ACTA

FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. II FASC. I-II

MATHEMATICA

PUBL. III.

1957

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

Sborník Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Vydáva Slovenské pedagogické nakladatelstvo v Bratislave, Sasínkova 5, čís. tel. 458-51. Povolilo Povereníctvo kultúry číslom 2265/56-IV/1. — Tlač: Brněnské knihtiskárny, n. p., zákl. závod, Brno, ul. 9. května 7.
F 15 1248 — R

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. II, FASC. I-II MATHEMATICA 1957

Sur la théorie du système différentiel général à coefficients variables

J. HRONEC

(A suivre de Tom I, Fasc. I.)

IV. Résolution du système différentiel dans le cas $n = 2$

Pour $n = 2$, on a $N = 0$ et l'identité (13) s'écrit

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty}(C_\sigma - C'_\sigma)(x - a_1)^\sigma =$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\sigma}\sum_{i_1=0}^{\varkappa}\sum_{i_2=0}^{\sigma-\varkappa}[A^{(1)}_{i_1,\varkappa-i_1}A^{(2)}_{i_2,\varkappa-i_2} - B^{(1)}_{i_1,\varkappa-i_1}B^{(2)}_{i_2,\varkappa-i_2}](x - a_1)^\sigma \equiv 0$$

d'où

$$f_\sigma = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma}\sum_{i_1=0}^{\varkappa}\sum_{i_2=0}^{\sigma-\varkappa}[A^{(1)}_{i_1,\varkappa-i_1}A^{(2)}_{i_2,\varkappa-i_2} - B^{(1)}_{i_1,\varkappa-i_1}B^{(2)}_{i_2,\varkappa-i_2}] = 0$$

d'où l'on tire (23a) après les substitutions (12) et (22). Pour $n = 2$, n'interviendra pas de $R^{(s)}_\lambda$ et ainsi, dans ce cas pour déterminer les coefficients $c^{(\nu)}_{ik}$, il faudra procéder d'une autre manière lorsque les racines des équations déterminantes (19) er (19a) différeront entre elles de nombres entiers réels ou seront confondues.

De (23a) il vient

$$f_1 = G^{(1,0)}_{0,0} \cdot c^{(1)}_1 \cdot c^{(0)}_2 + G^{(0,1)}_{0,0} \cdot c^{(0)}_1 \cdot c^{(1)}_2 + [G^{(0,0)}_{1,0} + G^{(0,0)}_{0,1}]\, c^{(0)}_1 c^{(0)}_2 = 0$$

Si nous y substituons r_{11} et r_{12} à r_1, puis r_{12} et r_{22} à r_2 nous obtenons pour $c^{(1)}_1$ et $c^{(1)}_2$ deux systèmes linéaires de chacun 2 équations.

Le premier système linéaire donne

$$c^{(1)}_{11} = -\frac{D^{(1)}_{11}}{D_{11}} \cdot c^{(0)}_1, \qquad c^{(1)}_{12} = -\frac{D^{(2)}_{11}}{D_{11}}\, c^{(0)}_2,$$

avec

$$D_{11} = \begin{vmatrix} [G^{(1,0)}_{00}]_{\substack{r_{11}\\ r_{12}}}, & [G^{(0,1)}_{00}]_{\substack{r_{11}\\ r_{12}}} \\ [G^{(1,0)}_{00}]_{\substack{r_{21}\\ r_{12}}}, & [G^{(0,1)}_{00}]_{\substack{r_{21}\\ r_{12}}} \end{vmatrix}, \quad D^{(1)}_{11} = \begin{vmatrix} [G^{(0,0)}_{10} + G^{(0,0)}_{01}]_{\substack{r_{11}\\ r_{12}}}, & [G^{(0,1)}_{00}]_{\substack{r_{11}\\ r_{12}}} \\ [G^{(0,0)}_{10} + G^{(0,0)}_{01}]_{\substack{r_{21}\\ r_{12}}}, & [G^{(0,1)}_{00}]_{\substack{r_{21}\\ r_{12}}} \end{vmatrix}.$$

$$D^{(2)}_{11} = \begin{vmatrix} [G^{(1,0)}_{00}]_{\substack{r_{11}\\ r_{12}}}, & [G^{(0,0)}_{10} + G^{(0,0)}_{01}]_{\substack{r_{11}\\ r_{12}}} \\ [G^{(1,0)}_{00}]_{\substack{r_{21}\\ r_{12}}}, & [G^{(0,0)}_{10} + G^{(0,0)}_{01}]_{\substack{r_{21}\\ r_{12}}} \end{vmatrix}.$$

Le second donne

$$c_{21}^{(1)} = -\frac{D_{21}^{(1)}}{D_{21}} \cdot c_1^{(0)}, \qquad c_{22}^{(1)} = -\frac{D_{21}^{(2)}}{D_{21}} \cdot c_2^{(0)},$$

où D_{21}, $D_{21}^{(1)}$, $D_{21}^{(2)}$ sont des déterminants analogues aux précédents, mais pour les valeurs $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$. Une fois $c_1^{(1)}$ et $c_2^{(1)}$ connus, à partir de $f_2 = 0$ on peut calculer $c_1^{(2)}$ et $c_2^{(2)}$ et on obtient pour eux, de nouveau, 4 valeurs. En continuant ainsi, on calcule $c_1^{(\sigma)}$ et $c_2^{(\sigma)}$ à l'aide $f_\sigma = 0$ et on obtient de nouveau pour eux 4 valeurs, sous réserve de la non nullité des déterminants

$$D_{1\sigma} =$$
$$= \begin{vmatrix} [(r_{11}+\sigma)b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)}](r_{12}b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}) - b_{10}^{(2)}b_{20}^{(1)}, & (r_{11}b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)})[(r_{12}+\sigma)b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}] - b_{10}^{2}b_{20}^{1} \\ [(r_{21}+\sigma)b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)}](r_{12}b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}) - b_{10}^{(2)}b_{20}^{(1)}, & (r_{21}b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)})[(r_{12}+\sigma)b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}] - b_{10}^{(2)}b_{20}^{(1)} \end{vmatrix}.$$

$$D_{2\sigma} =$$
$$= \begin{vmatrix} [(r_{11}+\sigma)b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)}](r_{22}b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}) - b_{10}^{(2)}b_{20}^{(1)}, & (r_{11}b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)})[(r_{22}+\sigma)b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}] - b_{10}^{(2)}b_{20}^{(1)} \\ [(r_{21}+\sigma)b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)}](r_{22}b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}) - b_{10}^{(2)}b_{20}^{(1)}, & (r_{21}b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)})[(r_{22}+\sigma)b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}] - b_{10}^{(2)}b_{20}^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Si on a $r_{21} + \sigma = r_{11}$ et $r_{22} + \sigma = r_{12}$, c'est-à-dire si des racines des équations determinantes diffèrent entre elles d'un nombre entier réel, alors d'après (15), on a

$$\begin{aligned} (r_{11}b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)})(r_{12}b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}) - b_{10}^{(2)}b_{20}^{(1)} &= 0, \\ (r_{11}b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)})(r_{22}b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}) - b_{10}^{(2)}b_{20}^{(1)} &= 0, \\ (r_{21}b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)})(r_{12}b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}) - b_{10}^{(2)}b_{20}^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

ce qui entraîne $D_{2\sigma} = 0$. *Si donc racines des équations déterminantes diffèrent entre elles d'un nombre entier réel, nous ne pouvons déterminer qu'un seul couple de coefficients $c_1^{(\sigma)}$ et $c_2^{(\sigma)}$, et pas 2.*

Si le discriminant de l'équation (19) est nul, on a $r_{11} = r_{21}$. Mais si c'est celui de l'équation (19a) qui n'est pas nul, nous ne pouvons encore déterminer qu'un seul couple de coefficients $c_1^{(\sigma)}$ et $c_2^{(\sigma)}$. Si le discriminant des équations (19) et (19a) est simultanément nul, nous devons avoir $s_{12} = s_{21}$, et nous ne disposons plus que d'une seule équation pour le calcul de $c_1^{(\sigma)}$, et $c_2^{(\sigma)}$.

Le système différentiel (1) pour $n = 2$, se présente sous la forme de 2 équations différentielles du second ordre. Celle d'y_1, est

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + \left(a_{11} + a_{22} - \frac{a'_{21}}{a_{21}}\right)\frac{dy_1}{dx} + \left[a'_{11} - a_{21}a_{12} - a_{11}\left(\frac{a'_{21}}{a_{21}} - a_{22}\right)\right]y_1 = 0$$

avec

$$a'_{11} = \frac{da_{11}}{dx}, \qquad a'_{21} = \frac{da_{21}}{dx}$$

et celle d'y_2 est de la même forme, sauf que les indices 1 et 2 s'y échangent.

Si les coefficients du système différentiel ont la forme (9) pour la condition de détermination des points de résolution, il en résulte que celles-ci appartiennent au type de Fuchs seulement si

$$s_{21} + s_{12} \leq 2.$$

La forme normale du système différentiel par rapport au point singulier $x = a_1$, donne d'après (10) les équations différentielles.

$$
(27) \qquad (x - a_1)^2 P_{01} P_{02} P_{21} \frac{d^2 y_1}{dx^2} + (x - a_1) A_1(x) \frac{dy_1}{dx} + B_1(x) y_1 = 0,
$$

$$
(x - a_1)^2 P_{01} P_{02} P_{12} \frac{d^2 y_2}{dx^2} + (x - a_1) A_2(x) \frac{dy_2}{dx} + B_2(x) y_2 = 0,
$$

où l'on a

$$
\begin{aligned}
A_1(x) = & - (P_{01} P_{22} + P_{02} P_{11}) P_{21} - \{(x - a_1) P'_{21} P_{01} - \\
& - P_{21} [P_{01} + (x - a_1) P'_{01}]\} P_{02} \\
B_1(x) = & - (x - a_1) P'_{11} P_{02} P_{21} - P_{12} P_{21}^2 + (x - a_1) P'_{21} P_{02} P_{11} + P_{11} P_{22} P_{21} .
\end{aligned}
$$

$A_2(x)$ et $B_2(x)$ s'obtiennent respectivement à partir de $A_1(x)$ et $B_1(x)$ en y permutant les incides 1 et 2. Les accents désignent des dérivations.

Puisque nous avons

$$
\begin{aligned}
(x - a_1) P'_{01} &= (s_{21} - 1) P_{01} + s_{21} (x - a_1) [\varphi(x)]^{s_{21} - 1} . P(x), \\
(x - a_1) P'_{11} &= (s_{21} - 1) P_{11} + (s_{21} - 1)(x - a_1)^2 [\varphi(x)]^{s_{21} - 1} . F(x) G_{11}(x) + \\
& + (x - a_1) [\varphi(x)]^{s_{21} - 1} G'_{11}(x),
\end{aligned}
$$

où $F(x)$ est une fonction rationelle entière ce qui entraîne que cellec-ci n'ont pas de point singulier en $x = a_1$, les équations différentielles (27) ont une forme normale par rapport au point singulier $x = a_1$ pourvu qu'on ait $s_{21} \geqq 1$, $s_{12} \geqq 1$. Si on a $s_{21} \leqq 0$, $s_{12} \leqq 0$ les coefficients a_{21} et a_{12} n'ont pas de point singulier en $x = a_1$. Si on a $s_{21} = s_{12} = 1$ les équations différentielles appartiennent au type de Fuchs.

Les équations déterminantes des équations différentielles (27) coïncident avec les équations determinantes du système différentiel (19) et (19a).

Si des racines des équations déterminantes (19 et (19a) diffèrent entre elles de nombres entiers réels, c'est-à-dire si on a par exemple $r_{21} + \sigma = r_{11}$, $r_{22} + \sigma = r_{12}$, alors il vient $D_{1\sigma} \neq 0$, $D_{2\sigma} = 0$ et nous pouvons calculer les coefficients $c_{11}^{(\sigma)}$ et $c_{12}^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, 2, 3, \ldots$ Si nous les considérons comme des fonctions des variables r_1 et r_2, pour des valeurs de r_1 et r_2 suffisamment petites, les séries déterminées par ces coefficients convergent et déterminent des fonctions continues et pourvues de dérivées on en tire

$$
y_1 = g_1(x - a_1, r_1), \qquad y_2 = g_2(x - a_1, r_2).
$$

On en tire

$$
y_{11} = [g_1(x - a_1, r_1)]_{r_1 = r_{11}}, \qquad y_{12} = [g_2(x - a_1, r_2)]_{r_2 = r_{12}} .
$$

Pour le calcul des coefficients $c_{21}^{(\sigma)}$ et $c_{22}^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, 2, 3, \ldots$, toutes réductions faites on trouve les facteurs

$$
\frac{c_1^{(0)}}{D_{2\sigma}}, \qquad \frac{c_2^{(0)}}{D_{2\sigma}}
$$

où pour une valeur donnée et finie de σ, $D_{2\sigma}$ s'annule. C'est pourquoi les constantes $c_1^{(0)}$ et $c_2^{(0)}$ sont choisies de telle façon qu'on ait

$$c_1^{(0)} = D_{21} \,.\, D_{22} \dots D_{2\varrho}\, c_1 ,$$
$$c_2^{(0)} = D_{21} \,.\, D_{22} \dots D_{2\varrho}\, c_2 ,$$

où c_1 et c_2 sont toujours des constantes arbitraires, où l'on a $\varrho \geqq \sigma$ et

$$y_{21} = \left[\frac{\partial g_1(x - a_1, r_1)}{\partial r_1}\right]_{r_1 = r_{11} - \sigma}, \qquad y_{22} = \left[\frac{\partial g_2(x - a_1, r_2)}{\partial r_2}\right]_{r_2 = r_{12} - \sigma}.$$

Si on a $r_{21} = r_{11}$, ou bien $r_{22} = r_{12}$, ou simultanément $r_{21} = r_{11}$ et $r_{22} = r_{12}$, alors on détermine $y_{11}, y_{21}, y_{12}, y_{22}$ de cette manière, seulement $c_1^{(0)}$ et $c_2^{(0)}$ y demeurent inchangées et $\sigma = 0$.

V. Les séries qui verifient le système différentiel ayant des points d'indetermination ont un domaine de convergence

Pour plus de simplicité nous la démontrerons pour $n = 2$, le raisonnement étant le même pour n quelconque.

Le coefficient général d'une telle série, si nous considérons le système

$$[f_0]_{\substack{r_{11}\\ r_{12}}} = 0, \qquad [f_0]_{\substack{r_{11}\\ r_{22}}} = 0$$

est

$$c_{11}^{(\sigma)} = -\frac{D_{1\sigma}^{(1)}}{D_{1\sigma}} \,.\, c_1^{(0)},$$

avec

$$D_{1\sigma} = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{21} \\ A_{12}, & A_{22} \end{vmatrix}$$

pour

$$A_{11} = [(r_{11} + \sigma) b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)}](r_{12} b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}) - b_{10}^{(2)} b_{20}^{(1)},$$
$$A_{21} = (r_{11} b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)})[(r_{12} + \sigma) b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}] - b_{10}^{(2)} b_{20}^{(1)},$$
$$A_{12} = [(r_{11} + \sigma) b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)}](r_{22} b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}) - b_{10}^{(2)} b_{20}^{(1)},$$
$$A_{22} = (r_{11} b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)})[(r_{22} + \sigma) b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}] - b_{10}^{(2)} b_{20}^{(1)};$$

$$D_{1\sigma}^{(1)} = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \sum_{i_1=0}^{\varkappa} \sum_{i_2=0}^{\sigma-\varkappa} \begin{vmatrix} [G_{\varkappa-i_1, \sigma-\varkappa-i_2}^{(i_1, i_2)}]_{\substack{r_{11}\\ r_{12}}} [G_{00}^{(0,\sigma)}]_{\substack{r_{11}\\ r_{12}}} \\ [G_{\varkappa-i_1, \sigma-\varkappa-i_2}^{(i_1, i_2)}]_{\substack{r_{11}\\ r_{22}}} [G_{00}^{(0,\sigma)}]_{\substack{r_{11}\\ r_{22}}} \end{vmatrix} \,.\, c_{11}^{(i_1)} \,.\, c_{12}^{(i_2)},$$
$$i_1, i_2 \neq \sigma.$$

On a

$$| c_{11}^{(\sigma)} | = \left| \frac{D_{1\sigma}^{(1)}}{D_{1\sigma}} \right| . \, | c_1^{(0)} |,$$

et en outre

$$c_{11}^{(\sigma)} = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \sum_{i_1=0}^{\varkappa} \sum_{i_2=0}^{\sigma-\varkappa} \left| \frac{\begin{vmatrix} [G_{\varkappa-i_1, \sigma-\varkappa-i_2}^{(i_1, i_2)}]_{\substack{r_{11}\\ r_{12}}}, & [G_{00}^{(0,\sigma)}]_{\substack{r_{11}\\ r_{12}}} \\ [G_{\varkappa-i_1, \sigma-\varkappa-i_2}^{(i_1, i_2)}]_{\substack{r_{11}\\ r_{22}}}, & [G_{00}^{(0,\sigma)}]_{\substack{r_{11}\\ r_{22}}} \end{vmatrix} . \, c_{11}^{(i_1)} \,.\, c_{12}^{(i_2)}}{D_{1\sigma}} \right| | c_1^{(0)} |,$$
$$i_1, i_2 \neq \sigma.$$

Les fonctions rationnelles entières (11) ont au point $x = a_1$ une valeur finie et elles ont une certaine valeur maximum et une certaine valeur minimum. Nous désignerons par M la valeur maximum des coefficients $b^{(1)}_{\lambda,\varrho_k}$ et $b^{(1)}_{\lambda,\mu_k}$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ et par m leur valeur minimum. Q désignera la valeur maximum des coefiicients $b^{(2)}_{\lambda,\varrho_k}$ et $b^{(2)}_{\lambda,\mu_k}$ et q leur valeur minimum. Alors on a

$$| D_{1\sigma} | > (mq)^2 \, | [(r_{11} - 1)(r_{11} - 1 + \sigma) - 1] \, . \, \sigma(r_{22} - r_{12}) \, |,$$

$$\left\| \begin{matrix} [G^{(i_1,i_2)}_{\varkappa-i_1,\sigma-\varkappa-i_2}]_{\substack{r_{11},\\ r_{12}}}, & [G^{(0,\sigma)}_{00}]_{\substack{r_{11}\\ r_{12}}} \\ [G^{(i_1,i_2)}_{\varkappa-i_1,\sigma-\varkappa-i_2}]_{\substack{r_{11},\\ r_{22}}}, & [G^{(0,\sigma)}_{00}]_{\substack{r_{11}\\ r_{22}}} \end{matrix} \right\| < (MQ)^2 \, | [(r_{11} - 1)(r_{11} - 1 + i_1)(\sigma - i_2) - \\ - i_1](r_{22} - r_{12}) \, |,$$

$$i_1, i_2 \neq \sigma.$$

Etant donné que $\dfrac{i_1}{\sigma} < 1$, $\dfrac{i_2}{\sigma} < 1$, si l'on compte à partir d'une valeur définie et finie $\sigma = \varrho$, pour $\sigma > \varrho$ on a constamment

$$| c^{(\sigma)}_{11} | < \left(\frac{M \, . \, Q}{m \, . \, q} \right)^2 \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \sum_{i_1=0}^{\varkappa} \sum_{i_2=0}^{\sigma-\varkappa} | c^{(i_1)}_{11} \, . \, c^{(i_2)}_{12} | \, . \, | c^{(0)}_{1} |$$

ou encore

$$\left(\frac{m \, . \, q}{M \, . \, Q} \right)^2 \left| \frac{c^{(\sigma)}_{11}}{c^{(0)}_{1}} \right| = | C^{(\sigma+1)}_{11} | < \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \sum_{i_1=0}^{\varkappa} \sum_{i_2=0}^{\sigma-\varkappa} | c^{(i_1)}_{11} \, . \, c^{(i_2)}_{12} \, |,$$

$$i_1, i_2 \neq \sigma.$$

De là, en posant

$$\sum_{i_1=0}^{\varkappa} \sum_{i_2=0}^{\sigma-\varkappa} | c^{(i_1)}_{11} \, . \, c^{(i_2)}_{12} | = | C^{(\sigma-\varkappa)}_{11} |,$$

il vient

$$| C^{(\sigma+1)}_{11} | < \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} | C^{(\sigma-\varkappa)}_{11} |.$$

Tant que $\sigma \leqq \varrho$, choisissons des nombres positifs $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{\varrho+1}$ tels que

$$| C^{(0)}_{11} | < \beta_0, \qquad | C^{(1)}_{11} | < \beta_1, \ldots, \qquad | C^{(\varrho)}_{11} | < \beta_\varrho, \qquad | C^{(\varrho+1)}_{11} | < \beta_{\varrho+1}$$

et si $\sigma > \varrho$, soient

$$\beta_{\sigma+1} = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \beta_{\sigma-\varkappa}, \qquad \sigma = \varrho + 1, \qquad \varrho + 2, \ldots$$

En en tenant compte, on a

$$| C^{(\varrho+2)}_{11} | < \sum_{\varkappa=0}^{\varrho+1} | C^{(\varrho+1-\varkappa)}_{11} | < \sum_{\varkappa=0}^{\varrho+1} \beta_{\varrho+1-\varkappa} = \beta_{\varrho+2}.$$

Nous aurons de la même façon

$$| C^{(\varrho+3)}_{11} | < \beta_{\varrho+3}, \qquad | C^{(\varrho+4)}_{11} | < \beta_{\varrho+4}, \ldots,$$

où $\beta_{\varrho+2}, \beta_{\varrho+3}, \beta_{\varrho+4}, \ldots$ sont aussi des valeurs positives. Pour $\sigma \leqq \varrho$ posons

$$b_0 = \beta_0, \qquad b_{\sigma+1} = \beta_{\sigma+1} - \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \beta_{\sigma-\varkappa}.$$

Il vient

$$\frac{(1-z)(b_0 + b_1 z + \ldots + b_{\varrho+1} z^{\varrho+1})}{1-2z} = \frac{b_0 + b_1 z + \ldots + b_{\varrho+1} z^{\varrho+1}}{1 - z - z^2 - \ldots} =$$

$$= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z^2 + \ldots,$$

où l'on a

$$z = x - a_1.$$

La série du second membre converge tant qu'on a $|z| < \frac{1}{2}$. On en tire

$$b_0 + b_1 z + \ldots + b_{\varrho+1} z^{\varrho+1} = (1 - z - z^2 - \ldots)(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 z + s_2 z^2 + \ldots).$$

Il en résulte que

$$\beta_0 = \varepsilon_0, \qquad \beta_1 = \varepsilon_1, \ldots, \qquad \beta_\varrho = \varepsilon_\varrho, \qquad \beta_{\varrho+1} = \varepsilon_{\varrho+1}.$$

Si $\sigma > \varrho$, on a

$$\varepsilon_{\varrho+2} = \sum_{\varkappa=0}^{\varrho+1} \varepsilon_{\varrho+1-\varkappa} = \sum_{\varkappa=0}^{\varrho+1} \beta_{\varrho+1-\varkappa} = \beta_{\varrho+2}.$$

Nous aurons de la même façon

$$\varepsilon_{\varrho+3} = \beta_{\varrho+3}, \qquad \varepsilon_{\varrho+4} = \beta_{\varrho+4}, \ldots,$$

c'est-à-dire que la série de puissances

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu z^\nu$$

converge aussi dans l'intervalle $|z| < \frac{1}{2}$. Mais alors la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C_{11}^{(\nu)} z^\nu$$

converge aussi dans cet intervalle et la série

$$\varphi_{11}(x - a_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{11}^{(\nu)} (x - a_1)^\nu$$

converge dans l'intervalle

$$|x - a_1| < \frac{1}{2} \left(\frac{MQ}{mq}\right)^2 . \, |c_1^{(0)}| \, .$$

On démontrerait de la même façon que les séries $\varphi_{21}(x - a_1)$, $\varphi_{12}(x - a_1)$, $\varphi_{22}(x - a_1)$ ont aussi leur intervalle de convergence. Dans le cas général $\left(\frac{QM}{mq}\right)^n$ remplace la puissance 2.

VI. Relation entre les racines des équations déterminantes.

La forme normale du système différentiel (1) par rapport au point singulier $x = a_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, \sigma$ est

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \frac{1}{x - a_\mu} \frac{P_{\lambda k}}{P_{0k}}$$

ou

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \frac{1}{x - a_\mu} \cdot \frac{G_{\lambda k}(x)}{[\varphi(x)]^{s_{\lambda k}}} \cdot (x - a_\mu).$$

Les 2 premiers termes des équations déterminantes correspondant au point singulier $x = a_\mu$, sont

$$r_k^n - r_k^{n-1}\left[- \sum_{\lambda=1}^{n} (s_{\lambda k} - 1) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_{\nu 0}^{(\nu)}}{b_{00}^{(\nu)}}\right] + \ldots,$$

où on a $\lambda \neq k$, $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{b_{\nu 0}^{(\nu)}}{b_{00}^{(\nu)}} = \left[\frac{P_{\nu\nu}}{P_{0\nu}}\right]_{x=a_\mu} = \lim_{x \to a_\mu} \frac{G_{\nu\nu}(x)}{\varphi(x)} \cdot (x - a_\mu) = \mathrm{Res}_{a_\mu} a_{\nu\nu}.$$

En nous basant sur ce résultat nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ik}^{(\mu)} = - \sum_{\lambda=1}^{n} (s_{\lambda k} - 1) + \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_\mu} a_{\nu\nu}$$

$$\lambda \neq k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

et en outre on a

$$\sum_{\mu=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{n} r_{ik}^{(\mu)} = - \sigma \sum_{\lambda=1}^{n} (s_{\lambda k} - 1) + \sum_{\mu=1}^{\sigma} \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_\mu} a_{\nu\nu}.$$

Si le point singulier $x = \infty$ n'est pas un point d'indétermination, la solution du système différentiel au voisinage de ce point est,

$$y_k = x^{-r_k} \sum_{\nu_k=0}^{\infty} c_k^{(\nu_k)} \frac{1}{x^{\nu_k}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

La forme normale du système différentiel (1) par rapport au point singulier $x = \infty$ est

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \frac{1}{x} \cdot \frac{G_{\lambda k}(x)}{[\varphi(x)]^{s_{k\lambda}}} \cdot x$$

et les deux premiers termes des équations déterminantes correspondant au point singulier $x - \infty$ sont

$$r_k^n + r_k^{n-1}\left[- \sum_{\lambda=1}^{n} (s_{\lambda k} - 1) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_{\nu 0}^{(\nu)}}{b_{00}^{(\nu)}}\right] + \ldots,$$

$$\lambda \neq k,$$

où on a maintenant

$$\frac{b_{\nu 0}^{(\nu)}}{b_{00}^{(\nu)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{G_{\nu\nu}(x)}{\varphi(x)} \,.\, x = -\operatorname{Res}_\infty a_{\nu\nu}.$$

Si on désigne par $r_{ik}^{(\sigma+1)}$ les racines de l'équation déterminante qui précède on a

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ik}^{(\sigma+1)} = \sum_{\lambda=1}^{n} (s_{\lambda k} - 1) + \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{Res}_\infty a_{\nu\nu}$$
$$\lambda \neq k$$

et ainsi on obtient

$$\sum_{\mu=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} r_{ik}^{(\mu)} = -(\sigma - 1) \sum_{\lambda=1}^{n} (s_{\lambda k} - 1), \tag{28a}$$
$$\lambda \neq k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

On en tire pour toutes les racines des équations déterminantes

$$\sum_{\mu=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} r_{ik}^{(\mu)} = -(\sigma - 1) \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} (s_{\lambda k} - 1), \tag{28}$$
$$\lambda \neq k.$$

Le nombre des racines des équations déterminantes est $n^2(\sigma + 1)$, mais comme il existe entre elles cette relation, le nombre des racines indépendantes entre elles de cette équation est donc de $n^2(\sigma + 1) - 1$.
Si on a $s_{\lambda k} = 1$, alors

$$\sum_{\mu=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} r_{ik}^{(\mu)} = 0$$

et la forme normale du système différentiel par rapport au point singulier $x = a_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, \sigma$, est

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{1}{x - a_\mu} \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda g_{\lambda k}(x),$$

où les $g_{\lambda k}(x)$ sont des fonctions holomorphes au point $x = a_\mu$. Par le changement de variable

$$e^t = x - a_\mu$$

un tel système différentiel prend la forme

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda g^*_{\lambda k}(t),$$

où le point singulier $x = a_\mu$ a disparu, c'est pourquoi dans le cas où $s_{\lambda k} = 1$, le point singulier peut être supprimé et n'est ni un pôle ni un point singulier essentiel.

Considérons maintenant l'équation différentielle du type de Fuchs:

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + p_1 \frac{d^{\nu-1} y}{dx^{\nu-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

avec

$$p_k = \frac{G_k(x)}{[\varphi(x)]^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

où les $G_k(x)$ sont des foctions rationelles entières de degré au plus égal à $k(\sigma - 1)$. Après la substitution

$$y = y_1, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y_2, \ldots, \qquad \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}} = y_n,$$

cette équation différentielle donne le système différentiel spécial

$$(29) \qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} &= y_{k+1}, \qquad k = 1,2, \ldots, n-1, \\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} &= -(p_n y_1 + p_{n-1} y_2 + \ldots + p_1 y_n) \end{aligned}$$

et inversement un tel système différentiel spécial conduira à une équation différentielle donnée du type de Fuchs et a une seule équation déterminante dont les racines sont r_i, $i = 1,2, \ldots, n$. Dans ce système différentiel on a $s_{\lambda k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$s_n = n - \lambda + 1, \qquad \lambda \neq n,$$

ce qui donne la relation (28a)

$$\sum_{\mu=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} r_i^{(\mu)} = \sum_{\mu=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} r_{in}^{(\mu)} = (\sigma - 1) \frac{n \,.\, (n-1)}{2}$$

laquelle est la relation de Fuchs bien connue pour les racines de l'équation déterminante de l'équation différentielle du type de Fuchs. C'est relation n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la relation (28).

VII. Relation entre les racines des équations déterminantes et entre les coefficients du système différentiel

Désignons par $r_{ik}^{(\mu)}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, $\mu = 1, 2, \ldots, \sigma, \sigma + 1$, les racines des équations déterminantes correspondant au point singulier $x = a_\mu$, les $r_{ik}^{(\sigma+1)}$ désignant les racines des équations déterminantes correspondantes au point singulier $x = \infty$.

Les coefficients des équations déterminantes, correspondant au point singulier $x = a_\mu$ seront désignés par $B_{0k}^{(\mu)}$ pour les puissances r_k^{ϱ}. Ils sont formés de $s_{\lambda k} - 1$,

$$\frac{b_{k0}^{(k),\mu}}{b_{00}^{(k)\mu}} \text{ et } \frac{b_{\lambda 0}^{(k),\mu}}{b_{00}^{(k)\mu}}, \qquad \text{où } s_{\lambda k} - 1 = r_\lambda - r_k, \qquad \lambda \neq k,$$

$$\frac{b_{k0}^{(k),\mu}}{b_{00}^{(k)\mu}} = \left[\frac{P_{kk}}{P_{0k}}\right]_{x \to a_\mu} = \lim_{x \to a_\mu} \frac{G_{kk}(x)}{\varphi(x)} (x - a_\mu),$$

$$\frac{b_{\lambda 0}^{(k),\mu}}{b_{00}^{(k),\mu}} = \left[\frac{P_{kk}}{P_{0k}}\right]_{x \to a_\mu} = \lim_{x \to a_\mu} \frac{G_{\lambda k}(x)}{[\varphi(x)]^{s_{k\lambda}}} (x - a_\mu).$$

Entre les $r_{ik}^{(\mu)}$ et entre les $B_{\varrho k}^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, \sigma$, on a les identités

$$(r - r_{ik}^{(\mu)}) \ldots (r - r_{nk}^{(\mu)}) = \sum_{\varrho=n}^{0} (-1)^{\varrho} B_{n-\varrho, k}^{(\mu)} r^{\varrho},$$

où on a $B_{0k}^{(\mu)} = 1$, $(-1)^n = 1$.
Cela se traduit par n relations pour chaque valeur de k et de μ soit au total $n^2 . \sigma$ relations.
Au point $x = \infty$ nous avons l'identité

$$(r + r_{ik}^{(\sigma+1)}) \ldots (r + r_{nk}^{(\sigma+1)}) = \sum_{\varrho=n}^{0} (-1)^{\varrho} B_{n-\varrho, k}^{(\varrho+1)} . r^{\varrho}.$$

Cette identité se traduit par n relations pour chaque valeur de k, soit au total n^2 relations.

Il en résulte qu'il y a entre les racines des équations déterminantes et les coefficients du système différentiel $n^2(\sigma + 1)$ relations. Mais la relation (28) est vérifiée par les racines des équations déterminantes elles-mêmes et c'est pourquoi entre les racines des équations déterminantes et les coefficients du système différentiel il y a $n^2(\sigma + 1) - 1$ relations indépendantes.

Les fonctions rationcelles entières $G_{\lambda k}(x)$ sont pour $\lambda \neq k$ de degré au plus égal à $(\sigma + 1) . s_{\lambda k} - 2$ et pour $\lambda = k$ de degré au plus égal à $\sigma - 1$ et ainsi chaque équation du système différentiel a au plus

$$\sigma + (\sigma + 1) \sum_{\lambda=1}^{n} s_{\lambda k} + (n - 1), \qquad \lambda \neq k,$$

coefficients constants et le système différentiel tout entier a au plus

$$n\sigma + n(\sigma + 1) \sum_{\lambda=1}^{n} s_{\lambda k} - n(n - 1)$$

coefficients constants. Entre ceux-ci et les racines des équations déterminantes, il existe $n^2(\sigma + 1) - 1$ relations indépendantes. S'il y a autant de relations indépendantes que le système a de coefficients indépendants on a

$$n \left[\sigma + (\sigma + 1) \sum_{\lambda=1}^{n} s_{\lambda k} - (n - 1)\right] - n^2(\sigma + 1) + 1 = 0$$

soit

$$n^2(\sigma + 2) - n(\sigma + 1) \left(1 + \sum_{\lambda=1}^{n} s_{\lambda k}\right) - 1 = 0, \qquad \lambda \neq k.$$

Si cette équation du second degré entre le nombre entier positif σ et le nombre entier $\sum_{\lambda=1}^{n} s_{\lambda k}$, $\lambda \neq k$ a une solution pour le nombre entier positif n alors les relations indépendantes trouvées permettent de déterminer les coefficients constants du système différentiel et donc le système différentiel lui-même correspondant à des points singuliers donnés et à des racines données des équations déterminantes associées aux points singuliers.

Si on a $\sum_{\lambda=1}^{n} s_{\lambda k} = 0,\ \lambda \neq k$, on a seulement une équation différentielle du premier ordre, il en résulte que $s_{\lambda k} = 0,\ \lambda \neq k$, et l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{R(x)}{\varphi(x)}\, y,$$

où $R(x)$ est une fonction rationnelle entière de degré $(\sigma - 1)$.
Celle-ci prend au point sing. $x = a_\mu$ la valeur $b_{10}^{(\mu)} = (1 + r_\mu) \,.\, b_{00}^{(\mu)}$, où r_μ est racine de l'équation déterminante correspondant au point singulier $x = a_\mu$ et où on a

$$b_{00}^{(\mu)} = [P_{0k}]_{x=a_\mu} = \lim_{x \to a_\mu} \frac{\varphi(x)}{x - a_\mu}$$

ce qui donne

$$[R(x)]_{x=a_\mu} = (1 + r_\mu) \,.\, b_{00}^{(\mu)}, \qquad \mu = 1,2, \ldots \sigma,$$

Ceci étant écrit pour les σ coefficients de la fonction rationnelle entière $R(x)$, on obtient σ équations linéaires à partir desquelles nous pouvons calculer ces coefficients étant donné que le déterminant de ces équations n'est pas nul.

Si nous prenons le système différentiel spécial (29), le nombre de tous les coefficients constants est

$$\sigma \frac{(n + 1) \,.\, n}{2} - \frac{n \,.\, (n - 1)}{2} \,.$$

Entre eux et les racines des équations déterminantes il existe $n \,.\, (\sigma + 1) - 1$ relations indépendantes. S'il y a autant de relations indépendantes que de coefficients constants on a

$$n^2(\sigma - 1) - n \,.\, (\sigma + 1) + 2 = 0.$$

Si $\sigma = 1$, on a $n = 1$ et si $\sigma > 1$, on a $n_1 = 1$ et $n_2 = \dfrac{2}{\sigma - 1}$. n_2 doit être aussi un nombre entier positif. Ceci n'est possible que si $\sigma = 2$ et si en outre $n_2 = n = 2$. On peut transformer un tel système différentiel en une équation différentielle du type de Fuchs, du second ordre ayant deux points singuliers à distance finie. C'est une équation différentielle qui peut être transformée en une équation différentielle hypergéométrique.

(Reçu le 1 novembre 1955.)

Nutné a postačujúce podmienky, aby diferenciálny systém nemal body neurčitosti

(Pokračovanie z čísla 1)

J. Hronec

Resumé

V kapitole IV podáva sa určenie koeficientov nekonenčných radov riešenia, keď sú rovnice dif. systému dve. Určenie koreňov determinujúcich rovníc je dané rovnicou (16) kapitola III. Pri $r = r_{11}$ a $r = r_{21}$, resp. pri $r = r_{12}$, $r = r_{22}$ z rovnice $f_1 = 0$ pre koeficienty nekonečných radov $c_1^{(\sigma)}$ a $c_2^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, 2, 3, \ldots$, dostaneme dva lineárne systémy. Ak sa líšia korene determinujúcich rovníc v celých reálnych číslach, je $D_{20} = 0$, a vtedy možno určiť len jednu dvojicu koeficientov $c_1^{(\sigma)}$ a $c_2^{(\sigma)}$. Keď je diskriminant rovnice (19) nula, môžeme určiť tiež len jednu dvojicu. Keď je diskriminant tak rovnice (19) ako aj rovnice (19a) nula, máme len jednu rovnicu pre dvojicu $c_1^{(\sigma)}$ a $c_2^{(\sigma)}$. Ďalej sa určí súvis tohto dif. systému s diferenciálnou rovnicou Fuchsovho typu.

V kapitole V sa ukáže, že takto určené nekonečné rady majú vždy určitý obor konvergencie, ktorý nie je nula. Postup je taký, že sa vyjde z vyjadrenia koeficientov

$$c_{11}^{(\sigma)} = - \frac{D_{1\sigma}^{(1)}}{D_{1\sigma}} c_1^{(0)}$$

a ukáže sa, že týmito koeficientami určené rady konvergujú v okolí

$$| x - a_1 | < \frac{1}{2} \left(\frac{M}{m} \frac{Q}{q} \right)^2 | c_1^{(0)} |,$$

kde M je maximálna a m minimálna hodnota koeficientov $b_{\lambda\varrho_k}^{(1)}$ a $b_{\lambda\mu_k}^{(1)}$ rovníc (11). Q je maximálna a q je minimálna hodnota koeficientov $b_{\lambda\varrho_k}^{(2)}$ a $b_{\lambda\mu_k}^{(2)}$ rovníc (11).

V kapitole VI je určený súvis medzi koreňmi determinujúcich rovníc a príde sa k tomu, že medzi všetkými koreňmi všetkých determinujúcich rovnic jestvuje relácia (28). Na konci tejto kapitoly sa ukáže, že tzv. Fuchsová relácia je špeciálnou reláciou relácie (28).

V kapitole VII podáva sa zasa súvis koreňov determinujúcich rovníc a koeficientov diferenciálneho systému a príde sa k tomu výsledku, že medzi koreňmi determinujúcich rovníc a medzi koeficientami dif. systému jestvuje $n^2(\sigma + 1) - 1$ nezávislých súvisov, kde n je počet rovníc a σ počet singulárnych bodov v konečne. Celý dif. systém má najviac

$$n\sigma + n(\sigma + 1) \sum_{\lambda=1}^{n} s_{\lambda k} - n(n - 1)$$

konštantných koeficientov. Keď má rovnica

$$n \left[\sigma + (\sigma + 1) \sum_{\lambda=1}^{n} s_{\lambda k} - (n + 1) \right] - n^2(\sigma + 1) + 1 = 0$$

riešenie o celom kladnom čísle n, potom z určených nezávislých súvisov môžeme určiť konštantné koeficienty dif. systému pri daných singulárných bodoch a daných koreňoch determinujúcich rovníc.

Необходимые и достаточные условия, чтобы у дифференциальной системы не было точек неопределенности.

Ю. Гронец

(Продолжение[1])

Резюме

В главе IV. автор определяет коэффициенты бесконечных рядов решения, если число уравнений дифференциальной ситемы два. Определение корней детерминующего уравнения дано уравнением (16), гл. III. Для $r = r_{11}$, $r = r_{21}$, или же для $r = r_{12}$, $r = r_{22}$, из уравнения $f_1 = 0$ получим для коэффициентов бесконечных рядов $c_1^{(\sigma)}$ и $c_2^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, 2, 3, \ldots$ две линейные системы. Если разница корней детерминующих уравнений составляет целое действительное число, то $D_{20} = 0$ и тогда можно определить только одну пару коэффициентов $c_1^{(\sigma)}$ и $c_2^{(\sigma)}$. Если минор уравнения (19) равен нулю, то тоже можно определить только одну пару. Если минор, как уравнения (19), так и уравнения (19a), равен нулю, получим только одно уравнение для пары $c_1^{(\sigma)}$ и $c_2^{(\sigma)}$. Далее определяется связь между этой дифференциальной системой и дифференциальным уравнением класса Фукса.

В главе V автор доказывает, что таким образом определенные бесконечные ряды имеют всегда определенную область сходимости не равну нулю. Поступают так, что исходят из выражения коэффициентов

$$c_{11}^{(\sigma)} = -\frac{D_{1\sigma}^{(1)}}{D_{1\sigma}} c_1^{(\sigma)}$$

и доказывают, что ряды, определенные этими коэффициентами, сходятся в окресности

$$| x - a_1 | < \frac{1}{2} \left(\frac{M}{m} \frac{Q}{q} \right) | c_1^{(1)} |$$

причем M является максимальной, а m минимальной величиной коэффициентов $b_{\lambda\varrho k}^{(1)}$ и $b_{\lambda\mu k}^{(1)}$ уравнения (11); Q максимальной, а q минимальной величиной коэффициентов $b_{\lambda\varrho k}^{(2)}$ и $b_{\lambda\mu_k}^{(2)}$ уравнения (11).

В главе VI определена связь между корнями детерминующих уравнений и приходят к заключению, что между всеми корнями всех детерминующих уравнений имеет место соотношение (28). В конце этой главы доказывается, что так называемое соотношение Фукса является специальным соотношением соотношения (28).

В главе VII указана связь между корнями детерминующих уравнений и коэффициентами дифференциальной системы, и автор приходит к результату, что между корнями детерминующих уравнений и коэффициентами дифференциальной системы существует $n^2(\varrho + 1) - 1$ независимых связей, где n число уравнений, а σ число особых точек в конечности. Вся дифференциальная система имеет больше всего

$$n\sigma + n(\sigma + 1) \sum_{\lambda=1}^{n} s_{\lambda k} - n(n - 1)$$

постоянных коэффициентов. Если решением уравнения

$$n \left[\sigma + (\sigma + 1) \sum_{\lambda=1}^{n} s_{\lambda k} - (n + 1) \right] - n^2(\sigma + 1) + 1 = 0$$

является целое положительное число n, то из определенных независимых связей, можно определить постоянные коэффициенты дифференциальной системы, если даны особые точки и корни детерминующих уравнений.

---

[1]) Первая часть напечатана в журнале: Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Tom I., Fasc. I.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. II, FASC. I-II MATHEMATICA 1957

Deskriptivní geometrie n-rozměrného prostoru I.

J. SRB

Úvod. Protože přímé užití principu promítání není dost vhodné pro obecné vybudování té části deskriptivní geometrie, kterou pro $n = 3$ nazývá Müller lineárními zobrazovacími metodami, užil jsem při sestrojování této části deskriptivní geometrie n-rozměrného prostoru jiného postupu, jehož podstatu v tomto úvodě vyložím pro n-rozměrný projektivní prostor.

Uvažujeme-li n-rozměrný projektivní prostor S_n jako množinu jeho k-rozměrných podprostorů S_k, $(0 \leqq k \leqq n - 1)$, je těmito podprostory dáno rozdělení množiny nadrovin prostoru S_n na třídy Σ_{n-k-1}, [$(n - k - 1)$-rozměrné svazky nadrovin prostoru S_n s basí S_k] navzájem ekvivalentních skupin $n - k$ lineárně nezávislých nadrovin svazku prostoru S_n s basí S_k (v dalším skupina $l. n. n.$); zřejmě každá skupina $l. n. n.$ náleží alespoň jednomu svazku Σ_{n-k-1} a dva svazky Σ_{n-k-1}, Σ'_{n-k-1} jsou buď totožné, nebo nemají společnou skupinu $l. n. n.$ Libovolnou skupinu $l. n. n.$ svazku Σ_{n-k-1} můžeme proto volit jako jeho representaci. Pro $k = n - 1$ obsahuje každá třída Σ_0 jediný prvek, nadrovinu prostoru S_n; uvažujeme pak S_n jako množinu jeho nadrovin, t. j. tříd navzájem ekvivalentních skupin n lineárně nezávislých bodů nebo navzájem ekvivalentních skupin $n - k - 1$ lineárně nezávislých podprostorů S_{k+1} nadroviny, které náleží svazku této nadroviny s basí S_k $(0 \leqq k \leqq n - 3)$; každou z těchto skupin můžeme pak volit jako representaci nadroviny prostoru S_n.

Volbu skupin $l. n. n.$ representujících svazky Σ_{n-k-1} prostoru S_n, nebo, což je totéž, jejich base S_k, proveďme takto: Libovolně zvolený podprostor S_{n-k-1} prostoru S_n protněme libovolně volenou skupinou $l. n. n.$ representující některý podprostor S_k prostoru S_n, který nemá s S_{n-k-1} společný bod, v $n - k$ prostorech S^i_{n-k-2}, $(i = 1, \ldots, n - k)$. Jako representaci každého podprostoru S_k prostoru S_n, který nemá s prostorem S_{n-k-1} společný bod, zvolíme tu skupinu $n - k$ $l. n. n.$ svazku Σ_{n-k-1} s basí S_k, jejíž nadroviny procházejí prostory S^i_{n-k-2} $(i = 1, \ldots, n - k)$; nadrovinu této skupiny, která prochází prostorem S^i_{n-k-2}, $(1 \leqq i \leqq n - k)$ nazveme i-tou složkou této skupiny nebo i-tou složkou prostoru S_k skupinou určeného. Každý podprostor S_k prostoru S_n, který nemá s S_{n-k-1} společný bod, má potom právě jednu skupinu $n - k$ složek. i-té složky všech podprostorů S_k prostoru S_n, které nemají s prostorem S_{n-k-1} společný bod, tvoří množinu nadrovin $(k + 1)$-rozměrného svazu prostoru S_n s basí S^i_{n-k-2}, $(1 \leqq i \leqq n - k)$, z něhož jsou vynechány nadroviny podsvazu s basí S_{n-k-1}, (i-tý svaz složek) tak, že každá skupina $n - k$ nadrovin, z nichž každá náleží právě jednomu svazu složek tvoří skupinu $n - k$ složek právě jednoho podprostoru S_k prostoru S_n, který nemá s S_{n-k-1} společný bod. Má-li r ($2 \leqq r \leqq k + 1$) k-rozměrných podprostorů S_k prostoru S_n, z nichž nemá žádný s S_{n-k-1} společný bod, společný prostor S_{k-r+1} dimense $k - r + 1 \geqq 0$, mají i-té složky těchto podprostorů pro každé $i = 1, \ldots, n - k$ průsečný prostor dimense rovné nejméně $n - r$, t. j. dimense prostoru S^i_{n-r}, spojujícího prostoru prostorů S_{k-r+1} a S^i_{n-k-2} tak, že S^i_{n-r} je pro každé i podprostorem tohoto průsečného prostoru složek, který je alespoň pro jedno i, ($1 \leqq i \leqq n - k$) s prostorem S^i_{n-r} totožný a spojující prostory S^i_{n-r} náleží pro $i = 1, \ldots, n - k$ témuž $(n - r + 1)$-rozměrnému prostoru společného podsvazu svazů složek s basí S_{n-k-1}. Této vlastnosti můžeme dát jiný, pro náš účel vhodný výklad: Jsou-li podprostory S^i_{n-k} i-tých svazů složek pro $i = 1, \ldots, n - k$ určeny týmž podprostorem S_{k-r+1} prostoru S_n, potom každý S^i_{n-r}, ($1 \leqq i \leqq n - k$) náleží prostoru S^i_{n-r+1} podsvazu i-tého svazu složek takovému, že si prostory S^i_{n-r+1} pro $i = 1, \ldots, n - k$ korespondují v indentických kolineacích mezi podsvazy s basemi S_{n-k-1} všech dvojic svazů složek. (Systém řídící S-incidenci.) Podprostory prostoru S_n dimense větší než k, z nichž jsou vynechány body, které mají společné s prostorem S_{n-k-1}, jsou množiny prostorů S_k neprotínajících S_{n-k-1}, které mají s jistými soustavami prostorů S_k téže vlastnosti průsečné prostory dimense menší než k. To jsou hlavní vztahy, které dovolují interpretovat geometrii prostoru S_n, z něhož jsou vynechány body prostoru S_{n-k-1} (prostor S_{n-k-1}-afinní), jako geometrie ve svazech složek, kde jsou vzájemné vztahy mezi složkami representujícími podprostory prostoru S_n s danými vzájemnými vztahy vázány uvedeným způsobem systémem řídícím S-incidenci (systém složkové representace s prostorem S_n spřažený) a naopak. Tato interpretace je invariantní vzhledem k regulárním kolineacím jednotlivých svazů složek, t. j. zobrazíme-li každý svaz složek libovolnou regulární kolineací na $(k + 1)$-rozměrnou varietu (podprostor, svaz, příp. útvar z nich složený) prostoru S_n, zachovají tato zobrazení vzájemně jednoznačné přiřazení skupin složek a podprostorů prostoru S_n těmito skupinami representovaných i vzájemně jednoznačné přiřazení projektivních vztahů mezi těmito podprostory a vztahů mezi skupinami složek je representujících, protože zůstanou zachovány vztahy mezi složkami jednotlivých variet i vzájemné přiřazení těchto vztahů mezi různými varietami složek dané transformovanými kolineacemi systému řídícího S-incidenci. Transformovaná soustava variet složek pak obecně není s prostorem S_n spřažená, t. j. složky této soustavy nebudou obecně nadroviny prostoru S_n, obecně nebudou procházet prostory jimi representovanými a kolineace transformovaného systému řídícího S-incidenci obecně nebudou identické.

Volbu representace nadrovin prostoru S_n provedeme takto: V prostoru S_n zvolíme libovolně $n - k$ lineárně nezávislých $(k + 1)$-rozměrných prostorů S^i_{k+1}, ($i = 1, \ldots, n - k$) svazku $(k + 1)$-rozměrných prostorů prostoru S_n s basí $\overline{S}_k$, ($0 \leqq k \leqq n - 2$), (prostory složek). jako representaci nadroviny prostoru S_n, která neprochází prostorem $\overline{S}_k$ zvolíme tu skupinu $n - k$ k-rozměrných prostorů S^i_k, ve kterých nadrovina protíná prostory složek S^i_{k+1}, ($i = 1, \ldots, n - k$); prostor S^i_k, ($1 \leqq i \leqq n - k$) této skupiny nazveme i-tou složkou nadroviny. Každé nadrovině prostoru S_n, která neprochází prostorem $\overline{S}_k$ pak náleží jediná skupina $n - k$ složek. i-té složky všech nadrovin prostoru S_n, které neprocházejí prostorem $\overline{S}_k$ tvoří množinu nadrovin i-tého prostoru složek, z níž jsou vynechány nadroviny svazku s basí $\overline{S}_k$ tak, že každá skupina $n - k$ nadrovin prostorů složek, z nichž každá náleží právě jednomu z těchto prostorů, a které se protínají v témž $(k - 1)$-rozměrném podprostoru prostoru $\overline{S}_k$ tak, že žádná z nich tímto prostorem neprochází, tvoří skupinu složek právě jedné nadroviny prostoru S_n, která neprochází prostorem $\overline{S}_k$; nebo: $n - k$ nadrovin S_k^i prostorů složek, z nichž každá náleží právě jednomu z těchto prostorů, tvoří tehdy a jenom tehdy skupinu složek téže nadroviny prostoru S_n, která neprochází prostorem $\overline{S}_k$, neprochází-li žádná z nich prostorem $\overline{S}_k$ a korespondují-li si jejich průsečné prostory S_{k-1}^i s prostorem $\overline{S}_k$ v identických kolineacích mezi podprostory $\overline{S}_k$ dvojic prostorů složek. Složky nadrovin $(k + 1)$-rozměrného svazku s $(n - k - 2)$-rozměrnou basí S_{n-k-2}, která nemá s žádným prostorem složek společný bod, jsou nadroviny prostorů složek, které si korespondují v systému kolineací mezi dvojicemi prostorů složek se společným prostorem samodružných bodů $\overline{S}_k$ tak, že takovým dvěma různým svazkům nadrovin náleží dva různé systémy kolineací. Je-li $(k - r + 1)$-rozměrný $(1 \leqq r \leqq k)$ svazek nadrovin prostoru S_n s basí $S_{n-k-2+r}$ částí svazku s basí S_{n-k-2}, jsou i-té složky jeho nadrovin nadroviny $(k - r + 1)$-rozměrného svazku s $(r + 1)$-rozměrnou basí i-tého prostoru složek takové, že si pro $i = 1, \ldots, n - k$ korespondují v systému kolineací určeném svazkem s basí S_{n-k-2}. Podprostory prostoru S_n, které mají dimensi menší než $n - k - 2$ jsou base svazků prostorů S_{n-k-2} příslušných prostorům dimense větší než $n - k - 2$. To jsou opět hlavní vztahy, které dovolují interpretovat geometrii prostoru S_n, z něhož jsou vynechány nadroviny procházející prostorem $\overline{S}_k$ (prostor Σ_{n-k-1}-centrální) jako geometrie v prostorech složek, kde jsou vztahy mezi složkami representujícími nadroviny prostoru S_n s danými vzájemnými vztahy vázány uvedeným způsobem systémem řídícím S-incidenci. O invariantnosti této interpretace vzhledem k regulárním kolineacím jednotlivých prostorů složek platí totéž jako v předcházejícím případě.

Provedená úvaha vede k následujícímu způsobu budování deskriptivní geometrie n-rozměrného projektivního prostoru, kterého v této práci užijeme.

1. Buď dáno $n - k$ $(k + 1)$-rozměrných projektivních prostorů $(0 \leqq k \leqq \leqq n - 2)$; v každém z těchto $n - k$ prostorů buď dán libovolně zvolený svaz s O-rozměrnou basí v případě prvém, libovolně zvolená nadrovina v případě druhém. Každý z těchto svazů (nadrovin) nazveme pro $k > 0$ složkou systému řídícího S-vztahy a souhrn složek systémem řídícím S-vztahy, je-li dáno $n - k - 1$ regulárních kolineací mezi svazem (nadrovinou) jedním a svazy (nadrovinami) zbývajícími.

2. Předpokládáme, že je známá geometrie $(k + 1)$-rozměrného projektivního prostoru a že je dán systém variet složek, t. j., že je dáno $n - k$ $(k + 1)$-rozměrných projektivních prostorů s pevně zvoleným systémem řídícím S-vztahy.

Zvolíme potom soustavu základních definic, definujících přísl. pojmy invariantně vzhledem k regulárním kolineacím jednotlivých variet systému variet složek tak, aby se z ní a ze známé geometrie variet složek dala odvodit geometrie S-prostorů $0, 1, \ldots, (n - 1)$-rozměrných a základních S-vztahů (incidence, uspořádání, spojitosti) mezi těmito S-prostory. V případě prvního typu systému řídícího S-vztahy volíme jako základní prvek k-rozměrný S-prostor, t. j. skupinu $n - k$

nadrovin variet složek, z nichž každá náleží právě jedné varietě systému a nenáleží složce této variety systému řídícího S-vztahy. S-prostory dimense $0,1, \ldots, k-1$ jsou pak skupiny $n-k$ podprostorů $0,1, \ldots, (k-1)$-rozměrných variet složek definované S-incidencí jako průsečné S-prostory skupin S prostorů k-rozměrných; S-prostory dimense větší než k jsou potom množiny S-prostorů k-rozměrných protínajících jisté soustavy S-prostorů k-rozměrných případně dimense vyšší. Tuto geometrii nazveme složkovou representací n-rozměrného prostoru S_{n-k-1}-afinního a po doplnění prvky dalšími složkovou representací n-rozměrného prostoru S_{n-k-1}-afinního doplněného na prostor projektivní. V případě druhého typu systému řídícího S-vztahy je základním prvkem S-nadrovina, t. j. skupina $n-k$ nadrovin variet složek, z nichž každá náleží právě jedné varietě systému a protíná složku systému řídícího S-vztahy této variety v $(k-1)$-rozměrném prostoru tak, že tyto průsečné prostory si korespondují ve všech složkách systému, t. j. korespondují si v $n-k-1$ kolineacích systému. S-prostory $n-2, \ldots, (n-k-1)$-rozměrné jsou pak skupiny $n-k$ podprostorů variet složek dimense $k-1, \ldots, 0$ definované S-incidencí jako průsečné S-prostory určitých skupin S- nadrovin; S-prostory dimense menší než $n-k-2$ jsou pak definovány jako base S-svazků S-prostorů dimense větší než $n-k-1$. Tuto geometrii nazveme složkovou representací n-rozměrného prostoru Σ_{n-k-1}-centrálního a po doplnění dalšími prvky složkovou representací n-rozměrného prostoru Σ_{n-k-1}-centrálního doplněného na prostor projektivní.

3. Složkové representace doplněných prostorů jsou interpretace určitého systému axiomů projektivní geometrie. Je-li dán prostor S_n, který je interpretací téhož systému axiomů, existují pak dvě řady složkových representací se systémem variet složek z S_n, kde varietami složek téhož systému budeme rozumět buď jen podprostory prostoru S_n, nebo jen svazy, jejichž prvky i base jsou takové podprostory, nebo jen útvary složené z konečného počtu takových svazů. Každá z těchto řad má $n-1$ členů a v každé je právě jedna representace s varietami složek dimense rovné $k+1$, $(k=0, \ldots, n-2)$. Každou konkretní volbu systému variet složek některé složkové representace n-rozměrného prostoru v S_n nazveme složkovou representací prostoru S_n umístěnou v prostoru S_r, $(r \leqq n)$, je-li S_r spojující prostor prostorů variet složek. Pro $r < n$ budeme tyto representace nazývat také deskriptivními geometriemi prostoru S_n.

Zejména existují pro každé $k = 0, \ldots, n-2$ v každé z obou řad složkové representace prostoru S_n s vzájemně jednoznačným přiřazením podprostorů prostoru S_n a S-prostorů representace i vztahů mezi těmito podprostory a S-vztahů mezi S-prostory korespondujícími, které je pro representace prostorů S_{n-k-1}-afinních dáno předpisem: Jsou-li $S_k^1, \ldots, S_k^{n-k}$ složky k-rozměrného S-prostoru representace, je průsečný prostor těchto složek přiřazený k-rozměrný podprostor prostoru S_n a naopak podprostoru S_k prostoru S_n, který neprotíná společnou basi složek systému řídícího S-vztahy, je přiřazen k-rozměrný S-prostor representace, jehož složky procházejí prostorem S_k. Pro representace prostorů Σ_{n-k-1}-centrálních je toto přiřazení dáno předpisem: Jsou-li $S_k^1, \ldots, S_k^{n-k}$ složky S-nadroviny representace, je spojující prostor těchto složek přiřazená nadrovina prostoru S_n a naopak nadrovině prostoru S_n, která neprochází společným prostorem složek systému řídícího S-vztahy, je přiřazena S-nadrovina, jejíž složky jsou prostory, ve kterých nadrovina protíná variety složek. Tyto representace nazveme representacemi s prostorem S_n spřaženými.

Je-li dána libovolná složková representace prostoru S_n, pak je buď s prostorem S_n spřažená nebo není-li spřažená, existuje s prostorem S_n spřažená representace, která má variety složek téže dimense jako representace daná. Obě representace prostoru S_n jsou pak interpretace téže soustavy základních definic, definujících příslušné pojmy invariantně k regulárním kolineacím jednotlivých variet systému variet složek. Každá skupina $n - k$ regulárních kolineací mezi dvojicemi, pro určitost mezi stejnojmennými dvojicemi variet složek systémů obou representací, která přiřazuje systém řídící S-vztahy obou representací, přiřazuje vzájemně jednoznačně S-prostory a S-vztahy obou representací; takové skupiny existují vždy v neomezeném počtu.

4. Je-li v prostoru S_n dána některá jeho deskriptivní geometrie a s prostorem spřažená složková representace téhož druhu s varietami složek téže dimense jako daná deskriptivní geometrie, je vždy možno zvolit konečnou řadu složkových representací prostoru S_n téhož druhu a s varietami téže dimense jako obě representace dané, jejíž jedním koncovým členem je daná representace, druhým koncovým členem daná deskriptivní geometrie tak, že vzájemně jednoznačné přiřazení S-prostorů a S-vztahů dvou sousedních členů řady je dáno $n - k$ perspektivnostmi mezi stejnojmennými varietami složek. Zřejmě lze ke každému svazu prostoru S_n volit podprostor S_n se svazem perspektivní; regulární kolineace dvou podprostorů téže dimense je produkt konečného počtu perspektivností, v každém případě konečného počtu perspektivností z bodů; skupinu $n - k$ regulárních kolineací mezi dvojicemi stejnojmenných variet složek je tedy možno vždy nahradit konečným počtem perspektivností z bodů. Taková řada složkových representací je tedy lineární zobrazovací metodou podle *Müllerova* názvu.

V každé definici deskriptivní geometrie je obsažen požadavek, aby se konstrukce daly provádět pomocí rysů v nákresně; deskriptivní geometrie vyhovující tomuto požadavku, t. j. naše deskriptivní geometrie pro $k = 0,1$, nazveme deskriptivními geometriemi v užším smyslu a ty budou obsahem této práce. V této práci budou tedy všechna tvrzení odstavců 1—4 dokázána jenom v omezeném rozsahu, t. j. pro $k = 0,1$.

5. První část této práce je věnována složkovým representacím S_{n-1} afinních prostorů a axonometriím, které jsou deskriptivními geometriemi k těmto representacím příslušnými. Jsou v ní stanoveny předpoklady a zavedeny základní definice pro obecné n, geometrie je však vybudována pouze pro $n = 2,3$. Dvojrozměrných S-prostorů užijeme v druhé části práce jako variet složek pro representace s $k = 1$; je to postup obecnější než postup, který byl udán v dřívějším textu již jen tím, že při takovém postupném budování složkových representací stačí předpoklad, že je známá geometrie jednorozměrných projektivních prostorů. Jako příklad přímého postupu v důležitém zvláštním případě sestrojíme axonometrii trojrozměrného prostoru.

Úloha pro $k = 0$ bude obecně rozřešena až v druhé části práce, kde při budování složkové representace pro $k = 1$ a libovolné n obdržíme zároveň složkové representace pro $k = 0$ prostorů dimense sice rovné pouze $n - 1$, což však při libovolném n neomezuje obecnost.

Vážný důvod pro uvedené uspořádání práce je také tento: Pro $k = 0$ je základní prvek representace alespoň S-přímka a ostatní S-prostory jsou definovány pomocí S-incidence; v případě $k = 0$ je základní prvek S-bod a S-přímka musí být definována. Tento rozdíl se odráží nepříznivě v budování representace pro $k = 0$; náš postup při budování deskriptivních geometrií je jistě jednodušší a kratší než by byl při budování těchto geometrií obvyklými metodami a k této jednoduchosti podstatně přispívá „krytí se složek"; pro $k = 0$ jsou však důkazy nepřiměřeně rozvláčné a nepřehledné pro množství zvláštních případů vznikajících právě „krytím se složek".

Literatura

Müller: Vorlesungen über darstellende Geometrie. I. Band: Die linearen Abbildungen, 1923.

(Došlo 3. XI. 1956.)

Начертательная геометрия n мерного пространства I.

Я. Срб

Резюме

При построении той части начертательной геометрии n-мерного пространства, которую для $n = 3$ Мюллер называет линейными методами изображения, автор в своем труде воспользовался новым прямым методом. В „Введении" автор дает обоснование этого метода и основние свойства расширенного понятия начертательной геометрии, которое вытекает из этого обоснования.

Darstellende Geometrie des n-dimensionalen Raumes I.

J. Srb

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit entwickelt der Autor eine neue direkte Methode zum Aufbau desjenigen Teiles der darstellenden Geometrie des n-dimensionalen Raumes, den für $n = 3$ Müller lineare Abbildungsmethoden nennt. Die Begründung dieser Methode und die Grundeigenschaften des daraus folgenden verallgemeinerten Begriffes der darstellenden Geometrie werden in der „Einleitung" angegeben.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. II, FASC. I-II MATHEMATICA 1957

Contribution à la formule de sixième ordre dans la méthode de Runge–Kutta–Nyström

A. HUŤA

Dans les "Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Comenianae, Tomus I., Fasc. IV.—VI., 1956, Mathematica" j'ai déduit une formule de sixième ordre concernant la méthode de Runge—Kutta—Nyström. La résolution numérique de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ a été donnée par les formules (XXVI), qui sont les suivantes:

$$k_1 = f\left(x_0 + \frac{1}{9}h,\ y_0 + \frac{1}{9}k_0\right) . h,$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{6}h,\ y_0 + \frac{k_0 + 3k_1}{24}\right) . h,$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{2}{6}h,\ y_0 + \frac{k_0 - 3k_1 + 4k_2}{6}\right) . h,$$

$$k_4 = f\left(x_0 + \frac{3}{6}h,\ y_0 + \frac{278k_0 - 945k_1 + 840k_2 + 99k_3}{544}\right) . h, \tag{a}$$

$$k_5 = f\left(x_0 + \frac{4}{6}h,\ y_0 + \frac{-106k_0 + 273k_1 - 104k_2 - 107k_3 + 48k_4}{6}\right) . h,$$

$$k_6 = f\left(x_0 + \frac{5}{6}h,\ y_0 + \frac{110974k_0 - 236799k_1 + 68376k_2 + 103803k_3 - 10240k_4 + 1926k_5}{45648}\right) . h,$$

$$k_7 = f\left(x_0 + h,\ y_0 + \frac{-101195k_0 + 222534k_1 - 71988k_2 - 26109k_3 - 20000k_4 - 72k_5 + 22824k_6}{25994}\right) . h.$$

$$k = \frac{41k_0 + 216k_2 + 27k_3 + 272k_4 + 27k_5 + 216k_6 + 41k_7}{840} .$$

L'application de cettes formules exige beaucoup de peine à cause des constantes qui sont assez compliquées. Le but de la présente contribution est le suivant: donner des formules dont les constantes sont essentiellement plus simples. Le procédé pour déduire de telles formules est identique à celui qui a été employé dans l'article précédent. Au début même les premières constantes résultent égales aux constantes obtenues dans l'article en question.

En remplaçant la solution $s_2 = \frac{927}{29376}$, $s_3 = -\frac{6800}{29376}$, $s_4 = \frac{3774}{29376}$, $s_5 = \frac{14}{123}$ du système d'équations (20), (28a) et (32) par la solution suivante: $s_2 = 0$, $s_3 = \frac{3198}{4428}$, $s_4 = \frac{41}{4428}$, $s_5 = \frac{1431}{4428}$ (c'est un système de trois équations à quatre inconnues), on change les constantes ultérieures. Alors, si nous employons les mêmes symboles que dans l'article précédent, les valeurs des constantes qui ne changent pas, sont les suivantes:

$$p_2 = \frac{216}{840},\ p_3 = \frac{27}{840},\ p_4 = \frac{272}{840},\ p_5 = \frac{27}{840},\ p_6 = \frac{216}{840},\ p_7 = \frac{41}{840},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{6},\ \varphi_3 = \frac{2}{6},\ \varphi_4 = \frac{3}{6},\ \varphi_5 = \frac{4}{6},\ \varphi_6 = \frac{5}{6},\ \varphi_7 = 1,\ u_1 = \frac{1}{72},\ u_2 = \frac{4}{72},$$

$$u_3 = \frac{9}{72},\ u_4 = \frac{16}{72},\ u_5 = \frac{25}{72},\ u_6 = \frac{36}{72},\ v_1 = \frac{1}{648},\ v_2 = \frac{8}{648},\ v_3 = \frac{27}{648},$$

$$v_4 = \frac{64}{648},\ v_5 = \frac{125}{648},\ v_6 = \frac{216}{648},\ z_2 = \frac{180}{840},\ z_3 = \frac{18}{840},\ z_4 = \frac{136}{840},\ z_5 = \frac{9}{840},$$

$$z_6 = \frac{36}{840},\ p_0 = \frac{41}{840},\ \varphi_1 = \frac{1}{9},\ \beta_1 = \frac{3}{24},$$

$$w_1 = \frac{68}{396576} = \frac{1}{5832},\ t_1 = \frac{43112}{2262862656} = \frac{2}{104976},$$

$$\gamma_1 = -\frac{3}{6},\ \gamma_2 = \frac{4}{6},\ w_2 = \frac{952}{396576} = \frac{14}{5832},\ t_2 = \frac{991576}{2262862656} = \frac{46}{104976},$$

$$s_1 = \frac{272}{29376} = \frac{41}{4428},\ r_1 = \frac{4}{3888} = \frac{2}{1944},\ q_1 = \frac{544}{4758912} = \frac{4}{34992},$$

$$U_1 = \frac{4}{2592} = \frac{2}{1296},\ V_1 = \frac{43112}{251429184} = \frac{2}{11664},$$

tandis que les constantes qui changent leurs valeurs sont:

$$s_2 = 0,\ s_3 = \frac{3198}{4428},\ s_4 = \frac{41}{4428},\ s_5 = \frac{1431}{4428},\ \delta_1 = \frac{27}{8},\ \delta_2 = \frac{-24}{8},\ \delta_3 = \frac{6}{8},$$

$$w_3 = \frac{108}{5832},\ t_3 = \frac{783}{104976},\ r_2 = \frac{9}{1944},\ q_2 = \frac{45}{34992},\ U_2 = \frac{9}{1296},$$

$$V_2 = \frac{27}{11664},\ T_1 = \frac{9}{1296},\ R_1 = \frac{36}{46656},\ U_3 = \frac{26}{1296},\ U_4 = \frac{169}{2\,.\,1296},$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{981}{9},\ \varepsilon_2 = \frac{867}{9},\ \varepsilon_3 = -\frac{102}{9},\ \varepsilon_4 = \frac{1}{9},\ w_4 = -\frac{638}{5832},\ t_4 = -\frac{7900}{104976},$$

$$V_3 = -\frac{228}{11664},\ T_2 = -\frac{136}{1296},\ R_2 = -\frac{520}{46656},\ w_5 = \frac{1747}{2\,.\,5832},$$

$$w_6 = \frac{43524}{41\,.\,5832}, \quad T_3 = \frac{42}{1296}, \quad T_4 = \frac{1224}{41\,.\,1296}, \quad \zeta_1 = \frac{678}{48},$$

$$\zeta_2 = -\frac{472}{48}, \quad \zeta_3 = -\frac{66}{48}, \quad \zeta_4 = -\frac{80}{48}, \quad \zeta_5 = \frac{3}{48}, \quad t_5 = \frac{19757}{2\,.\,104976},$$

$$V_4 = \frac{715}{2\,.\,11664}, \quad R_3 = \frac{333}{46656}, \quad t_6 = \frac{804222}{41\,.\,104976}, \quad R_4 = \frac{41184}{41\,.\,46656},$$

$$\eta_1 = -\frac{2079}{82}, \quad \eta_2 = \frac{1002}{82}, \quad \eta_3 = \frac{834}{82}, \quad \eta_4 = -\frac{454}{82}, \quad \eta_5 = -\frac{9}{82}, \quad \eta_6 = \frac{72}{82}.$$

Enfin nous avons encore les valeurs

$$\alpha = \frac{1}{9}, \quad \beta_0 = \frac{1}{24}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{6}, \quad \delta_0 = -\frac{5}{8}, \quad \varepsilon_0 = \frac{221}{9}, \quad \zeta_0 = -\frac{183}{48}, \quad \eta_0 = \frac{716}{82}.$$

Si nous remplaçons les constantes antérieures par les valeurs nouvelles nous obtenons les formules simplifiées suivantes:

$$
\begin{aligned}
k_0 &= f(x_0,\ y_0)\,.\,h,\\
k_1 &= f\left(x_0 + \frac{1}{9}h,\ y_0 + \frac{1}{9}k_0\right).\,h,\\
k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{6}h,\ y_0 + \frac{k_0 + 3k_1}{24}\right).\,h,\\
k_3 &= f\left(x_0 + \frac{2}{6}h,\ y_0 + \frac{k_0 - 3k_1 + 4k_2}{6}\right).\,h,\\
k_4 &= f\left(x_0 + \frac{3}{6}h,\ y_0 + \frac{-5k_0 + 27k_1 - 24k_2 + 6k_3}{8}\right).\,h,\\
k_5 &= f\left(x_0 + \frac{4}{6}h,\ y_0 + \frac{221k_0 - 981k_1 + 867k_2 - 102k_3 + k_4}{9}\right).\,h,\\
k_6 &= f\left(x_0 + \frac{5}{6}h,\ y_0 + \frac{-183k_0 + 678k_1 - 472k_2 - 66k_3 + 80k_4 + 3k_5}{48}\right).\,h,\\
k_7 &= f\left(x_0 + h, y_0 + \frac{716k_0 - 2079k_1 + 1002k_2 + 834k_3 - 454k_4 - 9k_5 + 72k_6}{82}\right).\,h,\\
k &= \frac{41k_0 + 216k_2 + 27k_3 + 272k_4 + 27k_5 + 216k_6 + 41k_7}{840}.
\end{aligned}
\tag{b}
$$

(Reçu le 18 octobre 1956.)

Príspevok ku vzorcu šieteho rádu metódy Runge—Kutta—Nyströmovej

A. Huťa

Súhrn

V sborníku „Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Comenianae, Zv. II, 1956, Mathematica" autor odvodil sústavu vzorcov (a), ktorá pre svoje pomerne komplikované konštanty je menej vhodná pre praktické počítanie. Účelom tohto príspevku je podanie výsledkov pri odvodení sústavy vzorcov (b), ktorá pri rovnakej presnosti, ako vidieť, má jednoduchšie konštanty, a je teda pre praktické použitie ovela výhodnejšia.

Статья к формуле шестого порядка метода Рунге—Кута—Нистрема

А. Гутя

Резюме

В сборнике „Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Comenianae Ton. I, Fasc. II, 1956, Mathematica" автор выводил систему формул (a), которая является менее удобной для практического исчисления из-за сравнительно сложных постоянных.

Целью этой статьи является приведение результатов полученных при выводении системы формул (b), которая при одинаковой точности, как видно, имеет простейшие постоянные, итак она более удобна для практического употребления.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. II, FASC. I-II MATHEMATICA 1957

Teória nadkvadrik vo štvorrozmernom euklidovskom priestore, ktorých stredy vypĺňajú stredový útvar

M. HARANT

1. Úvod

Nech $[0; x_1, x_2, x_3, x_4]$ je ortogonálna báza v E_4 a nech x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sú homogénne súradnice bodu $B(x_i)$ tohto priestoru. Potom rovnica

$$f(x) \equiv \sum_{i,k} a_{ik} \; x_i \; x_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5), \tag{1,1}$$

pričom reálne koeficienty a_{ik} spĺňajú vzťah $a_{ik} = a_{ki}$, určí rovnicu nadkvadriky. Keď označíme diskriminant nadkvadriky

$$A = | \, a_{ik} \, | ,$$

potom, ako som ukázal,[1]) ak $A \neq 0$, ide o nesingulárnu, pri $A = 0$ o singulárnu nadkvadriku. Ak všetky $A_{5i} = 0 (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, stred vypĺňa určitý stredový útvar, a to: stredovú os, ak hodnosť matice systému

$$a_{1i}x_i = 0; \quad a_{2i}x_i = 0; \quad a_{3i}x_i = 0; \quad a_{4i}x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \tag{1,2}$$

je $h' = 3$; ak $h' = 2$, ide o stredovú rovinu; pri $h' = 1$ o stredový priestor a ak len koeficient $a_{55} \neq 0$, je stred nadkvadriky neurčitý.

V ďalšom bude významnú úlohu hrať sekulárna rovnica I/(8,1)

$$D(\lambda) \equiv \lambda^4 - I_1\lambda^3 + I_2\lambda^2 - I_3\lambda + I_4 = 0, \tag{1,3}$$

kde

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44},$$

[1]) M. Harant: K metrickému triedeniu stredových nadkvadrík v E_4. Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Comenianae, Bratislava 1956, I/IV—VI.

Poznámka. Na teóriu obsiahnutú v uvedenom pojednaní budeme sa odvolávať citovaním na pr. I/(9,1) — ide o reláciu (9,1)!

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = A_{11}^{(5)} + A_{22}^{(5)} + A_{33}^{(5)} + A_{44}^{(5)}$$

$$I_4 = A_{55},$$

kde $A_{ik}^{(5)}$ je subdeterminant 3° determinantu A_{55}, patriaci k prvku a_{ik}. Z relácie $D(\lambda) = 0$ ľahko vyplývajú vzťahy medzi koreňmi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sekulárnej rovnice a jej koeficientami.

V uvedenom pojednaní sme odvodili normálne tvary stredových nadkvadrík, a to:

a) elipsoidických a hyperboloidických nadkvadrík:

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2 + \frac{A}{I_4} = 0, \qquad (A \neq 0, I_4 \neq 0)$$

b) kužeľových nadkvadrík

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2 = 0, \qquad (A = 0, I_4 \neq 0)$$

c) paraboloidických nadkvadrík

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{A}{I_3}} \cdot X_4 = 0 \quad \begin{pmatrix} A \neq 0, I_4 = 0 \\ I_3 \neq 0 \end{pmatrix}$$

a urobili sme aj ich grafické zobrazenie v klinogonálnej axonometrii. V tomto pojednaní vykonáme triedenie nadkvadrík v E_4, keď stred vypĺňa určitý útvar.

Nadkvadriky so stredovou osou v konečne

2. Normálny tvar valcových nadkvadrík

Predpokladajme, že subdeterminanty $A_{5i}(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ determinantu A sú všetky nula; potom i $A = 0$. Ide teda o singulárnu nadkvadriku so stredovým útvarom. Budeme predpokladať, že $h' = 3$. Z tohto vyplýva, že nie všetky subdeterminanty 4° determinantu A sú nulové; teda $I_3 \neq 0$.

Z podmienky plynúcej z relácie (1,3)

$$A_{55} = \lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 . \lambda_4 = 0$$

zasa vyplýva, že aspoň jeden koreň sekulárnej rovnice je nula. Vezmime prípad, keď

(2,1) $$\lambda_4 = 0.$$

Potom, keď použijeme na rovnicu (1,1) substitúciu $I/(17,3)$ a uvážime, že $A = 0$, z I/(17,6) vyplýva, že aj

$$a'_{45} = 0,$$

takže dostaneme rovnicu

$$(2,2) \qquad \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 + 2a_{15}' x_1' + 2a_{25}' x_2' + 2a_{35}' x_3' + a_{55} = 0.$$

Z tejto rovnice vidíme, že nadrovina $x_4' = 0$ a nadroviny s ňou rovnobežné pretínajú nadplochu v kvadratickej ploche o takej rovnici, akou je daná nadkvadrika určená. Teda ortogonálny priemet v smere súradnej osi x_4' do priestoru (x_1', x_2', x_3') a do priestorov s ním rovnobežných je kvadratická plocha určená rovnicou (2,2). Rovnica (2,2) reprezentuje preto kvadratickú valcovú nadplochu. Stredy kvadratických plôch spomínaných rezov vypĺňajú stredovú os valcovej nadkvadriky — súradnú os x_4'.

Vykonajme ďalšiu transformáciu rovnice (2,2) pomocou vzorcov

$$(2,3) \qquad \begin{aligned} x_1' &= X_1 + {}^\circ x_1 \\ x_2' &= X_2 + {}^\circ x_2 \\ x_3' &= X_3 + {}^\circ x_3 \\ x_4' &= \phantom{X_1 + {}^\circ} X_4, \end{aligned}$$

v ktorých $({}^\circ x_1, {}^\circ x_2, {}^\circ x_3, X_4, 1)$ sú homogénne súradnice bodov stredovej osi. Teda pri tejto transformácii padne začiatočný bod súradnej sústavy do stredovej osi a súradná os X_4 sa s ňou stotožní. Začiatočný bod súradnej sústavy pritom ešte vhodne zvolíme. Rovnica (2,2) prejde na tvar

$$(2,4) \qquad \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 + a_{55}' = 0,$$

pretože začiatočný bod súradnej sústavy volíme tak, aby koeficienty pri lineárnych X_1, X_2, X_3 boli nulové. Pre konštantný člen, ak berieme do úvahy I/(3,1) a (3,2), je

$$(2,5) \qquad a_{55}' = f^{(22)} = a_{51}{}^\circ x_1 + a_{52}{}^\circ x_2 + a_{53}{}^\circ x_3 + a_{54} X_4 + a_{55}.$$

Rovnica (2,4) je normálna rovnica tejto skupiny nadkvadrík. Konštantu a_{55}' musíme určiť pomocou koeficientov a_{ik}.

3. Určenie konštanty a_{55}'

Pretože $({}^\circ x_1, {}^\circ x_2, {}^\circ x_3, X_4, 1)$ sú homogénne súradnice novo zvoleného stredu (zač. bodu), zrejme sú splnené relácie [I/(9,1)]

$$\begin{aligned} a_{11}{}^\circ x_1 + a_{12}{}^\circ x_2 + a_{13}{}^\circ x_3 + a_{14} X_4 + a_{15} &= 0 \\ a_{21}{}^\circ x_1 + a_{22}{}^\circ x_2 + a_{23}{}^\circ x_3 + a_{24} X_4 + a_{25} &= 0 \\ a_{31}{}^\circ x_1 + a_{32}{}^\circ x_2 + a_{33}{}^\circ x_3 + a_{34} X_4 + a_{35} &= 0 \\ a_{41}{}^\circ x_1 + a_{42}{}^\circ x_2 + a_{43}{}^\circ x_3 + a_{44} X_4 + a_{45} &= 0 \end{aligned}$$

a (2,5)

$$a_{51}{}^\circ x_1 + a_{52}{}^\circ x_2 + a_{53}{}^\circ x_3 + a_{54} X_4 + a_{55} - a_{55}' = 0.$$

Pretože hodnosť matice prvých štyroch relácií je podľa predpokladu $h' = 3$, sú len tri z týchto rovníc nezávislé. Keď k nim priberieme poslednú, dostávame štyri skupiny rovníc po štyroch rovniciach. Uvažujeme o jednej takejto skupine, keď vynecháme prvú rovnicu (myslíme, že je závislá!) a vyeliminovaním ${}^\circ x_2$, ${}^\circ x_3$, X_4 z nich, dostaneme

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{23} & a_{21}{}^{\circ}x_1 + a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31}{}^{\circ}x_1 + a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41}{}^{\circ}x_1 + a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{51}{}^{\circ}x_1 + a_{55} - a'_{55} \end{vmatrix} = 0,$$

ktorý po rozpísaní a uvážení, že $A_{51} = 0$, dáva

$$A_{11} - a'_{55} \,.\, A_{11}^{(5)} = 0,$$

kde $A_{11}^{(5)}$ je subdeterminant tretieho stupňa determinantu A_{55}, patriaci k prvku a_{11}. Analogickým postupom pri vynechaní druhej, tretej, resp. štvrtej rovnice postupne dostaneme

$$A_{22} - a'_{55} \,.\, A_{22}^{(5)} = 0,$$
$$A_{33} - a'_{55} \,.\, A_{33}^{(5)} = 0,$$
$$A_{44} - a'_{55} \,.\, A_{44}^{(5)} = 0.$$

Sčítaním týchto *4* relácií po vhodnom označení

(3,1) $$S_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}$$

a uvážení (1,3) dostaneme

(3,2) $$a'_{55} = \frac{S_3}{I_3}.$$

Normálny tvar (2,4) valcových nadkvadrík má potom tvar

(3,4) $$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 + \frac{S_3}{I_3} = 0.$$

4. Špeciálne podtypy valcových nadkvadrík

Po úprave tvaru (3,4), vhodnom preznačení a podľa znamienok koeficientov pri kvadratických členoch rozoznávame štyri špeciálne podtypy valcových nadkvadrík, ktorých kanonické tvary sú:

(4,1)

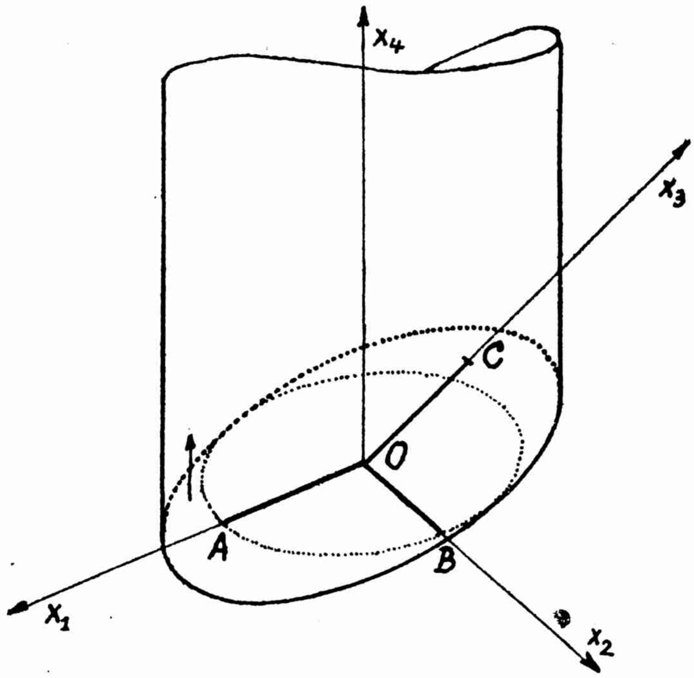
a) $$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} = 1,$$

b) $$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} = 1,$$

c) $$\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} = 1,$$

d) $$\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} = 1.$$

Podtyp a) je elipsoidicko-valcová nadkvadrika, lebo vznikne pohybom elipsoidu o rovnici (4,1a) v smere súradnej osi X_4, ktorá je osou $(E + V)$-nadkvadriky. Všeobecné nadroviny nerovnobežné s osou nadkvadriky prenikajú nadkvadriku v elipsoidoch, nadroviny rovnobežné s osou X_4 prenikajú nad-



Obr. 1

kvadriku vo dvoch rovnobežných rovinách, na ktoré sa kvadratický prenik rozpadá.

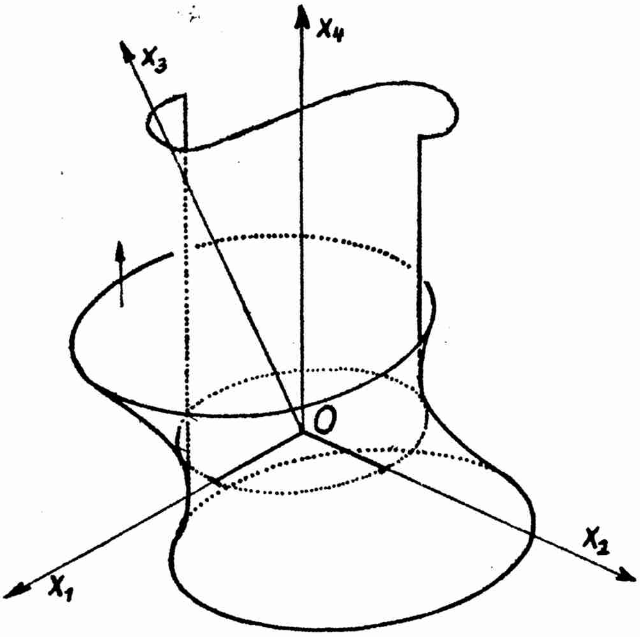
Zobrazenie a konštrukciu elipsoidického preniku pri šikmej $(E + V)$-nadploche som zostrojil v pojednaní.[1]) Pozri aj obr. 1.

Elipsoid v priestore (X_1, X_2, X_3) nazývame aj základnou plochou valcovej nadkvadriky.

Podtyp b) je hyperboloidicko-valcová nadkvadrika prvého druhu $(H + V)_I$. Nadrovina $X_4 = 0$ a tak isto aj nadroviny $X_4 =$ konšt. prenikajú nadkvadriku v jednodielnych hyperboloidoch o rovnici (4,1b). Elipsoidických a paraboloidických prenikov s priestormi niet (obr. 2).

---

[1]) M. Harant: Kótovano-axonometrická zobrazovacia metóda v E_4. Spisy Přírod. fak. MU, Brno 1956.



Obr. 2

Podtyp c) je hyperboloidicko-valcová nadkvadrika druhého druhu $(H + V)_{II}$. Súradná nadrovina (X_1, X_2, X_3) a nadroviny s ňou rovnobežné pretínajú nadkvadriku v dvojdielnych hyperboloidoch. Nadroviny, ktoré nie sú vo zvláštnej polohe, prenikajú nadkvadriku v hyperboloidoch; prechádzajúce osou X_4, alebo s ňou rovnobežné v kvadratickej ploche, ktorá sa rozpadá na dve roviny. Elipsoidické a paraboloidické preniky s priestormi nemá (obr. 3).

Podtyp d) je imaginárna $(E + V)$-nadkvadrika. Každá všeobecná nadrovina preniká buď v imaginárnych elipsoidoch, ktorých stredy (reálne) ležia na osi X_4, buď keď je rovnobežná s osou X_4, vo dvojici imaginárne združených rovín.

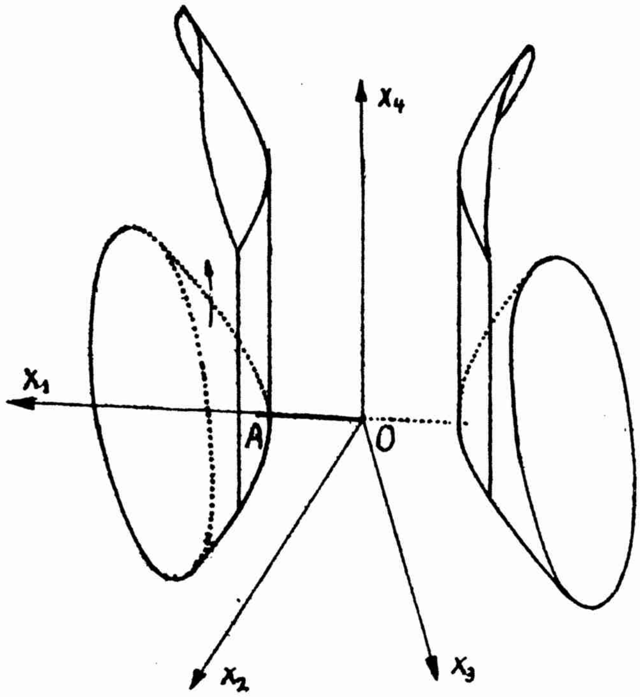
Nadkvadriky, ktorých stredová os je nevlastná priamka

5. Paraboloidické nadvalce

V predošlých úvahách v rovnici (3,4) sme predpokladali, že

$$I_3 = A_{11}^{(5)} + A_{22}^{(5)} + A_{33}^{(5)} + A_{44}^{(5)} \neq 0.$$

Predpokladajme, že popri $A = 0$ a $A_{5i} = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ aj všetky subdeterminanty 3° determinantu A sú nulové. Potom aj



Obr. 3

$$I_3 = 0, \tag{5,1}$$

ale vtedy sekulárna rovnica má dvojnásobný nulový koreň. Predpokladajme teda, že je

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0. \qquad \text{(pozri I/7)} \tag{5,2}$$

Nech smerové kosínusy dvoch hlavných priemerov odpovedajúcich koreňom λ_3, λ_4 (nenulovým!) sú a_3, b_3, c_3, d_3 a a_4, b_4, c_4, d_4. Smerové kosínusy ostatných dvoch hlavných priemerov a_1, b_1, c_1, d_1 a a_2, b_2, c_2, d_2 sú neurčité, ale platia pre relácie

$$\begin{aligned}
a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 &= 1, \\
a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 &= 1, \\
a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 &= 0, \\
a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 + d_1d_3 &= 0, \\
a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 + d_2d_3 &= 0, \\
a_1a_4 + b_1b_4 + c_1c_4 + d_1d_4 &= 0, \\
a_2a_4 + b_2b_4 + c_2c_4 + d_2d_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{5,3}$$

Vidíme, že pre osem smerových kosínusov je splnených len sedem relácii, preto zostává ešte jedna podmienka voliteľná.

Keď rovnicu nadkvadriky (1,1) transformujeme substitúciou I/(17,2), pričom jej koeficienty spĺňajú relácie (5,3), a uvážime uvedené predpoklady tohto typu kvadratických nadplôch, máme

$$f(x_i') \equiv \lambda_3 x_3'^2 + \lambda_4 x_4'^2 + 2a_{15}' x_1' + 2a_{25}' x_2' + 2a_{35}' x_3' + 2a_{45}' x_4' + a_{55} = 0.$$

Po prevedení ďalšej substitúcie na túto rovnicu

$$x_i' = X_i + {}^\circ x_i, \qquad i = 1, \ldots, 4, \text{ ale } {}^\circ x_4 = 0,$$

v ktorej $({}^\circ x_1, {}^\circ x_2, {}^\circ x_3, X_4)$ sú súradnice nového začiatočného bodu, ktoré si vhodne zvolíme, dostaneme

$$f(X_i) \equiv \lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2 + 2a_{15}' X_1 + 2a_{25}' X_2 + 2(a_{35}' + \lambda_3 {}^\circ x_3) X_3 + 2(a_{45}' + \lambda_4 {}^\circ x_4) X_4 +$$
$$+ (\lambda_3 {}^\circ x_3^2 + \lambda_4 {}^\circ x_4^2 + 2a_{15}' {}^\circ x_1 + 2a_{25}' {}^\circ x_2 + 2a_{35}' {}^\circ x_3 + 2a_{45}' {}^\circ x_4 + a_{55}) = 0.$$

(5,4)

Nový začiatočný bod vhodne zvolíme tak, aby sa koeficienty pri X_3, X_4 a absolútny člen rovnali nule. Dostaneme tak tri rovnice, z ktorých predovšetkým vyplýva, že nový začiatočný bod leží na nadploche, a je teda jedným z vrcholov nadkvadriky a ďalej, že body takejto vlastnosti vypĺňajú vrcholovú priamku, lebo tieto tri rovnice reprezentujú 3 nadroviny, ktoré sa v spomínanej vrcholovej priamke pretínajú.

Pre smerové kosínusy môžeme však zvoliť ešte jednu podmienku. Zvoľme ju tak, aby

(5,5) $$a_{15}' \equiv a_{15} a_1 + a_{25} b_1 + a_{35} c_1 + a_{45} d_1 = 0,$$

ale vtedy rovnica (5,4) bude v konečnom tvare

(5,6) $$\lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2 \pm 2a_{25}' X_2 = 0,$$

čo je normálny tvar nadkvadrík so stredovou osou v nevlastnej priamke.

6. Výpočet konštanty a_{25}'

Pre túto konštantu platí relácia (5,5), v ktorej však vystupujú ešte smerové kosínusy jedného hlavného priemeru, a_2, b_2, c_2, d_2, pre ktoré sú splnené ešte vzťahy I/(7,3); z nich sú však len dva nezávislé.

a) Uvažujme o týchto vzťahoch pre koreň $\lambda_2 = 0$. Vezmime z nich po rade dvojice rovníc $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$ spolu s reláciou platnou pre a_{25}'. Tak pre prvú dvojicu rovníc dostaneme

$$\begin{aligned} a_{11}a_2 + a_{12}b_2 + a_{13}c_2 + a_{14}d_2 \quad &= 0, \\ a_{21}a_2 + a_{22}b_2 + a_{23}c_2 + a_{24}d_2 \quad &= 0, \\ a_{51}a_2 + a_{52}b_2 + a_{53}c_2 + a_{54}d_2 - a_{25}' &= 0. \end{aligned}$$

Pri vyeliminovaní a_2, b_2 (zodpovedá skupine rovníc $\{1,2\}$) dostaneme

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}c_2 + a_{14}d_2 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}c_2 + a_{24}d_2 \\ a_{51}, & a_{52}, & a_{53}c_2 + a_{54}d_2 - a'_{25} \end{vmatrix} = 0,$$

alebo

(a) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a'_{25} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} . c_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix} . d_2 .$$

Túto úvahu urobíme pre inú dvojicu rovníc a po vyeliminovaní zodpovedajúcej dvojice smerových kosínusov dostávame podobné výsledky. Šest výsledných rovníc, ktoré takto dostaneme, sčítame a dostaneme vzťah

$$I_2 . a'_{25} = M . a_2 + N . b_2 + P . c_2 + Q . d_2,$$

v ktorom M, N, P, Q sú zasa súčty po troch determinantoch tvarov vystupujúcich v relácii (a).

Tento postup opakujeme pre druhý nulový koreň sekulárnej rovnice $\lambda_1 = 0$. Vezmime zasa dvojice rovníc systému I/(7,3) pri a_1, b_1, c_1, d_1 ako koeficientoch a vzťah pre $a'_{15} = 0$. Nakoniec dostaneme

$$0 = M . a_1 + N . b_1 + P . c_1 + Q . d_1 .$$

Podobné vzťahy ako predošlý dostaneme z I/(7,3) a z relácií pre $a'_{35} = 0$ a tak isto pre $a'_{45} = 0$.

Systém štyroch rovníc, ktorý takto dostaneme, násobíme po rade smerovými kosínusmi a_2, a_1, a_3, a_4 a po sčítaní dostaneme

$$a'_{25} . a_2 . I_2 = M,$$

a podobne po vynásobení postupne b_2, b_1, b_3, b_4; c_2, c_1, c_3, c_3 a d_2, d_1, d_3, d_4 dostaneme

$$a'_{25} . b_2 . I_2 = N,$$
$$a'_{25} . c_2 . I_2 = P,$$
$$a'_{25} . d_2 . I_2 = Q.$$

Napokon násobme posledné štyri rovnice po rade a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45}, sčítajme a uvážme reláciu pre a'_{25}; po malej úprave dostaneme

$$a'_{25} . I_2 = -(A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}),$$

odkiaľ

$$a'_{25} = \sqrt{-\frac{A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}}{I_2}}$$

a napokon vzhľadom na (3,1)

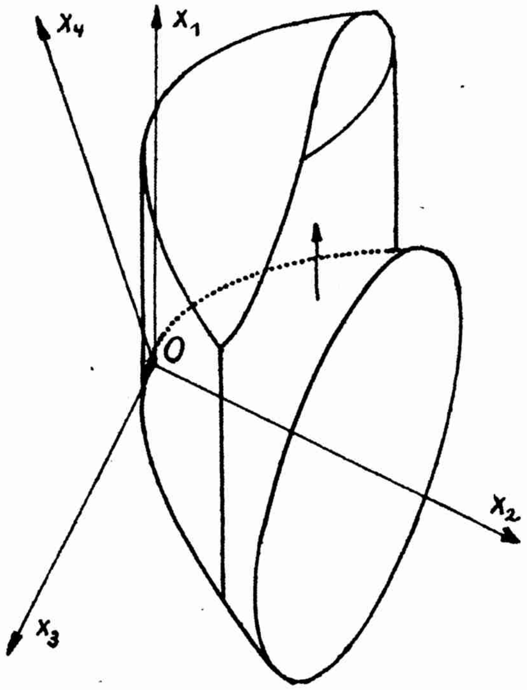
(6,1) $$a'_{25} = \sqrt{-\frac{S_3}{I_2}},$$

takže normálny tvar (5,6) nadkvadriky so stredovou osou v úbežnom priestore je

$$\lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{S_3}{I_2}} X_2 = 0. \tag{6,1}$$

7. Podtypy paraboloidicko-valcových nadkvadrík

Po vhodnom označení koeficientov v relácii (6,1) a vzhľadom na to, že môžu nastať dva prípady $sgn \lambda_3 = sgn \lambda_4$, alebo $sgn \lambda_3 \neq sgn \lambda_4$, rozoznávame dva podtypy paraboloidicko-valcových nadkvadrík.



Obr. 4

Ich kanonické tvary sú

$$\frac{X_3^2}{m^2} + \frac{X_4^2}{n^2} \pm 2 \,.\, X_2 = 0, \tag{7,1a}$$

$$\frac{X_3^2}{m^2} - \frac{X_4^2}{n^2} \pm 2 \,.\, X_2 = 0. \tag{7,1b}$$

Rovnica (7,1a) reprezentuje paraboloidicko-valcovú nadkvadriku prvého druhu. Súradnicová nadrovina $X_1 = 0$, ako aj nadroviny s ňou rovnobežné prenikajú nadkvadriku v elipt. paraboloidoch o rovnici (7,1a) (obr. 4), nadroviny (X_1, X_2, X_3) a (X_1, X_2, X_4) zas v parabolických valcoch. Úbežná dotyková nadrovina má s kvadratickou nadplochou spoločnú priamku, ktorú vypĺňujú stredy eliptických paraboloidoch spomínaných normálnych rezov. Táto je **stredovou osou**.

Všeobecné nadroviny prenikajú nadkvadriku v paraboloidoch alebo v kvadratických plochách zložených z dvoch rovnobežných rovín.

Rovnica (7,1b) definuje zasa paraboloidicko-valcovú nadkvadriku druhého druhu alebo aj $(HP + V)$-nadkvadriku. Súradnicová nadrovina $X_1 = 0$ a s ňou rovnobežné nadroviny pretínajú nadkvadriku v **hyperbolických paraboloidoch** o rovnici (7,1b) nadroviny $X_3 = 0$ a $X_4 = 0$ zasa v **parabolických valcoch**.

8. Iné určenie konštanty a'_{25}

Ak si urobíme prehľad výsledných normálnych tvarov, na ktoré sme rovnicu (1,1) previedli, sú to

$$\sum_{k=i}^{i} \lambda_k X_k^2 + \frac{S_i}{I_i} = 0, \tag{8a}$$

$$\sum_{i=k}^{i} \lambda_k X_k^2 = 0, \tag{8b}$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k X_k^2 \pm 2\sqrt{-\frac{S_i}{I_{i-1}}}\, X_i = 0, \tag{8c}$$

pre $i = 1, 2, 3, 4$, pričom I_i sú koeficienty sekulárnej rovnice, $D(\lambda) = 0$ a S_i je súčet determinantov $(i + 1)°$ odvodených z determinantov určujúcich I_i, pričom k týmto pridáme riadok a stĺpec odpovedajúcich koeficientov a_{5i}, resp. a_{i5}.

Indexové číslo i sa správa podľa hodnosti $h' = i$ a triedenie na typy a), b), c) je závislé od toho, či

a) $S_i \neq 0, \; I_i \neq 0;$

b) $S_i = 0, \; I_i \neq 0;$

c) $S_i \neq 0, \; I_i = 0;$

pričom typ b) má o **stupeň vyššiu singulárnosť** ako ostatné dva typy. Pri inom označení súradnicových osí rovnica normálneho tvaru nadkvadriky so stredovou osou v nekonečne máme

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + 2a'_{35} X_3 = 0. \qquad (a'_{35} \equiv a'_{25}!) \tag{5,6}$$

Sekulárna rovnica $D(\lambda) = 0$ má korene $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Preto

$$I_4 = 0,$$

$$I_3 = 0$$

a

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2.$$

Ak vyčíslime výrazy S_i, dostaneme:

$$S_4 = A = 0,$$
$$S_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} = -\lambda_1\lambda_2 a'^2_{35},$$

odkiaľ

$$a'_{35}(\equiv a'_{25}) = \sqrt{-\frac{S_3}{I_2}}$$

a po dosadení do (5,6) dostaneme (6,1) ako skôr.

Nadkvadriky so stredovou osou ktorá je súčasne singulárným útvarom

9. Kužeľovo-valcové nadkvadriky

Ak v normálnom tvare (2,4) konštanta $a'_{55} = 0$, vtedy aj $S_3 = 0$ a normálny tvar bude

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 = 0. \tag{9,1}$$

Pri vhodnom označení a podľa znamienok koreňov λ_1, λ_2, λ_3 sekulárnej rovnice dostávame tieto 3 kanonické tvary:

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} = 0, \tag{9,1a}$$

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} = 0, \tag{9,1b}$$

$$\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} = 0. \tag{9,1c}$$

Prvá rovnica určuje imaginárnu $(K + V)$-nadkvadriku degenerovanú v súradnicovú os X_4, ktorá je súčasne aj stredovou priamkou.

Vzťah (9,1b) je rovnicou kužeľovo-valcovej nadkvadriky o osi X_4, ktorú vyplnia vrcholy eliptických kužeľov daných rovnicou (9,1b). Súradnicová nadrovina $X_4 = 0$, ako aj nadroviny s ňou rovnobežné, prenikajú nadkvadriku v kužeľových plochách (obr. 5).

Tretia rovnica určuje valcovú nadkvadriku, ktorej „normálny" prienik je hyperbolicky kužeľ. Os X_4 je stredovou osou nadplochy a súčasne singulárny útvar.

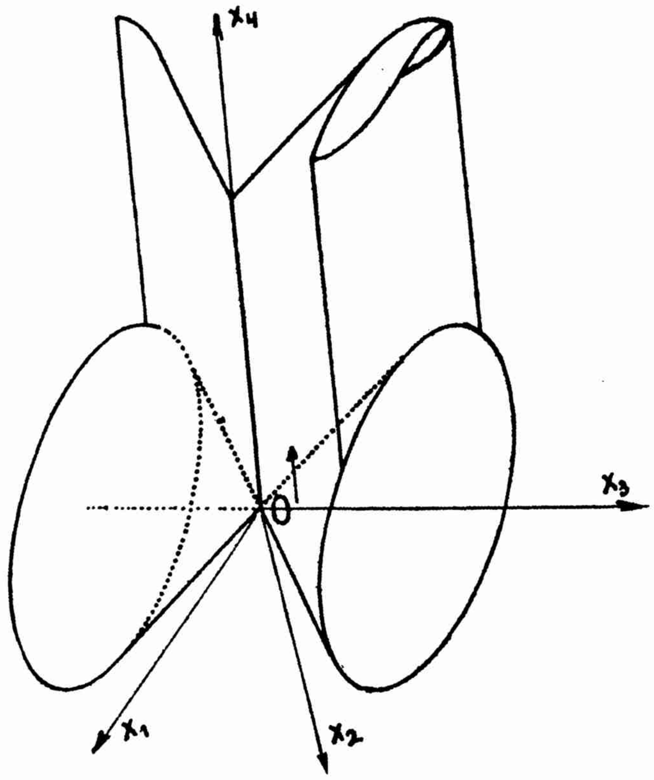
V literatúre sa tieto $(K + V)$-nadkvadriky spomínajú ako kužeľové nadplochy 2-ho druhu.

Nadkvadriky so stredovou rovinou

10. Nadkvadriky valcovo-valcové so stredovou rovinou v konečne

Normálna rovnica nadkvadrík so stredovou rovinou v konečne bude mať tvar

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + a''_{55} = 0,$$



Obr. 5

pretože tento typ plôch má dvojnásobný nulový koreň sekulárnej rovnice $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Predpokladajme, že hodnosť matice koeficientov determinantu A je $h = 3$, ale $h' = 2$. Úlohou bude určiť konštantu a''_{55}. Vykonajme si jej určenie postupom urobeným v ods. 8.
Dostaneme:

$$I_4 = 0,$$

$$I_3 = 0,$$

$$I_2 = \lambda_1 . \lambda_2,$$

$$S_4 = 0,$$

$$S_3 = 0,$$

$$S_2 = \lambda_1 \lambda_2 a''_{55} = I_2 a''_{55},$$

a teda

$$a''_{55} = \frac{S_2}{I_2},$$

takže normálny tvar tohto typu nadkvadrík je

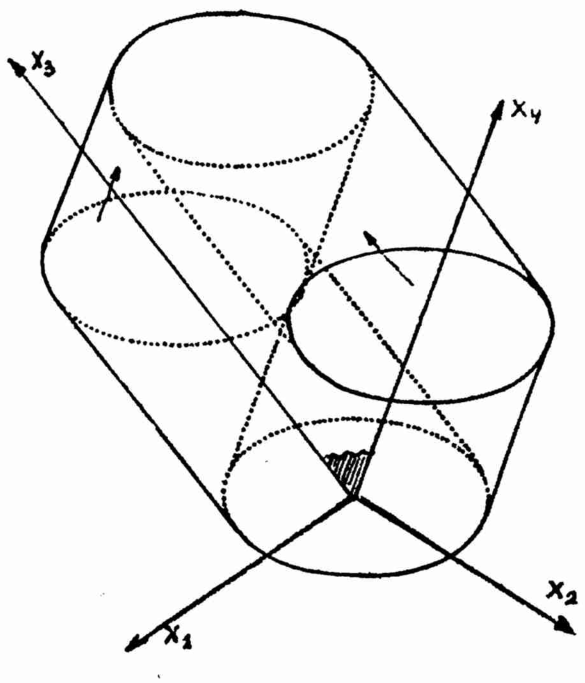
$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 \,.\, X_2^2 + \frac{S_2}{I_2} = 0. \qquad (S_2 \neq 0,\ I_2 \neq 0) \tag{10,1}$$

Pri novom vhodnom označení bude mať normálny tvar tieto tri možné alternatívy:

$$\frac{X_1^2}{a_2} + \frac{X_2^2}{b_2} + 1 = 0, \tag{10,2a}$$

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{10,2b}$$

$$\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{10,2c}$$



Obr. 6

Prvá rovnica reprezentuje imaginárnu nadkvadriku ($EV + EV$).

Druhá rovnica určuje reálnu nadkvadriku ($EV + EV$). Stredová rovina je rovina (X_3, X_4). Nadroviny $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ prenikajú v kvadratických eliptických valcoch; súradnicová rovina (X_1, X_2) v elipse; suradnicové nadroviny $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ vo dvojici reálnych rovín (obr. 6).

Tretia rovnica reprezentuje nadkvadriku ($HV + HV$). Stredová rovina je rovina (X_3, X_4). Nadroviny $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ prenikajú v hyperbolických valcoch, súradnicová rovina (X_1, X_2) súradnicového simplexu preniká v hyperbole.

11. Valcovo-valcové nadkvadriky so stredovou rovinou v úbežnej nadrovine

Predpokladajme, že $S_2 \neq 0$, ale $I_2 = 0$. Sekulárna rovnica má potom zrejme trojnásobný nulový koreň $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, a preto normálny tvar týchto nadkvadrík je

$$\lambda_1 X_1^2 \pm 2a_{25}^{\bullet} X_2 = 0.$$

Pretože $S_2 \neq 0$, nadkvadriky ($V + V$) sú nerozložiteľné. Analogickým postupom ako v predchádzajúcom odseku dostávame

$$a_{25}^{\bullet} = \sqrt{-\frac{S_2}{I_1}},$$

takže normálny tvar tohto typu nadkvadrík je

$$\lambda_1 X_1^2 \pm 2\sqrt{-\frac{S_2}{I_2}}\, X_2 = 0. \tag{11,1}$$

Pri novom vhodnom označení kanonický tvar bude mať tento jediný prípad:

$$\lambda_1 X_1^2 \pm 2pX_2 = 0. \tag{11,2}$$

Táto rovnica reprezentuje nadkvadriku ($PV + PV$), pretože nadroviny $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ súradnicové simplexu prenikajú nadplochu ($V + V$) v parabolických valcoch o rovnici (11,2). Osi týchto valcov ležia v úbežnej nadrovine a tvoria stredovú rovinu. Stenová rovina (X_1, X_2) súradnicového simplexu prenika nadkvadriku v parabole (11,2), ktorá je teda spoločnou pre obidve nadroviny $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ (obr. 7).

Tento typ plôch je posledným pre nerozložiteľné nadkvadriky, lebo keď $S_2 = 0$, je už $h = 2$ a prichádzame k nadkvadrikám zloženým z dvoch nadrovín.

12. Rozložitelné nadkvadriky so stredovou rovinou

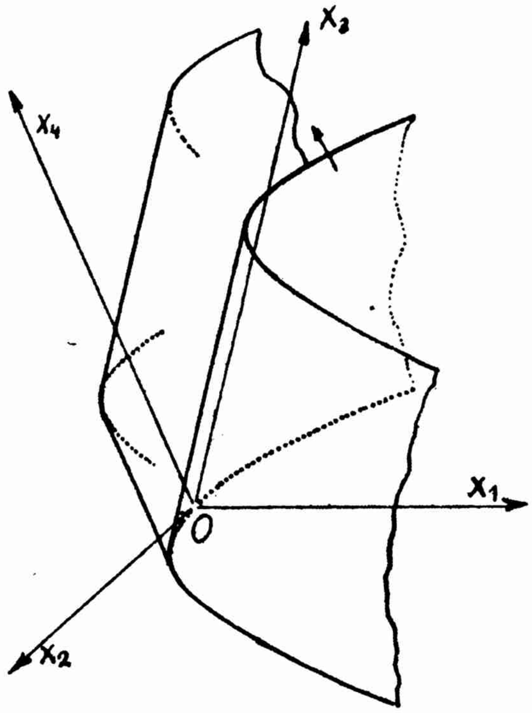
Pristúpme k nadkvadrikám, pre ktoré $S_2 = 0$, $I_2 \neq 0$. Z týchto predpokladov vyplýva, že $h = 2$, t. j. že nadkvadrika sa rozpadá na dve nadroviny a ďalej, že všetky subdeterminanty 3° a 4° determinantu A sa rovnajú nule.

Potom však z rozvoja $D(\lambda) = 0$ vyplýva, že dva korene sekulárnej rovnice sú nula. Nech tieto sú

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Vtedy však rovnica nadkvadriky (1,1), keď na ňu použijeme ortogonálnu substitúciu

$$x_i = a_i x_1' + b_i x_2' + c_i x_3' + d_i x_4',$$



Obr. 7

ktorej koeficienty sú smerové kosínusy hlavných priemerov, a uvážime šes vzťahov I/(7,6), prejde na tvar

$$\lambda_3 x_3'^2 + \lambda_4 x_4'^2 + 2a'_{15}x'_1 + 2a'_{25}x'_2 + 2a'_{35}x'_3 + 2a'_{45}x'_4 + a_{55} = 0. \tag{12,1}$$

Ak na túto ďalej použijeme ďalšiu transformáciu

$$\begin{aligned} x'_1 &= X_1 + {}^\circ x_1, \\ x'_2 &= X_2 + {}^\circ x_2, \\ x'_3 &= X_3, \\ x'_4 &= X_4, \end{aligned}$$

v ktorej (${}^\circ x_1$, ${}^\circ x_2$, X_3, X_4) sú súradnice nového začiatočného bodu, pre ktorý požadujeme, aby padol do stredovej roviny, potom lineárne členy vypadnú a dostaneme normálny tvar

$$\lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2 + \bar{a}_{55} = 0.$$

Pre súradnice stredu $({}^\circ x_1, {}^\circ x_2, X_3, X_4)$ platia však relácie

$$a_{11}{}^\circ x_1 + a_{12}{}^\circ x_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 + a_{15} = 0,$$
$$a_{21}{}^\circ x_1 + a_{22}{}^\circ x_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4 + a_{25} = 0,$$
$$a_{31}{}^\circ x_1 + a_{32}{}^\circ x_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4 + a_{35} = 0,$$
$$a_{41}{}^\circ x_1 + a_{42}{}^\circ x_2 + a_{43}X_3 + a_{44}X_4 + a_{45} = 0,$$

ku ktorým pridáme výsledok pre $\bar{a}_{55}$ vyplývajúci zo substitúcie

$$a_{51}{}^\circ x_1 + a_{52}{}^\circ x_2 + a_{53}X_3 + a_{54}X_4 + a_{55} - \bar{a}_{55} = 0.$$

Pretože $h = 2$, ale aj $h' = 2$, len dve z horných štyroch rovníc sú nezávislé. Vezmime prvé dve s poslednou a vylúčme z nich ${}^\circ x_1$, ${}^\circ x_2$. Máme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}X_3 + a_{14}X_4 + a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}X_3 + a_{24}X_4 + a_{25} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53}X_3 + a_{54}X_4 + a_{55} - \bar{a}_{55} \end{vmatrix} = 0,$$

z ktorého po rozpísaní, pretože $h = 2$, vyplýva

$$\bar{a}_{55} = 0,$$

takže normálny tvar rozložiteľnej nadkvadriky so stredovou rovinou je

$$\lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2 = 0. \tag{12,2}$$

Tieto dve nadroviny, na ktoré sa nadkvadrika rozpadá, prislúchajú lineárnemu zväzku nadrovín. Základne nadroviny tohto zväzku sú dvojné nadroviny

$$X_3^2 = 0, \quad X_4^2 = 0,$$

ktorých priesečná rovina je stredová rovina; táto je súčasne singulárnou rovinou nadkvadriky. Pre

$$sng\lambda_3 = -sng\lambda_4$$

dostaneme dve reálne, pretínajúce sa nadroviny. Keď však

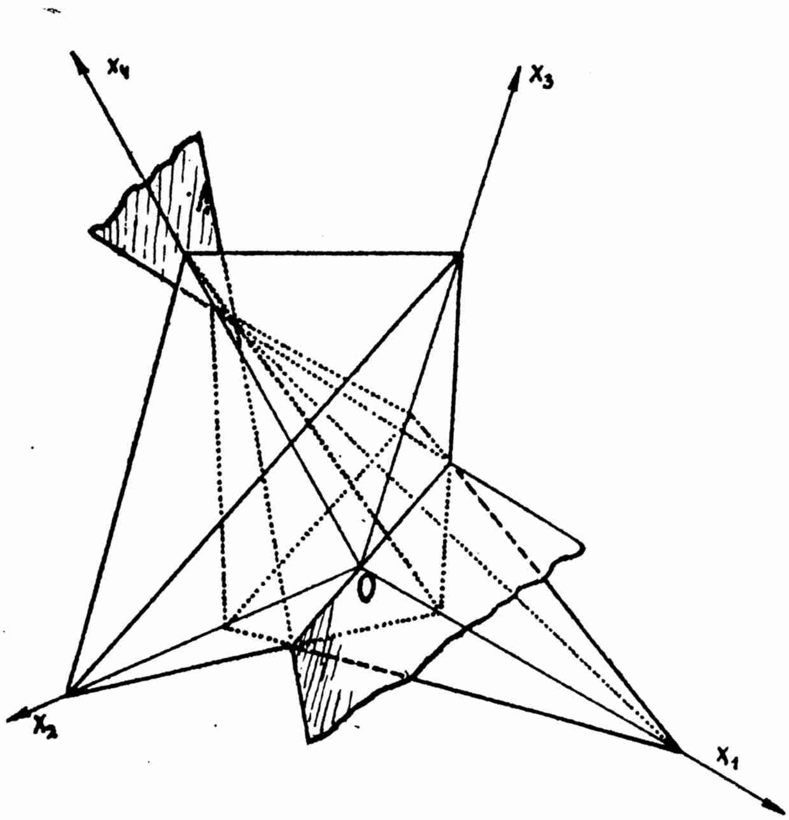
$$sgn\lambda_3 = sgn\lambda_4,$$

pôjde o dvojicu združene imaginárnych nadrovín. Na obr. 8 je prípad rozpadu na 2 obecne položené reálne nadroviny.

Kvadratické nadplochy so stredovou nadrovinou

13. Typy nadkvadrík so stredovou nadrovinou

Kvadratická varieta V_3^2 sa môže rozpadať na dva navzájom rovnobežné lineárne priestory. Potom množina stredov nadkvadriky je stredový lineárny priestor, ale vtedy je $h' = 1$; potom však $I_2 = 0$ a zo sekulárnej rovnice



Obr. 8

vyplýva, že táto má trojnásobný nulový koreň a jediný reálny nenulový koreň je

$$\lambda_4 = I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}.$$

Potom keď na rovnicu (12,1) použijeme transformácie

$$x_1' = X_1 + {}^\circ x_1$$
$$x_2' = X_2$$
$$x_3' = X_3$$
$$x_4' = X_4$$

a pritom stred (nový zač. bod) volíme tak, aby padol do niektorého bodu stredového priestoru, dostaneme rovnicu transformovanú na tvar

$$\lambda_4 X_4^2 + a_{55}^\bullet = 0. \tag{13,1}$$

Našou úlohou bude určiť konštanty $a_{55}^\bullet$. Pretože (${}^\circ x_1$, X_2, X_3, X_4, 1) sú homogénne súradnice stredu, zrejme sú splnené vzťahy

$$a_{11}{}^\circ x_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 + a_{15} = 0,$$
$$a_{21}{}^\circ x_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4 + a_{25} = 0,$$
$$a_{31}{}^\circ x_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4 + a_{35} = 0,$$
$$a_{41}{}^\circ x_1 + a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + a_{44}X_4 + a_{45} = 0$$

a ďalší vzťah

$$a_{51}{}^\circ x_1 + a_{52}X_2 + a_{53}X_3 + a_{54}X_4 + a_{55} - \dot{a}_{55} = 0.$$

Pretože popri poslednej môže byť z predchádzajúcich nezávislá iba jedna rovnica ($h' = 1$), ak uvážime napr. prvú a poslednú a vyeliminujeme $^\circ x_1$, máme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 + a_{15} \\ a_{51} & a_{52}X_2 + a_{53}X_3 + a_{54}X_5 + a_{55} - \dot{a}_{55} \end{vmatrix} = 0,$$

odkiaľ je

$$a_{11} \, . \, \dot{a}_{55} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{15} \\ a_{51} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Ak pri podobnom postupe vezmeme po rade druhú, tretiu, resp. štvrtú a poslednú, dostaneme zasa

$$a_{22} \, . \, \dot{a}_{55} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{52} & a_{55} \end{vmatrix},$$

$$a_{33} \, . \, \dot{a}_{55} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{35} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix},$$

$$a_{44} \, . \, \dot{a}_{55} = \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

z ktorých sčítaním dostaneme

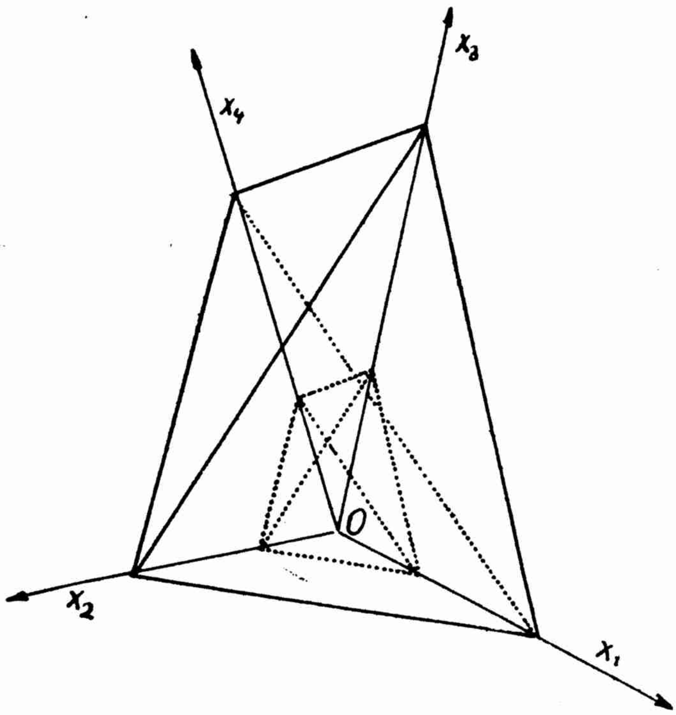
(13,2)
$$\dot{a}_{55} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{15} \\ a_{51} & a_{55} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{52} & a_{55} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{35} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}}{a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}}.$$

Ak zavedieme označenie

(13,3)
$$S_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{15} \\ a_{51} & a_{55} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{52} & a_{55} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{35} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

dostaneme normálny tvar rozložiteľnej nadkvadriky so stredovou nadrovinou (obr. 9)

(13,4)
$$\lambda_4 X_4^2 + \frac{S_1}{I_1} = 0.$$



Obr. 8

Uvažujme teraz o prípade, že $a_{55}^{*} = 0$, čiže nadkvadriku reprezentovanú normálnym tvarom

(13,5) $$\lambda_4 X_4^2 = 0.$$

No vtedy $h = 1$. Teda pôjde o prípad dvojnásobne počítanej nadroviny, na ktorú sa nadkvadrika rozpadá. Predpokladajme však, že prvky determinantu $A = 0$ nie sú všetky nula. Potom z vlastnosti, že všetky determinanty 2° sú nula, máme

$$a_{12} = \sqrt{a_{11} \cdot a_{22}}\,; \quad a_{23} = \sqrt{a_{22} \cdot a_{33}}\,; \quad a_{34} = \sqrt{a_{33} \cdot a_{44}}\,;$$
$$a_{13} = \sqrt{a_{11} \cdot a_{33}}\,; \quad a_{24} = \sqrt{a_{22} \cdot a_{44}}\,; \quad a_{35} = \sqrt{a_{33} \cdot a_{55}}\,;$$
$$a_{14} = \sqrt{a_{11} \cdot a_{44}}\,; \quad a_{25} = \sqrt{a_{22} \cdot a_{55}}\,;$$
$$a_{15} = \sqrt{a_{11} \cdot a_{55}}\,; \qquad a_{45} = \sqrt{a_{44} \cdot a_{55}}\,,$$

takže všeobecnú rovnicu (1,1) môžeme prepísať na tvar

(13,6) $$(\sqrt{a_{11}} \cdot X_1 + \sqrt{a_{22}} \cdot X_2 + \sqrt{a_{33}} \cdot X_3 + \sqrt{a_{44}} \cdot X_4 + a_{55})^2 = 0.$$

Stredová nadrovina je incidentná s dvojnásobnou nadrovinou, na ktorú sa nadkvadrika rozpadá.

Keď sú všetky prvky determinantu A nula, ale prvky $a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45}, a_{55}$ nie sú nula, potom nadkvadrika sa skladá z 2 nadrovín o rovniciach

$$a_{15}X_1 + a_{25}X_2 + a_{35}X_3 + a_{45}X_4 + a_{55}X_5 = 0, \quad X_5 = 0, \tag{13,7}$$

t. j. jedná časť rozpadovej nadkvadriky je incidentná a úbežnou nadrovinou, s ktorou sa stotožní aj stredová nadrovina.

Keď sú všetky koeficienty determinantu A nula, okrem a_{55}, ktorý je rozdielny od nuly, potom rovnica takejto nadkvadriky je tvaru

$$a_{55} \,.\, X_5^2 = 0. \tag{13,8}$$

Nadkvadrika sa v tomto prípade rozpadá na dvojnásobne počítanú úbežnú nadrovinu, s ktorou sa stotožní aj nadrovina stredová. Nadkvadrika tejto vlastnosti má neurčitý stred.[2])

(Do redakcie dodané 15. 1. 1957.)

[2]) Problém metrického triedenia nadkvadrík v E_n bol riešený v článku M. Harant: K metrickému triedeniu nadkvadrík v E_n. Sborník k 70. narodeninám prof. Hronca, Bratislava 1951.

Теория гиперквадрик в E_4, центры которых выполняют определенную фигуру

М. Гарант

Резюме

Эта статья является продолжением статьи „*К метрической классификации центральных гиперквадрик в E_4*", напечатанной в этом же журнале (1/4—6). Если (1,1) является уравнением гиперквадрики в E_4, причем x_i являются однородными координатами точки гиперквадрики относительно ортономированного базиса (0; x_1, x_3, x_2, x_4) и если ранги h' матрицы системы (1,2) принимают значения $h' = 3, 2, 1$ — центры гиперквадрики выполняют центральную фигуру, а именно: центральную ось, центральную плоскость, или центральное пространство. Если только $a_{55} \neq 0$ — центр неопределен.

Цилиндрические гиперквадрики, нормальный вид которых есть (3,4), имеют центральную ось в конечности. Различаем четыре метрических подтипа: (4,1a) — *эллипсоидическо-цилиндрическую гиперквадрику* (черт. 1), (4,1b) — *гиперболоидическо-цилиндрическую первого рода* (черт. 2), (4,1c) — *гиперболоидическо-цилиндрическую второго рода* (черт. 3) и (4,1d) — *мнимую эллипсоидическо-цилиндрическую гиперквадрику*, геометрически представляемую только центральной осью X_4.

Центральной осью *параболоидических гиперцилиндров* является несобственная прямая. Нормальным их видом является (6,1). Гиперповерхность имеет определенную прямую, проходящую через вершину ($\equiv X_4$). Существуют два подтипа, а именно: *параболоидическо-цилиндрическая гиперквадрика* (черт. 4) *первого рода*, дана уравнением (7,1a), и *параболоидическо-цилиндрическая гиперквадрика второго рода* (7,1b), „основательной поверхностью" которой является гиперболический параболоид.

Гиперквадрики, данные уравнениями (9,1) являются *коническо-цилиндрическими гиперквадриками*. Центры этих гиперквадрик выполняют центральную ось, которая является одновременно особой фигурой. Канонический вид (9,1a) определяет *мнимую коническо-цилиндрическую гиперквадрику*, геометрически представляемую осью X_4, которая является центральной осью. Для подтипа (9,1b) „нормальным сечением" является эллиптический конус (черт. 5), а для (9,1c) — гиперболический конус. В обоих случаях ось X_4 является центральной осью. В литературе они приводятся как конические гиперквадрики второго рода.

Центральной фигурой *цилиндрических гиперквадрик*, нормальный вид которых есть (10,1), является плоскость (X_3, X_4). Геометрически они образуются движением цилиндра с осью X_3 в направлении оси X_4. Если этот цилиндр является мнимым, получается (10,2a) *мнимая цилиндро-цилиндрическая гиперквадрика*, представляемая плоскостью (X_3, X_4); если цилиндр эллиптический, то (10,2b) является *действительной эллиптуческо-цилиндрическо-цилиндрическая гиперквадрикой*, (черт 6.), а если гиперболический, то (10,2c) является *действительной гиперболическо-цилиндрическо-цилиндрической. гиперквадрикой второго рода*. Центральная плоскост *цилиндрическо-цилиндрической гиперквадрики* (11,1) инцидентная с несобственным пространством. Геометрически эта гиперквадрика образована трансляционным (поступательным) движением параболоидического цилиндра, с X_3 как прямой, проходящей через вершину, в направлении оси X_4 (черт. 7). Это тип *параболическо-цилиндрическо-цилиндрической гиперквадрики.*

Нормальным видом *гиперквадрик, распадающихся на две гиперплоскости*, пересекающиеся в центральной плоскости (черт. 8), является (12,2). Их действительность зависит от знака двух не нулевых корней секулярного (характеристического) уравнения (1,3).

Если нормальный вид, распадающейся гиперквадрики есть (13,4), она представляет *две взаимно параллельные гиперплоскости* (черт. 9). Здесь центральной фигурой является гиперплоскость в конечности. Одинаково дело обстоит и в случае нормального вида (13,5), представляющего *сдвоенную гиперплоскость*, в которую гиперквадрика распадается. Если уравнение гиперквадрики можно выразить в виде (13,7), то *второй частью распадающейся гиперквадрики является несобственная гиперплоскость*, с которой совпадает и центральная гиперплоскость.

Уравнение (13,8) определяет *сдвоенную несобственную гиперплоскость*. Центр этой распадающейся гиперквадрики неопределен.

Zur Theorie der Hyperkvadriken im vierdimensionalen euklidischen Raume mit bestimmten Zentralgebilden

M. Harant

Zusammenfassung

Diese Abhandlung ist die Fortsetzung der Abhandlung „*Zur metrischen Klasifikation der Zentralhyperkvadriken im E_4*", welche in der vorliegenden Zeitschrift (1956/I, 4–6) veröffentlicht wurde. (1,1) ist die Gleichung einer Hyperkvadrik im E_4, wobei x_i homogéne Koordinaten des Punktes der Hyperkvadriken in der orthonormalen Basis (0; x_1, x_2, x_3, x_4) sind.

Wenn die Valenzen der Matrix des Systems (1,2) $h' = 3, 2, 1$ sind, dann erzeugen die Mittelpunkte der Hyperkvadrik ein bestimmtes Zentralgebilde, und zwar eine Zentralachse, eine Zentralebene oder einen Zentralraum. Ist nur $a_{55} \neq 0$, ist der Mittelpunkt unbestimmt.

Die *Zylinder-Hyperkvadriken* mit der Normalgleichung (3,4) haben die Zentralachse im Endliche. Wir unterscheiden 4 metrische Typen: (4,1a) *elipsoidisch-zylindrische Hyperkvadrik* (Abb. 1); (4,1b) *hyperboloidisch-zylindrische Hyperkvadrik erster Art* (Abb. 2); (4,1c) *hyperboloidisch-zylindrische Hyperkvadrik zweiter Art* (Abb. 3) und (4,1d) *eine imaginare elipsoidisch-zylindrische Hyperkvadrik*, geometrisiert nur X_4 als eine Zentralachse.

Paraboloidische Hyperzylinder haben die Zentralachse im Unendliche und ihre Normalgleichung ist (6,1). Die Hyperfläche besitzt die Achse X_4 als eine Gipfelgerade. Es seien zwei Typen dieser Hyperkvadriken. Die kanonische Form bestimmt die *paraboloidisch-zylindrische Hyperkvadrik erster Art* (Abb. 4) und die Form (7,1b) bestimmt die *paraboloidisch-zylindrische Hyperkvadrik zweiter Art*, bei welcher der Normalschnitt ein hyperbolischer Paraboloid ist.

Die Hyperkvadriken, welche die Gleichung (9,1) besitzen, sind *kegelisch-zylindrische Hyperkvadriken*. Ihre Mittelpunkte erzeugen eine Zentralachse, welche ein singuläres Gebilde ist. Die kanonische Form (9,1a) bestimmt die *imaginäre kegelisch-zylindrische Hyperkvadrik*, die nur als eine reelle Achse X_4 geometrisiert wird, X_4 ist die Zentralachse. Bei den Typen (9,1b) ist der Normalschnitt ein eliptischer Kegel (Abb. 5), bei der Gleichung (9,1c) ist der Normalschnitt ein hyperbolischer Kegel. In beiden Fällen ist X_4 die Zentralachse. In der Literatur werden sie als Kegelhyperflächen zweiter Art angeführt.

Zylindrisch-zylindrische Hyperkvadriken mit der Normalgleichung (10,1) haben als Mittelgebilde eine Ebene (X_3, X_4); geometrisch entstehen sie durch die Verschiebung des Zylinders mit der Achse X_3 in der Richtung der Achse X_4. Ist dieser Zylinder imaginär, bekommen wir eine (10,2a) *imaginäre $(V + V)$-Hyperkvadrik* repräsentiert durch die ebene (X_3, X_4); ist der Zylinder eliptisch, dan ist (10,2b) eine reelle (EV–V)-*Hyperkvadrik* (Abb. 6) und wenn er hyperbolisch ist, dann ist (10,2c) eine reelle $(HV - V)$-*Hyperkvadrik zweiter Art.*

Bei den *zylindrisch-zylindrischen Hyperkvadriken* (11,1) ist die Zentralebene nicht inzident mit dem unendlichen Raume. Geometrisch ist diese Hyperkvadrik gebildet durch die Translation in der Richtung X_4 des parabolischen Zylinders mit X_3 als Scheitelgeraden (Abb. 7). Es ist der Typ der (PV– V)-*Hyperkvadrik.*

In *zwei Hyperebenen zerlegbare Hyperkvadriken*, welche sich in der Zentralebene durchdringen (Abb. 8), haben die normale Form (12,2). Die Reelität hängt von dem Vorzeichen zweier Lösungen der sekulären Gleichung (1,3) ab.

Ist die Normalgleichung der zerfallenden Hyperkvadrik (13,4), so repräsentiert sie *zwei parallele Hyperebenen.* Das Zentralgebilde ist hier eine Hyperebene im Endlichen. Ist (13,5) die Normalgleichung der *doppelt gerechneten Hyperebene*, in welche die Hyperkvadrik zerfällt.

Kann man die Gleichung der Hyperkvadrik in der Form (13,7) schreiben, so ist der *zweite Teil der zerfallenden Hyperkvadrik eine Hyperebene im Unendlichen*, mit welcher auch die Zentralhyperebene identisch ist.

Die Gerade (13,8) bestimmt die *doppelt gerechnete Hyperebene im Unendlichen.* Der Mittelpunkt dieser zerfallenden Hyperkvadrik ist unbestimmt.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. II, FASC. I-II MATHEMATICA 1957

Analytický dôkaz Chaslesovej vety rozšírenej na racionálne normálne krivky a jej duálne znenie v priestore P_r

V. SVITEK

Veta (1). *V $(r+4)$-uholníku $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{r-1}A_rA_{r+1}A_{r+2}A_{r+3}A_{r+4}$ vpísanom racionálnej normálnej krivke c^r v priestore P_r, ktorého strany sú (A_1A_2), (A_2A_3), (A_3A_4), $\dots$, $(A_{r-1}A_r)$, (A_rA_{r+1}), $(A_{r+1}A_{r+2})$, $(A_{r+2}A_{r+3})$, $(A_{r+3}A_{r+4})$, $(A_{r+4}A_1)$, kde A_i, pre $i = 1, 2, 3, \dots, r+4$ sú jeho vrcholy, vytínajú nadroviny $(A_1A_2A_3 \dots A_r)$, $(A_2A_3A_4 \dots A_{r+1})$, $(A_3A_4A_5 \dots A_{r+2})$ na jeho protiľahlých stranách $(A_{r+2}A_{r+3})$, $(A_{r+3}A_{r+4})$, $(A_{r+4}A_1)$ trojicu bodov ${}^1P$, ${}^2P$, ${}^3P$. Táto trojica leží s bodmi $A_3, A_4, A_5, \dots, A_r$ v spoločnej nadrovine.*

Dôkaz:

Podľa naznačenej vety platí:

$$
(1) \qquad \left.\begin{aligned}
[(A_1A_2A_3 \dots A_{r-1}A_r) \cap (A_{r+2}A_{r+3})] &= {}^1P, \\
[(A_2A_3A_4 \dots A_rA_{r+1}) \cap (A_{r+3}A_{r+4})] &= {}^2P, \\
[(A_3A_4A_5 \dots A_{r+1}A_{r+2}) \cap (A_{r+4}A_1)] &= {}^3P.
\end{aligned}\right\}
$$

Vzhľadom na vzťah (1) je zrejmé, že nadroviny $(A_1A_2 \dots A_r)$, $(A_2A_3 \dots \dots A_{r+1})$, $(A_3A_4 \dots A_{r+2})$ majú spoločné body $A_3, A_4, A_5, \dots, A_r$, o ktorých podľa našej vety predpokladáme, že sú vo všeobecnej polohe a ležia s bodmi ${}^1P$, ${}^2P$, ${}^3P$ v jednej a tej istej nadrovine, t. j. každou skupinou r-bodov vybratých zo spomenutých $(r+1)$-bodov určená nadrovina musí prechádzať aj zvyšným z týchto bodov.

Za účelom dôkazu našej vety nech je racionálna krivka c^r viazaná na toto parametrické vyjadrenie:

$$
(2) \qquad x_1 = t^r, \quad x_2 = t^{r-1}, \quad x_3 = t^{r-2}, \quad \dots, \quad x_{r-1} = t^2, \quad x_r = t, \quad x_{r+1} = 1.
$$

Vo všeobecnosti vieme, že každá nadrovina projektívneho priestoru P_r pretína krivku (2) vo všeobecnosti v r rôznych bodoch. Predpokladajme, že súradnice určitej nadroviny sú u_j $(j = 1, 2, 3, \dots, r+1)$, ktorej rovnica je

$$
(3) \qquad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 + \dots + u_{r-1}x_{r-1} + u_rx_r + u_{r+1}x_{r+1} = 0.
$$

Po dosadení z rovníc (2) do rovnice (3) dostaneme

$$
(4) \qquad u_1t^r + u_2t^{r-1} + u_3t^{r-2} \dots + u_{r-1}t^2 + u_rt + u_{r+1} = 0;
$$

riešením dostaneme parametre $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \dots, \bar{t}_r$ priesečníkov nadroviny (3) s krivkou (2). Nakoľko rovnica (4) je r-tého stupňa, predpokladajme, že je $u_1 = 1$. Vzhľadom na korene rovnice (4) budú jej koeficienty dané týmito formulami:

$$u_2 = (-1)\sum_{i_1=1}^{r} \bar{t}_{i_1}, \qquad u_3 = (-1)^2 \sum_{i_1 \neq i_2 = 1}^{r} \bar{t}_{i_1}\bar{t}_{i_2}, \ldots$$

$$\ldots, u_{r-1} = (-1)^{r-2} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_{r-2}}^{r} \bar{t}_{i_1}\bar{t}_{i_2}\ldots\bar{t}_{i_{r-2}}$$

$$(5) \quad u_r = (-1)^{r-1} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_{r-1} = 1}^{r} \bar{t}_{i_1}\bar{t}_{i_2}\ldots\bar{t}_{i_{r-1}}, \quad u_{r+1} = (-1)^r \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_r = 1}^{r} \bar{t}_{i_1}\bar{t}_{i_2}\ldots\bar{t}_{i_r}.$$

V dôsledku vzťahov (5) rovnica nadroviny (3) projde do tvaru:

$$(6) \quad \begin{aligned} &x_1 + (-1)\sum \bar{t}_{i_1}x_2 + (-1)^2\sum \bar{t}_{i_1}\bar{t}_{i_2}x_3 + (-1)^3\sum \bar{t}_{i_1}\bar{t}_{i_2}\bar{t}_{i_3}x_4 + \ldots + \\ &+ (-1)^{r-1}\sum \bar{t}_{i_1}\bar{t}_{i_2}\ldots\bar{t}_{i_{r-k}}x_r + (-1)^r\sum \bar{t}_{i_1}\bar{t}_{i_2}\ldots\bar{t}_{i_r}x_{r+1}, \end{aligned}$$

kde $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_r = (1, 2, 3, \ldots, r)$. Keď teraz predpokladáme, že parametre daných bodov krivky c^r sú pridružene $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{k+4}$, potom rovnica nadroviny idúcej bodmi $A_3, A_4, A_5, \ldots, A_r$ a okrem nich niektorými inými dvoma bodmi A_i, A_j bude mať po patričnej úprave tvar:

$$(7) \quad \begin{aligned} &[x_1 + (-1)\sum t_{i_1}x_2 + (-1)^2\sum t_{i_1}t_{i_2}x_3 + \ldots + (-1)^{r-2}\sum t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_{r-2}}x_{r-1})] - \\ &- (t_i + t_j)[x_2 + (-1\sum t_{i_1}x_3 + \ldots + (-1)^{r-2}\sum t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_{r-2}}x_r] + \\ &+ t_it_j[x_3 + (-1)\sum t_{i_1}x + \ldots + (-1)^{r-2}\sum t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_{r-2}}x_{r+1}] = 0, \end{aligned}$$

kde $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_{r-2} = 3, 4, 5, \ldots, r$ a parametre t_i, t_j považujme za premenné, a to v závislosti od ľubovoľných dvoch bodov krivky c^r, t. j. A_i, A_j.

Bod ${}^1P$ podľa vzťahu (1) musí ležať ako v priestore $(A_1A_2A_3 \ldots A_{r-1}A_r)$, tak v priestore $(A_3A_4A_5 \ldots A_rA_{r+2}A_{r+3})$ a v dôsledku toho jeho súradnice musia vyhovovať rovniciam obidvoch nadrovín. Podobne body ${}^2P$, resp. ${}^3P$ ležia pridružene [porovn. vzťah (1)] vo dvojiciach nadrovín $(A_2A_3A_4 \ldots A_rA_{r+1})$, $(A_3A_4A_5 \ldots A_rA_{r+3}A_{r+4})$, resp. $(A_3A_4A_5 \ldots A_{r+1}A_{r+2})$, $(A_3A_4A_5 \ldots A_kA_{k+4}A_1)$, t. j. ich súradnice musia pridružene vyhovovať aj rovniciam týchto nadrovín. Ak teda súradnice bodov ${}^hP$ pre $h = 1, 2, 3$ označíme ${}^hx_i$, kde $i = 1, 2, 3, \ldots, r + 1$, musia tieto vyhovovať rovnici:

$$(8) \quad \begin{aligned} &[{}^hx_1 - \sum t_{i_1}{}^hx_2 + \sum t_{i_1}t_{i_2}{}^hx_3 + \ldots + (-1)^{r-2}\sum t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_{r-2}}{}^hx_{r-1}] - \\ &- (t_i + t_j)[{}^hx_2 - \sum t_{i_1}{}^hx_3 + \sum t_{i_1}t_{i_2}{}^hx_4 + \ldots + (-1)^{r-2}\sum t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_{r-2}}{}^hx_r] + \\ &+ t_it_j[{}^hx_3 - \sum t_{i_1}{}^hx_4 + \sum t_{i_1}t_{i_2}{}^hx_5 + \ldots + (-1)^{r-2}\sum t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_{r-2}}{}^hx_{r+1}] = 0, \end{aligned}$$

kde

$$i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_{r-2} = 3, 4, 5, \ldots, r.$$

Podľa rovnice (8) vzhľadom na vyššie stanovenú podmienku, že každý bod z bodov ${}^hP$ leží v určitej dvojici nadrovín zo šiestich vyššie spomenutých, môžeme súradnice každého bodu viazať na dve rovnice analogické, ako je rovnica (8), stačí len pre súradnice prvého bodu voliť podľa vzťahu (1) za

$i = 1$, $j = 2$, resp. za $i = r + 2$, $j = r + 3$; pre súradnice druhého bodu $i = 2$, $j = r + 1$, resp. $i = r + 3$, $j = r + 4$, a pre súradnice tretieho bodu $i = r + 1$, $j = r + 2$, resp. $i = r + 4$, $j = 1$.

Ak označíme v rovnici (8) výraz v prvej hranatej zátvorke ${}^hR_1$, v druhej ${}^hR_2$ a v tretej ${}^hR_3$ ($h = 1, 2, 3$), môžeme týchto šesť rovníc napísať v tvare:

$$(8)_1 \qquad \begin{cases} {}^1R_1 - (t_1 + t_2)\,{}^1R_2 + t_1t_2\,{}^1R_3 = 0 \\ {}^1R_1 - (t_{r+2} + t_{r+3})\,{}^1R_2 + t_{r+2}t_{r+3}\,{}^1R_3 = 0, \end{cases}$$

$$(8)_2 \qquad \begin{cases} {}^2R_1 - (t_2 + t_{r+1})\,{}^2R_2 + t_2t_{r+1}\,{}^2R_3 = 0 \\ {}^2R_1 - (t_{r+3} + t_{r+4})\,{}^2R_2 + t_{r+3}t_{r+4}\,{}^2R_3 = 0 \end{cases}$$

$$(8)_3 \qquad \begin{cases} {}^3R_1 - (t_{r+1} + t_{r+2})\,{}^3R_2 + t_{r+1}t_{r+2}\,{}^3R_3 = 0 \\ {}^3R_1 - (t_{r+4} + t_1)\,{}^3R_2 + t_{r+4}t_1\,{}^3R_3 = 0 \end{cases}$$

Z uvedených rovníc platí:

$$\begin{aligned} &{}^1R_1 : {}^1R_2 : {}^1R_3 = \begin{vmatrix} t_1t_2, & t_1 + t_2 \\ t_{r+2}t_{r+3}, & t_{r+2} + t_{r+3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t_1t_2, & 1 \\ t_{r+2}t_{r+3}, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t_1 + t_2, & 1 \\ t_{r+2} + t_{r+3}, & 1 \end{vmatrix}, \\ (9) \quad &{}^2R_1 : {}^2R_2 : {}^2R_3 = \begin{vmatrix} t_2t_{r+1}, & t_2 + t_{r+1} \\ t_{r+3}t_{r+4}, & t_{r+3} + t_{r+4} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t_2t_{r+1}, & 1 \\ t_{r+3}t_{r+4}, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t_2 + t_{r+1}, & 1 \\ t_{r+3} + t_{r+4}, & 1 \end{vmatrix}, \\ &{}^3R_1 : {}^3R_2 : {}^3R_3 = \begin{vmatrix} t_{r+1}t_{r+2}, & t_{r+1} + t_{r+2} \\ t_{r+4}t_1, & t_{r+4} + t_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t_{r+1}t_{r+2}, & 1 \\ t_{r+4}t_1, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t_{r+1}t_{r+2}, & 1 \\ t_{r+4}t_1, & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Aby sme mohli použiť vzťah (9), prikročme k stanoveniu podmienky, aby $(r + 1)$ bodov prislúchalo tej istej nadrovine. Vo všeobecnosti je zrejmé, že ak $(r + 1)$-bodov má prislúchať tej istej nadrovine, potom stačí dokázať, že hodnota determinantu zostaveného z ich súradníc musí sa rovnať nule, t. j.

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} {}^1x_1 & {}^1x_2 & {}^1x_3 & {}^1x_4 & \dots & {}^1x_{r-1} & {}^1x_r & {}^1x_{r+1} \\ {}^2x_1 & {}^2x_2 & {}^2x_3 & {}^2x_4 & \dots & {}^2x_{r-1} & {}^2x_r & {}^2x_{r+1} \\ {}^3x_1 & {}^3x_2 & {}^3x_3 & {}^3x_4 & \dots & {}^3x_{r-1} & {}^3x_r & {}^3x_{r+1} \\ t_3^r & t_3^{r-1} & t_3^{r-2} & t_3^{r-3} & \dots & t_3^2 & t_3 & 1 \\ t_4^r & t_4^{r-1} & t_4^{r-2} & t_4^{r-3} & \dots & t_4^2 & t_4 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_r^r & t_r^{r-1} & t_r^{r-2} & t_r^{r-3} & \dots & t_r^2 & t_r & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aby sme toto dokázali, upravme determinant tak, aby prvé tri prvky prvého riadka dostali tvar výrazov ${}^1R_1$, ${}^1R_2$, ${}^1R_3$, tri prvky druhého riadka tvar výrazov ${}^2R_1$, ${}^2R_2$, ${}^2R_3$ a tri prvky tretieho riadka tvar ${}^3R_1$, ${}^3R_2$, ${}^3R_3$; potom determinant (10) prejde po patričnom dosadení zo vzťahov (9) na tvar:

$$
(11)\qquad \begin{vmatrix}
{}^1R_1 & {}^1R_2 & {}^1R_3 & {}^1x_4 & {}^1x_5 & \dots & {}^1x_{r-1} & {}^1x_r & {}^1x_{r+1} \\
{}^2R_1 & {}^2R_2 & {}^2R_3 & {}^2x_4 & {}^2x_5 & \dots & {}^2x_{r-1} & {}^2x_r & {}^2x_{r+1} \\
{}^3R_1 & {}^3R_2 & {}^3R_3 & {}^3x_4 & {}^3x_5 & \dots & {}^3x_{r-1} & {}^3x_r & {}^3x_{r+1} \\
0 & 0 & 0 & t_3^{r-3} & t_3^{r-4} & \dots & t_3^2 & t_3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & t_4^{r-3} & t_4^{r-4} & \dots & t_4^2 & t_4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & t_5^{r-3} & t_5^{r-4} & \dots & t_5^2 & t_5 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & t_r^{r-3} & t_r^{r-4} & \dots & t_r^2 & t_r & 1
\end{vmatrix},
$$

alebo

$$
(11)_1 \qquad = \begin{vmatrix}
t_3^{r-3} & t_3^{r-4} & \dots & t_3^2 & t_3 & 1 \\
t_4^{r-3} & t_4^{r-4} & \dots & t_4^2 & t_4 & 1 \\
t_5^{r-3} & t_5^{r-4} & \dots & t_5^2 & t_5 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
t_r^{r-3} & t_r^{r-4} & \dots & t_r^2 & t_r & 1
\end{vmatrix} . \begin{vmatrix}
{}^1R_1 & {}^1R_2 & {}^1R_3 \\
{}^2R_1 & {}^2R_2 & {}^2R_3 \\
{}^3R_1 & {}^3R_2 & {}^3R_3
\end{vmatrix},
$$

pričom nulové prvky v prvých troch stĺpcoch determinantu (11) vyplývajú z týchto známych identít:

$$
0 = t_m^r - \sum t_{i_1} t_m^{r-1} + \sum t_{i_1} t_{i_2} t_m^{r-2} + \dots + (-1) \sum t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_{r-2}} t_m^2,
$$

$$
0 = t_m^{r-1} - \sum t_{i_1} t_m^{r-2} + \sum t_{i_1} t_{i_2} t_m^{r-3} + \dots + (-1) \sum t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_{r-2}} t_m,
$$

$$
0 = t_m^{r-2} - \sum t_{i_1} t_m^{r-3} + \sum t_{i_1} t_{i_2} t_m^{r-4} + \dots + (-1) \sum t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_{r-2}},
$$

pre $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \dots \neq i_{r-2} = 3, 4, 5, 6, \dots, r$ a pre $m = 3, 4, 5, \dots, r$.
Ak označíme hodnotu Vandermandového determinantu figurujúceho vo vzťahu $(11)_1$ značkou V, môžeme vzťah $(11)_1$ napísať stručne:

$$
(12) \qquad V . \begin{vmatrix}
{}^1R_1, & {}^1R_2, & {}^1R_3 \\
{}^2R_1, & {}^2R_2, & {}^2R_3 \\
{}^3R_1, & {}^3R_2, & {}^3R_3
\end{vmatrix}.
$$

Keď sa má teraz hodnota uvedeného determinantu vo vzťahu (10) rovnať nule, potom stačí dokázať, že vo vzťahu (12) je hodnota determinantu:

$$
(13) \qquad \begin{vmatrix}
{}^1R_1, & {}^1R_2, & {}^1R_3 \\
{}^2R_1, & {}^2R_2, & {}^2R_3 \\
{}^3R_1, & {}^3R_2, & {}^3R_3
\end{vmatrix} = 0.
$$

Prepíšme podľa vzťahu (9) determinant (13); dostaneme:

$$
(14) \begin{vmatrix}
t_1 t_2 (t_{r+2} + t_{r+3}) - t_{r+2} t_{r+3} (t_1 + t_2), & t_1 t_2 - t_{r+2} t_{r+3}, & (t_1 + t_2) - (t_{r+2} + t_{r+3}) \\
t_2 t_{r+1} (t_{r+3} + t_{r+4}) - t_{r+3} t_{r+4} (t_2 + t_{r+1}), & t_2 t_{r+1} - t_{r+3} t_{r+4}, & (t_2 + t_{r+1}) - (t_{r+3} + t_{r+4}) \\
t_{r+1} t_{r+2} (t_{r+4} + t_1) - t_{r+4} t_r (t_{r+1} t_{r+2}), & t_{r+1} t_{r+2} - t_{r+4} t_1, & (t_{r+1} + t_{r+2}) - (t_{r+4} + t_1)
\end{vmatrix}.
$$

Ak násobíme v determinante prvý riadok $(t_{r+1} - t_{r+4})$, druhý $(t_{r+2} - t_1)$ a tieto riadky pričítame k tretiemu násobenému $(t_{r+3} - t_2)$, dostaneme v poslednom riadku samé nuly, v dôsledku čoho sa determinant (14) rovná nule. Body ${}^1P, {}^2P, {}^3P, A_3, A_4, \dots, A_r$ ležia teda v jednej a tej istej nadrovine, ako to veta tvrdí, čím sme ju dokázali.

Duálna veta k vyššie spomenutej znie:

Veta (2). *V $(r + 4)$ -uholníku pripísanom racionálnej krivke c^r v priestore P_r, ktorého strany sú ${}^1P_{r-2} = ({}^1A_{r-1}{}^2A_{r-1}), {}^2P_{r-2} = ({}^2A_{r-1}{}^3A_{r-1}), {}^3P_{r-2} = ({}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1}), \dots, {}^{r+4}P_{r-2} = ({}^{r+4}A_{r-1}{}^1A_{r-1})$, kde ${}^iA_{r-1}$ pre $i = 1, 2, 3, \dots, r + 4$, sú oskulačné nadroviny normálnej krivky c^r. Body ${}^1P = ({}^1A_{r-1}{}^2A_{r-1}{}^3A_{r-1} \dots {}^rA_{r-1})$, ${}^2P = ({}^2A_{r-1}{}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1} \dots {}^{r+1}A_{r-1})$, ${}^3P = ({}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1}{}^5A_{r-1} \dots {}^{r+2}A_{r-1})$ s ich protiľahlými stranami $({}^{r+2}A_{r-1}{}^{r+3}A_{r-1})$, $({}^{r+3}A_{r-1}{}^{r+4}A_{r-1})$, $({}^{r+4}A_{r-1}{}^1A_{r-1})$ tvoria trojicu nadrovín ${}^1R_{r-1}, {}^2R_{r-1}, {}^3R_{r-1}$, ktoré s nadrovinami ${}^3A_{r-1}, {}^4A_{r-1}, \dots, {}^rA_{r-1}$ prechádzajú spoločným bodom.*

Dôkaz:

Podľa naznačenej vety platí:

$$
\begin{aligned}
&[({}^1A_{r-1}{}^2A_{r-1}{}^3A_{r-1} \dots {}^rA_{r-1})({}^{(r+2)}A_{r-1}{}^{(r+3)}A_{r-1})] = \mathfrak{P}_1, \\
(1) \qquad &[({}^2A_{r-1}{}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1} \dots {}^{(r+1)}A_{r-1})({}^{(r+3)}A_{r-1}{}^{(r+4)}A_{r-1})] = \mathfrak{P}_2, \\
&[({}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1}{}^5A_{r-1} \dots {}^{(r+2)}A_{r-1})({}^{(r+4}A_{r-1}{}^1A_{r-1})] = \mathfrak{P}_3.
\end{aligned}
$$

Vzhľadom na vzťah (1) je zrejmé, že bodmi určenými r-skupinami nezávislých nadrovín $({}^1A_{r-1}{}^2A_{r-1}{}^3A_{r-1} \dots {}^rA_{r-1})$, $({}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1}{}^5A_{r-1} \dots {}^rA_{r-1}{}^{(r+2)}A_{r-2}{}^{(r+3)}A_{r-1})$; $({}^2A_{r-1}{}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1} \dots {}^rA_{r-1}{}^{(r+1)}A_{r-1})$, $({}^3A_{r-1} \dots {}^4A_{r-1}{}^5A_{r-1} \dots {}^rA_{r-1}{}^{(r+3)}A_{r-1}{}^{(r+4)}A_{r-1})$; $({}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1}{}^5A_{r-1} \dots {}^rA_{r-1}{}^{(r+1)}A_{r-1}{}^{(r+2)}A_{r-1})$, $({}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1}{}^5A_{r-1} \dots {}^rA_{r-1}{}^{(r+4)}A_{r-1}{}^1A_{r-1})$ prechádzajú nadroviny ${}^3A_{r-1}, {}^4A_{r-1}, {}^5A_{r-1}, \dots, {}^rA_{r-1}$, ktoré sú vo všeobecnej polohe a predchádzajú s nadrovinami $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ tým istým bodom, t. j. každá skupina r-nadrovín vybratá zo spomenutých $(r + 1)$-nadrovín určuje bod, ktorým prechádza aj ostatná nadrovina z počtu $(r + 1)$.

Za účelom dôkazu našej vety nech je parametrické vyjadrenie racionálnej normálnej krivky c^r viazané na rovnice:

$$
(2) \qquad x_1 = t^r, \quad x_2 = t^{r-1}, \quad x_3 = t^{r-2}, \dots, \quad x_{r-1} = t^2, \quad x_r = t, \quad x_{r+1} = 1,
$$

pričom parameter t spĺňa vzťah:

$$
-\infty < t < \infty.
$$

Rovnica oskulačnej nadroviny v bode o parametri t_i má tvar:

$$
\begin{aligned}
&x_1 - \binom{r}{1} t_i x_2 + \binom{r}{2} t_i^2 x_3 - \binom{r}{3} t_i^3 x_4 + \dots \\
(3) \qquad &\dots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} t_i^{r-1} x_r + (-1)^r \binom{r}{r} t_i^r x_{r+1} = 0,
\end{aligned}
$$

Predpokladajme, že body, v ktorých dané, oskulačné nadroviny ${}^mA_{r-1}$, pre $m = 1, 2, 3, \dots, r + 4$, pridružene oskulujú krivku c^r, sú viazané na parametre t_m. Ak označíme skupinu r-nadrovín $({}^jA_{r-1}{}^kA_{r-1}{}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1} \dots {}^rA_1)$

bude táto pre $j = 1$, $k = 2$ určovať bod P_1 a pre $j = r + 2$, $k = r + 3$ bod P'_1; podobne pre $j = 2$, $k = r + 1$ bod P_2 a pre $j = r + 3$, $k = r + 4$ bod P'_2 a pre $j = r + 1$, $k = r + 2$ bod P_3, pre $j = r + 4$, $k = 1$ bod P'_3. Súradnice bodov spomenutých troch dvojíc budú dané riešením tejto sústavy:

$$
(4) \quad \begin{cases}
x_1 - \binom{r}{1} t_j x_2 + \binom{r}{2} t_j^2 x_3 + \ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} t_j^{r-1} x_r + (-1)^r \binom{r}{r} t_j^r x_{r+1} = 0, \\
x_1 - \binom{r}{1} t_k x_2 + \binom{r}{2} t_k^2 x_3 + \ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} t_k^{r-1} x_r + (-1)^r \binom{r}{r} t_k^r x_{r+1} = 0, \\
x_1 - \binom{r}{1} t_3 x_2 + \binom{r}{2} t_3^2 x_3 + \ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} t_3^{r-1} x_r + (-1)^r \binom{r}{r} t_3^r x_{r+1} = 0, \\
x_1 - \binom{r}{1} t_4 x_2 + \binom{r}{2} t_4^2 x_3 + \ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} t_4^{r-1} x_r + (-1)^r \binom{r}{r} t_4^r x_{r+1} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\
x_1 - \binom{r}{1} t_r x_2 + \binom{r}{2} t_r^2 x_3 + \ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} t_r^{r-1} x_r + (-1)^r \binom{r}{r} t_r^r x_{r+1} = 0,
\end{cases}
$$

t. j.

$$
(5) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_{r+1} = \left\| \begin{matrix}
1, & -\binom{r}{1} t_j, & \binom{r}{2} t_j^2, & \ldots, & (-1)^r \binom{r}{r} t_j^r \\
1, & -\binom{r}{1} t_k, & \binom{r}{2} t_k^2, & \ldots, & (-1)^r \binom{r}{r} t_k^r \\
1, & -\binom{r}{1} t_3, & \binom{r}{2} t_3^2, & \ldots, & (-1)^r \binom{r}{r} t_3^r \\
1, & -\binom{r}{1} t_4, & \binom{r}{2} t_4^2, & \ldots, & (-1)^r \binom{r}{r} t_4^r \\
. & . & . & , \ldots, & . \\
. & . & . & , \ldots, & . \\
. & . & . & , \ldots, & . \\
1, & -\binom{r}{1} t_r, & \binom{r}{2} t_r^2, & \ldots, & (-1)^r \binom{r}{r} t_r^r
\end{matrix} \right\| ,
$$

alebo

$$
x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_{r+1} = (-1)^{\frac{(r+1)r}{2}} \binom{r}{1}\binom{r}{2} \ldots \binom{r}{r} . D_0 : (-1)^{\frac{(r+1)r}{2}} \binom{r}{0}\binom{r}{2} \ldots
$$

$$
(6) \qquad \ldots \binom{r}{r} . D_1 : \ldots : (-1)^{\frac{(r+1)r}{2}} \binom{r}{0}\binom{r}{1}\binom{r}{2} \ldots \binom{r}{r-1} . D_r ,
$$

pričom sú $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_r$ determinanty priradené súradniciam x_h, pre $h = 1, 2, \ldots, r + 1$ z matice (7) vzhľadom na (4):

$$(7)\qquad \begin{pmatrix} 1, t_j, t_j^2, \dots, t_j^r \\ 1, t_k, t_k^2, \dots, t_k^r \\ 1, t_3, t_3^2, \dots, t_3^r \\ \dots, \dots, \\ \dots, \dots, \\ \dots, \dots, \\ 1, t_r, t_r^2, \dots, t_r^r \end{pmatrix}$$

Ak pravú stranu vzťahu (6) delíme výrazom $(-1)^{\frac{(r+1)r}{2}} \cdot \binom{r}{0}\binom{r}{1}\dots\binom{r}{r}$, môžeme prepísať vzťah (6) na tvar:

$$(8)\qquad x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_{r+1} = \frac{D_0}{\binom{r}{0}} : \frac{D_1}{\binom{r}{1}} : \frac{D_2}{\binom{r}{2}} : \dots : \frac{D_r}{\binom{r}{r}}.$$

Aby sme zjednodušili formuly vyjadrujúce súradnice bodu vo vzťahu (8), pripojme k sústave (4) rovnicu nadroviny oskulujúcej krivku c^r v bode pre ľubovoľný parameter t, t. j.

$$(9)\qquad x_1 - \binom{r}{1} t x_2 + \binom{r}{2} t^2 x_3 - \dots + (-1)^r \binom{r}{r} t^r x_{r+1} = 0.$$

Ak má sústava daných rovníc (9) a (4) nenulové riešenie, determinant sústavy týchto rovníc musí sa rovnať nule, t. j. po patričnom krátení determinantu musí platiť:

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} 1, t, t^2, \dots, t^r \\ 1, t_j, t_j^2, \dots, t_j^r \\ 1, t_k, t_k^2, \dots, t_k^r \\ 1, t_3, t_3^2, \dots, t_3^r \\ \dots, \dots, \\ \dots, \dots, \\ \dots, \dots, \\ 1, t_r, t_r^2, \dots, t_r^r \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnica (10) pre neznámu t je splnená pre parametre $t_j, t_k, t_3, t_4, \dots, t_r$, teda polynóm, ktorý dostaneme po rozpísaní determinantu (10):

$$D_0 - tD_1 + t^2 D_2 - \dots + (-1)^r t^r D_r = 0 \qquad (10')$$

môžeme po príslušnej úprave prepísať na tvar:

$$(11)\qquad t^r - \sum t_{i_1} t^{r-1} + \sum t_{i_1} t_{i_2} t^{r-2} + \dots + (-1)^r \sum t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_r} = 0,$$

kde $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_r = j, k, 3, \dots, r$, pričom z porovnania (10)' a (11) vyplýva:

$$(12)\qquad \frac{D_{r-1}}{D_r} = \sum t_{i_1}, \frac{D_{r-2}}{D_r} = \sum t_{i_1} t_{i_2}, \dots, \frac{D_1}{D_r} = \sum t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_{r-1}}, \frac{D_0}{D_r} = t_j t_k t_3 t_4 \dots t_r.$$

Vzhľadom na vzťah (12) môžeme vzťah (8) prepísať na tento tvar:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_{r+1} = \binom{r}{0}^{-1} t_j t_k t_3 \ldots t_r : \binom{r}{1}^{-1} \sum t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{r-1}} : \ldots$$

$$\ldots : \binom{r}{r-1}^{-1} \sum t_{i_1} : \binom{r}{r}^{-1}, \tag{13}$$

kde $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_r = j, k, 3, 4, \ldots, r$. Ak teraz vzhľadom na vzťah (1) za j, k vo vzťahu (13) napíšeme $j = 1$, $k = 2$ a $j = r + 2$, $k = r + 3$, dostaneme súradnice bodov P_1, P_1'; $j = 2$, $k = r + 1$ a $j = r + 3$, $k = r + 4$ súradnice bodov P_2, P_2' a napokon $j = r + 1$, $k = r + 2$ a $j = r + 4$, $k = 1$ súradnice bodov P_3, P_3'. Rovnice dvojíc bodov P_i, P_i' pre $i = 1, 2, 3$ vzhľadom na ich súradnice odvodené zo vzťahu (13) označené ${}^ix_1$, ${}^ix_2$, ${}^ix_3, \ldots, {}^ix_{r+1}$ a ${}^ix_1'$, ${}^ix_2'$, ${}^ix_3', \ldots, {}^ix_{r+1}'$ budú tvaru:

$$\begin{cases} u_1{}^ix_1 + u_2{}^ix_2 + u_3{}^ix_3 + \ldots + u_{r+1}{}^ix_{r+1} = 0, \\ u_1{}^ix_1' + u_2{}^ix_2' + u_3{}^ix_3' + \ldots + u_{r+1}{}^ix_{r+1}' = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Upravme prvú rovnicu, kde $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \ldots \neq i_r = j, k, 3, 4, \ldots, r$ t. j. po dosadení z (13),

$$u_1 \binom{r}{0}^{-1} t_j t_k t_3 \ldots t_r + u_2 \binom{r}{1}^{-1} \sum t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{r-1}} + u_3 \binom{r}{2}^{-1} \sum t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{r-2}} + \ldots$$

$$\ldots + u_r \binom{r}{r-1}^{-1} \sum t_{i_1} + u_{r+1} = 0$$ tak, že vytkneme z príslušných členov súčin $t_j t_k$, z ďalších $(t_j + t_k)$; rovnica prejde do tvaru:

$$t_j t_k \left[u_1 \binom{r}{0}^{-1} t_3 t_4 \ldots t_r + u_2 \binom{r}{1}^{-1} \sum t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{r-3}} + u_3 \binom{r}{2}^{-1} \sum t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{r-4}} + \right.$$

$$\left. + \ldots + u_{r-1} \binom{r}{r-2}^{-1} \right] + (t_j + t_k) \left[u_2 \binom{r}{1}^{-1} t_3 t_4 \ldots t_r + \right.$$

$$\left. + u_3 \binom{r}{2}^{-1} \sum t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{r-3}} + u_4 \binom{r}{3}^{-1} \sum t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{r-4}} + \ldots + u_r \binom{r}{r-1}^{-1} \right] +$$

$$+ \left[u_3 \binom{r}{2}^{-1} t_3 t_4 \ldots t_r + u_4 \binom{r}{3}^{-1} \sum t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{r-3}} + \right.$$

$$\left. + u_5 \binom{r}{4}^{-1} \sum t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{r-4}} \ldots + u_{r+1} \binom{r}{r}^{-1} \right] = 0, \tag{15}$$

$i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_{r-3} = 3, 4, \ldots, r - 1$. Ak označíme výraz v prvej hranatej zátvorke ${}^h\overline{R}_1$, výraz v druhej hranatej zátvorke ${}^h\overline{R}_2$ a výraz v tretej hranatej zátvorke ${}^h\overline{R}_3$, pre $h = 1, 2, 3$, môžeme šesť rovníc pre tri páry spomenutých bodov napísať v tomto tvare:

$$\begin{cases} t_1 t_2 {}^1\overline{R}_1 + (t_1 + t_2) {}^1\overline{R}_2 + {}^1\overline{R}_3 = 0 \\ t_{r+2} t_{r+3} {}^1\overline{R}_1 + (t_{r+2} + t_{r+3}) {}^1\overline{R}_2 + {}^1\overline{R}_3 = 0 \end{cases} \tag{15$_1$}$$

$$\begin{cases} t_2 t_{r+1} {}^2\overline{R}_1 + (t_2 + t_{r+1}) {}^2\overline{R}_2 + {}^2\overline{R}_3 = 0 \\ t_{r+3} t_{r+4} {}^2\overline{R}_1 + (t_{r+3} + t_{r+4}) {}^2\overline{R}_2 + {}^2\overline{R}_3 = 0 \end{cases} \tag{15$_2$}$$

$$\begin{cases} t_{r+1} t_{r+2} {}^3\overline{R}_1 + (t_{r+1} + t_{r+2}) {}^3\overline{R}_2 + {}^3\overline{R}_3 = 0 \\ t_{r+4} t_1 {}^3\overline{R}_1 + (t_{r+4} + t_1) {}^3\overline{R}_2 + {}^3\overline{R}_3 = 0. \end{cases} \tag{15$_3$}$$

Z uvedených rovníc platí:

$$(16)\qquad \begin{cases} {}^1\overline{R}_1 : {}^1\overline{R}_2 : {}^1\overline{R}_3 = \begin{vmatrix} (t_1 + t_2), & 1 \\ t_{r+2} + t_{r+3}, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & t_1t_2 \\ 1, & t_{r+2}t_{r+3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t_1t_2, & t_1 + t_2 \\ t_{r+2}t_{r+3}, & t_{r+2} + t_{r+3} \end{vmatrix}, \\[2ex] {}^2\overline{R}_1 : {}^2\overline{R}_2 : {}^2\overline{R}_3 = \begin{vmatrix} t_2 + t_{r+1}, & 1 \\ t_{r+3} + t_{r+4}, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & t_2t_{r+1} \\ 1, & t_{r+3}t_{r+4} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t_2t_{r+1}, & t_2 + t_{r+1} \\ t_{r+3}t_{r+4}, & t_{r+3} + t_{r+4} \end{vmatrix}, \\[2ex] {}^3\overline{R}_1 : {}^3\overline{R}_2 : {}^3\overline{R}_3 = \begin{vmatrix} t_{r+1} + t_{r+2}, & 1 \\ t_{r+4} + t_1, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & t_{r+1}t_{r+2} \\ 1, & t_{r+4}t_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t_{r+1}t_{r+2}, & t_{r+1} + t_{r+2} \\ t_{r+4}t_1, & t_{r+4} + t_1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Aby sme mohli vzťahy v (16) použiť, prikročme k stanoveniu podmienky, aby $(r + 1)$ nadrovín prechádzalo tým istým bodom. Vo všeobecnosti je zrejmé, že ak má $(r + 1)$ nadrovín prechádzať tým istým bodom, potom stačí dokázať, že hodnota determinantu zostaveného z ich súradníc musí sa rovnať nule, t. j.

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} {}^1u_1, & {}^1u_2, & {}^1u_3, & \ldots, & {}^1u_{r+1} \\ {}^2u_1, & {}^2u_2, & {}^2u_3, & \ldots, & {}^2u_{r+1} \\ {}^3u_1, & {}^3u_2, & {}^3u_3, & \ldots, & {}^3u_{r+1} \\ 1, & -\binom{r}{1} t_3, & \binom{r}{2} t_3^2, & \ldots, & (-1)^r \binom{r}{r} t_3^r \\ 1, & -\binom{r}{1} t_4, & \binom{r}{2} t_4^2, & \ldots, & (-1)^r \binom{r}{r} t_4^r \\ \cdot & \cdot & \cdot, & \ldots, & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot, & \ldots, & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot, & \ldots, & \cdot \\ 1, & -\binom{r}{1} t_r, & \binom{r}{2} t_r^2, & \ldots, & (-1)^r \binom{r}{r} t_r^r \end{vmatrix} = 0.$$

Aby sme dokázali správnosť vzťahu (17), upravme determinant tak, aby posledné tri prvky prvého riadku prešli na tvar výrazov ${}^1\overline{R}_1, {}^1\overline{R}_2, {}^1\overline{R}_3$, tri posledné prvky druhého riadka na tvar výrazov ${}^2\overline{R}_1$, ${}^2\overline{R}_2$, ${}^2\overline{R}_3$ a tri posledné prvky tretieho riadka do výrazov ${}^3\overline{R}_1$, ${}^3\overline{R}_2$, ${}^3\overline{R}_3$; potom determinant (17) prejde po príslušnom dosadení vzťahov (16) na tvar:

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} {}^1u_1, & {}^1u_2, & {}^1u_3, & \ldots, & {}^1u_{r-2}, & {}^1\overline{R}_1, & {}^1\overline{R}_2, & {}^1\overline{R}_3 \\ {}^2u_1, & {}^2u_2, & {}^2u_3, & \ldots, & {}^2u_{r-2}, & {}^2\overline{R}_1, & {}^2\overline{R}_2, & {}^2\overline{R}_3 \\ {}^3u_1, & {}^3u_2, & {}^3u_3, & \ldots, & {}^2u_{r-2}, & {}^3\overline{R}_1, & {}^3\overline{R}_2, & {}^3\overline{R}_3 \\ 1, & -\binom{r}{1} t_3, & \binom{r}{2} t_3^2, & \ldots, & & 0, & 0, & 0 \\ 1, & -\binom{r}{1} t_4, & \binom{r}{2} t_4^2, & \ldots, & & 0, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & , \ldots, & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & , \ldots, & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & , \ldots, & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & -\binom{r}{1} t_r, & \binom{r}{2} t_r^2, & \ldots, & & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix},$$

alebo

$$
(18)_1 \quad \begin{vmatrix} 1, -\binom{r}{1} t_3, \binom{r}{2} t_3^2, \dots, (-1)^{r-3} \binom{r}{r-3} t_3^{r-3} \\ 1, -\binom{r}{1} t_4, \binom{r}{2} t_4^2, \dots, (-1)^{r-3} \binom{r}{r-3} t_4^{r-3} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \dots, \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \dots, \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \dots, \quad \cdot \\ 1, -\binom{r}{1} t_r, \binom{r}{2} t_r^2, \dots, (-1)^{r-3} \binom{r}{r-3} t_r^{r-3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} {}^1\overline{R}_1, {}^1\overline{R}_2, {}^1\overline{R}_3 \\ {}^2\overline{R}_1, {}^2\overline{R}_2, {}^2\overline{R}_3 \\ {}^3\overline{R}_1, {}^3\overline{R}_2, {}^3\overline{R}_3 \end{vmatrix},
$$

pričom nulové prvky v posledných stĺpcoch vyplývajú zo známych identít:

$$
\begin{aligned}
&t_3 t_4 t_5 \dots t_r - t_m \sum t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_{r-3}} + \dots + (-1)^{r-3} t_m^{r-3} \sum t_{i_1} + (-1)^{r-2} t_m^{r-2} = 0, \\
&t_m t_3 t_4 \dots t_r - t_m^2 \sum t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_{r-3}} + \dots + (-1)^{r-3} t^{r-3} \sum t_{i_1} + (-1)^{r-2} t_m^{r-1} = 0, \\
&t_m^2 t_3 t_4 \dots t_r - t_m^3 \sum t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_{r-3}} + \dots + (-1)^{r-3} t^{r-3} \sum t_{i_1} + (-1)^{r-2} t_m^{r} = 0,
\end{aligned}
$$

kde $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_{r-3} = 3, 4, 5, \dots,$ a pre $m = 3, 4, 5, \dots, \vartheta$.

Pre vytvorenie nulových prvkov v posledných troch stĺpcoch stačí si uvedomiť vytvorenie výrazov ${}^i\overline{R}_h$ pre $i, h = 1, 2, 3$. Tretiemu predposlednému stĺpcu stačí pripočítať príslušné násobky prvkých $r - 2$ stĺpcov, podobne k druhému predposlednému príslušné násobky druhého až $r - 1$ stĺpca a k poslednému stĺpcu násobky tretieho až predposledného stĺpca. O aké lineárne kombinácie tu ide, je zrejmé z výrazov ${}^i\overline{R}_h$.

Ak z determinantu, ktorý figuruje vo vzťahu $(18)_1$ vyjmeme spoločných činiteľov obsiahnutých v stĺpcoch, dostaneme:

$$
(19) \quad (-1)^{\frac{(r-2)(r-3)}{2}} \binom{r}{1} \binom{r}{2} \cdots \binom{r}{r-3} \begin{vmatrix} 1, t_3, t_3^2, \dots, t_3^{r-3} \\ 1, t_4, t_4^2, \dots, t_4^{r-3} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \dots, \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \dots, \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \dots, \cdot \\ 1, t_r, t_r^2, \dots, t_r^{r-3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} {}^1\overline{R}_1, {}^1\overline{R}_2, {}^1\overline{R}_3 \\ {}^2\overline{R}_1, {}^2\overline{R}_2, {}^3\overline{R}_3 \\ {}^3\overline{R}_1, {}^3\overline{R}_2, {}^3\overline{R}_3 \end{vmatrix}.
$$

Na dôkaz, že determinant (18) sa rovná nule, stačí dokázať, že determinant

$$
(20) \qquad \begin{vmatrix} {}^1\overline{R}_1, {}^1\overline{R}_2, {}^1\overline{R}_3 \\ {}^2\overline{R}_1, {}^2\overline{R}_2, {}^2\overline{R}_3 \\ {}^3\overline{R}_1, {}^3\overline{R}_2, {}^3\overline{R}_3 \end{vmatrix} = 0.
$$

Po dosadení zo vzťahov (16) dostávame:

$$
(21) \begin{vmatrix} (t_1 + t_2) - (t_{r+2} + t_{r+3}), & t_{r+2} t_{r+3} - t_1 t_2, & t_1 t_2 (t_{r+2} + t_{r+3}) - t_{r+2} t_{r+3} (t_1 + t_2) \\ (t_2 + t_{r+1}) - (t_{r+3} + t_{r+4}), & t_{r+3} t_{r+4} - t_2 t_{r+1}, & t_2 t_{r+1} (t_{r+3} + t_{r+4}) - t_{r+3} t_{r+4} (t_2 + t_{r+1}) \\ (t_{r+1} + t_{r+2}) - (t_{r+4} + t_1), & t_{r+4} t_1 - t_{r+1} t_{r+2}, & t_{r+1} t_{r+2} (t_{r+4} + t_1) - t_{r+4} t_1 (t_{r+1} + t_{r+2}) \end{vmatrix}.
$$

Keďže determinant (21) po úprave možno uviesť na tvar determinantu (14), s ktorým sme sa stretli pri dôkaze prvej vety a tam sme dokázali, že sa rovná nule, je aj determinant daný vzťahom (21) nulovej hodnoty, z čoho vyplýva, že je nulovej hodnoty aj determinant (18), čím sme duálnu vetu dokázali.

Adresa autora: Vysoká škola pedagogická, Bratislava

(Došlo 10. III. 1956.)

Аналитическое доказательство теоремы Шала, распространенное на рациональной кривой c^r и двойственной теоремы в нространстве P_r

В. Свитек

Содержание прелмествуюшей статъи

Теорема (1). $B(r+4)$ уголъникe $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_{r-1}A_rA_{r+1}A_{r+2}A_{r+3}A_{r+4}$ вписанном в рациональную кривую c^r в пространстве P_r, стороны которого (A_1A_2), (A_3A_4), $\ldots$, $(A_{r-1}A_r)$, (A_rA_{r+1}), $(A_{r+1}A_{r+2})$, $(A_{r+2}A_{r+3})$, $(A_{r+3}A_{r+4})$, $(A_{r+4}A_1)$, гле A_i, для $i = 1, 2, 3, \ldots, r+4$, его вершины, пересекают гиперплоскости $(A_1A_2A_3 \ldots A_r)$, $(A_2A_3A_4 \ldots A_{r+1})$, $(A_3A_4A_5 \ldots A_{r+2})$ на его противополпжных странах $(A_{r+2}A_{r+3})$, $(A_{r+3}A_{r+4})$, $(A_{r+4}A_1)$ три точки ${}^1P$, ${}^2P$, ${}^3P$, которые лежат с точками $A_3, A_4, A_5, \ldots A_r$ в общей гиперплоскости.

Двойственная теорема к теореме (1):

Теорема (2). $B(r+4)$ угольникe приписанном рациональной нормальной кривой c^r в пространстве P_r, стороны которого ${}^1P_{r-2} = ({}^1A_{r-1}{}^2A_{r-1})$, ${}^2P_{r-2} = ({}^2A_{r-1}{}^3A_{r-1})$, ${}^3P_{r-2} = ({}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1})$, $\ldots$, ${}^{r+3}P_{r-2} = ({}^{r+3}A_{r-1}{}^{r+4}A_{r-1})$, ${}^{r+4}P_{r-2} = ({}^{r+4}A_{r-1}{}^1A_{r-1})$, где ${}^iA_{-1}$ для $i = 1, \ldots, r+4$ оскуляционные гиперплоскости нормальной кривой c^r. Точки ${}^1P = ({}^1A_{r-1}{}^2A_{r-1}{}^3A_{r-1} \ldots {}^rA_{r-1})$, ${}^2P = ({}^2A_{r-1}{}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1} \ldots {}^{r+1}A_{r-1})$, ${}^3P = ({}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1}{}^5A_{r-1} \ldots {}^{r+2}A_{r-1})$ с их противоположными сторонами $({}^{r+2}A_{r-1}{}^{r+3}A_{r-1})$, $({}^{r+3}A_{r-1}{}^{r+4}A_{r-1})$, $({}^{r+4}A_{r-1}{}^1A_{r-1})$ определяют три гирерплоскости ${}^1R_{r-1}$, ${}^2R_{r-1}{}^3R_{r-1}$, которые с гиперплоскостями ${}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1}{}^5A_{r-1}{}^rA_{r-1}$ проходят через обшую точку.

Démonstration analytique du Theorème de Chassle élargie sur les courbes rationelles normales c^r et les theorémes duales dnas l'espace $|P_r|$

V. Svitek

Résumé de l'article précédent

Théorème (1). Dans un polygone de $(r+4)$ côtés inscrit à une courbe racionelle normale dans l'espace P_r dont les côtés sont (A_1A_2), (A_2A_3), $\ldots$, $(A_{r-1}A_r)$, (A_rA_{r+1}), $(A_{r+1}A_{r+2})$, $(A_{r+2}A_{r+3})$, $(A_{r+3}A_{r+4})$, $(A_{r+4}A_1)$, ou A_i pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, sont ses sommets, le hyperplans $(A_1A_2A_3 \ldots A_r)$, $(A_2A_3A_4 \ldots A_{r+1})$, $(A_3A_4A_5 \ldots A_{r+2})$ coupent les côtés opposés $(A_{r+2}A_{r+3})$, $(A_{r+3}A_{r+4})$, $(A_{r+4}A_1)$ dans un triple de points ${}^1P$, ${}^2P$, ${}^3P$ qui est posé avec les points $A_3, A_4, A_5, \ldots, A$, dans un hyperplan commun.

Le theorème duale à celui de (1) est:

Theorème (2). Dans un polygone $(r+4)$ adscrit à une courbe rationelle normale c^r dans l'espace P_r dont les côtés sont ${}^1P_{r-2} = ({}^1A_{r-1}{}^2A_{r-1})$, ${}^2P_{r-2} = ({}^2A_{r-1}{}^3A_{r-1})$, $({}^3P_{r-2} = ({}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1})$, $\ldots$, ${}^{r+3}P_{r-2} = ({}^{r+3}A_{r-1}{}^{r+4}A_{r-1})$, ${}^{r+4}P_{r-2} = ({}^{r+4}A_{r-1}{}^1A_{r-1})$, ou ${}^iA_{r-1}$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots, r+4$ les hyperplans osculateurs de la courbe normale ont c^r. Les points ${}^1P = ({}^1A_{r-1}{}^2A_{r-r}{}^3A_{r-1} \ldots {}^rA_{r-1})$, ${}^2P = ({}^2A_{r-1}{}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1} \ldots {}^{r+1}A_{r-1})$, ${}^3P = ({}^3A_{r-1}{}^4A_{r-1} \ldots {}^{r+2}A_{r-1})$ déterminent avec les côtés opposés correspondants $({}^{r+2}A_{r-1}{}^{r+3}A_{r-1})$, $({}^{r+3}A_{r-1}{}^{r+4}A_{r-1})$, $({}^{r+4}A_{r-1}{}^1A_{r-i})$ un tripple de hyperplans ${}^1R_{r-1}$, ${}^2R_{r-1}$, ${}^3R_{r-1}$ passent par le meme point.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. II, FASC. I-II MATHEMATICA 1957

O lineárnej diferenciálnej rovnici tretieho rádu s konštantnými koeficientami

M. GREGUŠ

Práca pojednáva o vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu s konštantnými koeficientami tvaru

$$y''' + 2Ay' + \Omega y = 0 \tag{a}$$

a o vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice k nej adjungovanej

$$z''' + 2Az' - \Omega z = 0. \tag{b}$$

G. Sansone [1] dokázal za určitých predpokladov o koeficientoch $A = A(\lambda)$, $\Omega = \Omega(\lambda)$ tzv. oscilačnú vetu o existencii vlastných hodnôt pre integrály diferenciálnej rovnice (a).

V tejto práci sú odvodené niektoré vzťahy medzi integrálmi diferenciálnej rovnice (a) a (b), ďalej je ukázané, že oscilačná veta a veta o existencii vlastných hodnôt od G. Sansona platia aj pre diferenciálnu rovnicu (b), pravda, vo vhodne pozmenenom tvare a napokon sa tu dokázal určitý nový okrajový problém.

I.

Uvažujme o diferenciálnej rovnici

$$y''' + 2Ay' + \Omega y = 0. \tag{a}$$

Nech sú koeficienty A, Ω konštanty vlastnosti $A > 0$, $\Omega > 0$.
Diferenciálna rovnica adjungovaná k rovnici (a) je

$$z''' + 2Az' - \Omega z = 0. \tag{b}$$

Pre integrály diferenciálnej rovnice (a) platí tzv. integrálna identita [1]:

$$yy'' - \frac{1}{2}y'^2 + Ay^2 + \Omega\int_{x_0}^{x} y^2\,dx = \text{konšt.}, \tag{1}$$

kde $x_0 \in (-\infty, \infty)$ je pevné číslo, x ľubovoľné číslo.
Integrálna identita (1) pre integrály diferenciálnej rovnice (b) je tvaru

$$zz'' - \frac{1}{2}z'^2 + Az^2 - \Omega\int_{x_0}^{x} z^2\,dx = \text{konšt.} \tag{2}$$

Nech y_1, y_2, y_3 je fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (a) vlastností

$$y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0, \; y_2(x_0) = y_2''(x_0) = 0, \quad y_3(x_0) = y_3''(x_0) = 0.$$

Je známe [1], že funkcie $z_1 = \begin{vmatrix} y_1, y_2 \\ y_1', y_2' \end{vmatrix}$, $z_2 = \begin{vmatrix} y_1, y_3 \\ y_1', y_3' \end{vmatrix}$, $z_3 = \begin{vmatrix} y_2, y_3 \\ y_2', y_3' \end{vmatrix}$ tvoria fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (b) vlastností

$$z_1(x_0) = z_1'(x_0) = 0, \quad z_2(x_0) = z_2''(x_0) = 0, \quad z_3''(x_0) = 0.$$

Z integrálnej identity (1), resp. (2) vyplýva, že integrál y_1 nemá naľavo od x_0 a integrál z_1 napravo od x_0 žiadny nulový bod.

Ďalej je známe [2], že všetky integrály diferenciálnej rovnice (a), ktoré majú v čísle x_0 nulový bod, môžeme písať v tvare $c_1y_1 + c_2y_2$, kde y_1, y_2 sú vyššie uvedené integrály diferenciálnej rovnice (a), c_1, c_2 ľubovoľné konštanty. Integrály $c_1y_1 + c_2y_2$ vyhovujú určitej diferenciálnej rovnici druhého rádu, ktorá pre $x > x_0$ je tvaru

$$\text{(c)} \qquad \left[\frac{1}{z_1} y'\right]' + \left[\frac{2A}{z_1} + \frac{z_1''}{z_1^2}\right] y = 0,$$

kde z_1 je integrálom diferenciálnej rovnice (b) vlastnosti $z_1(x_0) = z_1'(x_0) = 0$; pritom integrály $c_1y_1 + c_2y_2$ oscilujú napravo od x_0 a ich nulové body sa oddeľujú, pretože $z_1(x) \neq 0$ pre $x > x_0$.

Všetky integrály diferenciálnej rovnice (a), ktoré majú v čísle x_0 nulovú prvú deriváciu, môžeme písať v tvare $c_1y_1 + c_2y_3$.

Veta 1: Nutnou a postačujúcou podmienkou, aby nejaký integrál $y(x)$ diferenciálnej rovnice (a) spĺňal podmienku

$$\text{(3)} \qquad y'(x_0) = y(x_1) = y'(x_1) = 0,$$

je, aby integrál $z_2(x)$ diferenciálnej rovnice (*b*), vlastnosti $z_2(x_0) = z_2''(x_0) = 0$, mal v bode x_1 nulový bod; pritom $x_0 \neq x_1 \in (-\infty, \infty)$.

Dôkaz: a) Nutná podmienka. Nech je $y(x)$ integrálom diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $y'(x_0) = y(x_1) = y'(x_1) = 0$. Tento integrál patrí do množiny integrálov tvaru $c_1y_1 + c_2y_3$, teda $y(x) = \bar{c}_1y_1 + \bar{c}_2y_3$, pritom $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ sú určené z rovníc

$$\bar{c}_1y_1(x_1) + \bar{c}_2y_3(x_1) = 0,$$
$$\bar{c}_1y_1'(x_1) + \bar{c}_2y_3'(x_1) = 0.$$

No tieto rovnice majú riešenie pre $\bar{c}_1$ a $\bar{c}_2$ rôzne od nuly len vtedy, keď je

$$\begin{vmatrix} y_1(x_1), & y_3(x_1) \\ y_1'(x_1), & y_3'(x_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Tento determinant nie je však nič iného než hodnota integrálu $z_2(x)$ diferenciálnej rovnice (b) v bode x_1.

b) Postačujúca podmienka. Predpokladajme, že je $z_2(x_1) = 0$. Potom zrejme rovnice

$$\bar{c}_1y_1(x_1) + \bar{c}_2y_3(x_1) = 0,$$
$$\bar{c}_1y_1'(x_1) + \bar{c}_2y_3'(x_1) = 0$$

majú netriviálne riešenie. Existujú teda konštanty $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ také, že funkcia $\bar{c}_1 y_1 + \bar{c}_2 y_3$ je riešením diferenciálnej rovnice (a) a spĺňa podmienky $y'(x_0) = y(x_1) = y'(x_1) = 0$. Tým sme vetu dokázali.

Veta 2: Nech je $y(x)$ ľubovoľným integrálom diferenciálnej rovnice (a). Potom funkcia $y[x_0 - (x - x_0)] = z(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (b). Naopak, ak $z(x)$ je ľubovoľným riešením diferenciálnej rovnice (b), potom funkcia $z[x_0 - (x - x_0)] = y(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (a).

Dôkaz: Nech je $y(x)$ riešením diferenciálnej rovnice (a). Utvorme si funkciu $y[x_0 - (x - x_0)] = z(x)$. Ukážme, že $z(x)$ vyhovuje diferenciálnej rovnici (b). Ak dosadíme $z(x)$ do rovnice (b), dostaneme:

$$- y''' [x_0 - (x - x_0)] - 2Ay' [x_0 - (x - x_0)] - \Omega y [x_0 - (x - x_0)] =$$

$$= - \{y''' [x_0 - (x - x_0)] + 2Ay'[x_0 - (x - x_0)] + \Omega y[x_0 - (x - x_0)]\} = 0,$$

pretože výraz vo veľkej zátvorke je nula.

Podobne sa dokáže aj druhé tvrdenie našej vety.

Z vety 2 ako dôsledok vyplývajú napr. vzťahy:

$$y_2(x) = k_1 z_2[x_0 - (x - x_0)],\ z_1(x) = k_2 y_1[x_0 - (x - x_0)],$$

kde k_1, k_2 sú vhodné konštanty.

Veta 3: Keď je $y_2(x)$ riešením diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $y_2(x_0) = y_2''(x_0) = 0$, potom je $\int_{x_0}^{x} y_2 \, dx$ aj riešením diferenciálnej rovnice (a) s dvojnásobným nulovým bodom v bode x_0.

Podobne, ak je $z_2(x)$ riešením diferenciálnej rovnice (b) vlastnosti $z_2(x_0) = z_2''(x_0) = 0$, tak je aj $\int_{x_0}^{x} z_2 \, dx$ riešením diferenciálnej rovnice (b) s dvojnásobným nulovým bodom v bode x_0.

Dôkaz: Nech je $y(x)$ ľubovoľným riešením diferenciálnej rovnice (a). Integrujme rovnicu (a) v intervale $\langle x_0, x \rangle$ člen za členom. Dostaneme identitu:

$$y'' + 2Ay + \Omega \int_{x_0}^{x} y \, dx = y''(x_0) + 2Ay(x_0),$$

ktorá pre integrál y_2 znie:

$$y_2'' + 2Ay_2 + \Omega \int_{x_0}^{x} y_2 \, dx = 0. \tag{4}$$

Ukážme teraz, že $\int_{x_0}^{x} y_2 \, dx$ je riešením diferenciálnej rovnice (a). Po dosadení do rovnice (a) dostaneme vzťah (4). Teda skutočne $\int_{x_0}^{x} y_2 \, dx$ je riešením diferenciálnej rovnice (a). Jeho dvojnásobný nulový bod v bode x_0 je zrejmý. Podobným spôsobom sa dokáže aj druhá časť našej vety.

Tvrdenie vety 3 možno stručne napísať takto:

$$y_1(x) = k_1 \int_{x_0}^{x} y_2 \, dx, \quad z_1(x) = k_2 \int_{x_0}^{x} z_2 \, dx,$$

alebo

$$y_2(x) = k_1 y_1'(x), \quad z_2(x) = k_2 \, . \, z_1'(x).$$

II.

O koeficientoch diferenciálnej rovnice (a) budeme v ďalšom predpokladať:
1. Nech $A = A(\lambda)$, $\Omega = \Omega(\lambda)$ sú spojitými funkciami parametra $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$.
2. Nech ďalej $A(\lambda) > 0$, $\Omega(\lambda) > 0$ pre $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ a nech $\lim\limits_{\lambda \to \Lambda_2} A(\lambda) = + \infty$ a pritom $\dfrac{\Omega(\lambda)}{A(\lambda)} \leqq L$, kde $L > 0$ je konštanta nezávislá od λ.

G. Sansone [1] dokázal nasledujúce dve vety:

A. O koeficientoch diferenciálnej rovnice (a) nech platia predpoklady 1, 2, okrem predpokladu $\dfrac{\Omega(\lambda)}{A(\lambda)} \leqq L$. Nech naviac platí $\dfrac{\Omega(\lambda)}{[A(\lambda)]^{\frac{3}{2}}} \leqq \dfrac{2 \log 3}{9\pi}$. Potom k ľubovoľnému číslu $\delta > 0$ existuje také $\lambda_0 \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, že pre $\lambda > \lambda_0 \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ v množine integrálov $y(x, \lambda)$ vlastnosti $y'(x_0, \lambda) = 0$ existuje okrem lineárnej závislosti jeden integrál, ktorý sa anuluje so svojou prvou deriváciou v nejakom ďalšom bode intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$.

B. O koeficientoch diferenciálnej rovnice (a) nech platia predpoklady 1, 2. Nech ďalej x_0, $x_0 + d$ sú dva pevné body, $d > 0$. Potom existuje nekonečne mnoho hodnôt parametra $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ (vlastné hodnoty), ku ktorým patria $y(x, \lambda)$ (vlastné funkcie), ktoré sú riešeniami diferenciálnej rovnice (a) a spĺňajú podmienky

$$y'(x_0, \lambda) = 0, \quad y(x_0 + d, \lambda) = y'(x_0 + d, \lambda) = 0.$$

Teraz vyslovíme vety A a B v znení, v ktorom platia pre diferenciálnu rovnicu (b).

$\overline{\text{A}}$. O koeficientoch $A(\lambda)$ a $\Omega(\lambda)$ nech platia predpoklady vyslovené vo vete A. Potom k ľubovoľnému číslu $\delta > 0$ existuje také $\lambda_0 \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, že pre $\lambda > \lambda_0 \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ v množine integrálov $z(x, \lambda)$ diferenciálnej rovnice (b) vlastnosti $Z'(x_0, \lambda) = 0$ existuje okrem lineárnej závislosti jeden integrál, ktorý sa anuluje so svojou prvou deriváciou v nejakom ďalšom bode intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$.

$\overline{\text{B}}$. O koeficientoch $A(\lambda)$ a $\Omega(\lambda)$ diferenciálnej rovnice (b) nech platia predpoklady 1, 2 tohto odseku. Nech ďalej $x_0 - d$, x_0 sú dva pevné body, $d > 0$. Potom existuje nekonečne mnoho hodnôt parametra $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, (vlastné hodnoty), ku ktorým patria vlastné funkcie $z(x, \lambda)$, ktoré sú riešeniami diferenciálnej rovnice (b) a spĺňajú okrajové podmienky

$$z(x_0 - d, \lambda) = z'(x_0 - d, \lambda) = z'(x_0, \lambda) = 0.$$

Dôkazy viet $\overline{\text{A}}$, $\overline{\text{B}}$ vyplývajú priamo z vety 2.

Veta 4: Za predpokladov 1, 2 tohto odseku existuje nekonečne mnoho hodnôt parametra $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ (vlastné hodnoty), ku ktorým patria vlastné funkcie $y(x, \lambda)$, ktoré sú riešeniami diferenciálnej rovnice (a) a spĺňajú okrajové podmienky

$$y(x_0 - d, \lambda) = y(x_0) = y''(x_0) = 0,$$

kde $d > 0$ je pevné číslo.

Dôkaz: Dôkaz vety vyplýva z viet 1 a 2 a z vety B. Vskutku, z vety B vyplýva existencia nekonečne mnoho vlastných hodnôt parametra $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, ku ktorým patria vlastné funkcie $y(x, \lambda)$ tej vlastnosti, že $y(x, \lambda)$ sú riešeniami diferenciálnej rovnice (a) a spĺňajú okrajové podmienky

$$y'(x_0, \lambda) = y(x_0 + d, \lambda) = y'(x_0 + d, \lambda) = 0.$$

Podľa vety 1 ku každej tejto vlastnej hodnote parametra λ existuje riešenie $z_2(x, \lambda)$ diferenciálnej rovnice (b) vlastnosti $z_2(x_0, \lambda) = z_2''(x_0, \lambda) = z_2(x_0 + d, \lambda) = 0$ a podľa vety 2 funkcia $Y = z_2[x_0(x - x_0), \lambda]$ je riešením diferenciálnej rovnice (a), ktoré spĺňa okrajové podmienky

$$Y(x_0, \lambda) = Y''(x_0, \lambda) = Y(x_0 - d, \lambda) = 0.$$

Týmto sme vetu dokázali.

Literatúra

[1] Sansone G.: Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale. Revista, Mathem. y Fisica teorica, Seria A, p. 198, Tucuman 1948.
[2] Greguš M.: O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, s. 73, Bratislava 1955.

(Do redakcie dodané 16. I. 1957.)

О линейном дифференциальном уравнении третьего порядка с постоянными коэффициентами

М. Грегуш

Выводы

В этой работе занимаемся некоторыми свойствами решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами вида:

(a) $$y''' + 2Ay' + \Omega y = 0$$

и свойствами решений дифференциального уравнения сопряженного с уравнением (a):

(b) $$z''' + 2Az' - \Omega z = 0,$$

где $A > 0$, $\Omega > 0$ постоянные.

В другой части показывается существование собственных значений параметра $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ для дифференциального уравнения (a), в котором $A = A(\lambda)$, $\Omega = \Omega(\lambda)$ непрерывными функциями параметра $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ с некоторыми свойствами. К собственным значениям параметра λ существуют собственные функции $y(x, \lambda)$ этого свойства, что

$$y(x_0 - d, \lambda) = y(x_0, \lambda) = y''(x_0, \lambda) = 0,$$

где $x_0 \in (-\infty, \infty)$, $d > 0$ постоянные величины.

Über die lineare Differentialgleichung der dritten Ordnung mit konstanten Koeffizienten

M. Greguš

Zusammenfassung

In dieser Arbeit behandelt man einige Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Form:

(a) $$y''' + 2Ay' + \Omega y = 0$$

und die Eigenschaften der Lösungen der zu ihr adjungierten:

(b) $$z''' + 2Az' - \Omega z = 0,$$

dabei sind $A > 0$, $\Omega > 0$ Konstanten.

Im zweiten Teil wird die Existenz der Eigenwerten für die Differentialgleichung (a) und für die Randwertaufgabe

$$y(x_0 - d, \lambda) = y(x_0, \lambda) = y''(x_0, \lambda) = 0$$

durchgeführt, wo $x_0 \in (-\infty, \infty)$, $d > 0$ konstante Zahlen sind. Dabei $A = A(\lambda)$, $\Omega = \Omega(\lambda)$ bedeuten für $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ stetige Funktionen mit bestimmten Eigenschaften.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. II, FASC. I-II MATHEMATICA 1957

O jednej Diniho vete

T. ŠALÁT

V teórii konvergentných radov s kladnými členmi dokázal Dini túto zaujímavú vetu: Nech $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 1) je konvergentný rad s kladnými členmi. Nech r_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ značí zvyšok po n-tom člene v rade 1), $r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{r_{n-1}^{\alpha}}$ 2) konverguje pre každé reálne $\alpha < 1$ a diverguje pre každé reálne $\alpha \geqq 1$.

V súvislosti s uvedenou Diniho vetou naskytá sa prirodzená otázka preskúmať „rýchlosť" divergencie radu 2) pri $\alpha \geqq 1$. V tejto poznámke dáme odpoveď na túto otázku v prípade $\alpha = 1$. Z podanej odpovede dostaneme ako jednoduchý dôsledok nový dôkaz klasického vzťahu pre rýchlosť divergencie harmonického radu: $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \log n$.[1])

Bez ujmy na všeobecnosti budeme v ďalšom predpokladať:

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n = 1.^{2)}$$

Veta. Nech $r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n = 1$, $C_n > 0 (n = 1, 2, \ldots)$. *Nech* $\frac{C_k}{r_{k-1}} \to 0$.

Tvrdenie: $\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{r_{k-1}} \sim \log \frac{1}{r_n}$.

Dôkaz: Zo známej Toeplitzovej vety dostávame ako jednoduchý dôsledok[3]) platnosť tohto tvrdenia: Nech $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú dve postupnosti s reálnymi členmi, $\alpha_n > 0 (n = 1, 2, 3, \ldots)$. Položme: $y_n = \alpha_n x_n$, $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Nech $\sigma_n \to +\infty$, $x_n \to \xi$, $-\infty < \xi < +\infty$.

---

[1]) Nech $f(x)$, $g(x)$ sú dve reálne funkcie definované pre všetky dostatočne veľké x; potom $f(x) \sim g(x)$ značí $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. (Hovoríme: f a g sú si asymptoticky ekvivalentné.)

[2]) Keby bolo $r_0 \neq 1$, uvažovali by sme o rade: $1 = \sum_{n=1} \frac{C_n}{r_0}$

[3]) Pozri [1], str. 77.

Tvrdenie:

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots y_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} \to \xi.$$

Podľa predpokladu

$$\frac{C_k}{r_{k-1}} \to 0 \text{ a } \frac{C_k}{r_{k-1}} = \frac{C_k}{C_k + C_{k+1} + \ldots} < 1,$$

preto podľa známych viet z analýzy[4])

$$\frac{\dfrac{C_k}{r_{k-1}}}{\log \dfrac{1}{1 - \dfrac{C_k}{r_{k-1}}}} \to 1, \text{ t. j. } \frac{\dfrac{C_k}{r_{k-1}}}{\log \dfrac{r_{k-1}}{r_k}} \to 1.$$

Označme pre každé $k (k = 1, 2, 3, \ldots)$

$$x_k = \frac{\dfrac{C_k}{r_{k-1}}}{\log \dfrac{r_{k-1}}{r_k}}, \quad y_k = \frac{C_k}{r_{k-1}}, \quad \alpha_k = \log \frac{r_{k-1}}{r_k}.$$

Zrejme $\alpha_k > 0$ pre každé $k (k = 1, 2, \ldots)$ a okrem toho:

$$\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \log \frac{r_0}{r_n} \to + \infty.$$

Preto podľa dôsledku Toeplitzovej vety dostávame:

$$\frac{\dfrac{C_1}{r_0} + \dfrac{C_2}{r_1} + \ldots + \dfrac{C_n}{r_{n-1}}}{\log \dfrac{r_0}{r_1} + \log \dfrac{r_1}{r_2} + \ldots + \log \dfrac{r_{n-1}}{r_n}} \to 1.$$

Po úprave:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{C_k}{r_{k-1}}}{\log \dfrac{r_0}{r_n}} \to 1,$$

t. j.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{r_{k-1}} \sim \log \frac{1}{r_n}.$$

Týmto sme dôkaz vety urobili.

---

[4]) Ak $\mu_n \to 0$, $\mu_n < 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, tak $\dfrac{\mu_n}{\log \dfrac{1}{1 - \mu_n}} \to 1.$

Dôsledok:

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \log n.$$

Dôkaz: Uvažujme o rade:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Pri označení dokázanej vety máme:

$$C_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad r_{k-1} = \frac{1}{k}, \quad \frac{C_k}{r_{k-1}} = \frac{1}{k+1} \to 0.$$

Podľa dokázanej vety:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{C_k}{r_{k-1}} \sim \log \frac{1}{r_{n-1}},$$

t. j.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \sim \log n,$$

a teda:

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \log n.$$

Literatúra

[1] Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 1931.

(Došlo 1. XI. 1956.)

Об одной теореме Диниго

Т. Шалат

Резюме

В известной теореме Диниго о рядах с положительными членами говорится: Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ является сходящимся рядом с положительными членами, пусть $r_k = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+k}$, $(k = 1, 2, 3, \dots)$, $r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n$. В том случае ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{r_{n-1}^{\alpha}}$ является сходящимся для $\alpha < 1$ и расходящимся для $\alpha \geqq 1$.

В этой работе исследуется ,,быстрота'' расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{r_{n-1}}$ и основным результатом работы является теорема: *Пусть:* $1 = r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n, r_k = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+k}\, (k = 1, 2, \dots)$ *Пусть* $\frac{C_n}{r_{n-1}} \to 0$. *В том случае имеет место:* $\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{r_{k-1}} \sim \log \frac{1}{r_n}$. $\Big($*Причем* $f(x) \sim g(x)$ *значит, как обыкновенно,* $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\Big)$.

Простым следствием этой теоремы является доказательство известного соотношения: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \sim \log n$.

Über einen Satz von Dini

T. Šalát

Zusammenfassung

Ein bekannter Satz über die Reihen mit positiven Gliedern von Dini sagt: Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern, $r_k = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+k}$, $(k = 1, 2, \dots)$ und $r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{r_{n-1}^{\alpha}}$ für $\alpha < 1$ konvergent und für $\alpha \geqq 1$ divergent.

In dieser Arbeit studiert man ,,die Schnelligkeit'' der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{r_{n-1}}$ und das Hauptergebnis der Arbeit ist der Satz:

Es sei $1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n = r_0$ *und* $r_k = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+k}\, (k = 1, 2, \dots)$. *Es sei* $\frac{C_n}{r_{n-1}} \to 0$. *Dann gilt:* $\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{r_{k-1}} \sim \log \frac{1}{r_n}$. $\Big($*Dabei* $f(x) \sim g(x)$ *bedeutet wie gewöhnlich:* $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\Big)$.

Eine einfache Folgerung dieses Satzes ist der Beweis der berühmten Beziehung: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \sim \log n$.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. II, FASC. I-II MATHEMATICA 1957

O istých vlastnostiach radov s kladnými členmi

T. ŠALÁT

1.

Nech $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots,$ (1)

je konvergentný rad s kladnými členmi. Nech v postupnosti:

$$[\alpha] = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$$

platí pre každé prirodzené n : $\varepsilon_n = +1$ alebo $\varepsilon_n = -1$. Postupnosť $[\alpha]$ nazveme znamienkovou schémou. Zrejme rad

$$x = [\alpha]\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k a_k = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_k a_k + \ldots \tag{2}$$

je zase konvergentný a pre jeho súčet $S(x) = S([\alpha]\,\xi)$ platí: $|S([\alpha]\,\xi)| \leqq S(\xi)$, kde $S(\xi)$ je súčet radu (1). Znakom X označme množinu všetkých radov (2). X je zrejme nespočetná množina mohutnosti kontinua. Ďalej znakom R_k označme zvyšok po k — tom člene v rade (1).

V práci [2] sa dokázalo, že množina W všetkých čísel $S(x)$, kde $x \in X$ je perfektná; ďalej ak pre všetky prirodzené k platí v rade (1): $a_k \leqq R_k$ 3), potom $W = \langle -A, +A \rangle$, kde $A = S(\xi)$; ak naproti tomu pre všetky prirodzené k platí v rade (1): $a_k > R_k$ 4), tak už W nevypĺňa celkom celý interval $\langle -A, A \rangle$.

V tejto súvislosti je prirodzené položiť si za úlohu preskúmať mieru množiny W. Analogická otázka je riešená v práci [4] pre rady s kladnými klesajúcimi členmi a pre postupnosti (schémy) $[\alpha]$, ktorých členy ε_n sú 0 alebo 1. O miere množiny W hovorí táto veta:

Veta 1a. *Nech v rade (1) platí pre každé prirodzené k: $a_k > R_k$. Potom pre mieru $\mu(W)$ množiny W platí: $\mu(W) = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \cdot R_n$.*

b) *Nech v rade (1) platí pre každé prirodzené k: $a_k \leqq R_k$. Potom pre mieru $\mu(W)$ množiny W platí: $\mu(W) = 2A$.*

Dôkaz. Druhá časť tvrdenia je celkom zrejmá z výsledku už citovaného (pozri [2]). Dokážme prvú časť. V práci [2] sa dokázalo, že množina W vznikne z intervalu $\langle -A, A \rangle$ vynechaním spočetného systému styčných intervalov $\{I\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n\}$, kde $I\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ je otvorený interval s koncovými bodmi $S([\alpha_1]\xi)$ a $S([\alpha_2]\xi)$, kde

$$[\alpha_1]\xi = \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3} - \ldots \tag{5}$$

$$[\alpha_2]\xi = \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n - a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots \tag{6}$$

Pri pevnom danom n existuje 2^n intervalov tohto druhu. Označme znakom W_1 množinu, ktorá vznikne zjednotením všetkých styčných intervalov množiny W. Potom zrejme platí:

$$\mu(W_1) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}(a_{n+1} - R_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n(R_{n-1} - 2R_n),$$

kde $R_0 = S(\xi) = A$. Teda $\mu(W_1) = 2A - \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}R_n$, a tak pre mieru množiny W dostávame:

$$\mu(W) = 2A - (2A - \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}R_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}R_n.$$

Poznámka. Ľahko zistíme, že miera množiny W je menšia než $2A$. Skutočne, $\mu(W_1)$ je kladné číslo, pretože $\mu(W_1)$ je súčet radu s kladnými členmi, a teda $0 < 2A - \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \,.\, R_n$, takže $\mu(W) = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \,.\, R_n < 2A$. Napríklad geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $0 < q < \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$ vyhovuje podmienke 4). a pre množinu W k nemu príslušnú platí:

$$\mu(W) = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \,.\, \frac{q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2q)^{n+1}}{1-q} = 0.$$

Množina W je teda v tomto prípade perfektná množina miery 0.

Ku každému reálnemu číslu α, $0 \leqq \alpha < A$, A je vopred dané, je ľahké zostrojiť rad s kladnými členmi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že A je súčet radu a množina W, príslušná k radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, má mieru rovnajúcu sa číslu 2α. Nech je totiž $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ľubovolná klesajúca postupnosť reálnych čísel s vlastnosťami: $\alpha_n \to \alpha$ a $\alpha_0 = A$. Položme $a_n = \frac{\alpha_{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{\alpha_n}{2^n}$. Zrejme je $a_n > 0$ a $R_n = \frac{\alpha_n}{2^n}$. Podmienka $a_n > R_n$ je ekvivalentná s podmienkou: $\frac{\alpha_{n-1}}{2^{n-1}} > \frac{\alpha_n}{2^{n-1}}$, ktorá je zrejme splnená. Teda pre mieru množiny W platí:

$$\mu(W) = \lim_{n\to\infty} 2\alpha_n = 2\alpha.$$

Je známe,[1]) že pre konvergentný rad s monotónne klesajúcimi členmi platí: $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, kde a_n je n-tý člen radu. Ak spĺňa rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podmienku 4). našej vety, potom dokonca platí:

$$a_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

[1]) Pozri str. 125.

Uvážme totiž, že podľa predošlého existuje limita:

$$L = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \,.\, R_n, \text{ teda } R_n = O\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right), \text{ a preto}$$

$$a_n = R_{n-1} - R_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right) - O\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = O\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

2.

Nech

(7) $$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$$

je divergentný rad s kladnými členmi, $a_k \to 0$. Definujeme pojem znamienkovej schémy ako v predošlom odseku.

V práci [3] sa dokazuje, že ku každému reálnému číslu m existuje nespočetne mnoho znamienkových schém $[\alpha]$ tak, že platí: $S([\alpha]\xi) = m$. Teraz ukážeme platnosť analogickej vety aj pre nevlastné súčty.

Veta 2. *Nech*

(7) $$\xi = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots$$

je divergentný rad s kladnými členmi, $a_k \to 0$. *Potom existuje množina schém* $[\alpha]$ *ktorá má mohutnosť kontinua, taká, že pre každé* $[\alpha]$ *z tejto množiny platí:*

$$S([\alpha]\xi) = +\infty.$$

Dôkaz. Uvažujme o radoch

(8) $$\xi_1 = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2k-1} + \ldots,$$

(9) $$\xi_2 = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2k} + \ldots.$$

Vzhľadom na divergenciu radu (7) je aspoň jeden z radov (8), (9) divergentný. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať divergenciu radu (8). Potom existuje schéma $[\alpha_1]$, pre ktorú platí:
$S([\alpha_1]\xi_1) = +\infty$. Stačí položiť $[\alpha_1] \equiv \{\varepsilon'_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $\varepsilon'_{2k-1} = +1$ pre každé k. Rozoznávajme dva prípady: a) Rad $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ diverguje. b) Rad $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ konverguje. V prípade a) existuje podľa citovaného výsledku práce [3] množina schém $[\alpha_2]$, ktorá má mohutnosť kontinua, taká, že pre každé $[\alpha_2]$ z tejto množiny platí:

$$S([\alpha_2]\xi_2) = 0.$$

Nech

(10) $$[\alpha_1]\xi_1 = \varepsilon_1^{(1)}a_1 + \varepsilon_3^{(1)}a_3 + \ldots + \varepsilon_{2k-1}^{(1)}a_{2k-1} + \ldots,$$

(11) $$[\alpha_2]\xi_2 = \varepsilon_2^{(2)}a_2 + \varepsilon_4^{(2)}a_4 + \ldots + \varepsilon_{2k}^{(2)}a_{2k} + \ldots$$

Zostrojme rad

(12) $$[\alpha]\xi = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots,$$

kde $\varepsilon_n = \varepsilon^{(1)}_{2k-1}$, ak $n = 2k - 1$ a $\varepsilon_n = \varepsilon^{(2)}_{2k}$, ak $n = 2k$. O rade (12) budeme hovoriť, že vznikol zložením radov (10), (11). Rad (12) zrejme diverguje k $+\infty$. Ak totiž označíme znakom $S_n([\alpha_1]\xi_1)$, resp. $S_n([\alpha_2]\xi_2)$ n-tý čiastočný súčet radu (10), resp. (11), podobne $S_n([\alpha]\xi)$ n-tý čiastočný súčet radu (12); potom platí:

$$S_n([\alpha]\xi) = S_{\left[\frac{n}{2}\right]}([\alpha_1]\xi_1) + S_{\left[\frac{n}{2}\right]}([\alpha_2]\xi_2) \text{ pre } n \text{ párne a}$$

$$S_n([\alpha]\xi) = S_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}([\alpha_1]\xi_1) + S_{\left[\frac{n}{2}\right]}([\alpha_2]\xi_2) \text{ pre } n \text{ nepárne.}$$

V obidvoch prípadoch prvý sčítanec vpravo vzrastá podľa predpokladu s rastúcim n do $+\infty$ a druhý konverguje k 0. Ďalej je zrejmé, že dvom rôznym schémam $[\alpha_2]$ zodpovedajú dve rôzne schémy $[\alpha]$. Skutočne, ak $[\alpha_2] \neq [\alpha_2']$, $[\alpha_2] = \{\varepsilon^{(2)}_{2k}\}^{\infty}_{k=1}$, $[\alpha_2'] = \{\varepsilon^{(3)}_{2k}\}^{\infty}_{k=1}$, potom existuje prirodzené číslo k tak, že $\varepsilon^{(2)}_{2k} \neq \varepsilon^{(3)}_{2k}$, a teda rady $[\alpha]\xi$ a $[\alpha']\xi$, vzniknuté zložením radov $[\alpha_1]\xi_1$, $[\alpha_2]\xi_2$, resp. $[\alpha_1]\xi_1$, $[\alpha_2']\xi_2$ sa líšia v znamienku pri člene a_{2k}. V prípade b) je podľa predošlého odseku každý rad
$[\alpha_2]\xi_2 = \varepsilon^{(2)}_2 a_2 + \varepsilon^{(2)}_4 a_4 + \ldots + \varepsilon^{(2)}_{2k} a_{2k} + \ldots$ konvergentný. Ľahko zistíme, že rad $[\alpha]\xi$, ktorý vznikne zložením radov $[\alpha_1]\xi_1$ a $[\alpha_2]\xi_2$, je zase divergentný k súčtu $+\infty$. Ďalej trebá postupovať v dôkaze vety ako v prípade a).

Poznámka. Analogická veta platí aj pre nevlastný súčet $-\infty$.

Literatúra

[1] Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 1931.
[2] Šalát T.: O súčtoch istých konvergentných radov, Mat.-fyz. čas. SAV, IV, 4, 1954, 203—211.
[3] Šalát T.: Poznámky k Riemanovej vete o divergentných radoch, Mat.-fyz. čas. SAV, V, 2, 1955, 94—100.
[4] Kesava Menon P.: On a class of perfect sets, Bull. Amer. Math. Soc. 54, 1948, 706—711.

(Došlo 3. XI. 1956.)

О некоторых свойствах рядов с положительными членами.

Т. Шалат

Резюме

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

будет сходящимся рядом с положительными членами. В первой части этой работы автор исследует меру $\mu(W)$ множества W всех действительных чисел w, которые можно выразить в виде: $w = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, $\varepsilon_n = \pm 1$. Основным результатом этой части является теорема:

а) *Пусть для* $k = 1, 2, \ldots$ *в ряде* (1) *выполнено условие:* $a_k > R_k$, R_k *является остатком ряда* (1) (*после* k *-ого члена*). *Потом имеет место равенство:* $\mu(W) = \lim_{n=\infty} 2^{n+1} . R_n$.

б) *Пусть для* $k = 1, 2, \ldots$ *в ряде* (1) *выполнено условие:* $a_k \leqq R_k$. *Потом имеет место равенство:* $\mu(W) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Во второй части работы автор исследует вопрос, имеющий связь с расходящимися рядами. Доказывается следующая теорема:

Пусть

$$\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots \tag{2}$$

будет последовательностью с членами $\varepsilon_n = 1$ *или* -1, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, $a_n > 0$, $a_n \to 0$.
Утверждение автора: Существует множество последовательностей (2), *имеющее мощность континуа, такое, что для каждой последовательности этого множества имеет место* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = +\infty$.

Подобная теорема имеет место и для $-\infty$. Эти теоремы являются дополнением результатов, полученных автором раньше.

Über einige Eigenschaften der Reihen mit positiven Gliedern

T. Šalát

Zusammenfassung

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern. Im ersten Teil dieser Arbeit studiert man das Maß $\mu(W)$ der Menge W aller derjenigen Zahlen w, welche die Form $w = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ ($\varepsilon_n = +1$ oder $\varepsilon_n = -1$) besitzen. Das Hauptergebnis dieses Teiles der Arbeit ist der Satz:

a) *Es sei für $k = 1, 2, 3, \ldots$ in der Reihe (1) die Bedingung $a_k > R_k$ erfüllt. (Dabei bedeutet R_k den Rest nach den k-tem Glied in (1).) Dann gilt: $\mu(W) = \lim_{n \to \infty} 2^{n+1} . R_n$.*

b) *Es sei für $k = 1, 2, 3, \ldots$ in der Reihe (1) die Bedingung $a_k \leqq R_k$ erfüllt. Dann gilt: $\mu(W) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Im zweiten Teil der Arbeit studiert man eine Frage, welche in Zusammenhang mit divergenten Reihen steht. Der folgende Satz ist bewiesen: *Es sei*

$$(2) \qquad \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3, \ldots \ \varepsilon_n, \ldots$$

eine Folge mit Gliedern $\varepsilon_n = +1$ oder $\varepsilon_n = -1$. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, $a_n > 0$, $a_n \to 0$. Behauptung: Es existiert eine Menge der Folgen (2), welche die Mächtigkeit des Kontinuums hat, daß für jede Folge $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ aus dieser Menge $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = +\infty$ gilt.

Ein ähnlicher Satz auch für $-\infty$ gilt. Diese Sätze sind eine Ergänzung der früheren Ergebnissen des Verfassers.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

je fakultný sborník určený k publikáciám vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých aspirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracovávajú materiál získaný za dobu pobytu na našej fakulte. Redakčná rada vyhradzuje si právo z tohto pravidla urobiť výnimku.

Práce profesorov a docentov nepodliehajú recenzii. Práce ostatných učiteľov musia byť doporučené katedrou. Práce študentov musia byť doporučené študentskou vedeckou spoločnosťou a príslušnou katedrou.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom alebo anglickom, francúzkom alebo nemeckom. Práce podané na publikovanie majú byť písané strojom na jednej strane papiera, ob riadok, tak aby jeden riadok tvorilo 60 úderov a na stránku pripadlo 30 riadkov. Rukopis treba podať dvojmo a upraviť tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide na účet autora.

Rukopis upravte tak, že najprv napíšete názov práce, pod to meno autora s plným titulom. Pracovisko, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracoviska, sa uvádzajú všetky pracoviská. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviskách, treba ich obidve uviesť.

Fotografie načim podať na čiernom lesklom papieri a uviesť zmenšenie a text pod obrázok. Kresby treba previesť tušom na priehladnom papieri (pauzák) alebo na rysovacom papieri a taktiež uviesť zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať rezumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam, publikovaným v cudzom jazyku, načim pripojiť rezumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom v prípade publikácie v ruskom jazyku, alebo v ruskom jazyku v prípade publikácie v jazyku západnom. **Nezabudnite pri rezumé uviesť vždy názov práce a meno autora v rovnakom poradí ako v základnom texte.** Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stlpcové a zlámané korektúry, ktoré treba do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny behom korektúry idú na ťarchu autorského honoráru. Každý autor dostane okrem príslušného honoráru i 50 separátov.

Redakčná rada.

OBSAH