega \alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} \quad (21)$$

соответствует свободному фононовому полю и наконец

$$H' = -\frac{i\hbar^2}{m_1} \sum_{\vec{k}} \frac{A_{\vec{k}}}{\left(\hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1}\right)^2} \vec{k} \cdot \text{grad } V(R) \{ \alpha_{\vec{k}} e^{i\frac{m_2}{M}\vec{k} \cdot \vec{R}} + e^{-i\frac{m_2}{M}\vec{k} \cdot \vec{R}} \alpha_{\vec{k}}^+ \} + \quad (22)$$

$$+ \frac{i\hbar^2}{m_2} \sum_{\vec{k}} \frac{A_{\vec{k}}}{\left(\hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_2}\right)^2} \vec{k} \cdot \text{grad } V(R) \{ \alpha_{\vec{k}} e^{-i\frac{m_1}{M}\vec{k} \cdot \vec{R}} + e^{i\frac{m_1}{M}\vec{k} \cdot \vec{R}} \alpha_{\vec{k}}^+ \}$$

представляет взаимодействие обоих поляронов с фононовым полем.

Случай движения электрона в поле неподвижного кулоновского центра получим полагая $m_1 = m$, $m_2 = \infty$. Тогда

$$H_P = \frac{P^2}{2m^*} - \frac{e^2}{\epsilon R}; \frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{\alpha}{6}\right) \quad (23)$$

и

$$H' = -\frac{i\hbar^2}{m} \sum_{\vec{k}} \frac{A_{\vec{k}}}{\left(\hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2} \vec{k} \cdot \text{grad } V(R) \{ \alpha_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} \alpha_{\vec{k}}^+ \}, \quad (24)$$

что тождественно с выражениями (2, 3) и (2, 4) в работе М. Трлифая.

Спектр энергий экситона в Cu_2O

Если примем в расчет взаимодействие электрона и дырки, которые совместно образуют экситон, с колебаниями решетки, тогда эта система имеет согласно предыдущему следующий гамильтониан:

$$H_{ex} = -\frac{\hbar^2}{2\mu^*} \Delta - \frac{e^2}{\epsilon_0 R} + \frac{1}{2} \frac{e^2 C}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2m_1 \hbar \omega}}{\hbar} R\right) \right] + \quad (25) \\ + \frac{1}{2} \frac{e^2 C}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2m_2 \hbar \omega}}{\hbar} R\right) \right].$$

Согласно наблюдениям Гросса и Захарченя, [9], которые исследовали поведение линии в спектре поглощения Cu_2O соответствующих экситоном в магнитном поле, вытекает, что эффективная масса электрона весьма близка эффективной массе дырки. Тогда в случае Cu_2O можем гамильтониан, выражающий внутреннее состояние экситона написать в форме:

$$H_{ex} = -\frac{\hbar^2}{2\mu^*} \Delta - \frac{e^2}{\epsilon R} [\bar{1} + \gamma e^{-\beta R}], \quad (26)$$

где

$$\gamma = \epsilon C \quad \text{а} \quad \beta = \frac{\sqrt{2m\hbar\omega}}{\hbar}. \quad (27)$$

При больших значениях R , ($\beta R \gg 1$), потенциальная энергия взаимодействия электрона и дырки кулоновского типа а следовательно, спектр энергии водородоподобный. Это значит, что для достаточно больших n получаем

$$E_n = -\frac{\mu^* e^4}{2\epsilon^2 \hbar^2 n^2}. \quad (28)$$

Если значения энергии соответствующие экситоновым состояниям, считаем от дна зоны проводимости, тогда, согласно опытам Гросса в Cu_2O хорошо удовлетворяет формула (при $T = 1,3 \text{ -K}$)

$$E_n = -\frac{0,0879}{n^2} \text{ eV}, \quad (29)$$

для $n > 5$.

Сравнивая выражения (28) и (29) получим, для $\epsilon = 9$,

$$\mu^* = 0,52 m_e$$

откуда $m_1 = m_2 = 1,04 m_e$.

Для меньших значений n с убывающим n возрастают отклонения от выражения (29) и более того, были обнаружены дальнейшие линии. Как только возьмем в расчет член $-\frac{e^2}{\epsilon R} \gamma \exp(-\beta R)$ придем к лучшему согласованию с экспериментом.

Если пренебрегать взаимодействием электрона и дырки с колебаниями решетки, то согласно Мотту для потенциальной энергии электрона в поле дырки пользуемся выражением

$$V_0(R) = -\frac{e^2}{\epsilon_0 R} \quad (30)$$

и для энергии получаем

$$E_n = -\frac{\mu^* e^4}{2\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad (31)$$

С такой формулой сравнивал свои результаты и Гросс, и так определил эффективную массу экситона. Эффективная масса экситона таким образом определенная является в $\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^2$ раз меньшей нежели нами определенная эффективная масса экситона. И в том же самом отношении будут меньшими и эффективные массы электрона и дырки. Согласно нашим вычислениям выражение (30) представляет предельный случай потенциальной энергии, выступающей в выражении (26) для $\beta R \rightarrow 0$ и не годится для больших значений n . Поэтому эффективную массу экситона, согласно автору, нужно определить сравнением соотношений (28) и (29) а не (31) и (29). Если примем, подобно Гроссу, для среднего значения эффективной массы дырки $m_2 \doteq m_e$ получим $m_1 = 1,08m_e$ в то время как Гросс получил значение $m_1 = 0,4m_e$. Однако магнитные особенности экситона требуют условие $m_1 \doteq m_e$, откуда для значительных n лучше отвечает выражение (28) чем (31).

Потенциальную энергию в (26)

$$V(R) = -\frac{e^2}{\epsilon R} (1 + \gamma e^{-\beta R}) \quad (32)$$

можем написать в форме

$$V(R) = -\frac{e^2}{\epsilon' R}, \quad (33)$$

где

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{1 + \gamma \exp(-\beta R)}. \quad (34)$$

Видим, что $\epsilon'_{R \rightarrow 0} = \epsilon_0$; $\epsilon'_{R \rightarrow \infty} = \epsilon$. Следовательно ϵ' непрерывно изменяется от значения ϵ_0 до ϵ . Для определения характеристического значения энергии было бы нужно решить уравнение Шредингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu^*} \Delta + V(R) \right] \Psi = E\Psi, \quad (35)$$

где $V(R)$ дано соотношением (33). Так как функция ε' представляет собой медленно изменяющуюся функцию R , допустим, что для каждого стационарного состояния ее можно заменить определенной эффективной диэлектрической постоянной ε_{ef} . Соответствующие волновые функции удовлетворяют тогда уравнению

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu^*} \Delta - \frac{e^2}{\varepsilon_{ef}R} \right] \Psi_{nlm} = E_n \Psi_{nlm}, \quad (36)$$

что является уравнением движения частицы в кулоновском поле, решения которого известны. Значение эффективной диэлектрической постоянной, соответствующей стационарному состоянию с главным квантовым числом n , определим так, чтобы среднее значение энергии рассматриваемой системы, гамильтониан которой дан выражением (26), в состоянии $\Psi_{n,n-1,m}$ равнялось бы значению E_n . Это выразится условием

$$E_n = -\frac{e^2}{2\varepsilon_{ef}a_n} = \int \Psi_{n,n-1,m}^* \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu^*} \Delta - \frac{e^2}{\varepsilon R} (1 + \gamma e^{-\beta R}) \right) \Psi_{n,n-1,m} d\tau$$

Здесь

$$a_n = \frac{\varepsilon_{ef} n^2 \hbar^2}{\mu^* e^2} \quad (37)$$

Так получим

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon}{1 + \gamma \left(1 + \frac{a_n \beta}{2n} \right)^{-2n}} \quad (38)$$

Для констант в выражении (38) возьмем следующие значения, экспериментально найденные разными авторами:

$$\varepsilon_0 = 6,25; \quad \varepsilon = 9; \quad \hbar\omega = 4,8 \cdot 10^{-14} \text{ erg.}$$

Величины m и μ^* были вычислены выше. Из этих величин вытекают следующие значения для $\gamma, \beta, \frac{\hbar^2}{\mu^* e^2}$;

$$\gamma = 0,44; \quad \beta = 9,07 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}; \quad \frac{\hbar^2}{\mu^* e^2} = 10^{-8} \text{ cm.}$$

Подставляя эти величины в выражение (38) получим:

$$\varepsilon_{1ef} = 7,2; \quad \varepsilon_{ef} = 8,6; \quad \varepsilon_{3ef} = 8,9; \quad \varepsilon_{ef}^2 = 9.$$

Значения энергии вычисленные согласно эмпирической формуле (29) и значения вычисленные согласно выражению

$$E_n = -\frac{\mu^* e^4}{2\varepsilon_{ef}^2 n^2 \hbar^2} \quad (*)$$

и наконец значения энергии полученные экспериментально, приведены в таблице 1.

n	$-E_n(eV)$ (29)	$-E_n(eV)$ (*)	$-E_n(eV)$ экспер.
1 ¹	0,0879	0,1376	0,1387
2	0,0219	0,0240	0,0242
3	0,0097	0,0100	0,0108
4	0,0055	0,0055	0,0062
5	0,0035	0,0035	0,0038
6	0,0024	0,0024	0,0025
7	0,0018	0,0018	0,0018

По формуле (29) для состояния $n = 1$ получаем $E_1 = 0,0879 eV$ что значительно отличается от величины полученной экспериментально. Гросс это отклонение объясняет тем, что радиус экситона в состоянии с $n = 1$ уже настолько мал, что кристалл нельзя рассматривать как среду с определенной диэлектрической постоянной. Из наших вычислений однако видно, что если примем в расчет взаимодействие электрона и дырки с оптическими колебаниями решетки, так придем к результату, хорошо согласующемуся и для энергии основного состояния экситона. При этом на определение характеристических значений энергии в уравнении (35) мы пользовались специальным образом выбранным приближением. Это приближение однако физически обосновано а его применение оправдывается согласием полученных результатов с опытом.

Эффективное сечение для рекомбинации электрона и дырки

Член H' в гамильтониане (18) будем рассматривать как возмущение, под влиянием которого может настать переход из состояния

$$\Psi_{\vec{K}}(\vec{R}) | \dots, n_{\vec{k}}^0, \dots \rangle \quad (36)$$

невозмущенной системы в состояние

$$\Psi_n(\vec{R}) | \dots, n_{\vec{k}}^0 + 1, \dots \rangle \quad (37)$$

невозмущенной системы. При этом $\Psi_{\vec{K}}(\vec{R})$ есть решением уравнения

$$\left[\frac{P^2}{2\mu^*} - \frac{e^2}{\epsilon R} \right] \Psi_{\vec{K}}(\vec{R}) = E_{\vec{K}} \Psi_{\vec{K}}(R) \quad (38)$$

отвечающее сплошному спектру и $\Psi_n(\vec{R})$ есть решением того же уравнения соответствующее энергии E_n из дискретного спектра. Число $n_{\vec{k}}^0$ обозна-

чает количество фононов с волновым вектором $\vec{k}$. Следовательно встречаемся с переходом электрона из свободного состояния в связанное, сопровождаемое эмиссией одного фонона с волновым вектором $\vec{k}$.

Вероятность, что за единицу времени полярон перейдет из состояния $\Psi_{\leftarrow}^K$ в состояние Ψ_n (и тем возникнет экситон с квантовым числом n), причем выделяется фонон с энергией $\hbar\omega$ в телесный угол $d\Omega_0$ в направлении $\vec{k}$, выразится

$$w_{\vec{k}} d\Omega_0 = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{Kn}|^2 \frac{1}{4\pi} \varrho(E_K) d\Omega_0, \quad (39)$$

где $\varrho(E_K)$ — плотность состояний свободного поларона с энергией E_K . Для элемента матрицы H'_{Kn} можем написать:

$$\begin{aligned} H'_{Kn} = & -\frac{\hbar^2}{m_1} \frac{e^3 \sqrt{2\pi\hbar\omega C}}{\varepsilon_0 \sqrt{V}} \frac{\sqrt{n_k^0 + 1}}{\left(\hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1}\right)^2} \int \Psi_n \frac{\vec{k} \cdot \vec{R}}{kR^3} \exp\left(-i \frac{m_2}{M} \vec{k} \cdot \vec{R}\right) \Psi_{\leftarrow}^K d\vec{R} + \\ & + \frac{\hbar^2}{m_2} \frac{e^3 \sqrt{2\pi\hbar\omega C}}{\varepsilon_0 \sqrt{V}} \frac{\sqrt{n_k^0 + 1}}{\left(\hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_2}\right)^2} \int \Psi_n \frac{\vec{k} \cdot \vec{R}}{kR^3} \exp\left(i \frac{m_1}{M} \vec{k} \cdot \vec{R}\right) \Psi_{\leftarrow}^K d\vec{R} \end{aligned} \quad (40)$$

При этом должен удовлетворяться закон сохранения энергии

$$E_K = \hbar\omega(1 - \Delta)$$

где $\Delta = \frac{|E_n|}{\hbar\omega}$. Для достаточно больших n , $\Delta \ll 1$ и в таких случаях согласно аналогичным расчетам Тойозава [10] можем вместо точного решения уравнения (28) для сплошного спектра взять плоскую волну. Следовательно, если ограничимся достаточно большими n и R , так можем за функцию $\Psi_{\leftarrow}^K$ взять

$$\Psi_K(\vec{R}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}}; \quad E_K = \frac{\hbar^2 K^2}{2\mu^*} \quad (42)$$

а для дискретного S — состояния возьмем [11]:

$$\Psi_n(R) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left\{ \left(\frac{2}{na_0} \right)^3 \frac{1}{(2n)!} \right\}^{\frac{1}{2}} (-1)^n \varrho^{n-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \varrho\right), \quad (43)$$

где

$$\varrho = \frac{2R}{na_0}; \quad a_0 = \frac{\epsilon \hbar^2}{\mu^* e^2}.$$

В интегралах, заключающихся в выражении (40) заменим члены $\exp\left(-i \frac{m_2}{M} \vec{k} \cdot \vec{R}\right)$ и $\exp\left(i \frac{m_1}{M} \vec{k} \cdot \vec{R}\right)$ единицей. Это приближение оправ-

дано, поскольку наисильнейшее взаимодействие поляронов возникает с фононами с $k \sim 0$ и в результате члена $\exp -(R/na_0)$ в функции Ψ_n , для значения интегралов существенна область малых значений R (немного больших чем na_0).

Для $k \sim 0$ можем написать

$$H'_{Kn} = - \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \frac{\hbar^2 e^3 \sqrt{2\pi\hbar\omega C} \sqrt{n_k + 1}}{\varepsilon_0 V (\hbar\omega)^2 \sqrt{4\pi}} \left\{ \left(\frac{2}{na_0} \right)^3 \frac{1}{(2n)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{na_0} \right)^{n-1} \cdot \int R^{n-1} e^{-\frac{R}{na_0} \frac{\vec{k} \cdot \vec{R}}{kR^3}} e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}} dR. \quad (44)$$

Введем полярные координаты с полярной осью в направлении вектора $\vec{K}$. Обозначим угол между вектором $\vec{k}$ и $\vec{K}$, ϑ_0 . Ось x выберем так, чтобы векторы $\vec{k}$, $\vec{K}$ лежали в плоскости x . Тогда интеграл в выражении (44) легко вычислим и получим

$$\int R^{n-1} e^{-\frac{R}{na_0} \frac{\vec{k} \cdot \vec{R}}{kR^3}} e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}} dR = \frac{i}{K^2} 4\pi \cos \vartheta_0 \frac{n! (na_0)^{n-2}}{[n^2 a_0^2 K^2 + 1]^{n-1}} \cdot \left\{ \frac{2}{3!} (na_0 K)^3 - \frac{4}{5!} (n-3)(n-4)(na_0 K)^5 + \right. \\ \left. + \frac{6}{7!} (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(na_0 K)^7 - \dots \right\} \quad (45)$$

Подстановкой вместо $\varrho(E_K)$ приобретет выражение (39) форму

$$w_{\vec{k}} d\Omega_0 = \frac{\mu^* K V}{4\pi^2 \hbar^3} |H'_{Kn}|^2 d\Omega_0 \quad (46)$$

Суммарную вероятность возникновения экситона в состоянии n одно-фононовой рекомбинацией электрона и дырки получим подставляя в выражение (36) вместо H'_{Kn} соответствующее значение и проинтегрируем по всем направлениям $\vec{k}$. Так получим

$$w = \frac{8\pi}{V} \mu^* \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^2 \frac{e^6}{(\hbar\omega)^3 a_0 \varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{2^{2n} n! n!}{(2n)! n (n^2 a_0^2 K^2)^2} \cdot \frac{\hbar K (n_0 + 1)}{[n^2 a_0^2 K^2 + 1]^{2n-2}} \left\{ \frac{2}{3!} (na_0 K)^3 - \frac{4}{5!} (n-3)(n-4)(na_0 K)^5 + \right. \\ \left. + \frac{6}{7!} (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(na_0 K)^7 - \dots \right\}^2 \quad (47)$$

Эффективное сечение рекомбинации обозначим σ ,

$$\sigma = \frac{\mu^* V}{\hbar K} w = 8\pi \mu^{*2} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^2 \frac{e^6}{(\hbar\omega)^3 a_0 \varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (48)$$

$$\cdot \frac{2^{2n} n! n!}{(2n)! n (na_0 K)^4} \cdot \frac{(\bar{n}_0 + 1)}{[n^2 a_0^2 K^2 + 1]^{2n-2}} \cdot \left\{ \frac{2}{3!} (na_0 K)^3 - \frac{4}{5!} (n-3)(n-4)(na_0 K)^5 + \right. \\ \left. + \frac{6}{7!} (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(na_0 K)^7 - \dots \right\}^2.$$

Соотношения (47) и (48) были выведены при допущениях:

$$k \sim 0; \quad R \gg \frac{1}{K}; \quad n \gg \sqrt{\frac{e^2}{2\hbar\omega a_0}}. \quad (49)$$

(Второе из этих условий вытекает из выражения (17) и третье из требования $\Delta = \frac{|E_n|}{\hbar\omega} \ll 1$.)

Из закона сохранения энергии вытекает:

$$n^2 a_0^2 K^2 = \frac{1}{\Delta} - 1. \quad (50)$$

Приведем числовые значения, вытекающие из соотношений (47) и (48) в случае Cu_2O . Значения энергии E_n для связанного состояния возьмем из спектроскопических величин определенных Гроссом [1] для желтой серии экситона при температуре 4,2°К. Для $\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_0}\right)$ возьмем значение $10^{-2} m_e^{-1}$ и для остальных констант возьмем те же самые значения, как в предыдущем. Множитель $(\bar{n}_0 + 1)$ при низких температурах $|kT| \ll \hbar\omega$ приблизительно равен единице. Результаты приведены в следующей таблице.

n	$-E_n (eV)$	Δn	$n^2 a^2 K^2$	$\sigma [cm^2]$	$wV \text{ sec}$
2	0,0242	0,81	0,23	$2,4 \cdot 10^{-17}$	$1,4 \cdot 10^{-10}$
3	0,0108	0,36	1,77	$3,7 \cdot 10^{-18}$	$3,9 \cdot 10^{-11}$
4	0,0062	0,21	3,76	$3,5 \cdot 10^{-20}$	$4,2 \cdot 10^{-13}$
5	0,0038	0,13	6,7	$5,5 \cdot 10^{-24}$	$7,0 \cdot 10^{-17}$
6	0,0025	0,08	11,5	$2,3 \cdot 10^{-24}$	$3,2 \cdot 10^{-17}$
7	0,0018	0,06	15,6	$2,1 \cdot 10^{-28}$	$2,9 \cdot 10^{-20}$

Как видно из таблицы, эффективное сечение тем больше, чем ближе Δ к единице, т. е. чем меньше энергия свободного электрона относительно дырки. И в том случае, если было бы желательно для состояний с малым n вычислять с более точными волновыми функциями, полагаем, что для оценки рассматриваемого эффекта наше приближение достаточно и однофононовая неизлучающая рекомбинация электрона и дырки несомненно играет роль по меньшей мере для экситонов в состояниях $n = 2$ и $n = 3$.

З а к л ю ч е н и е

Однофононовая неизлучающая рекомбинация электрона и дырки может играть важную роль особенно в неустойчивых состояниях кристалла, возникающих например при его облучении, главным образом в кристаллах с большой диэлектрической постоянной и при низких температурах. Полагая, что неизлучающей рекомбинацией электрона и дырки можно объяснить не только одно из возможных возникновений экситонов, но и люминесценцию некоторых кристаллов (например, галоидов серебра) при низких температурах. При облучении кристалла фотонами с энергией незначительно большей чем ширина запрещенной зоны, возникнувшая пара электрон — дырка в результате взаимодействия с решеткой перейдет сначала до возбужденного экситонного состояния а затем настанет излучающая рекомбинация. По существу имеем дело с двухступенным процессом, обратным тому, которым Мотт и Герни [12] объясняют освобождение электронов из F^- — центров.

Ц и т и р о в а н н а я л и т е р а т у р а

- [1] Е. Ф. Гросс: УФН, 63 (1957) 575
- [2] N. F. Mott: Proc. Roy. Soc., 167 (1938) 384
- [3] R. Peierls: Ann. d. Phys., 13 (1932) 905
- [4] J. Frenkel: Phys. Z. Sovjet., 9 (1936) 158
- [5] И. Е. Перлин: ЖЭТФ, 32 (1957) 105
- [6] M. Trlifaj: Čs. Čas. Fys., 7 (1957) 617
- [7] И. М. Дыкман, С. И. Пекар: Труды Ин-та физики АН УССР, вып. 3, (1952) 92
- [8] И. П. Ипатова: ИАН СССР, 21 (1957) 78
- [9] Е. Ф. Гросс, Б. П. Захарченя: ЖТФ, 27 (1957) 1940
- [10] Y. Toyozawa. Prog. Theor. Phys. 12 (1954) 431
- [11] Л. Ландау и Е. Лифшиц: Квантовая механика, Гостехиздат, Москва, 1948
- [12] N. F. Mott, R. W. Gurney: Electronic Processes in Ionic Crystals, Oxford, Clarendon Press 1946

Do redakcie dodané 1. VI. 1958

Vznik excitónu nežiarivou rekombináciou elektrónu a diery

L. H R I V N Á K

S ú h r n

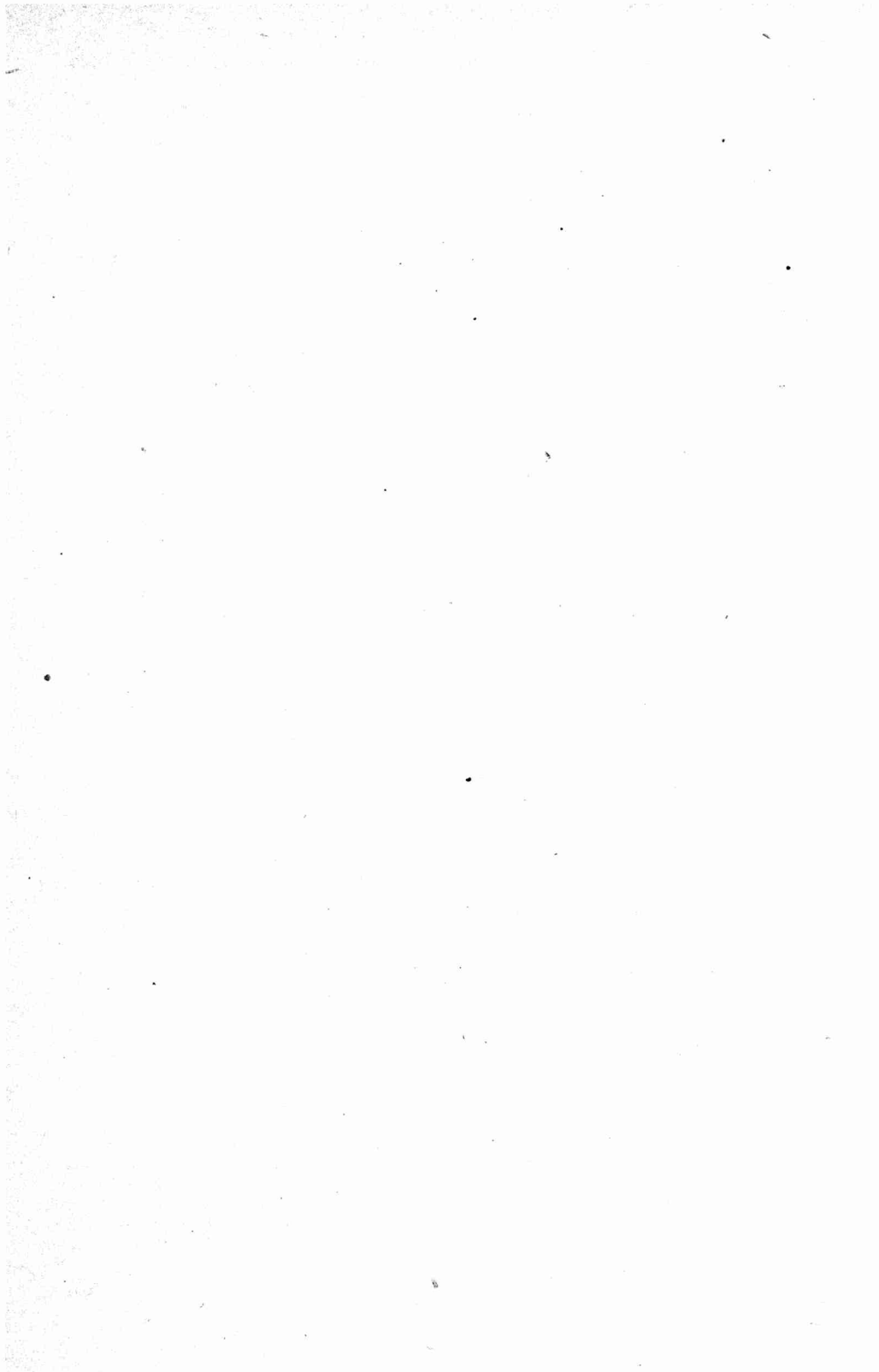
Je vyšetrovaný mechanizmus vzniku vzbuđeného excitónu v iónovom kryštáli jedno-fonónovou nežiarivou rekombináciou elektrónu a diery. Sú nájdene výrazy pre pravdepodobnosť za jednotku času a účinný prierez tohto procesu. V práci je tiež ukázané, že ak použijeme pre excitón model Motta a vezmeme do úvahy interakciu elektrónu a diery s optickými kmitmi mriežky, môžeme vypočítať hladiny energie excitónu, ktoré, v prípade Cu_2O , sú v dobrom súhlase s experimentálnymi hodnotami.

Creation of an exciton by radiationless recombination of an electron and a hole

L. HRIVNÁK

Summary

The mechanism of one-phonon radiationless recombination of an electron and a hole in ionic crystals which leads to the creation of an exciton in excited state is investigated. The expressions are found for the probability per unit time and effective cross section of this process. It is also shown that if we use for exciton the model of Mott and take into account the interaction of electron and hole with optical vibration of lattice, we can compute the energy levels of the exciton which, in the case of Cu_2O , are in good agreement with experimental values.



Electron Resonance in The Gaseous Discharge Plasma

J. ĎURČEK

Electron resonance was observed in the gaseous discharge plasma in the 3 cm wave band. The elementary theory of this phenomenon which is in qualitative accordance with experimental results, is given. Possibilities for the utilization of the electron resonance in the field of examination of the plasma are studied.

Introduction

Goldstein and others [1], [2] observed a strong resonance for microwaves passing through a gaseous discharge plasma under the influence of a strong magnetic field, for frequencies equal to the gyrofrequencies of free electrons. In 1955, Ingram and Tapley reported about the electron resonance observed in discharge [3]. A technique generally applied for paramagnetic resonance was used by Ingram, and the discharge took place in the region of maximum microwave magnetic field strengths. Based on the extremely strong absorption intensities experienced, he concluded that the major part of the absorption was due not to the spin, but to the cyclotron resonances of free electrons. Our observations confirm the correctness of the hypothesis mentioned, and are, moreover, in good accordance with theory.

I. Macroscopic theory of the electron resonance phenomenon

The macroscopic behaviour of the plasma in the presence of both a variable electrical and a constant magnetic fields has been studied in [4], [5], [6] and [7]. In [6], it was shown by the authors that the conductivity of the plasma in the presence of a magnetic field, applied in the direction of the Z axis, and for an arbitrary orientation of the electric field, has tensor characteristics and may be written in the form

$$||\sigma|| = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

The diagonal components of the tensor $||\sigma||$ represent the equation for conductivity along three co-ordinate axes, σ_3 being the conductivity in the direction of the magnetic field. The non-diagonal members correspond to Hall's phenomenon.

Provided that the so-called first-order relaxation frequency occurring in the development of the velocity distribution function is independent on velocity, the following equations were derived for the individual conductivity matrix elements:

$$\sigma_1 = \frac{Ne^2}{m} \frac{j\omega + \nu_1}{(j\omega + \nu_1)^2 + \Omega^2} \quad (2a)$$

$$\sigma_2 = \frac{Ne^2}{m} \frac{\Omega}{j\omega + \nu_1} \quad (2b)$$

$$\sigma_3 = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{j\omega + \nu_1} \quad (2c)$$

where N is the concentration of electrons, e the charge, m the mass of the electron, $\Omega = \frac{eH}{mc}$ is the cyclotron frequency of electrons in a magnetic field with the strengths H ; ν_1 is the first-order relaxation frequency which, for the case of impenetrable molecules, not acting to a distance, is equal to their collision frequency.

A section of the discharge column placed in a cavity resonator acts as a shunting admittance. When suitable experimental conditions are chosen, just the component σ_1 is going to act. The real part is responsible for the absorption, whereas the imaginary part, on the other hand, is responsible for the frequency shift. The real part of equation (2a) has the form

$$\sigma_R = \frac{Ne^2}{m} \frac{\nu_1[\nu_1^2 - (\omega^2 - \Omega^2) + 2\omega^2]}{[\nu_1^2 - (\omega^2 - \Omega^2)]^2 + 4\omega^2\nu_1^2} \quad (3)$$

If we introduce

$$\frac{Ne^2}{m} \cdot \frac{1}{\nu_1} = \sigma_0; \quad \frac{\omega}{\nu_1} = \alpha; \quad \frac{\Omega}{\nu_1} = \alpha_c \quad (4)$$

we get

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_0} = \frac{1 + \alpha^2 + \alpha_c^2}{(1 + \alpha_c^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2} \quad (5)$$

This function was discussed in paper [8]. The experimental treatment is usually such that the magnetic field is changed, that is α_c is the variable quantity. For the resonance value $\alpha_{c \text{ res}}$, we get from equation (5)

$$\alpha_{c \text{ res}} = -\sqrt{(1 + \alpha^2) + 2\alpha\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad (6)$$

For the case $\alpha \gg 1$, that is $\omega \gg \nu_1$, we get $\alpha_{c \text{ res}} = \alpha$, that is $\Omega_{\text{res}} = \omega$. For small values of α , the resonance occurs at lower values. For example, for

$\alpha = 1$, the shift is about 10^{-1} of the total value, while, for $\alpha = 3$, it is less than $7 \cdot 10^{-3}$, amounting to about 21 G for a field strength of 3000 G.

When $\alpha \gg 1$, the ones in equation (5) may be neglected, and, using $\alpha_{c \text{ res}} = \alpha$, we get, for the resonance value $\sigma_{R(\text{res})}$

$$\frac{\sigma_{R(\text{res})}}{\sigma_0} \doteq \frac{1}{2} \quad (7)$$

For the resonance, the real part of the conductivity amounts to half the value as compared to the direct current conductivity.

The ratio of the radiofrequency conductivity for resonance to the radio-frequency conductivity for zero magnetic field, if $\alpha_c \gg 1$, is

$$\frac{\sigma_{R(\text{res})}}{\sigma_{R|H=0}} = \frac{\alpha_c^2}{2} \quad (8)$$

The line width is determined by the values of α_c , for which the function $\sigma_R(\alpha_c)$ has a half maximum value. These values are

$$\alpha_{c_1} = \sqrt{-3\alpha^2 - 1 + 4\alpha/\alpha^2 + 1 + 2\alpha/\sqrt{4\alpha^2 + 3 - 4\alpha/\alpha^2 + 1}} \quad (9a)$$

$$\alpha_{c_2} = \sqrt{-3\alpha^2 - 1 + 4\alpha/\alpha^2 + 1 - 2\alpha/\sqrt{4\alpha^2 + 3 - 4\alpha/\alpha^2 + 1}} \quad (9b)$$

Thus, the line width will be

$$\Delta\alpha_c = \sqrt{2\{-1 - 3\alpha^2 + \sqrt{1 + \alpha^2(4\alpha - \sqrt{1 + 9\alpha^2 - 8\alpha/\alpha^2 + 1})}\}} \quad (10)$$

For $\alpha \gg 1$, the approximate equation

$$\Delta\alpha_c = 2 \quad (11)$$

may be used. The error due to the use of this equation is, for $\alpha = 2$, less than 10 percent, and, for $\alpha = 10$, less than 1 per cent.

For examining the absorption quantity, it is appropriate to investigate the quality size Q of the absorption line. If only the action of the electric field is considered, the energy density is $\frac{\epsilon E_{\text{aver}}^2}{8\pi}$, where E_{aver} is the average field value

for the volume of the specimen. Losses of energy occurring during time $\frac{T}{2}$

for resonance are $\sigma_R \frac{E_{\text{aver}}^2}{\omega}$. Thus, for Q , it holds that

$$Q = \frac{\epsilon\omega}{8\pi\sigma_R} = \frac{m\epsilon\omega}{4\pi Ne^2\tau} \quad (12)$$

The quantity $\frac{1}{Q}$ is a measure of the actual absorption.

The validity of all relations shown is determined by the validity of the plasma theory for the experimental conditions given. An examination of up-to-date theories and the determination of their validity has been performed in [7].

II. Quantum theory of the cyclotron resonance for electrons

The theory of cyclotron-resonance absorption for a free particle has been developed by Lorentz. The phenomenon of cyclotron resonance in solids was predicted by Dorfman [9] and Dingle [10]. It was shown by Dingle that the occurrence of resonance absorption of the electromagnetic radiation incident upon a free electron system in a magnetic field may be expected. The maximum absorption occurs, when the frequency of incident radiation is equal to the circular frequency in the magnetic field. The states which may occur, are determined by the two quantum numbers n, l . Further, it was shown by Dingle that the characteristic energy values are given by the relation

$$E = \frac{ehH}{2\pi mc} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (13)$$

and, thus, that for the absorption, only transitions involving a change of n are of importance. From the dipole moments corresponding to transitions between the states (n, l) and (n', l') there are only two other than zero, namely

$$D(n, l; n+1, l-1) = \left\{ \frac{ehc(n+1)}{\pi H} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (14a)$$

$$D(n, l; n, l-1) = \left\{ \frac{ehc(n+l)}{\pi H} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (14b)$$

From these, only the moment (14a) leads to a transition with an energetical change state contributing to absorption.

The theory is valid only for a sufficiently large system. For the examination of the magnitude of a system, the maximum electron orbit radius $r_{\max}$ is the main factor. If the radius of the system $R \gg r_{\max}$, all electrons can finish their ways without coming to the surface of the system. $r_{\max}$ may be determined from the relation $\frac{eH}{c} = \frac{mv}{r_{\max}}$, where, for gases, the average velocity of electrons is substituted for v .

The absorption on the volume unit is determined by means of the absorption coefficient. In order to determine this coefficient, the degree of occupation of the individual levels determined by using appropriate statistical methods, has to be known. For the case of electrons in the gaseous discharge plasma, Fermi's characteristic energy ε_0 results to be very small, so that the Fermi-Dirac distribution is transferred to the Maxwell distribution [11]. Introducing the Maxwell-Boltzmann distribution for the energetical states [12], it is possible to determine the absorption coefficient for plane-polarized radiation with a frequency ν , from Lorentz's theory:

$$\kappa = \left(\frac{8\pi^2 \nu N e^2}{2hc} \right) \frac{h}{2kT} \cdot \frac{\sum_j \sum_i |x_{ij}|^2 \nu_{ij} f(\nu_{ij}, \nu) e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}}} \quad (15)$$

where

$$f(\nu_{ij}, \nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{\nu_{ij}} \left[\frac{\Delta\nu}{(\nu_{ij} - \nu)^2 + (\Delta\nu)^2} - \frac{\Delta\nu}{(\nu_{ij} + \nu)^2 + (\Delta\nu)^2} \right]$$

and $\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau}$, where $\frac{1}{\tau}$ is the collision frequency ν_1 , $e^2|x_{ij}|^2$ is the square of the dipole moment for the transition from state i to j , and $\nu_{ij} = \frac{2\pi(E_j - E_i)}{h}$

Using the dipole-moment square as well as the characteristic value for energy determined by Dingle, we get for the absorption coefficient

$$\kappa = \frac{8\pi^2\nu N}{2hc} \frac{h}{2kT} \frac{ehc}{\pi H} \nu_c f(\nu_c, \nu) \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{-\frac{h}{2\pi} \frac{\nu_c}{kT} (n+1)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{h}{2\pi} \frac{\nu}{kT} (n+1)}}$$

where ν_c is the cyclotron frequency. After performing a summation and a rearrangement, we get

$$\kappa = \frac{4\pi\nu N}{kT} \cdot \frac{eh}{H} \nu_c f(\nu_c, \nu) \frac{1}{1 - e^{-\frac{h}{2\pi} \frac{\nu_c}{kT}}}$$

For the microwave range, it always holds that $\frac{h\nu_c}{2\pi kT} \ll 1$, and the equation for κ may be rearranged to give

$$\kappa = \frac{4\pi\nu N}{kT} \frac{eh}{H} \nu_c f(\nu_c, \nu) \frac{2\pi kT}{h\nu_c}$$

Substituting H by means of ν_c , we get, after a rearrangement

$$\kappa = \frac{4\pi e^2 N}{mc} \frac{\nu}{\nu_c} f(\nu_c, \nu)$$

The forming factor $f(\nu_c, \nu)$ may be, by introducing of $\frac{\nu_c}{\Delta\nu} = \alpha_c$ and $\frac{\nu}{\Delta\nu} = \alpha$, brought to the form

$$f(\alpha_c, \alpha) = 2\tau \frac{\alpha}{\alpha_c} \left[\frac{\alpha_c^2 + \alpha^2 + 1}{(1 + \alpha_c^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2} \right]$$

For κ , we get thus the equation

$$\kappa = \frac{4\pi e^2 N}{mc} 2\tau \left(\frac{\alpha}{\alpha_c} \right)^2 \left[\frac{\alpha_c^2 + \alpha^2 + 1}{(1 + \alpha_c^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2} \right] \quad (16)$$

For $\alpha \gg 1$, it holds, for the case of resonance, that $\alpha = \alpha_c$, and the part in parentheses has a value of approximately $\frac{1}{2}$. Then, for κ , it holds that

$$\kappa = \frac{4\pi e^2 N}{mc} \cdot \tau \quad (17)$$

For the quality of the line, we should get an equation equivalent to (12). The form of the line has been changed, however, by the introduction of the factor $\left(\frac{\alpha}{\alpha_c}\right)^2$. Its influence decreases with the increase of α , that is, in the case of relatively narrow lines. For $\alpha \gg 1$, it is possible for the second member in parentheses $f(\nu_c, \nu)$ to be neglected, and so can be $\frac{\nu}{\nu_c} \doteq 1$. For the half width, we get the equation

$$\Delta\nu_c = 2\Delta\nu \quad (18)$$

what is in accordance with equation (11).

According to Dingle's theory, transitions caused by quadrupole interaction also contribute to the absorption. The quadrupole interaction with the field is 2π -times greater (λ being the wave length of the incident radiation); by centering, it may be shown, however, that the resulting absorption is approximately equal to the $\left(\frac{R}{\lambda}\right)^2$ -multiple of the dipole-interaction caused absorption, R being the radius of the system. In the experimental arrangement in the 3 cm band, the factor $\frac{R}{\lambda}$ is already so small that its contribution to the absorption may be neglected.

III. Experimental results

The cyclotron resonance was observed in the 3 cm band. The discharge usually occurred in a thin-walled quartz-glass tube passing through a rectangular cavity resonator at the point of maximum microwave electric field strength. The cavity was tunable by a non-contact piston in the mode TE_{013} . The function of the apparatus can be seen from the block diagram given on Figure 1.

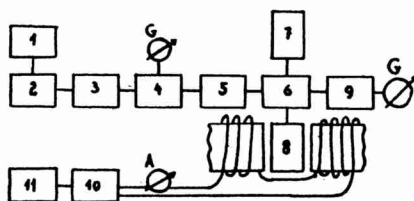


Figure 1.

Block diagram of the apparatus: 1 — stabilized source for clystron, 2 — reflex clystron 2K 25, 3 — fixed damping, 4 — coaxial wavemeter, 5 — variable damping, 6 — magic „T“, 7 — adapted load, 8 — cavity resonator with a discharge tube, 9 — crystal holder, 10 — regulation resistances, 11 — direct-current source.

The axis of the discharge tube was parallel to the direction of the magnetic field, and perpendicular to the direction of the microwave electric field. The necessary vacuum was effected by means of a rotary oil vacuum pump, and measured with a Pirani gauge. Measurements were performed at constant high frequency outputs. For the determination of the frequency, an RFT WM 1 type coaxial wavemeter (with an accuracy of 10^{-3}) was used. The magnetic field H was induced by an electromagnet calibrated against current by means of the proton resonance. The precision of the calibration was better than 1 per cent. Absorption curves were taken by gradually tuning the resonator to the resonance, and the curve was plotted, point by point, from the data of the galvanometer readings.

The results of the preliminary measurements performed with air, are given in Tables I and II, and on Figures 2 and 3. In Table I, the widths of the absorption curves for pressures in the range between 10^0 – 10^{-1} mm Hg, at a current of 20 μ A, as well as collision frequencies computed from equation (11), are given.

Table I

Pressure (mm Hg)	$1,0 \times 10^0$	$8,0 \times 10^{-1}$	$5,2 \times 10^{-1}$	$4,3 \times 10^{-1}$	$2,6 \times 10^{-1}$
Width (G)	466	250	180	160	300
Collision frequency	$6,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$	$2,5 \times 10^8$	$2,2 \times 10^8$	$4,2 \times 10^8$

The dependence of the collision frequency on the pressure is linear, and, from the first four values, we get, for the collision frequency, $\nu_1 = 6,2 \times 10^8$ (sec mm Hg) $^{-1}$. The fifth value differs considerably from the other ones. The reason for this will be explained in the further course of this paper.

In Table II, data on the line widths for constant pressure and increasing current are given. In addition to the increasing absorption intensity caused by the increasing electron concentration at a current rise, also an increase of the line width, and, thus of the collision frequency is observed. This phenomenon has not been reported for pressures in the millimeter range [13] [14]. With the decrease of pressure, the rôle of electron-ion-type collisions for collisions in general becomes more important [14], whereby the effective collision frequency is raised.

Table II

Current	20	40	60	80	100
Width G	166	166	300	500	566
Collision frequency	$2,3 \times 10^8$	$2,3 \times 10^8$	$4,2 \times 10^8$	$7,0 \times 10^8$	$9,4 \times 10^8$

In Table II, data obtained by measurements performed at a pressure of $4,6 \times 10^{-1}$ mm Hg, are given. It is evident that, for the case of going beyond a certain limit, a considerable increase in collision frequency is observed.

The conditions are more truly illustrated by the absorption maximum dependence on current and pressure, respectively. Provided that the collision frequency is kept constant, and the concentration is linearly related to the current, according to (17), a linear dependence had to be expected. This

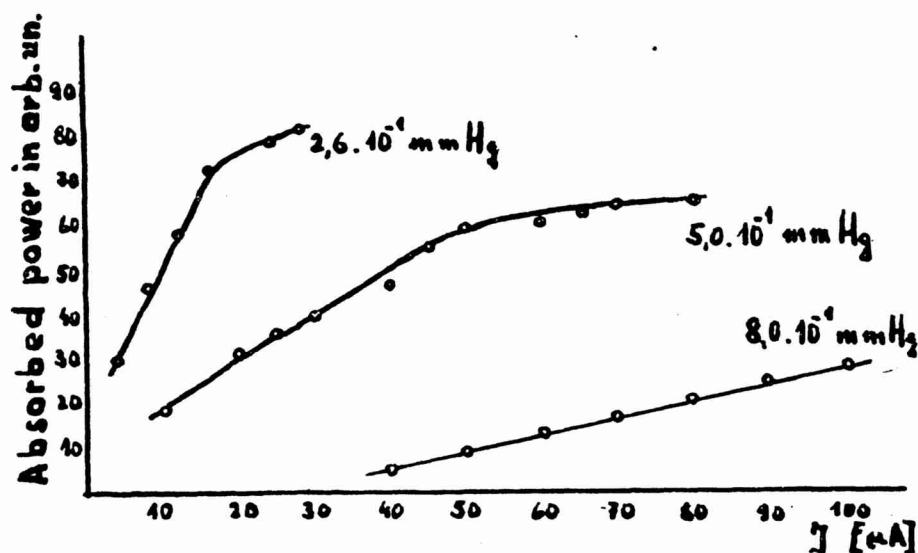


Figure 2.

Maximum absorption value dependence on current at constant pressure

actually holds until a certain value of the current is reached, the magnitude of which depends, in turn, on the pressure. Considering the changes of the line widths in dependence on the current, the discontinuity of the linear maximum-absorption dependence on current is caused chiefly by the increase of the effective collision frequency. The linear part indicated the limits for the values of currents at which the absorption line widths determine the electron-molecule collision frequency. Conditions are analogous also on Figure 3, where the dependence of the maximum absorbed power value is plotted against pressure at constant current. The slope of the linear portion is dependent on the collision frequency corresponding to pressure unit, and will, thus, depend only on the kind of the gas. For a given current, there is a pressure, below which also the electron-ion-type collisions begin to show their influences.

The experimental results show a good qualitative accordance with theory. It will be possible to evaluate the accuracy of the quantitative results only after performing measurements in pure gases. It appears that the electron-resonance phenomenon offers a source of abundant experimental material. Its treatment depends, to a considerable extent, on the theory of plasma, the requirements of which are, however, often contradictory to experimental requirements. As compared to the existing high-frequency methods used for

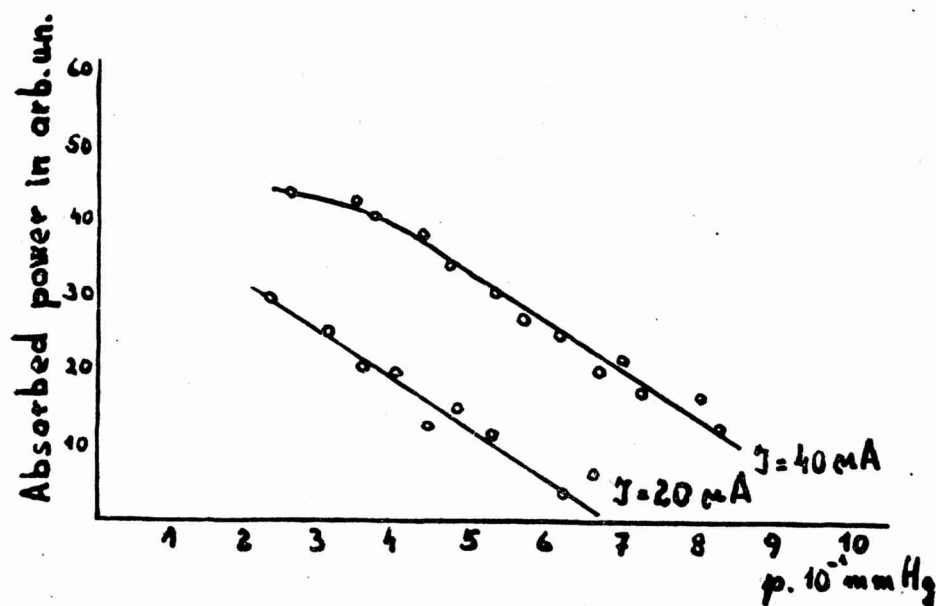


Figure 3.

Maximum absorption value dependence on pressure at constant current

the measurement of the collision frequency and the electron concentration, it must be emphasized that the advantages obtained with utilizing the cyclotron-resonance phenomenon, are indisputable (see equation [8]).*

Acknowledgement

I am very much obliged to Mr. P. Hedvig for his drawing my attention upon the complex of problems related to gaseous discharges, as well as to Mr. D. J. E. Ingram for his encouraging communication concerning this phenomenon. I thank also all my co-workers from our Institute who have, in any way, made it possible for me to accomplish this work in due time.

* Note. When writing this paper, it was possible for the author to study the work of C. Kelly, H. Margenau and S. C. Brown: Phys. Rev. 108, 1367 (1957) treating the same complex of problems. The relations used by the author of this paper are in accordance with the solution given for the case of constant average free time introduced by the authors of the mentioned paper.

References

- [1] Goldstein L., Lampert M., Heney, Phys. Rev. 82, 956, 1951.
- [2] Goldstein L., Lampert M., Heney, Phys. Rev. 83, 1255, 1951.
- [3] Ingram, D. J. E., Tapley J., Phys. Rev. 97, 238, 1955.
- [4] Jancel L., Kahan T., Jour. Phys. et Rad. 14, 533, 1953.
- [5] Bayet M., Jour. Phys. et Rad. 15, 258, 1954.
- [6] Bayet M., Denisse F., Delcroix L., Jour. Phys. et Rad. 15, 795, 1954; 16, 274, 1955.
- [7] Bayet M., Denisse F., Delcroix L., Jour. Phys. et Rad. 17, 923, 1956; 17, 1005, 1956.
- [8] Dresselhaus G., Kip A. F., Kittel G., Phys. Rev. 92, 858, 1953.
- [9] Dorfmann J. G., Dokl. Akad. Nauk SSSR 81, 765, 1951.
- [10] Dingle R. B., Proc. Roy. Soc. A 212, 38, 1957.
- [11] Blochincev D. I., Základy kvantové mechaniky, ČSAV Praha 1956.
- [12] Breene R. G., Jr., Rev. Mod. Phys. 29, 94, 1957.
- [13] Udelson B. J., Greedom J. E., French J. C., Jour. Appl. Phys. 28, 717, 1957.
- [14] Anderson J. M., Goldstein L., Phys. Rev. 100, 1037, 1955.

Do redakcie dodané 1. VI. 1958.

Elektrónová rezonancia v plazme plynového výboja

J. ĎURČEK

S ú h r n

Bol pozorovaný jav elektrónovej rezonancie v plazme plynového výboja v pásme 3 cm. Na základe výsledkov práce [6] je podaná makroskopická teória javu elektrónovej rezonancie. Odvodené sú vzťahy viažúce šírku čiary so zrážkovou frekvenciou a kvalitu čiary s koncentráciou elektrónov. Kvantová teória vychádzajúca z práce [10] dáva výsledky zhodné s teóriou makroskopickou. Na základe odvodených vzťahov sú vyhodnotené výsledky meraní prevedené na výboji vo vzduchu. V tabuľke I. sú uvedené šírky absorpčných čiar pre tlaky medzi $10^0 - 10^{-1}$ mm Hg pri prúde $20 \mu\text{A}$ a zrážkové frekvencie vypočítané zo vzťahu (11). Údaje v tabuľke II. boli získané meraniami pri tlaku $4,6 \cdot 10^{-1}$ mm Hg pre prúdy $20 - 100 \mu\text{A}$ vo výbojovej trubici. Na obr. 2 je vynesená závislosť maxima absorpcie na prúde pri konštantnom tlaku a na obr. 3 závislosť maximálneho absorbovaného výkonu na tlaku pri konštantnom prúde. Z výsledkov vidno, že pri nízkych tlakoch a vyšších hodnotách prúdov prichádza k porušeniu lineárnej závislosti maximálnej absorpcie od prúdu, čo je pravdepodobne zapríčinené zvýšením efektívne zrážkovej frekvencie. Jav cyklotrónovej rezonancie elektrónov poskytuje nové možnosti na vyšetrovanie plazmy.

Электронный резонанс в газоразрядной плазме.

И. Д ю р ч е к

(Р е з ю м е.)

Наблюдался электронный резонанс в газоразрядной плазме в диапазоне 3 см. На основании результатов работы [6] предлагается макроскопическая теория явления электронного резонанса. Установлены соотношения связывающие ширину линий с частотой соударений и добротность линий с концентрацией электронов. Квантовая теория выходящая из работы [10] дает результаты тождественные с макроскопической теорией. На основании извлеченных соотношений обработаны результаты измерений произведенных в воздухе. В таблице I. показаны ширины абсорбционных линий для давлений между 10^0 — 10^{-1} мм рт. ст. при токе 20 мка и частоты соударений вычислены из соотношения (11). Данные в таблице II. получены из измерений при давлении $4,6 \cdot 10^{-1}$ мм рт. ст. и токах 20—100 мка в газоразрядной трубке. На рис. 2 показывается зависимость максимума абсорбции от тока при константном давлении и на рис. 3 зависимость максимальной абсорбированной мощности на давлении при константном токе. Из результатов видно что при низких давлениях и больших токах приходит к нарушению линейной зависимости максимальной абсорбции на токе, что кажется запричинено повышением эффективной частоты соударений. Явление циклотронного резонанса электронов дает новые возможности исследования плазмы.

A Note to the „Classical“ Theory of Neutrino

M. B L A Ž E K

It is shown in this paper that some further laws, in addition to the well-known laws of conservation, are valid within the so-called „classical“ theory of neutrino which result from the invariance of action over the conformal group of transformations.

1. According to the (first) N o e t h e r's theorem [1] a determinant number of conservation laws results for the system considered from the invariance of its action over a certain group of transformations. The invariant conformity of the action of the electromagnetic field was shown by E. B e s s e l — H a g e n [2]. The corresponding 15 conservation laws being also derived by him. In the further course of this paper, it will be shown that similar laws of conservation, 15 in number, may be derived for a neutrino field (in vacuo).

2. Considering a group of transformations with the coordinates transformed according to the relation

$$x \rightarrow x' = Ax \quad (1)$$

and with the volume element transformed according to the relation

$$d(x) \rightarrow d(x') = \Delta d(x) \quad (2)$$

the lagrangian is transformed in such a way that

$$L \rightarrow L' = L\Delta^{-1} \quad (3)$$

3. For the case of the neutrino field the langrangian may be of the form

$$L = -\frac{1}{2}hc \left(\psi^+ \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \psi^+}{\partial x_\mu} \gamma_\mu \psi \right) \quad (4)$$

where $\psi^+ = i\psi^* \gamma_4$, ψ^* is the complex conjugated function to the wave function ψ , γ_μ are the Dirac's matrices (in the following these are not to be transformed, as it is obviously) and x_μ are the space-time coordinates ($x_4 = ict$). Summation is according to the twice repeating Greek indices from 1 to 4.

The canonical energy-impulse tensor has for this case the form

$$T_{\mu\nu}^{\text{can}} = - \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu}} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \psi^+}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi^+}{\partial x_\nu}} = \frac{1}{2} \hbar c \left(\psi^+ \gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \psi^+}{\partial x_\mu} \gamma_\nu \psi \right).$$

The symmetrizing member of this tensor is represented by its antisymmetrizing part (with the opposite sign). Therefore, as it is well known, the metrical energy-impulse tensor $T_{\mu\nu}^{\text{met}}$ is equal to the symmetric part of the canonical tensor

$$T_{\mu\nu}^{\text{met}} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu}^{\text{can}} + T_{\nu\mu}^{\text{can}}).$$

For the case under discussion the Noether's theorem may be expressed in the following form

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \{ T_{\nu\mu}^{\text{can}} \delta x_\nu - \frac{1}{2} \hbar c (\psi^+ \gamma_\mu \delta \psi - \delta \psi^+ \gamma_\mu \psi) \} = 0 \quad (5)$$

where δx_ν and $\delta \psi$, $\delta \psi^+$ are the infinitesimal increments of the coordinates and of the functions ψ , ψ^+ respectively.

4. The wave functions are not transformed in the case of translations. In a simple way (e. g. likewise as in [3]) the conservation law for the total momentum $\vec{P}$ (with the components P_k , $k = 1, 2, 3$) and for the total energy H may be derived, namely

$$P_k = \frac{1}{ic} \int T_{k4}^{\text{can}} dV = \frac{1}{ic} \int T_{k4}^{\text{met}} dV = \int P_k^{\text{met}} dV = \text{const.}$$

and

$$H = - \int T_{44}^{\text{can}} dV = - \int T_{44}^{\text{met}} dV = \int H^{\text{met}} dV = \text{const.}$$

(dV being the volume element). It can be shown on the base of Noether's theorem that the condition for the lagrangian to be invariant over the translations is equivalent to the condition that the divergence of the canonical tensor should be zero.

For the case of rotation the transformation (1) may be written in the well-known infinitesimal form

$$x'_\mu = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}) x_\nu \quad (6)$$

($\varepsilon_{\mu\nu}$ being the antisymmetric infinitesimal parameters). It is sufficient to transform the wave functions in the following way [4]:

$$\begin{aligned} \psi' &= \psi + \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \varepsilon_{\mu\nu} \psi \\ \psi^{+'} &= \psi^+ - \frac{1}{2} \psi^+ (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \varepsilon_{\mu\nu} \end{aligned}$$

for the lagrangian to be invariant over (6). For this case, it holds on the base of Noether's theorem that since the lagrangian (4) is invariant over (6), the divergence of the expression

$$M_{\mu\nu,\lambda} = x_\nu T_{\mu\lambda}^{\text{met}} - x_\mu T_{\nu\lambda}^{\text{met}}$$

is zero. This expression represents the density tensor of the total angular momentum. It can be then shown that the metrical energy-impulse tensor is symmetric and its divergence equals zero. For this case however the total angular momentum $\vec{M}$ (consisting of the orbital and the spin parts) is conserved. For example, its z -component M_z is

$$M_z = \int (\vec{r} \times \vec{P}^{\text{met}})_z dV = -\frac{1}{ic} \int M_{12,4} dV \quad (\text{and cycl.})$$

and moreover the uniform rectilinear motion of the center of mass is also conserved, since it holds

$$\vec{r}_{\text{met}} = \vec{v}t + \vec{r}_0$$

where

$$\vec{r}_{\text{met}} = \frac{1}{H} \int H^{\text{met}} \vec{r} dV = \frac{\int m^{\text{met}} \vec{r} dV}{\int m^{\text{met}} dV}, \quad m^{\text{met}} = \frac{1}{c^2} H^{\text{met}}, \quad \vec{v} = \frac{c^2}{H} \vec{P}$$

(with the integration constants included in $\vec{r}_0$).

5. In the case of dilatations, the infinitesimal transformations expressed in the form

$$x'_\mu = (1 + \varepsilon) x_\mu$$

(ε being the infinitesimal parameter) are considered. The wave functions are transformed according to the relations

$$\psi' = \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon\right) \psi, \quad \psi^{+'} = \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon\right) \psi^+.$$

The conservation law (5) may be written in the form

$$\int \vec{P}^{\text{can}} \cdot \vec{r} dV = Ht + k_0 \quad (7)$$

where $\vec{P}^{\text{can}}$ has the components $P_k^{\text{can}} = \frac{1}{ic} T_{4k}^{\text{can}}$ and the integration constant is included in k_0 (on the left side of relation (7) a scalar product is given; whereas the vector product will be indicated by the symbol „ $\times$ “).

For the „inversions“ the infinitesimal transformation of coordinates in the form

$$x'_\mu = x_\mu + (x_\lambda x_\lambda \delta_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu) \varepsilon_\nu$$

is written (ε_ν representing the 4 infinitesimal parameters). Further it holds

$$d(x') = (1 - 8x_\nu \varepsilon_\nu) d(x) \quad (8a)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\delta_{\mu\nu} + 2R_{\mu\nu\lambda} \varepsilon_\lambda) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \quad (8b)$$

where

$$R_{\mu\nu\lambda} = -x_\mu \delta_{\nu\lambda} + x_\nu \delta_{\lambda\mu} + x_\lambda \delta_{\mu\nu}$$

For this case the transformed wave functions are expected in the form

$$\psi' = \psi + T_{\mu\nu} x_\mu \varepsilon_\nu \psi \quad (9a)$$

$$\psi^{+'} = \psi^+ + \psi^+ T_{\mu\nu}^+ x_\mu \varepsilon_\nu \quad (9b)$$

where $T_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}^+$ are independent on the coordinates and have to be determined. Substituting (8) into the first member (and analogically for the second member) of the lagrangian (4), we get

$$\psi^+ \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = \psi^+ (\gamma_\nu + 2R_{\mu\nu\lambda} \varepsilon_\lambda \gamma_\mu + \gamma_\nu T_{\mu\lambda} \varepsilon_\lambda x_\mu + T_{\mu\lambda}^+ \gamma_\nu x_\mu \varepsilon_\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \gamma_\mu T_{\mu\lambda} \varepsilon_\lambda \psi. \quad (10a)$$

However, according to the (3) there must hold with respect to (8a)

$$\psi^+ \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = \psi^+ [\gamma_\nu (1 + 8x_\mu \varepsilon_\mu)] \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu}. \quad (10b)$$

From the relations (10) we get the two following conditions

$$\gamma_\mu T_{\mu\nu} = 0$$

$$2R_{\mu\nu\lambda} \gamma_\mu + \gamma_\nu T_{\mu\lambda} x_\mu + T_{\mu\lambda}^+ \gamma_\nu x_\mu = 8x_\lambda \gamma_\nu$$

from which the first will be fulfilled in the following way

$$T_{\mu\nu} = k(\gamma_\nu \gamma_\mu + 2\delta_{\mu\nu})$$

where k is a constant. Substituting this value into the second condition, we get the relation

$$2(1-k)(\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\rho}) + [2(1+k)\delta_{\mu\rho} + k\gamma_\rho \gamma_\mu + T_{\mu\rho}^+] \delta_{\nu\lambda} = 8\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda}$$

which for $k = +1$ will be simplified to the form

$$4\delta_{\mu\nu} + \gamma_\nu \gamma_\mu + T_{\mu\nu}^+ = 8\delta_{\mu\nu}$$

Hence, in this case we have

$$T_{\mu\nu} = \gamma_\nu \gamma_\mu + 2\delta_{\mu\nu}$$

and

$$T_{\mu\nu}^+ = \gamma_\mu \gamma_\nu + 2\delta_{\mu\nu}$$

Thus the corresponding conservation laws (5) may be written in the form

$$\int \{(\vec{P}^{\text{can}} \times \vec{r}) \times \vec{r} + (\vec{P}^{\text{can}} \cdot \vec{r}) \vec{r}\} dV = c^2 \cdot 2\vec{P} + 2t\vec{r}_0 + \quad (11a)$$

$$+ \vec{r}_1 + \int \psi^+ \gamma_4 \frac{\hbar}{i} [(\vec{r} \cdot \vec{\alpha}) \vec{\alpha} - \vec{r}] \psi dV$$

and

$$\int m^{\text{can}} r^2 dV = t^2 H + 2tk_0 + k_1 \quad (11b)$$

(the integration constants being included in $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$, k_0 , k_1) where $\alpha_k = i\gamma_4 \gamma_k$ and

$$m^{\text{can}} = \frac{1}{c^2} H^{\text{can}} = -\frac{1}{c^2} T_{44}^{\text{can}}.$$

The quantities occurring in the relation (11a) have the dimension of the action density moment and the members on the left side of the relation (11b) represent the total moment of inertia (related to the origin of the coordinate system).

6. The last mentioned conservation laws (7) and (11) are getting more importance for uniformly accelerated motions. Their exact physical interpretation however has not yet been given (nor for the case of the electromagnetic field).

References

- [1] E. Noether, Gött. Nachr. 1918, 235.
- [2] E. Bessel — Hagen, Math. Ann. 1921, 258.
- [3] E. L. Hill, Rev. Mod. Phys. 23, 253 (1951).
- [4] Handb. d. Physik, XXIV/1, Berlin 1933.

Do redakcie dodané 1. VI. 1958.

Poznámka ku „klasickej“ teórii neutrína

M. B L A Ž E K

S ú h r n

V predloženej práci je ukázané, že v tzv. „klasickej“ teórii platia pre neutrino okrem známych zákonov o zachovaní i ďalšie, vyplývajúce z invariance účinku voči konformnej grupe transformácií.

Заметка к «классической» теории нейтрино

М. Б л а ж е к

(Р е з ю м е)

В работе показано, что в теории, которую мы можем назвать «классической» для нейтрино сохраняются кроме хорошо известных величин и дальнейшие, которые можно установить помощью инвариантности функции действия относительно конформной группы преобразований.

**Die Hochfrequenzentladung in Edelgasen im Übergangsgebiet
zwischen der diffusions- und der elektronenbeweglichkeitsgeregelten
Entladung**

E. ARENDÁŠOVÁ, J. GRIACĚ, Š. VEIS

Einleitung

Bei der Hochfrequenz-Gasentladung werden bestimmte Zündungscharakteristikanomalien im Vergleich zu der Zündungscharakteristik bei der Gleichstromentladung beobachtet. Bestimmte Anomalien treten im Übergangsgebiet der Hochfrequenz-Gasentladung zwischen der Entladung, die durch die Diffusion der Elektronen und durch die Beweglichkeit der Elektronen geregelt ist, auf. Dieses Gebiet entspricht einem bestimmten Druck-, Frequenz- und Dimensionsintervall der Entladungsröhre, in dem sich der durch die Beweglichkeit verursachte Elektronenverlust dem durch die Diffusion verursachten Elektronenverlust nähert. Die Gültigkeit der Diffusionstheorie ist also auf ein bestimmtes Frequenz-, Druck- und Dimensionsgebiet der Entladungsröhre beschränkt. Der überwiegende Teil der theoretischen und praktischen Arbeiten ist der Untersuchung der diffusionsgeregelter Hochfrequenz-Gasentladungen gewidmet, jedoch nur in den Gebieten sehr hoher Frequenzen, wo die Gültigkeit der Diffusionstheorie zweifelsfrei feststeht. Sehr wenig Aufmerksamkeit wurde bisher dem Gebiete gewidmet, wo die Gültigkeit der Diffusionstheorie für die Hochfrequenzentladungen aufhört und die elektronenbeweglichkeitsgeregelter Entladung sich auszuwirken beginnt, d. h. in dem Gebiet, in dem die erwähnten Anomalien sich durch einen Sprung auf der Zündungscharakteristik bemerkbar machen.

E. W. Gill und R. H. Donaldson [1] erklärten schon im Jahre 1931 zutreffend die Ursachen dieses Sprunges, die nach ihnen auf der Elektronenoszillationsamplitudenänderung bei einer Änderung des Druckes p und der Frequenz f , was zu einer Änderung des Entladungsmechanismus führt, beruhen. Auf Grund dieser Vorstellung bestimmten sie die Grenze zwischen den erwähnten Hochfrequenzentladungsmechanismen. Diese Grenze ist durch die Gleichung

$$\mu \frac{\sqrt{2}E}{2\pi f} = \frac{d}{2} \quad (1)$$

gegeben, wo μ die Elektronenbeweglichkeit, E der Effektivwert der elektrischen Feldstärke, f die Frequenz und d die Entfernung der Elektroden bezeichnet. Die Gleichung (1) gilt für einen bestimmten Druck p , der implizite in der Gleichung enthalten ist.

Eine bestimmte Präzisierung dieser Gültigkeitsgrenze für die Diffusionstheorie führte in seinen Arbeiten S. M. L e v i t s k i j [2] durch, der ausgehend von der Nichtübereinstimmung der experimentellen mit den sich aus der Gleichung (1) ergebenden Werten eine Korrektur für die Entfernung der Elektroden d einführt und zu der folgenden Bedingung für die Zündspannung der Hochfrequenzentladung

$$\frac{U^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}v}{\pi f d} \right)^2 = \frac{1}{\xi} \quad (2)$$

kam, wo U den Effektivwert der Zündspannung, v die Driftgeschwindigkeit der Elektronen und $\xi \left(\frac{E}{p} \right)$ den Hochfrequenzionisationskoeffizient bezeichnet. Die auf Grund der durch Gleichung (2) gegebenen Zündungscharakteristik bestimmte Gültigkeitsgrenze der Diffusionstheorie stimmt mit den experimentellen Ergebnissen für Wasserstoff ziemlich gut überein.

Die vorliegende Arbeit soll einen experimentellen Beitrag zur besseren Kenntnis des Übergangsgebietes zwischen der diffusionsgeregelten und der elektronenbeweglichkeitsgeregelten Hochfrequenzentladung mit besonderer Berücksichtigung der Edelgase darstellen. Es kann vorausgesetzt werden, dass die Lage und die Grösse des Sprunges auf der Zündungscharakteristik von der Art des Gases abhängig sein wird.

Das Durchschlagskriterium nach der Diffusionstheorie und ihre Gültigkeitsgrenzen

Ein Durchschlag in einem Gase findet dann statt, wenn die Zahl der im Entladungsraum entstandenen Elektronen grösser oder im Grenzfall gleich dem Elektronenverlust ist. Die Bedingung für den Durchschlag nach B r o w n [3]

$$\frac{E^2 d^2}{\pi^2} = \frac{1}{\xi} \quad (3)$$

die sich aus der Diffusionstheorie ergibt, gilt unter der Voraussetzung, dass der Elektronenverlust hauptsächlich eine Folge der Diffusion darstellt, wobei der Einfluss der Beweglichkeit, Rekombination sowie anderer Faktoren, auf den Elektronenverlust vernachlässigt werden kann. Von dieser Bedingung ausgehend kann man auch die Bedingung für die Zündspannung in der Form (2) ableiten, wenn man eine Korrektur für die Entfernung der Elektroden einführt.

Die Gültigkeitsgrenzen der Diffusionstheorie, die B r o w n [4] angibt, kann man in drei Punkten zusammenfassen, nämlich:

1. Das elektrische Feld zwischen den Elektroden muss homogen sein. Wir werden es für genügend homogen ansehen, solange im Elektrodenzwischenraum nicht mehr als eine Halbwelle entsteht, d. h.

$$\frac{\lambda}{2} \geq d \quad (4)$$

2. Die mittlere freie Weglänge der Elektronen muss kleiner sein als die Dimensionen der Entladungsröhre

$$l \leq \frac{d}{\pi} \quad (5)$$

3. Die Elektronenoszillationsamplitude x_m muss kleiner (höchstens gleich) sein als die halbe Entfernung der Elektroden, d. h.

$$x_m = \frac{\sqrt{2eE}}{m\omega\nu} \leq \frac{d}{2} \quad (6)$$

wo e die Elektronenladung, m die Elektronenmasse, ω die Kreisfrequenz des verwendeten Hochfrequenzfeldes und ν die Stosshäufigkeit der Elektronen mit neutralen Gasteilchen bezeichnet. Wenn die Oszillationsamplitude des Elektrons grösser ist als die halbe Entfernung der Elektroden, kann nicht von einer Elektronendiffusion gesprochen werden. Die Oszillationsamplitude x_m kann man in der Form (6) nur dann ausdrücken, wenn die Kreisfrequenz ω viel kleiner ist als die Stosshäufigkeit ν .

Experimenteller Teil und Auswertung der Resultate

Um ein getreueres Bild von den Zündungscharakteristikanomalien bei Hochfrequenzentladungen zu gewinnen, bestimmten wir die Zündungscharakteristiken von Edelgasen und Wasserstoff, da bei diesen der Sprung auf der Zündungscharakteristik mehr oder weniger ausgeprägt ist.

Die Messungen führten wir mit einer Entladungsröhre mit Innenelektroden durch. Der Elektrodendurchmesser betrug 3 cm und ihre Entfernung 1,1 cm. Die Entladungsröhre wurde an eine Vakuumapparatur, die eine kontinuierliche Gasdruckregulierung in der Entladungsröhre ermöglichte, angeschlossen. Die verwendeten Gase waren spektralrein. Reinen Wasserstoff gewannen wir durch Leitung von technischem Wasserstoff über ein Palladiumventil. Um eine Verunreinigung des Gases in der Entladungsröhre durch Quecksilber- oder andere Dämpfe auszuschalten, verwendeten wir zu deren Beseitigung eine Ausfrierfalle mit flüssiger Luft. Nur im Falle des Xenons verwendeten wir keine Ausfrierfalle, da der Gefrierpunkt des Xenons -112°C , welche Temperatur über der der flüssigen Luft liegt, beträgt.

Als Hochfrequenzspannungsquelle verwendeten wir einen aus einem Hartleyschen Oszillator und einem push-pull-Verstärker in Gegentaktschaltung bestehenden Hochfrequenzhochspannungsgenerator. Die Messungen wurden bei einer Frequenz von 3,1 MHz durchgeführt. Die Spannung wurde mit

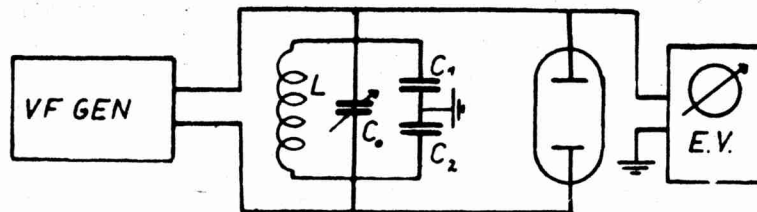


Abb. 1.

Blockschaltbild des verwendeten elektrischen Gerätes.

einem Hochfrequenzröhrenvoltmeter gemessen. Das Blockschaltbild der verwendeten Vorrichtung ist auf Abb. 1 angeführt.

Mit Hilfe der regulierbaren Kapazität stimmen wir den durch die Induktion L , die Kapazitäten C_0 , C_1 , C_2 , die Eingangskapazität des Röhrenvoltmeters, die Kapazität der Entladungsröhre sowie die Ausgangsimpedanz des Hochfrequenzhochspannungsgenerators gebildeten Resonanzkreis so ab, dass die Eigenfrequenz dieses Resonanzkreises der Frequenz der dem Generator entnommenen Hochfrequenzspannung gleich ist. Die Kapazitäten C_1 , C_2 dienen gleichzeitig als Hochfrequenzspannungsteiler.

Auf den Abbildungen 2—7 sind die experimentell festgestellten Zündungscharakteristiken für Wasserstoff und die Edelgase He, Ar, Ne, Kr und Xe angeführt. Bei diesen Gasen beobachten wir im Übergangsgebiet zwischen der elektronendiffusions- und der elektronenbeweglichkeitsgeregelten Entladung auf der Zündungscharakteristik einen Sprung. Die Zündungscharakteristiken der Luft sowie des Stickstoffs wiesen den erwähnten Sprung in diesem Druckgebiet nicht auf, was höchst interessant ist und die Vermutung bestätigt, dass diese Anomalien wahrscheinlich eine charakteristische Besonderheit hauptsächlich der Edelgase und des Wasserstoffs darstellen.

Der Hochfrequenzentladungs-Diffusionsmechanismus kommt bei einem grösseren pd als der pd -Grenzwert zur Geltung. Bei einem kleineren pd als der pd -Grenzwert (wobei nur ein sehr enges Gebiet in Betracht gezogen wird) wird die Entladung hauptsächlich durch die Elektronenbeweglichkeit geregelt. In dem Druckgebiet, in welchem wir die Gültigkeit der Diffusionstheorie für die Hochfrequenzentladung voraussetzen, sind tatsächlich alle drei Bedingungen für die Gültigkeit dieser Theorie erfüllt.

Auf den Abbildungen 2, 3 und 4 sind neben den experimentell ermittelten Kurven auch die auf Grund der Durchschlagsbedingung (3) errechneten Zündungscharakteristiken veranschaulicht. Die Werte des Hochfrequenzionisationskoeffizienten $\xi \left(\frac{E}{p} \right)$ für Wasserstoff sind in [5], für Helium in [6] und für Argon in [7] angegeben. Auf diesen Abbildungen wird auch in die Gültigkeitsgrenze der Diffusionstheorie angegeben. Diese aus den Gleichungen (3) und (6) errechnete Grenze ist auf den Abb. 2 und 3 durch den Pfeil a bezeichnet. Bei der Berechnung der Gültigkeitsgrenzen verwendeten wir die Stosshäufigkeit des Wasserstoffs aus [8] sowie des Heliums aus [9].

Gill und Donaldson bestimmten die Bedingung (1) für die Gültigkeitsgrenze

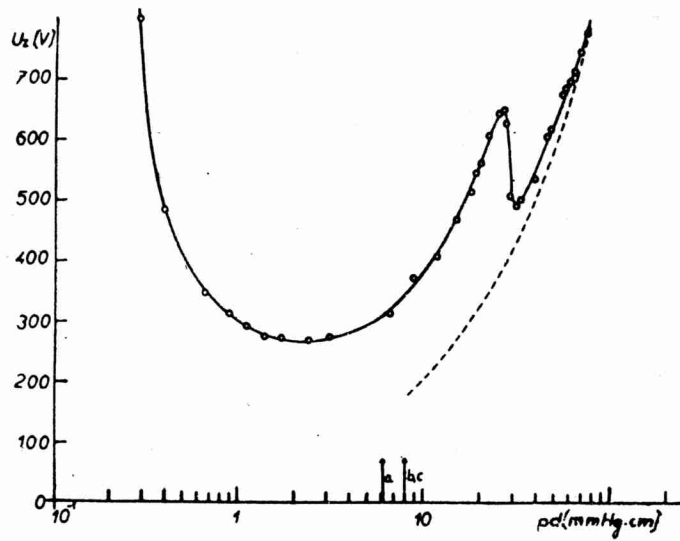


Abb. 2.
Zündungscharakteristik für Wasserstoff.

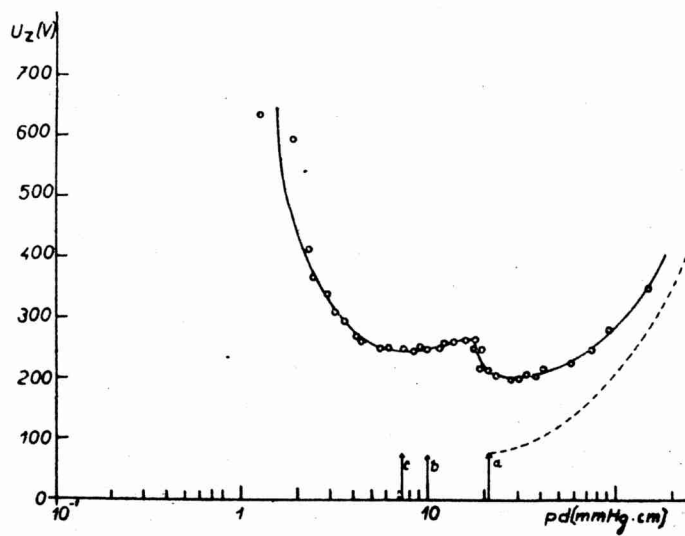


Abb. 3.
Zündungscharakteristik für Helium.

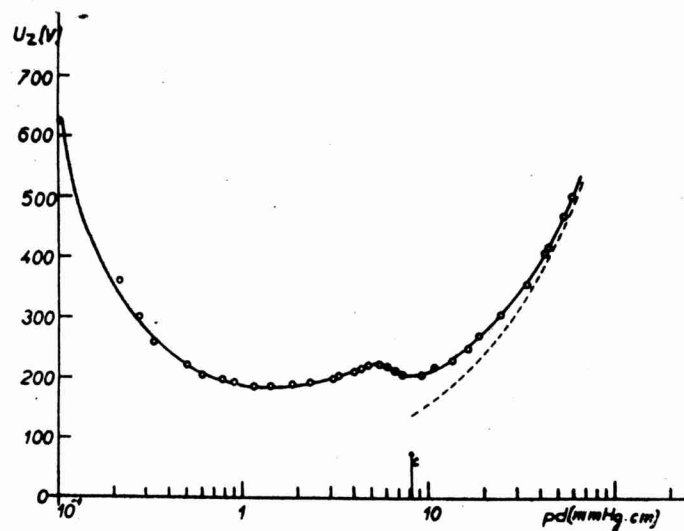


Abb. 4.
Zündungscharakteristik für Argon.

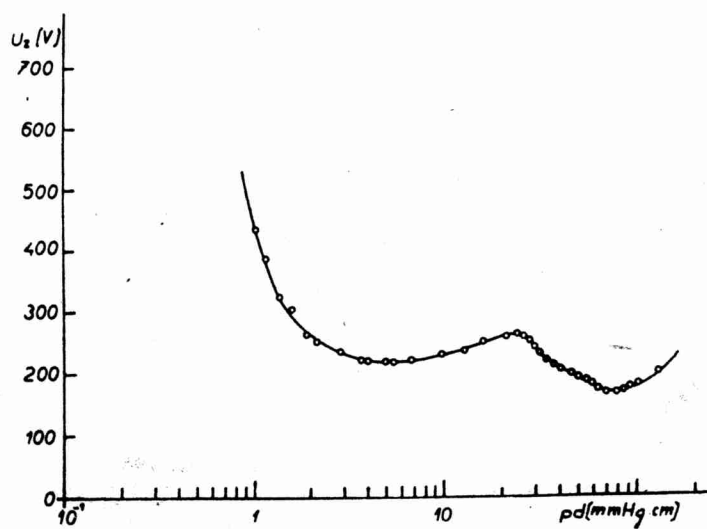


Abb. 5.
Zündungscharakteristik für Neon.

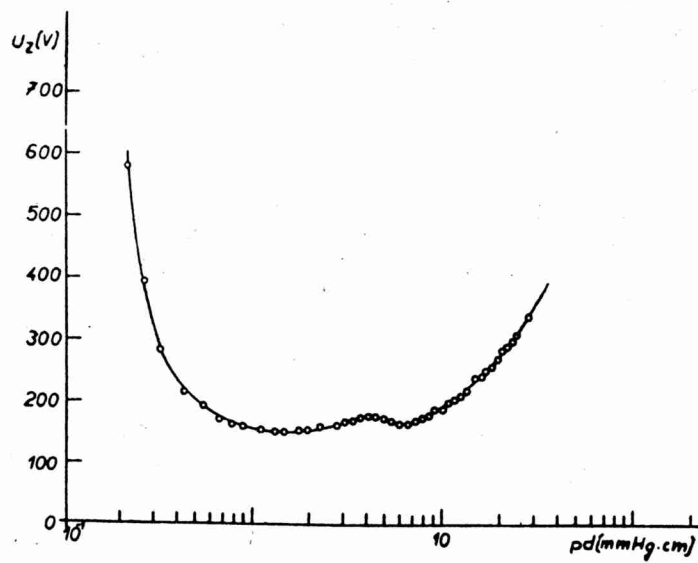


Abb. 6.
Zündungscharakteristik für Krypton.

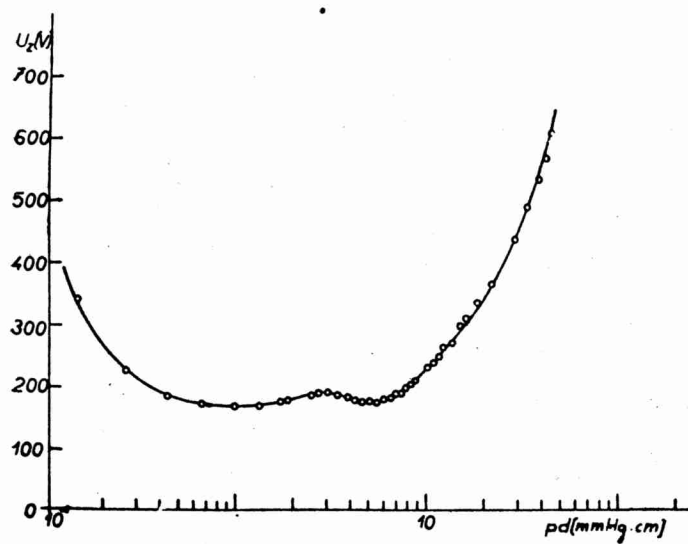


Abb. 7.
Zündungscharakteristik für Xenon.

der Diffusionstheorie. Diese Bedingung ist mit der Gleichung (6) unter der Voraussetzung, dass $\omega \ll \nu$ ist, was im Falle des untersuchten Übergangsbereichs der Hochfrequenzentladung erfüllt ist, identisch. Unter dieser Voraussetzung kann man tatsächlich mittels der Gleichung

$$\mu = \frac{e}{m\nu} \quad (7)$$

die Elektronenbeweglichkeit ausdrücken, was auch aus einem Vergleich der Gleichungen (6) und (1) hervorgeht. Wenn wir die Elektronenbeweglichkeit mit Hilfe der Driftgeschwindigkeit und der elektrischen Feldstärke (wie z. B. L e v i t s k i j [2]) ausdrücken, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{v\sqrt{2}}{\pi f} = d \quad (8)$$

Die Gültigkeitsgrenze der Diffusionstheorie kann man durch die Lösung der Gleichungen (3) und (8) bestimmen. Wenn wir bei der Berechnung die Driftgeschwindigkeiten aus [10] verwenden, so erhalten wir die mit dem Pfeil *b* auf Abb. 2 bezeichnete Grenze für Wasserstoff und auf Abb. 3 für Helium. Mit dem Pfeil *c* ist die auf die gleiche Art errechnete Grenze für die Driftgeschwindigkeitswerte aus [11] bezeichnet. Wie aus den Abb. 2, 3 und 4 hervorgeht, ist die Differenz zwischen der experimentell ermittelten Gültigkeitsgrenze für die Diffusionstheorie und den errechneten Grenzen ziemlich gross. Dies kann man dadurch erklären, dass die Bedingung (1) und (6) unter sehr vereinfachenden Voraussetzungen abgeleitet wurde, sowie auch dadurch, dass man im Grenzgebiet den Elektronenverlust infolge der Elektronenbeweglichkeit im Vergleich mit dem durch Diffusion verursachten Elektronenverlust vernachlässigen kann. Die Differenz zwischen den errechneten Grenzwerten *a*, *b*, *c* ist eine Folge der Uneinheitlichkeiten der bei der Berechnung verwendeten experimentellen Daten.

Einen Masstab für die Ausgeprägtheit des Sprunges auf der Zündungscharakteristik kann die durch die Gleichung

$$\delta = \sqrt{2DT} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{lv_c}{pf}} \quad (9)$$

definierte mittlere Elektronendifusionslänge in einer Periode darstellen. In Gleichung (9) bezeichnet *T* die Hochfrequenzfeldperiode, *l* die mittlere freie Elektronenweglänge im gegebenen Gas bei einem Druck von 1 mm Hg, *v_c* den Geschwindigkeitsmittelwert bei der chaotischen Elektronenbewegung. Die Ausgeprägtheit des Sprunges wird besser durch die relative Diffusionslänge charakterisiert. Es ist jedoch zu bemerken, dass die relative Diffusionslänge nur dann einen richtigen Masstab für die Ausgeprägtheit des Sprunges darstellt, wenn die Druckabhängigkeit des Elektronendifusionskoeffizienten für alle Gase gleich wäre. Die relative Diffusionslänge $\frac{\delta}{d}$ für experimentell bestimmte Grenzwerte *pd*, die aus den Werten für die Geschwindigkeit der chaotischen Bewegung aus [11] und den Werten der mittleren Weglängen aus [12] errechnet wurde, beträgt für Wasserstoff 0,17, für Helium 0,30 und

für Argon 0,38. Aus den Abbildungen 2, 3 und 4, resp. aus Abb. 8 ist ersichtlich, dass der Sprung umso ausgeprägter ist, je kleiner die relative Diffusionslänge ist. Wenn die relative Diffusionslänge grösser ist, findet der Übergang zwischen den beiden erwähnten Mechanismen nicht plötzlich, sondern allmählich statt.

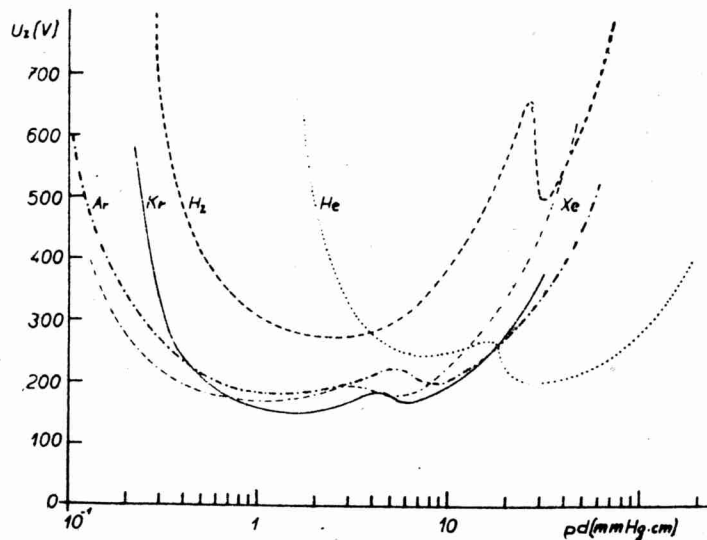


Abb. 8.
Zündungscharakteristik für H_2 , He, Ar, Kr, Xe.

Von den experimentell ermittelten Zündungscharakteristiken auf Abb. 8 kann man noch weitere Abhängigkeiten, und zwar die zwischen der Lage des Sprunges und der Gasart, sowie auch die zwischen der Grösse des Sprunges und der Gasart, ableiten. Unter der Grösse des Sprunges verstehen wir die Differenz zwischen der maximalen und der minimalen Zündspannung im Übergangsgebiet vom Diffusionsmechanismus zu der elektronenbeweglichkeitsgeregelten Entladung. In Tabelle 1 wird die Abhängigkeit der Lage und der Grösse des Sprunges von der Molekülmasse angegeben.

Gas	Molekülmasse	p (mm Hg)	U (V)
Wasserstoff	2,016	29	155
Helium	4,003	23	70
Neon	20,183	63,5	85
Argon	39,944	7,3	25
Krypton	83,7	5,4	18
Xenon	131,3	4,5	12

Aus Tab. 1 geht klar hervor, dass die Grösse des Sprunges mit wachsender Molekülmasse abnimmt; mit wachsender Molekülmasse verschiebt sich dieser Sprung in der Richtung zu niedrigeren Drücken. Eine Ausnahme hiervon

bildet das Neon, das zwar, wie aus Abb. 5 ersichtlich ist, durch einen grossen Sprung auf der Zündungscharakteristik gekennzeichnet ist, welches aber die von uns angegebene Abhängigkeitsbedingung nicht erfüllt; deswegen führten wir auf Abb. 8 die Zündungscharakteristik des Neons nicht an. Diese Ausnahme ist nicht überraschend, da das Verhalten des Neons von dem der übrigen Edelgase differiert ([11], S. 269).

Schlussbemerkungen

1. Die experimentell ermittelten Zündungscharakteristiken der Hochfrequenzentladung in Edelgasen und in Wasserstoff sowie die Berechnung der Gültigkeitsgrenze der Diffusionstheorie für Wasserstoff und einige Edelgase zeigen, dass die Bedingung (1) beziehungsweise (6) die Grenze zwischen der diffusions- und der elektronenbeweglichkeitsgeregelten Entladung nicht genügend genau angibt.

2. Aus den experimentell ermittelten Resultaten ergeben sich einige Eigenschaften der Hochfrequenzentladung in Wasserstoff und den Edelgasen im Übergangsgebiet, u. zw.:

a) der Sprung auf der Zündungscharakteristik ist umso ausgeprägter, je kleiner die relative Diffusionslänge ist,

b) die Grösse des Sprunges auf der Zündungscharakteristik vermindert sich mit dem Anwachsen der Molekülmasse.,

c) mit dem Anwachsen der Molekülmasse verschiebt sich der Sprung auf der Zündungscharakteristik in der Richtung zu niedrigeren Drücken.

Literatur

- [1] E. W. Gill, R. H. Donaldson, Phil. Mag. 12, 719 (1931).
- [2] S. M. Levitskij, ŽTF 27, 970 (1957).
- [3] M. A. Herlin, S. C. Brown, Phys. Rev. 74, 291 (1948).
- [4] A. D. MacDonald, S. C. Brown, Phys. Rev. 76, 1629 (1949).
- [5] A. D. MacDonald, S. C. Brown, Phys. Rev. 76, 1634 (1949).
- [6] A. D. MacDonald, S. C. Brown, Phys. Rev. 75, 411 (1949).
- [7] A. D. MacDonald, J. H. Matthews, Phys. Rev. 98, 1070 (1955).
- [8] Handbuch der Physik, Band XXII, Gasentladungen II, Berlin 1956, S. 538.
- [9] F. H. Reder, S. C. Brown, Phys. Rev. 95, 885 (1954).
- [10] Handbuch der Physik, Band XXI, Elektronen-Emission, Gas-Entladungen I, Berlin 1956, S. 542.
- [11] L. B. Loeb, Basic Processes of Gaseous Electronics, California 1955, S. 324.
- [12] Manfred von Ardenne, Tabellen der Elektronenphysik, Ionen-Physik und Übermikroskopie, Band II, Berlin 1956, S. 620.

Do redakcie dodané 1. VI. 1958.

Vysokofrekvenčný výboj v inertných plynoch v prechodnej oblasti medzi výbojom riadeným difúziou a pohyblivosťou elektrónov

E. ARENDÁŠOVÁ, J. GRIACH, Š. VEIS

S ú h r n

V tejto práci sa experimentálne vyšetruje chovanie vysokofrekvenčného výboja v inertných plynoch v tej oblasti frekvencií, tlakov a vzdialeností elektród, v ktorej úbytok elektrónov v dôsledku pohyblivosti stáva sa zrovnateľný s úbytkom elektrónov v dôsledku difúzie. Vo vyšetrovanej oblasti na zapalovacej charakteristike pre inertné plyny a vodík pozorujeme skok. Mierou výraznosti tohto skoku je relatívna difúzna vzdialenosť elektrónov. U inertných plynov a u vodíka vo vyšetrovanej prechodnej oblasti boli pozorované tieto závislosti:

- a) skok je väčší u plynov s menšou molekulovou hmotou,
- b) s klesajúcou molekulovou hmotou plynu skok sa posúva smerom k vyšším tlakom

Высокочастотный разряд в инертных газах в переходной области между разрядом управляемым диффузией и подвижностью электронов

Е. Арендашова, Ю. Гриач, Ш. Вейс

(Р е з ю м е)

В этой работе исследуется экспериментально поведение высокочастотного разряда в инертных газах в той области частот, давлений и расстояний электродов, в которой увод электронов за счет подвижности становится сравнительным с уводом электронов за счет диффузии.

На характеристике зажигания в этой области появляется скачок, который наблюдался у инертных газов и у водорода. Различную степень выраженности этого скачка можно характеризовать относительным расстоянием диффузии электронов. У инертных газов и у водорода в переходной области наблюдались эти соотношения:

- a) скачок является большим у газов с меньшим молекулярным весом,
- b) газы с меньшим молекулярным весом имеют скачок на характеристике зажигания при большом давлении.



ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

je fakultný zborník určený k publikáciám vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých aspirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracovávajú materiál získaný za dobu pobytu na našej fakulte. Redakčná rada vyhradzuje si právo z tohto pravidla urobiť výnimku.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom alebo anglickom, francúzskom alebo nemeckom. Práce podané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, ob riadok, tak aby jeden riadok tvorilo 60 úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na účet autora.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšete názov práce, pod to meno autora s plným titulom, Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, sa uvádzajú všetky pracoviská. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba ich obidve uviesť.

Fotografie načím podať na čiernom lesklom papieri a uviesť zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba previesť tušom na priehľadnom papieri (pauzák) alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať resumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam, publikovaným v cudzom jazyku, načím pripojiť rezumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom, v prípade publikácie v ruskom jazyku, alebo v ruskom jazyku v prípade publikácie v jazyku západnom. **Nezabudnite pri resumé uviesť vždy názov práce a meno autora v rovnakom poradí ako v základnom texte.** Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a zlámané korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny behom korektúry idú na farchu autorského honoráru. Každý autor dostane okrem príslušného honoráru i 50 separátov.

Redakčná rada.

O B S A H

VEIS Š.: Rovnovážne koncentrácie ionov pri termickej ionizácii plynu. Ďalšie spresnenie Sáhovej rovnice	411
PETRAŠ M.: Jednoduchý geometrický model kvantovej teórie poľa	422
HRIVNÁK L.: Vznik excitónu nažiarivou kombináciou elektrónu a diery	436
ĎURČEK J.: Elektrónová rezonancia v plazme plynového výboja	448
BLAŽEK M.: Poznámka ku „klasickej“ teórii neutrína	455
ARENDÁŠOVÁ E.—GRIAC J.—VEIS Š.: Vysokofrekvenčný výboj v interných plynoch v prechodnej oblasti medzi výbojom riadeným difúziou a pohyblivosťou elektrónov	467

ВЕИС Ш.: Равновесные концентрации ионов в случае многократной термической ионизации газа. Дальнейшее уточнение уравнения Саха	411
ПЕТРАШ М.: Простая геометрическая модель квантовой теории поля	422
ГРИВНАК Л.: Возникновение экситона неизлучающей рекомбинацией электрона и дырки	423
ДЮРЧЕК И.: Электронный резонанс в газоразрядной плазме	449
БЛАЖЕК М.: Заметка к „классической“ теории нейтрино	455
АРЕНДАШОВА Е., ГРИАЧ Ю., ВЕИС Ш.: Высоочастотный разряд в инертных газах в переходной области между разрядом управляемым дифузией и подвижностью электронов	467

VEIS Š.: Equilibrium Concentrations of at Multiple Thermal Ionisation	403
PETRAŠ M.: A Simple Geometric Model of the Quantum Field Theory	413
HRIVNÁK L.: Creation of an Exciton by Radiationless Recombination of an Electron and a Hole	437
ĎURČEK J.: Electron Resonance in The Gaseous Discharge Plasma	439
BLAŽEK M.: A Note to the „Classical“ Theory of Neutrino	451
ARENDÁŠOVÁ E.—GRIAC J.—VEIS Š.: Die Hochfrequenzentladung in Edelgasen im Übergangsgebiet zwischen der diffusions- und der elektronenbeweglichkeitsgeregelten Entladung	457