ACTA

FACULTATIS RERUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. I FASC. IV—VI

Göttingen

MATHEMATICA

PUBLICATIO SECUNDA
ACADEMICO JUR HRONEC AB AMICIS
ET DISCIPULIS DEDICATA

7

1956
SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

75-летие академика Ю. Гронца

Академик Юрий Гронец родился 17 мая 1881 в Гочове. Учился в рожнявской гимназии, на которой приобрел аттестат зрелости. После того поступил акад. Гронец на университет в Клужи (Румыния), где и окончил студии в 1906 г. В томже году был назначен профессором гимназии в Кежмарку. Здесь действовал до 1922 г. В 1912 г. получил степень доктора на университете в Гизен (Giesen) а в 1923 г. габилитировал на Карловом университете в Праге. В 1924 г. стал чрезвычайным профессором Чешского техникума в Брне. Королевское чешское научное общество именовало проф. Гронца 1926 г. своим членом-корреспондентом. В шк. г. 1928-29 проф. Гронец был избран деканом инженерно-строительного факультета Чешского техникума в Брне. В 1936 г. стал действительным членом Моравско-силезской академии естественных наук. Проф. Гронец является основателем Словацкого техникума, который трижды избрал его своим ректором. Кроме того является основателем Высокой экономической школы в Братиславе, председателем комиссиц по организации Выс. лесной и сельскохозяйственной школы в Кошицах, организатором и первым деканом педагогического факультета Слов. университета, президентом Слов. Матицы, президентом искусственного и научного совета, президентом Слов. музея, доктором honoris causa педагогических наук Слов. университета и доктором математических наук.

В 1927 г. проф. Гронец заслуженно получил государственный а 1948 г. народный орден. Кроме того был 1955 г. отмечен орденом труда.

В настоящее время проф. Гронец — ведущий профессор математической кафедры факультета естественных наук университета Коменского в Братиславе.

Sborník Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Vydáva Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasinkova 5, čís. tel. 458-51. Povolilo Povereníctvo kultúry čís. 2265/56-IV/1. — Tlač: Brnenské knihtlačiarne, n. p., Brno, ul. 9. května č. 7.

F-118013

Akad. Jur Hronec
*(*17. IV. 1881)*

Akademik J u r H r o n e c *dožíva sa 75 rokov.*

Pred 75 rokmi, 17. mája 1881 narodil sa v malej dedinke Gočovo, okres Rožňava, ako syn maloroľníckých rodičov nestor slovenskej matematiky, nositeľ Rádu práce, akademik Ph Dr., Ped Dr. h. c. Jur H r o n e c, *doktor fyzikálno-matematických vied.*

Keď mal osem rokov, zomrel mu otec a tak len za podpory starších dvoch súrodencov, ktorí vozením dreveného uhlia zarábali na výživu rodiny, dostal sa v trinástich rokoch na gymnázium do Rožňavy. Po matúre, ktorú ukončil s vyznamenaním roku 1902, odišiel na univerzitu do Kluže (t. č. Rumunsko). Tu na neho zapôsobil prof. Schlesinger, rodák z Trnavy, svojimi prednáškami z analýzy, najmä z diferenciálnych rovníc. Tento úsek matematiky stal sa obľubeným v prácach akademika Hronca. Po ukončení univerzitných štúdií r. 1906 dostáva od fakultného profesorského sboru odporúčanie na poskytnutie študijnej podpory grófa Andrašiho z Krásnej Hôrky. Podporu nedostal, a preto na jeseň r. 1906 nastúpil miesto gymnaziálneho profesora na Kežmarské gymnázium. Tu sotrval až do r. 1922. Dva roky šetril, aby v školskom roku 1908—1909 mohol odísť na študijnú dovolenku do Göttingen, pričom doma si musel platiť zástupcu. I v roku 1910—1912 niekoľkokrát študijne navštívil univerzitu v Berlíne, Göttingen a Giessen, kde v auguste 1912 u profesora Schlesingera (ktorý sa tam medzitým presťahoval) robil doktorát. Z týchto rokov pochádzajú práce (1)—(5), z ktorých (4) bola jeho doktorská práca. V roku 1913 znovu navštívil Göttingen. Štúdium v Paríži r. 1914 musel prerušiť pre vypuknutie prvej svetovej vojny. Na jar 1913 ho pozvali za profesora do Springfieldu v USA, ale miesto neprijal.

Za svetovej vojny, odrezaný od svetovej matematickej literatúry, venoval sa pedagogickým problémom. Svoje štúdiá a skúsenosti uverejňuje knižne (6). Okrem toho uverejnil rad ďalších článkov.

V roku 1922 dostáva štátne štipendium a jednoročnú dovolenku. Cez Prahu odišiel do Göttingen a Giessenu. V tomto období vznikajú ďalšie práce z oboru dif. rovníc a systému dif. rovníc (7), (8).

Na popud profesora Sobotku a profesora Petra habilitoval sa v roku 1923 na Karlovej univerzite.

Ako súkromný docent prednášal na universite a súčasne učil na Jiráskovom gymnáziu v Prahe.

Ale už o rok neskôr, v roku 1924, prijíma pozvanie na Čes. vysokú školu technickú v Brne, kde nastupuje miesto mimoriadneho profesora. Hneď na počiatku pobytu vznikajú ďalšie práce (9), (10), (11), (12), z ktorých posledná je zameraná na technicky dôležitý problém.

V roku 1926 je zvolený za dopisujúceho člena Kráľovskej českej spoločnosti náuk. V školskom roku 1928/1929 bol dekanom stavebného odboru Českej vysokej školy technickej v Brne a v tomže roku je menovaný za riadneho profesora. Ďalšie vedecké pojednania (13), (14), (17) sa týkajú najmä dif. rovníc Fuchsovho typu. Vychádza aj jeho prvá vysokoškolská učebnica (16) z oboru algebry a analytickej geometrie.

V roku 1936 ho zvolia za riadneho člena Moravskosliezskej Akademie prírodných vied.

Z oboru diferenciálnych rovníc vydáva ďalšiu vysokoškolskú učebnicu (18), ktorá popri teoretických pojednaniach zameriava sa aj na praktické problémy. Túto knihu vydala Česká matica technická z príležitosti otvorenia vysokej školy technickej v Košiciach v r. 1938, na ktorú vys. školu profesor Hronec je menovaný za bezplatného profesora. Stáva sa jej prvým rektorom. Od 1. marca 1939 celkom na ňu prechádza a ujíma sa vedenia znovu ako druhýkrát zvolený rektor, keď sa škola presťahovala do Turč. Sv. Martina, a napokon začiatkom šk. roku 1939/1940 do Bratislavy.

Obdobie po prechode do Bratislavy vyznačuje sa v živote akademika Hronca ako obdobie veľkého organizačného úsilia na novovznikajúcich vysokých školách. Tak r. 1939 je menovaný za bezplatného profesora Prírodovedeckej fakulty, v r. 1940 organizuje zas ako dekan otvorenie Vysokej školy obchodnej, na jar 1946 je predsedou komisie pre organizovanie Vysokej školy pôdohospodárskej a lesníckej v Košiciach a na jaseň 1946 ako dekan kladie základy Pedagogickej fakulty. Medzitým bol po tretí krát zvolený za rektora Vysokej školy technickej v Bratislave.

V rade článkov osvetľuje poslanie týchto nových škôl, ako i poslanie ich odchovancov.

Akademik Jur Hronec počas 50ročnej pedagogickej práce, z toho 32 rokov na vysokých školách, vykonal veľa záslužnej práce pre slovenské vysoké školstvo, pre výchovu a podporu odborných a vedeckých kádrov mladej matematickej generácie, pre kultúrny rozmach Slovenska, pre utužovanie bratskej spolupráce s českými vedeckými pracovníkmi.

Ako vychovávateľ študujúcej mládeže bol nielen dobrým, svedomitým, ale pritom prísnym učiteľom, ktorý svojimi vysokoškolskými učebnicami vypĺňal medzery v našej literatúre, ale i starostlivý zástanca najubiedenejších. Ešte v roku 1926, keď poznal zlé postavenie slovenskej študujúcej mládeže, zakladá Hronec podporný fond. Tento pomocou podpôr jednotlivcov, miest i bývalých žúp za osobného prispenia prof. Hronca vyplatil za svojho 25ročného trvania takmer 140 000 Kčs.

Význačná je vedecká práca akademika Hronca. Táto v teórii diferenciálnych rovníc, systému dif. rovníc znamená veľký prínos pre svetovú literatúru. Mnohé jeho vedecké pojednania sú uverejnené v zahraničných i domácich časopisoch. Za svoju pedagogickú a vedeckú činnosť ešte v roku 1927 dostáva štátnu cenu a v roku 1948 národnú cenu.

Vyvrcholením jeho vedeckej činnosti bude asi 830 str. dvojdielne Kompendium z teorie obyčajných a parciálnych dif. rovníc (27), (28), z ktorého prvá časť po tieto dni vyšla, druhá je daná do tlače. Obidvoma dielmi vyplní akademik Hronec medzery v našej, ale aj svetovej literatúre.

Ešte roku 1941 vydáva ďalšiu učebnicu z matematickej analýzy (19), ktorá o tri roky vychádza v druhom vydaní a dnes je daná do tlače v treťom rozšírenom vydaní.

Po oslobodení r. 1945 zúčastňuje sa znovu verejného života. V auguste 1945 bol zvolený za predsedu Matice slovenskej a dva dni nato za predsedu Umeleckej a vedeckej rady a v r. 1946 za predsedu Slovenského múzea. V tom istom roku vychádza druhý diel učebnice z matematickej analýzy (21).

V roku 1949 dostáva od Slovenskej univerzity akademický titul „doktor honoris causa pedagogických vied" a na jaseň tohto roku je podpredsedom na sjazde československých a poľských matematikov. Tu predniesol hlavnú prednášku (24) a oznámenie (25) zasa z oboru dif. rovníc. V tom istom roku vychádza druhé vydanie učebnice (23).

Na Sjazde československých matematikov v r. 1955 je znovu podpredsedom sjazdu a predniesol dve oznámenia z teórie obyčajných a parciálnych dif. rovníc (29), (30).

V roku 1950 prešiel ako platený profesor na Prírodovedeckú fakultu, kde pôsobí ako profesor a vedúci matematickej katedry až dodnes.

Pri otvorení Slovenskej akademie vied r. 1953 je prof. Hronec menovaný medzi jej prvými akademikmi.

Za záslužnú vedeckú, pedagogickú a organizačnú prácu z príležitosti sviatku 1. mája 1955 bol mu udelený titul „Nositeľ Rádu práce".

Akademik Hronec stal sa vzorom socialistického vedca, ktorý zostal verný svojmu pôvodu, a preto celú svoju prácu venoval i venuje povzneseniu slovenskej matematiky a kultúry a výchove kádrov oddaných robotníckej triede. Ako nestor slovenských matematikov zostane akademik Hronec vzorom nezištného učiteľa i vedca pracujúceho pre dobro ľudu.

Je naším želaním, aby si akademik Hronec zachoval po ďalšie roky svoju príslovečnú sviežosť ducha, aby mohol naďalej zveľaďovať našu matematickú vedu.

M. Harant, A. Huťa

Vedecké práce akademika prof. dr. J. Hronca

1. *Internationale Luftschiffahrtausstellung in Frankfurt am Main, Karpathen Post, 1909.*
2. *Léghajók (vzducholode), Repülögépek (lietadlá), Tátravidék, 1911.*
3. *Légköri elektromosság az elektron elmélet alapján (Vzdušná elektrina na základe teórie elektrónov), Értesitö, 1912/1913.*
4. *Fuchssche Periodenrelationen für lineare Differentialsysteme, Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, XXVII, 1913, Leipzig.*
5. *Differentialrendszerek két-két sing. pontja között vett integráljai és az azok fundamentalsubstitúcioi közötti összefüggés. Magyar tudományos Akadémia Értesitöje III Oszt., 1913, Budapest.*
6. *Vyučovanie a vyučovacia osobnosť, Nákladom Spolku profesorov Slovákov, Košice, 1923.*
7. *Fuchsové relácie a počet ich členov, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, LII, 1923.*
8. *K teórii diferenciálnych rovníc, Rozpravy akademie věd a umění XXXI, č. 37.*
9. *Fuchsové relácie a omedzené integrály, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, LIV č. 4, 1925.*
10. *K teórii diferenciálnych systémov, Časopis pro pěst. mat. a fyz., LVI, č. 1, 1927.*
11. *Algebraické rovnice pre koefficienty lin. dif. systémov, Časopis pro pěstov. mat. a fyz , LVI, č. 2, 1927.*
12. *Zmeny steny valcovitej nádoby pod tlakom kvapaliny, Technický obzor, R. XXXVI, č. 1, 1928.*
13. *Lineárne dif. systémy riešiteľné hypergeometrickými radmi, Rozpravy druhej triedy České akademie XXXVII, č. 43, 1929.*
14. *Prevedenie Fuchsovho lin. dif. systému druhého rádu na Gaussov dif. systém. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, LVII, 1928.*
15. *Kvadratická plocha so stredovou osou v nekonečnosti, Bratislava, č. 2, roč. VII, 1933.*

16. *Algebraické rovnice a ich použitie na analytickú geometriu,*
Barvič a Novotný, Brno 1932, strán 264.
17. *Diferenciálna rovnica Fuchsovho typu, keď determinujúca rovnica má viacnásobné a v celých číslach sa líšiace korene.*
Technický obzor, Praha, 1938.
18. *Lineárne diferenciálne rovnice obyčajné,*
Česká matice technická, 1938, roč. XLIII, spis č. 184, strán 110, veľký formát.
19. *Diferenciálny a integrálny počet, I. diel,*
Matica Slovenská, Turč. Sv. Martin, 1. vyd. 1941, 2. vyd. 1944.
20. *Matematika a prírodné vedy,*
Kultúrny život. R. 1946.
21. *Diferenciálny a integrálny počet, II diel,*
Matica Slovenská, Turč. Sv. Martin, 1946.
22. *K teórii diferenciálnych systémov,*
Sborník Slovenskej vysokej školy technickej, č. 1, 1948.
23. *Algebraické rovnice a ich použitie v anal. geometrii, II. vyd.*
Matica Slovenská, Turč. Sv. Martin 1949.
24. *Nutné a postačujúce podmienky dif. systémov o dvoch rovniciach, aby tieto nemali body neurčitosti,*
Sborník sjazdu matematikov Poliakov, Čechov a Slovákov v Prahe 1950.
25. *Pevné singulárne body nelineárnych dif. rovníc.*
Sborník sjazdu matematikov Poliakov, Čechov a Slovákov v Prahe 1949.
26. *Konvergencia radov, určených pri riešení Fuchsovej dif. rovnice,*
Sborník Slovenskej vysokej školy technickej, č. 2, Bratislava 1950.
27. *Diferenciálne rovnice, I. diel, str. 370,*
Slovenská akadémia vied 1956.
28. *Parciálne diferenciálne rovnice, str. 450,*
vyjde v Slovenskej akadémii vied.
29. *Nutné a postačujúce podmienky, aby dif. systém o n-rovniciach nemal body neurčitosti,*
Časopis pro pěst. mat. a fyz. 1956.
30. *Normálne tvary parc. dif. rovníc 2-ho rádu o n-nezávislých premenných,*
Časopis pro pěst. mat. a fyz. 1956.
31. *Sur la théorie du systéme différential général à coefficients variables,*
Sborník Prírodovedeckej fak. UK 1956.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. IV-VI MATHEMATICA 1956

K otázce statistické indukce

Prof. Dr J. JANKO, Praha

(Věnováno akademikovi J. Hroncovi k jeho 75. narozeninám)

Dlouhá léta trvá spor o to, zda existují v matematické statistice induktivní závěry, nebo je možno mluviti jen o induktivním reagování na popudy vnějšího světa. Třebaže je to otázka základní důležitosti, nedospěli statistikové k jejímu úplnému vyjasnění a uvedená dvě stanoviska stojí stále nesblížena proti sobě. Tento příspěvek má za cíl objasnění problému a jeho řešení.

R. A. Fisher vychází z tvrzení, že matematická statistika užívá induktivních závěrů a v poslední práci [2], která se týká tohoto sporného bodu, praví, že „*logikové zavádějíce obraty ‚induktivní uvažování' a ‚induktivní úsudek' jsou zřejmě toho názoru, že mluví o postupech myšlenkových padajících do určité míry mimo obor těch, jejichž plné vysvětlení lze dáti pomocí tradičního deduktivního uvažování formální logiky. Deduktivní uvažování speciálně neposkytuje podstatně nového poznatku, nýbrž pouze odhaluje nebo vysvětluje to, co je implikováno v přijaté axiomatické základně. V ideálním případě by se to snad mělo provesti mechanicky. Aby se přidaly nové prvky našim theoretickým znalostem, musí se užíti funkce induktivního uvažování ve spojení s porozovanými daty. Bylo známo po staletí, že takový proces existoval a byl v normálním myšlení možný. Že může býti dáno nyní analytické vysvětlení, které vyhovuje a je úplné asi tak jako vysvětlení dané tradičně z deduktivních postupů, to souvisí s nejnovějším rozvojem statistické vědy.*"

Naproti tomu Jerzy Neyman [3] popírá existenci induktivního uvažování a definuje především pravidlo induktivního způsobu reagování na popudy vnějšího světa takto: Nechť posloupnost $\{E_i\}$ obsahuje všechny možné různé výsledky pozorování určitého jevu a nechť $\{a_i\}$ jsou všechny různé akce zamýšlené ve spojení s těmito jevy. Předpisuje-li určité pravidlo δ jednoznačné vybrání akce pro každý možný výsledek E_i, pak je to pravidlo induktivního způsobu reagování na popudy vnějšího světa. Tato velmi obecná definice nežádá, aby výsledky E_i byly nutně náhodné, jaké bereme v úvahu v matematické statistice. Nechť je tedy δ určité pravidlo induktivního způsobu reagování, které se vztahuje na určitý náhodný jev, pokus s různými možnými výsledky E_i a nechť a_i jsou různé akce předepsané tímto pravidlem. Pak je tímto pravidlem stanovena statistická rozhodovací funkce $a(E)$, která vyjadřuje korespondenci mezi možnými výsledky pozorování a akcemi, které se mají vykonat podle pravidla δ.

Takový je dnešní stav otázky statistické indukce a nasvědčuje zmatku v užívání pojmu indukce a dedukce, který se pokusíme odstranit. Za tímto účelem si ujasníme postup, kterým studuje určitý úsek reálného světa výzkumník, užívající matematické statistiky. Vyjde z dotyčného úseku a cestou zcela theoretickou dospěje k určitým závěrům o reálném světě. Prvním krokem je postup abstrakce reálného světa, pak proces logického usuzování k abstraktnímu závěru a návrat k reálnému světu postupem interpretace, která poskytuje závěry s fysikálním smyslem.

Vedle této cesty existuje k fysikálním závěrům druhá cesta a ta pracuje jen se systémem předmětů, kterou může vědecký pracovník dojít přímo k fysikálním závěrům procesem pokusu. Všimneme si obou cest blíže a prozkoumáme zvláště cestu pokusu, čímž se dostaneme k jádru sporné otázky.

V období posledních 25 let má pro pokrok v matematické statistice základní důležitost užití nových method ryzí matematiky, které umožnily od základu nové a matematicky přesné vybudování theorie pravděpodobnosti sovětskými matematiky, hlavně Kolmogorovem [1], jehož systém axiomů se považuje dnes za nejvhodnější.

Theorie pravděpodobnosti má dáti matematický popis (model), systém a rozbor určitého úseku reálného světa čili určitého oboru zkušenosti, která zahrnuje náhodné hromadné jevy. Je tedy theorie pravděpodobnosti tou částí matematiky, která popisuje náhodné hromadné čili statistické jevy.

Můžeme si představit, že pozorování spočívá v tom, že provádíme řadu opakovaných měření určité fysikální konstanty. Methoda měření je stále stejná a podstatné vnější podmínky se udržují pokud možno stejné. Výsledky měření nejsou obecně stejné přes všechna taková opatření. Tento jev se vysvětluje účinkem velikého počtu činitelů, jejichž rušivý vliv je malý a celkový vliv se projeví v chybě každého jednotlivého měření. Velikost této chyby se mění nepravidelně od jednoho pozorování k druhému, takže není možno předpokládat určitý výsledek jednotlivého měření.

Bereme-li na př. v ocelárně vzorek každé tavby a měříme jeho tvrdost, tažnost, procento uhlíku, síry a fosforu, dostaneme jako výsledek každého pozorování pět čísel; každé číslo se pro jednotlivé tavby mění, ačkoliv kvalita výrobku je určena jedním předepsaným výrobním postupem. Jestliže malé nekontrolovatelné změny ve výrobním postupu a v jakosti surovin spojí své vlivy, způsobí v konečném výrobku nepravidelné změny, které mohou býti značné a vésti k nepravidelným odchylkám od objektivní předpokládané hodnoty. Tím se stává přesné předpovídání výsledků jednotlivých pokusů nemožným; situace se však úplně změní, obrátíme-li pozornost od jednotlivých pozorování k celé jejich posloupnosti. Místo nepravidelného chování se individuálních výsledků ukazuje se překvapující stálost průměrných výsledků dlouhých posloupností náhodných pokusů. Tato stálost čili pravidelnost je základnou matematické theorie statistiky.

Jakmile se najde v určité skupině pozorovaných jevů stopa stálosti, je možno přistoupit k pokusu formovat matematickou theorii, kterou je pak možno považovat za matematický model tělesa empirických skutečností, tvořeného pozorovanými daty. Ryzí theorie, která vytváří tento matematický model, patří zcela do oblasti pojmů a zabývá se abstraktními předměty, které jsou úplně definovány vlastnostmi vyjádřenými v axiomech. Věty odvozené theorií jsou přesně správné pro tyto abstraktní předměty, ale nemohou býti pravdivé s logického hlediska, neboť se týkají jen soudů logických, které nemohou býti pravdivé, nýbrž jen správné.

Je tedy třeba vytvořit matematický systém, t. j. na základě zkušeností několika století vytvořit sjednocení těch vlastností a vztahů, které by ve vhodném tvaru tvořily axiomatický systém. Není úlohou počtu pravděpodobnosti definovat formálně pravděpodobnost případů, nýbrž jest vycházeti z pravděpodobnosti některých případů a z toho usuzovat na pravděpodobnosti jiných složitých případů a předvídat (pomocí interpretace) v hlavních rysech průběh náhodných jevů.

Axiomatisaci theorie pravděpodobnosti je možno prováděti různými způsoby a tyto různé možnosti se vztahují jednak na volbu axiomů, jednak na základní pojmy a vztahy. Jestliže se sleduje jako cíl co nejjednodušší systém axiomů, a na něm spočívající theorie, pak se jeví nejúčelnějším axiomatisovat pojem náhodného jevu a jeho pravděpodobnosti. Byly vytvořeny také jiné systémy počtu pravděpodobnosti, a to takové, kde pojem pravděpodobnosti nepatří k základním pojmům, nýbrž je vyjádřen jinými pojmy, jak to udělal Mises a S. Bernstein, kteří sledovali jiný cíl, totiž co největší přimknutí matematické theorie na empirický vznik pojmu pravděpodobnosti.

Při sestrojování určitého modelu pro daný systém předmětů je jedním z nejnesnadnějších úkolů pokusit se o rozdělení jevů ve dvě části: totiž tu část, kterou abstrahujeme do základních axiomů abstraktního systému, a tu část, kterou přesunujeme do fysikálních závěrů a kterou reservujeme jako zálohu proti interpretacím závěrů odvozených z abstraktního systému. V daném systému předmětů není jediného dělení jevů; které dělení se provede, závisí na tvořivé obrazivosti konstruktéra modelu. Existují ovšem modely v přírodních vědách, pro které nejsou koreláty experimentálně verifikované nebo verifikovatelné v reálném světě pro nedefinované prvky, vztahy a operace v abstraktním modelu. Podobná situace je na straně abstraktního systému, totiž je často možné v daném abstraktním systému zaměnit role určitých axiomů a vět. Není tudíž v daném systému jediná methoda rozštěpení matematických tvrzení na axiomy a věty.

Když dospějeme cestou matematických soudů k matematickým závěrům, musíme je zobrazit do předmětného systému cestou interpretace. Zde vytvořila matematická statistika systém velikého množství rozhodovacích kriterií, který analysuje výsledky matematických soudů tak, že theoretická interpretace nabývá formy přijetí nebo zamítnutí tvrzení, jež se týká původní theorie.

Schema cest, jimiž dospíváme k závěrům o reálném světě [4]

Cesta logického usuzování:	Cesta pokusu:
Úsek reálného světa	Úsek reálného světa
theoretická abstrakce	*experimentální abstrakce*
Matematický systém	Rozvrhování pokusu
matematické usuzování	*provádění pokusu*
Matematické závěry	Pozorování
theoretická interpretace	*statistická interpretace*
Fysikální závěry	Fysikální závěry
Vyhodnocení	Vyhodnocení

Druhá cesta od reálného světa k fysikálním závěrům, cesta pokusu, potřebuje hlubšího prozkoumání. Při konstrukci theorie se obyčejně dá vědecký pracovník do vytváření modelu, když má k disposici mnoho skutečností. Toto množství dat, které obsahuje všechnu numerickou informaci dosažitelnou o studovaném jevu, musí býti matematicky zpracováno, což bylo umožněno pokrokem ke správnějším a přesnějším methodám početním. Tím byl umožněn vznik nové theorie t. zv. rozvrhování pokusů, která poskytuje pomoc výzkumníkům, aby dostali data úplnější a přesnější a vyhnuli se plýtvání námahou při akumulaci špatně plánovaných nebo nerozhodných pozorování. Na základě výsledků, které vyplynuly z interpretace modelu, je možno založit vhodně rozvrh pokusu.

Když byl proveden správně pokus, jsou tu výsledky pozorování, které tvoří zpravidla určitý typ náhodného výběru. Tyto výsledky je třeba interpretovati, t. j. dospět k fysikálním závěrům obecně platným. To vyžaduje usuzování z pozorovaného výběru na celý základní soubor, z něhož byl výběr vzat, usuzování z důsledků na příčiny nebo od zvláštního k obecnému.

Ve zmíněném intervalu 25 let byl učiněn velký pokrok v záležitosti interpretace pozorovaných dat. Vyrostla nová theorie, jejíž název je předmětem sporu, statistická indukce, pomocí níž lze zobecňovat speciální výsledky. Dostane-li výzkumník určitý výsledek jednoho nebo několika pokusů, vysloví domněnku, že tento výsledek může býti charakteristickým pro celou skupinu možných pokusů. Domněnka nebo hypothesa se obyčejně ověřuje provedením jiných pokusů; je pak potvrzována nebo vyvracena. Nástroje statistické indukce umožňují stanovit spolehlivost výzkumníkových závěrů pomocí pravděpodobnostních tvrzení a rozhodnout, zda to množství experimentálních dat stačí k theoretickým závěrům nebo pro usměrnění praktické činnosti.

K ověření určitých vět matematické theorie, na př. limitních zákonů, jsou vytvořeny systematické testy. Shledáme-li pomocí nich, že ověřitelné důsledky určité theorie se skutečně shodují s dostatečnou přesností s dosažitelnými empirickými fakty, můžeme se s jistou spolehlivostí domnívat, že je tu podobnost mezi matematickou theorií a strukturou reálného světa.

K vyhodnocení modelu se dochází srovnáváním fysikálních závěrů s těmi, které byly vyvozeny abstraktní cestou. Očekává se pak v důsledku zjištěné stálosti, že shoda mezi theorií a zkušeností potrvá v budoucnosti, a je možno spolehnouti se, že můžeme své jednání řídit na základě tohoto očekávání.

Můžeme nyní přistoupit k vysvětlení, proč vzniká zmatek v užívání pojmu indukce a dedukce. Viděli jsme, že statistik dospívá k fysikálním závěrům dvojí cestou, která zahrnuje celé poznávání. Jestliže se o něm jako celku usuzuje, pak je jasné, že nelze rozhodnout, zda postupuje indukcí nebo dedukcí. Je však třeba rozlišit poznávání empirické, t. j. poznávání systému předmětného a poznávání racionální, t. j. poznávání myšlenkového řádu a pak se situace vyjasní. Poněvadž indukcí se rozumí vždycky nějaká zkušenost, nemá smyslu rozlišovat indukci a dedukci při myšlení logickém čili při poznávání racionálním; toto myšlení nedává žádné zkušenosti. Pokud jsme tedy v oblasti matematického systému, jedná se o posuzování myšlenkového řádu a odkrývání jen jeho vztahů. Má tudíž smysl rozlišovat indukci a dedukci jen v poznávání empirickém. Je však důležité si uvědomit, že empirické poznatky získáváme dvojím způsobem. Je to jednak přímé pozorování, t. j.

první stupeň poznání (počitky), kde nemůže býti řeči ani o indukci ani o dedukci, jednak úsudek, který může býti deduktivní nebo induktivní. Opírá-li se empirický úsudek jen o přínos myšlenkový, je to úsudek deduktivní. Kdežto induktivní je úsudek tehdy, když se opírá také o přínos ze zkušenosti, z pozorování. Provádíme tedy při interpretaci výsledků pokusu úsudky induktivní. Má-li Neyman na mysli, že cílem celého procesu poznávání není jen odhalit a pochopit zákonitosti reálného světa, nýbrž také využít poznaných zákonitostí k aktivnímu přetváření světa, pak se v této fázi teprve jedná o induktivní reagování na popudy vnějšího světa. Jinak by byl celý spor jen záležitostí terminologickou.

Souhrn

Otázka, zda existují v matematické statistice induktivní závěry nebo je možno mluviti jen o induktivním reagování na popudy vnějšího světa, je v tomto příspěvku řešena pomocí rozboru obou cest, jimiž dospíváme k závěrům o reálném světě, tedy cesty logického usuzování a cesty pokusu. Obě cesty zahrnují celé poznávání. Usuzuje-li se o něm jako celku, nelze rozhodnout, zda postupuje indukcí nebo dedukcí. Je třeba rozlišit poznávání empirické a racionální. Nemá smyslu rozlišovat indukci a dedukci při poznávání racionálním čili v oblasti matematického systému, nýbrž při poznávání empirickém. Opírá-li se empirický úsudek jen o přínos myšlenkový, je to úsudek deduktivní, kdežto induktivní je tehdy, když se opírá také o přínos ze zkušenosti, tedy z pozorování. Provádíme tedy při interpretaci výsledků pokusu úsudky induktivní.

Literatura

[1] Kolmogorov: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung 1933.
[2] Fisher R. A.: Statistical methods and scientific induction — Journal of the Royal Statistical Society, series B, *17*, Nol, 1955.
[3] Neyman J.: First course in probability and statistics 1950.
[4] Thrall, Coombs, Davis: Decision processes. 1954.

Do redakcie došlo 29. III. 1956

К вопросу статической индукции

Проф. Др. Янко, Прага

Резюме

Вопрос, существуют-ли в математической статистике индуктивные заключения, или возможно-ли говорить только об индуктивной реакции на побуждения внешнего мира решен в этой статье с помощью разбора обоих путей, которыми приходим к заключениям о реальном мире, т. е. пути логического суждения и пути эксперимента. Оба пути заключают в себе всё познавание. Если судится о нем, как целом, нельзя пешить поступает-ли индукцией или дедукцией. Требуется различить познавание эмпирическое и рациональное. Не имеет смысла различать индукцию и дедукцию при рациональном познавании в области математической системы, но при познавании эмпирическом.

Если эмпирическое суждение опирается только о мыслительный вклад, то это суждение является дедуктивным, причем индуктивным бывает тогда, если опирается о вклад из опыта — значит из наблюдения.

При интерпретации результатов экспериментов проводим (применяем) индуктивные суждения.

On the Question of Statistical Induction

Prof. Dr. J. Janko

(Abstract)

The question whether in mathematical statistics there exist inductive conclusions, or if it is possible to speak only of inductive behaviour towards the impulses of the outside world is solved in this study, with the help of an analysis of both methods by which we arrive at conclusions on the real world, e. g. by methods of logical inferences, and of experiment. Both ways imply the whole cognition. If we consider it as a whole, it is not possible to decide whether it proceeds by induction or by deduction. It is necessary to differentiate between empirical and rational cognition.

It is not necessary to differentiate between induction and deduction in the process of rational cognition, or, in the sphere of mathematical system, but only in the process of empirical cognition. If an empirical inference is based on an abstract contribution it means that the inference is deductive, but on the other hand, it is inductive if it is based also on a contribution from experience, it means from observation. When interpreting the results of an experiment we use therefore the inductive inferences.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. IV-VI MATHEMATICA 1956

Über eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze für Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$

O. BORŮVKA, Brno

(Gewidmet dem Herrn Professor Dr. J. Hronec zu seinem 75. Geburtstage)

1. Für die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

kennt man bekanntlich eine Reihe von Eindeutigkeitssätzen, die hinreichende Bedingungen für die Unizität von Integralen in einem gegebenen Punkte beschreiben. Meistens werden diese Bedingungen durch Angabe von geeigneten Majoranten der Funktion $f(x, y_2) - f(x, y_1)$ oder deren absoluten Wertes dargestellt.[1]) Diese Sonderstellung der Differenz scheint zwar methodisch, nicht aber sachlich berechtigt zu sein, da die Betrachtung von anderen, dem Felde der Differentialgleichung angepaßten Funktionen von $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$ in einzelnen Fällen sehr nützlich sein kann. Ich werde nun eine in diesem Sinne weitgehende Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze angeben. Die Resultate und Beweismethode lassen sich unschwer auf Systeme von expliziten Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen. Ich werde mich jedoch der Kürze der Bezeichnungen halber auf eine Differentialgleichung, und wie üblich, auf die Verhältnisse rechts vom betrachteten Punkt beschränken.

2. Vorbereitung zum Hauptsatz.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$z' = G(x, z) \tag{A}$$

in dem Bereich

O: $\quad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \qquad -c \leqq z \leqq c \qquad (a, c > 0).$

Wir setzen voraus, daß die Funktion G im Bereich O stetig ist.

Es sei M eine Zahl, $M \geq$ Max $|G|$ im Bereich O, und ferner $\alpha =$ Min $(a, c : M)$ oder $\alpha = a$ jenachdem $M > 0$ oder $M = 0$ ist.

Die aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehenden Integrale der Differentialgleichung (A),

[1]) Eine bemerkenswerte Ausnahme bildet das unlängst von L. Markus entdeckte Kriterium. (A uniqueness theorem for ordinary differential equations involving smooth functions. Proc. Amer. Math. Soc., 4 [1953], 88.)

deren rechte Enden am Rande des Bereiches O gelegen sind,[2]) existieren wenigstens im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$.

Wir bezeichnen mit Z das aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende Maximalintegral der Differentialgleichung (A), dessen rechtes Ende am Rande des Bereiches O gelegen ist. Dieses Integral existiert wenigstens im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$.

Wir betrachten nun eine aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende und im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ definierte Unterfunktion z bezüglich der Differentialgleichung (A).

Diesen Begriff meinen wir im folgenden Sinne:

z ist eine der Anfangsbedingung $z(\xi) = 0$ genügende, im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ definierte und stetige Funktion, die daselbst fast überall die Differentialungleichung

$$Dz(x) \leqq G[x, z(x)] \tag{1}$$

erfüllt.

D bedeutet die untere (immer) links- oder rechtsseitige Derivierte und das Wort *fast* das Zulassen einer höchstens abzählbaren Menge von Ausnahmen.

Natürlich gelten für alle $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ die Beziehungen $-c \leqq z(x) \leqq c$.

Wir werden zeigen, daß *in dieser Situation für alle* $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ *die folgende Ungleichung besteht*

$$z(x) \leqq Z(x). \tag{2}$$

Zu diesem Zweck betrachten wir die Differentialgleichung

$$z' = \overline{G}(x, z) \tag{$\overline{\text{A}}$}$$

in dem Bereich

$\overline{\text{O}}$: $\qquad \xi \leqq x \leqq \xi + \alpha; \qquad -\infty < z \leqq c,$

wobei die Werte der Funktion $\overline{G}$ für jedes $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ in folgender Weise definiert sind:

$$\overline{G}(x, z) = \begin{cases} G(x, z) & \text{für } \; z(x) \leqq z \leqq c; \\ G[x, z(x)] & \text{für } \; -\infty < z \leqq z(x). \end{cases}$$

Die Funktion $\overline{G}$ ist im Bereich $\overline{\text{O}}$ stetig und erfüllt daselbst die Ungleichung $|\overline{G}| \leqq M$.

Die aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehenden Integrale der Differentialgleichung ($\overline{\text{A}}$), deren rechte Enden am Rande des Bereiches $\overline{\text{O}}$ gelegen sind, existieren wenigstens im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$.

Es sei $\bar{z}$ ein aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehendes und im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ definiertes Integral der Differentialgleichung ($\overline{\text{A}}$).

Auf Grund der Beziehung (1) folgt mittels klassischer Schlußweise[3]) die für $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ bestehende Ungleichung

$$z(x) \leqq \bar{z}(x).$$

---

[2]) D. h. die in kompakten Intervallen $[\xi, \xi_1]$, $\xi < \xi_1$, definierten Integrale z von der Beschaffenheit, daß die rechten Enden $(\xi_1, z(\xi_1))$, sonst aber keine anderen Punkte der entsprechenden Integralkurven am Rande des Bereiches liegen.

[3]) S. z. B. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale. Parte seconda.* Bologna (1941), 98.

Dieselbe enthält, daß die Funktion $\bar{z}$ ein Integral der Differentialgleichung (A) darstellt. Folglich gilt für alle $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ die Beziehung

$$\bar{z}(x) \leqq Z(x)$$

und somit auch die Ungleichung (2).

3. Der Hauptsatz.

Wir betrachten die folgende Situation:
Gegeben ist die Differentialgleichung:

$$y' = f(x, y) \tag{α}$$

in dem Bereich

$$\Delta: \qquad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \qquad \eta - b \leqq y \leqq \eta + b \qquad (a, b > 0).$$

Wir nehmen an, daß wir zu der Differentialgleichung (α) zwei Funktionen φ, Φ von drei Veränderlichen haben, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Funktion $\varphi(x; u, v)$ ist in dem Bereich

$$\omega: \qquad \xi < x \leqq \xi + a; \qquad \eta - b < u \leqq v < \eta + b$$

definiert und von folgender Beschaffenheit:

a) ihr Wert in jedem Punkt $(x; u, v) \in \omega$ ist positiv oder Null, jenachdem $u < v$ oder $u = v$ ist;

b) sie ist im Bereich ω stetig und besitzt daselbst stetige partielle Ableitungen φ'_x, φ'_u, φ'_v;

c) es gilt die Beziehung

$$\lim_{x \to \xi +} \varphi[x; u(x), v(x)] = 0$$

für beliebige, vom Punkt (ξ, η) ausgehende und den Ungleichungen $\eta - b < u(x) \leqq v(x) < \eta + b$ genügende Integrale u, v der Differentialgleichung (α).

2. Die Funktion $\Phi(x; u, z)$ ist im Bereich

$$\Omega: \qquad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \qquad \eta - b \leqq u \leqq \eta + b, \qquad 0 \leqq z < +\infty$$

definiert und von folgender Beschaffenheit:

a) sie ist im Bereich Ω stetig;

b) im Bereich ω gilt die Ungleichung:

$$\varphi'_x(x; u, v) + \varphi'_u(x; u, v) f(x, u) + \varphi'_v(x; u, v) f(x, v) \leqq \Phi[x; u, \varphi(x; u, v)].$$

In dieser Situation gilt der folgende, für die erwähnte Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze grundlegende Hauptsatz:

Zu je zwei beliebigen vom Punkt (ξ, η) ausgehenden, im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definierten und den Ungleichungen $\eta - b < u(x) \leqq v(x) < \eta + b$ genügenden Integralen u, v der Differentialgleichung (α), gibt es eine rechts von ξ gelegene Umgebung $(\xi, \xi + \alpha]$, $0 < \alpha \leqq a$, in der das vom Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende Maximalintegral Z der Differentialgleichung

$$z' = \Phi\,[x; u(x), z] \tag{β}$$

existiert und die Ungleichung

$$\varphi[x;u(x), v(x)] \leqq Z(x)$$

besteht. Wenn die Funktion φ im Bereich ω (von oben) beschränkt ist, so hängt diese Umgebung von der Wahl der Integrale u, v nicht ab.

Ersichtlich ist die Differentialgleichung (β) in dem Bereich

Ω': $$\xi \leqq x \leqq \xi + a; \qquad 0 \leqq z < +\infty$$
definiert.

Beweis. Es seien $u(x)$, $v(x)$ zwei beliebige vom Punkt (ξ, η) ausgehende, im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definierte und den Ungleichungen $\eta - b < u(x) \leqq \leqq v(x) < \eta + b$ genügende Integrale der Differentialgleichung (α).

Wir betrachten die im Intervall $[\xi, \xi + a]$ folgendermassen definierte Funktion z:

$$z(\xi) = 0; \qquad z(x) = \varphi[x;u(x), v(x)] \text{ für } x \in (\xi, \xi + a].$$

Die Funktion z nimmt nur nicht negative Werte an [1a)]; dieselbe ist im Intervall $[\xi, \xi + a]$ stetig [1b), c)] und besitzt für $x \in (\xi, \xi + a]$ die Ableitung $z'(x)$ [1b)]; ferner gilt für $x \in (\xi, \xi + a]$ die Ungleichung

$$z'(x) \leqq \Phi[x;u(x), z(x)] \tag{1}$$
[2b)].

Wir bilden nun mittels der Funktion Φ die folgende Differentialgleichung (A), um für dieselbe und die Funktion z die in der N° 2 betrachtete Situation zu schaffen.

Die Funktion z nimmt im Intervall $[\xi, \xi + a]$ ein nichtnegatives Maximum an; dasselbe hängt im allgemeinen von der Wahl der beiden Integrale u, v ab. Wir wählen eine dieses Maximum übersteigende Zahl $c > 0$; falls die Funktion φ im Bereich ω beschränkt ist, so wählen wir c größer als die obere Grenze von φ in ω. Sodann haben wir für $x \in [\xi, \xi + a]$ die Ungleichungen

$$0 \leqq z(x) < c. \tag{2}$$

Es sei M das Maximum von $|\Phi|$ in dem Teil $z \leq c$ von Ω, und ferner $\alpha = \operatorname{Min}(a, c:M)$ oder $\alpha = a$ jenachdem $M > 0$ oder $M = 0$ ist.

Wir bilden die Differentialgleichung

$$z' = G(x, z) \tag{A}$$

in dem Bereich

O: $$\xi \leqq x \leqq \xi + a; \qquad -c \leqq z \leqq c,$$

wobei die Funktion G für jedes $x \in [\xi, \xi + a]$ folgendermassen definiert ist:

$$G(x, z) = \begin{cases} \Phi[x;u(x), z] & \text{für} \quad 0 \leqq z \leqq c; \\ \Phi[x;u(x), 0] & \text{für} \quad -c \leqq z \leqq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Aus den Formeln (2), (3), (1) entnehmen wir, daß $z(x)$ eine aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende, im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definierte Unterfunktion bezüglich der Differentialgleichung (A) darstellt.

Die aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehenden Integrale der Differentialgleichung (A), deren rechte Enden am Rande des Bereiches O gelegen sind, existieren wenigstens im Interwall $[\xi, \xi + \alpha]$.

Wir bezeichnen mit Z das aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende Maximalintegral der Differentialgleichung (A), dessen rechtes Ende am Rande des Bereiches O gelegen ist. Dieses Integral existiert wenigstens im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$.

Wir haben nun bezüglich der Differentialgleichung (A) und der Funktion z die in der N°2 betrachtete Situation. Folglich bestehen für alle $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ die Ungleichungen

$$0 \leqq z(x) \leqq Z(x) \leqq c, \tag{4}$$

wobei im letzten Glied das Gleichheitszeichen nur für $x = \alpha$ gelten kann.

Wir sehen, daß es zur Vollendung des Beweises genügt zu zeigen, daß Z im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ das aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende Maximalintegral der Differentialgleichung (β) darstellt.

Aus den formeln (4), (3) entnehmen wir, das Z ein aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehendes und wenigstens im Interval $[\xi, \xi + \alpha]$ definiertes Integral der Differentialgleichung (β) darstellt.

Wir nehmen an, es gäbe ein aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehendes, in einer Umgebung j rechts von ξ definiertes und für ein $x_1 \in (\xi, \xi + \alpha)$ der Ungleichung $\zeta(x_1) > Z(x_1)$ genügendes Integral ζ der Differentialgleichung (β). Sodann haben wir für einen Wert $x_0 \in [\xi, x_1)$ die Beziehungen

$$\zeta(x_0) = Z(x_0); \qquad \zeta(x) > Z(x) \quad \text{für} \quad x \in (x_0, x_1].$$

Wir betrachten die im Intervall $[\xi, x_1]$ definierte Funktion $\bar{\zeta}$:

$$\bar{\zeta}(x) = \begin{cases} Z(x) & \text{für} \quad x \in [\xi, x_0], \\ \zeta(x) & \text{für} \quad x \in [x_0, x_1]. \end{cases}$$

Im Fall $\xi = x_0$ liest man natürlich in diesen Formeln nur die zweite Zeile.

Die Funktion $\bar{\zeta}$ ist offenbar ein aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehendes, im Intervall $[\xi, x_1]$ definiertes Integral der Differentialgleichung (β).

Dieses Integral $\bar{\zeta}$ nimmt den Wert c nicht an. In der Tat, anderfalls stellt ein geeigneter, in einem kleineren Intervall als $[\xi, \xi + \alpha]$ definierter Teil von $\bar{\zeta}$ ein aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehendes Integral der Differentialgleichung (A) dar, dessen rechtes Ende am Rand des Bereiches O gelegen ist. Ein solches Integral gibt es jedoch nicht, da jedes aus $(\xi, 0)$ ausgehende Integral von (A), dessen rechtes Ende am Rand des Bereiches O liegt, wenigstens im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ existiert.

Folglich ist die Funktion $\bar{\zeta}$ ein aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehendes, im Intervall $[\xi, x_1]$ definiertes Integral der Differentialgleichung (A). Dieses Integral erfüllt die Ungleichung $\bar{\zeta}(x_1) > Z(x_1)$, die jedoch der Maximaleigenschaft von Z widerspricht.

Wir sehen, daß Z in dem Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ das aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende Maximalintegral der Differentialgleichung (β) darstellt und der Beweis ist fertig.

Zusatz. Ursprünglich habe ich den Hauptsatz unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen, daß die Funktion φ im bezug auf v für beliebige Werte von $x \in (\xi, \xi + a]$, $u \in (\eta - b, \eta + b)$ wachse. Auf die Möglichkeit des Fortlassens dieser Voraussetzung im Zusammenhang mit Betrachtung von Unterfunktionen wurde ich in einer Diskussion von der Fr. Doz. S. Mikolajska in Krakau aufmerksam gemacht.

4. Der Eindeutigkeitssatz.

Es sei die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \tag{α}$$

in dem Bereich

$$\Delta: \qquad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \quad \eta - b \leqq y \leqq \eta + b \qquad (a, b > 0)$$

gegeben.

Wir setzen voraus, daß es zu der Differentialgleichung (α) zwei Funktionen φ, Φ von drei Veränderlichen gibt mit den in dem Hauptsatz beschriebenen Eigenschaften 1a), b), c) und 2a), b). Wir übernehmen auch die Bezeichnung der Zahlen c, M, α, die für je zwei vom Punkt (ξ, η) ausgehende, im Intervall $[\xi, \xi + a]$ existierende und daselbst den Ungleichungen $\eta - b < u(x) \leqq v(x) < \eta + b$ genügende Integrale u, v der Differentialgleichung (α) definiert waren.

Außerdem soll die Funktion Φ die folgende Eigenschaft besitzen:

2c) Für jedes vom Punkt (ξ, η) ausgehende und im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definierte Integral $u(x)$ von (α), ist $z(x) \equiv 0$ das einzige vom Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende und in einem Teilintervall von $[\xi, \xi + a]$ existierende Integral der Differentialgleichung

$$z' = \Phi[x; u(x), z].$$

In dieser Situation gilt die folgende Behauptung:

Je zwei vom Punkt (ξ, η) ausgehende Integrale der Differentialgleichung (α) fallen in einer gewissen Umgebung rechts von ξ zusammen.

Wenn die Funktion φ im Bereich ω beschränkt ist oder die Funktion f in Δ stetig, so ist die Lösung der Differentialgleichung (α) im Punkt (ξ, η), rechts von ξ, lokal eindeutig.

Wir bemerken, daß unter lokaler Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung (α) im Punkt (ξ, η), rechts von ξ, folgendes gemeint ist: Es gibt eine rechts von ξ gelegene kompakte Umgebung von ξ derart, daß alle zwei vom Punkt (ξ, η) ausgehende Integrale der Differentialgleichung (α) in dem gemeinsamen Teil ihrer Definitionsintervalle und der erwähnten Umgebung zusammenfallen.

Beweis. a) Es seien u, v beliebige aus dem Punkt (ξ, η) ausgehende Integrale der Differentialgleichung (α). Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die u, v im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definiert sind und daselbst die Werte $\eta \pm b$ nicht annehmen. In der Tat, diese Situation kann durch die Wahl einer kleineren Zahl a als die ursprüngliche immer geschafft werden.

Es seien U, V die durch $U(x) = \text{Min}\,\{u(x), v(x)\}$, $V(x) = \text{Max}\,\{u(x), v(x)\}$ im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definierten Integrale der Differentialgleichung (α). Die U, V genügen im Intervall $[\xi, \xi + a]$ den Ungleichungen: $\eta - b < U(x) \leqq V(x) < \eta + b$. Nach dem Hauptsatz und der zusätzlichen Voraussetzung 2c), gilt im Intervall $(\xi, \xi + \alpha]$ die Beziehung:

$$\varphi[x; U(x), V(x)] \leqq 0.$$

Aus ihr folgt, mit Rücksicht auf 1a), die für $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ giltige Gleichheit $V(x) = U(x)$ und somit auch $v(x) = u(x)$.

b) Wir nehmen an, daß die Funktion φ im Bereich ω beschränkt ist. Sodann hängen die Zahlen c, M, α von der Wahl der Integrale u, v nicht ab. Nach a) fällt im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ das Integral v mit u zusammen und dasselbe gilt von jedem anderen, im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definierten Integral der Differentialgleichung (α), dessen Werte sämtlich von $\eta \pm b$ verschieden sind. Es bleibt also folgendes zu zeigen: Jedes vom Punkt (ξ, η) ausgehende Integral $w(x)$ von (α), das in einem (nicht notwendig echten) Teil von $[\xi, \xi + a]$ definiert ist und dort eventuell auch die Werte $\eta \pm b$ annimmt, fällt in dem gemeinsamen Teil seines Definitionsintervalles und der Umgebung $[\xi, \xi + \alpha]$ von ξ mit u zusammen.

Es sei $x_0 \in (\xi + \alpha]$ eine beliebige im Definitionsintervall von w gelegene Zahl, die genügend nahe an ξ liegt, so daß die Funktion w im Intervall $[\xi, x_0]$ keinen der Werte $\eta \pm b$ annimmt. Wir verengen die Diferentialgleichung (α) auf den Bereich $\Delta_0: \xi \leqq x \leqq x_0: \eta - b \leqq y \leqq \eta + b$ und bezeichnen für die engere Differentialgleichung mit c_0, M_0, α_0 die Zahlen, die den für die Differentialgleichung (α) definierten Konstanten c, M, α entsprechen. Wegen der Beschränktheit von φ können wir $c_0 = c$ wählen und haben dann $M_0 \leqq M$, $\alpha_0 = x_0 - \xi$. Nach a) gilt für $x \in [\xi, x_0]$ die Gleichheit $w(x) = u(x)$, also speziell $w(x_0) = u(x_0)$. Daraus folgt, daß w im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ keinen der Werte $\eta \pm b$ annimmt, da sonst auch das Integral u einen solchen Wert annehmen müßte, was jedoch unserer Voraussetzung widerspricht. Damit ist gezeigt, daß das Integral w in dem gemeinsamen Teil seines Definitionsintervalls und der Umgebung $[\xi, \xi + \alpha]$ von ξ mit u zasammenfällt.

c) Wir nehmen an, daß die Funktion f im Bereich Δ stetig ist. Es seien u und v das vom Punkt (ξ, η) ausgehende Minimal- und Maximalintegral der Differentialgleichung (α). Nach a) haben wir die für $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ giltige Beziehung $v(x) = u(x)$. In dieser Situation fallen also das vom Punkt (ξ, η) ausgehende Minimal- und Maximalintegral und somit alle vom Punkt (ξ, η) ausgehenden Integrale von (α) im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ zusammen.

5. Spezielle Eindeutigkeitskriterien.

Der obige Eindeutigkeitssatz enthält bei spezieller Wahl der Funktionen φ, Φ die meisten bekannten Eindeutigkeitskriterien für Integrale der Differentialgleichung (α) und ferner deren Verallgemeinerungen und Kriterien neuer Struktur. Wir übernehmen im weiteren die in der Literatur übliche Bezeichnung und schreiben y_1, y_2 anstatt von u, v; dementsprechend setzen wir $y_1 \leqq y_2$ voraus.

1. Die Wahl

$$\varphi(x; y_1, y_2) = y_2 - y_1$$

in unserem Hauptsatz führt zu dem Vergleichungssatz von P. Montel[4]) und den sich daraus durch geeignete Spezialisation der Funktion Φ ergebenden Kriterien von Peano, Tonnelli, Bompiani, Osgood u. Tamarkine, Lipschitz.

---

[4]) P. Montel, *Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle.* Bull. Sci. Math., 2e série, **50** (1926), 215.

2. Wählt man in dem Eindeutigkeitssatz

$$\varphi(x, y_1, y_2) = \frac{y_2 - y_1}{x - \xi}; \qquad \Phi(x; y_1, z) = 0; \qquad f \text{ stetig},$$

so erhält man das (modifizierte) Kriterium von Rosenblatt—Nagumo:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqq \frac{y_2 - y_1}{x - \xi}.$$

Dasselbe kann mittels einer breiteren Wahl von Φ verallgemeinert werden. Z. B. erhält man für

$$\Phi(x; y_1, z) = Lz \qquad (0 \leqq L = \text{Konst.})$$

die folgende Verallgemeinerung:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqq (y_2 - y_1) \cdot \left\{ \frac{1}{x - \xi} + L \right\}.$$

3. Wählt man

$$\varphi(x; y_1, y_2) = \frac{y_2 - y_1}{1 + y_2 - y_1} \cdot \frac{1 + x - \xi}{x - \xi}; \quad \Phi(x; y_1, z) = 0; \quad f \text{ stetig},$$

so kommt die folgende Abänderung des Rosenblatt—Nagumoschen Kriteriums für stetige Funktionen f heraus (vgl.[5])):

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqq \frac{y_2 - y_1}{x - \xi} \cdot \frac{1 + y_2 - y_1}{1 + x - \xi}.$$

4. Wenn man für φ Funktionen wählt, die im Bezug auf y_1, y_2 allgemeiner als allein von der Differenz $y_2 - y_1$ obhängen, so bekommt man Eindeutigkeitskriterien von neuer Struktur. Wir begnügen uns mit der Angabe eines Kriteriums dieser Art. Eine umfassendere Sammlung von solchen Sätzen scheint überflüssig, da man in einzelnen Fällen versuchen wird die Wahl der Funktionen φ und Φ dem Feld der gegebenen Differentialgleichung in geeigneter Weise anzupassen.

Wir wählen

$$\varphi(x; y_1, y_2) = \frac{1}{x - \xi} \int_{y_1}^{y_2} \varrho(x, t)\, dt; \quad \Phi(x; y_1, z) = Lz \ (L = \text{Konst.} \geqq 0); \quad f \text{ stetig},$$

wobei $\varrho(x, y)$, $\varrho'_x(x, y)$ im Bereich Δ stetig sind und die Funktion ϱ für jedes $x \in (\xi, \xi + a]$ im Intervall $[\eta - b, \eta + b]$ fast überall, d. h. mit Ausnahme von einer höchstens abzählbaren Menge von Fällen, nur positive Werte annimmt.

Wir sehen, daß *die Lösung der Differentialgleichung* (α) *im Punkt* (ξ, η), *rechts von* ξ, *immer dann lokal eindeutig ist, wenn es eine Funktion* $\varrho(x, y)$

[5]) E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen.* Leipzig (1930), 142.

mit den obigen Eigenschaften gibt, die für $(x, y_1, y_2) \in \omega$ *die folgende Ungleichung befriedigt:*

$$(x - \xi)\{\varrho(x, y_2) f(x, y_2) - \varrho(x, y_1) f(x, y_1)\} \leqq$$

$$\leqq \int_{y_1}^{y_2} \{(1 + L\overline{x - \xi})\, \varrho(x, t) - (x - \xi)\, \varrho'_x(x, t)\}\, dt. \tag{1}$$

6. Beispiel.

a) Wir wollen die im Bereich

Δ: $\quad 0 \leqq x \leqq a; \quad -b \leqq y \leqq b \quad (a, b > 0)$

definierte Differentialgleichung

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad . \tag{α}$$

hinsichtlich der lokalen Eindeutigkeit der Lösung im Punkte (0, 0), rechts von $\xi = 0$, untersuchen.

Wir setzen voraus, daß die Funktionen P, Q im Bereich Δ definiert sind; ferner, daß die rechte Seite von (α) sowie die Funktionen Q, Q'_x im Bereich Δ stetig sind und die Funktion Q für jedes $x \in (0, a]$ im Intervall $[-b, b]$ fast überall nur positive Werte annimmt.

Man kann auf die Differentialgleichung (α) das mit den Werten $\xi = \eta = 0$, $\varrho(x, y) = Q(x, y)$, $L = 0$ realisierte Kriterium 5,4 (1) anwenden.

Dasselbe ergibt, daß *vom Punkt* (0, 0) *lokal genau ein Integral der Differentialgleichung* (α) *ausgeht, wenn für* $(x;\ y_1, y_2) \in \omega$ *die folgende Ungleichung besteht:*

$$x \,.\, \{P(x, y_2) - P(x, y_1)\} \leqq \int_{y_1}^{y_2} \{Q(x, t) - xQ'_x(x, t)\}\, dt. \tag{1}$$

b) Man kann die Funktionen P, Q mit einem geeigneten willkürlichen Faktor $\sigma(x, y)$ multiplizieren, ohne die Eigenschaften der Integrale von (α) zu beeinflussen. Wählt man z. B. $\sigma(x, y) = x \,.\, \sigma(y)$, σ im Intervall $[-b, b]$ stetig und daselbst fast überall positiv, und wendet man die Formel (1) an, so kommt die folgende Beziehung heraus:

$$\sigma(y_2)\, P(x, y_2) - \sigma(y_1) P(x, y_1) \leqq - \int_{y_1}^{y_2} \sigma(t)\, Q'_x(x, t)\, dt. \tag{2}$$

Wir sehen, daß *vom Punkt* (0, 0) *lokal genau ein Integral der Differentialgleichung* (α) *ausgeht, wenn es eine im Intervall* $[-b, b]$ *stetige und daselbst fast überall positive Funktion* σ *gibt, die für* $(x;\ y_1, y_2) \in \omega$ *die Ungleichung* (2) *befriedigt.*

c) Wir machen die zusätzliche Voraussetzung, daß die Funktion P für jedes $x \in (0, a]$ eine partielle Ableitung im bezug auf y besitzt, die in dem Intervall $[-b, b]$ von oben beshränkt ist.

Wir bezeichnen für jedes $x \in (0, a]$ mit $M(x)$ bzw. $N(x)$ die obere Grenze von $P'_y(x, t)$ bzw. das Maximum von $Q'_x(x, t)$ im Intervall $[-b, b]$, und mit $n(x)$ das Minimum von $Q(x, t)$ ebenfalls in $[-b, b]$.

Wir wenden auf beide Seiten der Ungleichung (1) die entsprechenden Mittelwertsätze an und sehen, daß die Ungleichung (1) immer dann erfüllt ist, wenn die folgende Beziehung besteht:

$$x \,.\, \{M(x) + N(x)\} \leqq n(x), \tag{3}$$

und umsomehr, wenn

$$M(x) + N(x) \leqq 0. \tag{4}$$

Wir sehen, daß *unter der zusätzlichen Voraussetzug* c) *über die Funktion P, vom Punkt* (0, 0) *lokal genau ein Integral der Differentialgleichung* (α) *ausgeht, wenn für jedes* $x \in (0, a]$ *eine der Ungleichungen* (3), (4) *erfüllt ist.*

d) Wir wollen die Tragweite unserer Überlegungen an einem speziellen Fall überprüfen.

Wendet man z. B. die obigen Resultate auf die in der Literatur mehrmals[6][7][8]) erwähnte Differentialgleichung

$$y' = a \,.\, \frac{x^3 \,.\, y}{x^4 + y^2} \qquad (a = \text{Konst.}) \tag{α'}$$

an, wobei der rechten Seite für $x = y = 0$ der Wert 0 zukommt, so ist die Ungleichung (1)

$$a \,.\, x^4(y_2 - y_1) \leqq \{-3x^4 + \frac{1}{3}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)\}\,(y_2 - y_1).$$

Daraus folgt für $y_2 - y_1 > 0$ die Beziehung:

$$[3x^4(a + 3) \leqq y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2,$$

und man sieht, daß die Lösung der Differentialgleichung (α') im Punkt (0, 0), für $x > 0$, immer dann lokal eindeutig ist, wenn $a \leqq -3$.

Wendet man die Formel (2) an, so folgt die Beziehung:

$$a\{y_2\sigma(y_2) - y_1\sigma(y_1)\} \leqq -4 \int_{y_1}^{y_2} \sigma(t)\, dt$$

und daraus, für $\sigma(y) = y^{2k}$, $k > 0$,

$$a \leqq -\frac{4}{2k + 1}.$$

Man sieht, daß die rechtsseitige lokale Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung (α') für alle $a < 0$ und offenbar auch für $a = 0$ gesichert ist.

---

[6]) G. Peano, *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires.* Math. Ann., 37 (1890), 182.

[7]) M. Nagumo, *Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung.* Japanese Journ. Math., 3 (1926), 107.

[8]) T. Yosie, *Über die Unität der Lösung der gewöhnlichen Differentialleicghungen erster Ordnung.* Japanese Journ. Math., 2 (1925), 161.

Für die Differentialgleichung (α') hat man:

$$M(x) = a \, . \, x^3; \quad N(x) = 4x^3; \quad n(x) = x^4.$$

Die Ungleichung (3) ergibt $a \leqq -3$, während die Ungleichung (4): $a \leqq -4$. Das Kriterium von Peano und eine Nebenbetrachtung ergeben die Eindeutigkeit für alle $a \leqq 0$ während das Kriterium von Rosenblatt—Naguno für $-1 \leqq a \leqq +1$[7]).

Do redakcie dodané 20. III. 1956

Zobecnění vět o jednoznačnosti integrálů diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$

O. Borůvka, Brno

Výtah

1. Pro diferenciální rovnici

$$y' = f(x, y) \tag{α}$$

je známa řada vět popisujících dostatečné podmínky pro unicitu integrálů v daném bodě. Zpravidla jsou tato kriteria založena na majorisaci funkce $f(x, y_2) - f(x, y_1)$ nebo její absolutní hodnoty. Toto význačné postavení rozdílu se nezdá zcela oprávněné, protože v konkretních případech může být mnohem výhodnější majorisace jiných funkcí závislých na $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$, které by byly přizpůsobeny poli diferenciální rovnice. Na této myšlence je založena předložená práce, obsahující obecnou větu, která zahrnuje většinu známých kriterií a umožňuje přizpůsobení struktury kriteria povaze dané diferenciální rovnice.

2. Obecné kriterium pro jednoznačnost integrálů.

Nechť oborem diferenciální rovnice (α) je dvojrozměrný interval:

$$\Delta: \qquad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \qquad \eta - b \leqq y \leqq \eta + b \qquad (a, b > 0).$$

Nechť φ, Φ jsou funkce tří proměnných mající tyto vlastnosti:

1. Funkce $\varphi(x; u, v)$ je definována v oboru

$$\omega: \qquad \xi < x \leqq \xi + a; \qquad \eta - b < u \leqq v < \eta + b$$

a vyznačuje se tím, že

a) její hodnota v každém bodě $(x; u, v) \in \omega$ je větší nebo rovna nule podle toho, zda jest $u < v$ nebo $u = v$;

b) v oboru ω je spojitá a má v něm spojité parciální derivace φ'_x, φ'_u, φ'_v;

c) splňuje relaci

$$\lim_{x \to \xi+} \varphi[x; u(x), v(x)] = 0$$

pro každé dva integrály u, v diferenciální rovnice (α), které vycházejí z bodu (ξ, η) a splňují nerovnosti $\eta - b < u(x) \leqq v(x) < \eta + b$.

2. Funkce $\Phi(x; u, z)$ je definována v oboru

$$\Omega: \quad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \qquad \eta - b \leqq u \leqq \eta + b; \qquad 0 \leqq z < +\infty$$

a vyznačuje se tím, že

a) je v oboru Ω spojitá;

b) v oboru ω platí nerovnost:

$$\varphi'_x(x; u, v) + \varphi'_u(x; u, v)\, f(x, u) + \varphi'_v(x; u, v)\, f(x, v) \leqq \Phi[x; u, \varphi(x; u, v)];$$

c) pro každý integrál $u(x)$ diferenciální rovnice (α), který vychází z bodu (ξ, η) a existuje v intervalu $[\xi, \xi + a]$, je $z(x) \equiv 0$ jediné řešení diferenciální rovnice

$$z' = \Phi[x; u(x), z],$$

které vychází z bodu $(\xi, 0)$, a existuje v části intervalu $[\xi, \xi + a]$.

Za těchto předpokladů platí následující tvrzení:

Každé dva integrály diferenciální rovnice (α), *vycházející z bodu* (ξ, η), *v jistém okolí vpravo od čísla* ξ *splývají.*

Když funkce φ *je v oboru* ω *ohraničená nebo funkce* f *v oboru* Δ *spojitá, je řešení diferenciální rovnice* (α) *v bodě* (ξ, η), *vpravo od čísla* ξ, *lokálně jednoznačné.*

3. Vhodnou volbou funkcí φ, Φ plyne z této věty převážná většina známých kriterií pro jednoznačnost integrálů diferenciální rovnice (α) a též další kriteria nového druhu.

Обобщение теорем об однозначности дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$

О. Борувка, Брно

Резюме

1. Для дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{α}$$

известен ряд теорем, описывающих достаточные условия для однозначности интегралов в данной точке. Обычно, эти критерии основаны на майоризации функции $f(x, y_2) - f(x, y_1)$ или её абсолютной величине. Это знаменательное положение разности кажется не совсем регулярным, потому что в конкретных случаях может быть более выгодная майоризация других функций, зависимых от $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$, которые были бы приспособлены полю дифференциального уравнения. На этой идее основана предложенная работа, содержащая общую теорему, которая включает большинство известных критерий и позволяет приспособление структуры критерия свойству данного дифференциального уравнения.

2. Общий критерий для однозначности интегралов.

Пусть областью определения дифференциялъного уравнения (α) является двумерный интервал:

$$\Delta: \quad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \qquad \eta - b \leqq y \leqq \eta + b \quad (a, b > 0).$$

Пусть φ, Φ функции трех переменных, обладающие следующими свойствами:
1. Функция $\varphi(x; u, v)$ определена в области определения

$$\omega: \qquad \xi < x \leqq \xi + a; \qquad \eta - b < u \leqq v < \eta + b$$

и характеризуется тем, что
a) её значение в каждой точке $(x; u, v) \in \omega$ больше нуля, или равно нулю, в зависимости от того, естьли $u < v$, или $u = v$;
в) в области ω она непрерывна и имеет в этой области непрерывные частные производные $\varphi'_x, \varphi'_u, \varphi'_v$;
c) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{x \to \xi +} \varphi[x; u(x), v(x)] = 0$$

для каждых двух интегралов u, v дифференциального уравнения (α), выходящих из точки (ξ, η) и удовлетворяющих неравенствам: $\eta - b < u(x) \leqq v(x) < \eta + b$.
2. Функция $\Phi(x; u, z)$ определена в области

$$\Omega: \qquad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \qquad \eta - b \leqq u \leqq \eta + b, \qquad 0 \leqq z < +\infty$$

и характеризуется тем, что
a) в области Ω она непрерывна;
b) в области ω имеет место неравенство:

$$\varphi'_x(x; u, v) + \varphi'_u(x; u, v)\, f(x, u) + \varphi'_v(x; u, v)\, f(x, v) \leqq \Phi[x; u, \varphi(x; u, v)];$$

c) для каждого интеграла $u(x)$ дифференциального уравнения (α), выходящего из точки (ξ, η) и существующего в интервале $[\xi, \xi + a]$, $z(x) \equiv 0$ является единственным решением дифференциального уравнения

$$z' = \Phi[x; u(x), z],$$

выходящим из точки $(\xi, 0)$ и существующим в части промежутка $[\xi, \xi + a]$.
При этих предположениях имеет место следующее утверждение:
Каждые два интеграла дифференциального уравнения (α), *выходящие из точки* (ξ, η), *в определённой окрестности справа числа* ξ *совпадают.*
Если функция φ *в области* ω *ограничена или функция* f *в области* Δ *непрерывна, то решение дифференциального уравнения* (α) *в точке* (ξ, η) *вправо числа* ξ, *является локально однозначным.*
3. Удобным выбором функций φ, Φ из этой теоремы вытекает значительное большинство известных критерий для однозначности интегралов дифференциального уравнения (α) и тоже дальнейшие критерии нового рода.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. IV-VI MATHEMATICA 1956

Rozšíření Pascalovy věty na racionální normální křivku n-rozměrného projektivního prostoru

Doc. Dr J. SRB

(Věnováno akademikovi J. Hroncovi k jeho 75. narozeninám)

V n-rozměrném projektivním prostoru buďte $A_1, A_2, \ldots, A_{n+4}$ $n + 4$ body, z nichž žádných $n + 1$ neleží v téže nadrovině, v napsaném uspořádání vrcholy $(n + 4)$-úhelníka. Nazveme-li protějšími prostory $(k - 1)$-rozměrný prostor určený $k (2 \leq k \leq n)$ po sobě následujícími vrcholy tohoto $(n + 4)$-úhelníka a $(n - k + 1)$-rozměrný prostor určený jeho $n - k + 2$ sousedními vrcholy, které obdržíme, když z vrcholů $(n + 4)$-úhelníka, které nenáleží prostoru $(k - 1)$-rozměrnému vynecháme vrchol první a poslední, a nazveme-li dále trojicí po sobě následujících $(k - 1)$-rozměrných prostorů tři navzájem různé $(k - 1)$-rozměrné prostory, z nichž je každý určen k po sobě následujícími vrcholy $(n + 4)$-úhelníka tak, že tyto prostory mají společný $(k - 3)$-rozměrný prostor určený $k + 2$ sousedními vrcholy, platí:

Věta I. *V $(n + 4)$-úhelníku vepsaném racionální normální křivce n-rozměrného projektivního prostoru protíná každý ze tří po sobě následujících $(k - 1)$-rozměrných prostorů, $(2 \geq k \geq n)$ svůj $(n - k + 1)$-rozměrný protější prostor v jednom bodě tak, že tyto tři body leží v téže nadrovině s $(k - 3)$-rozměrným průsečným prostorem těchto tří $(k - 1)$-rozměrných prostorů a s nezávislým $(n - k - 1)$-rozměrným průsečným prostorem jejich $(n - k + 1)$-rozměrných prostorů protějších. A obráceně. Nechť jsou dány v n-rozměrnem projektivním prostoru $n + 4$ body, z nichž žádných $n + 1$ neleží v téže nadrovině, které určují v některém uspořádání pro $k = 2, 3, \ldots, n$ celkem $n - 1$ skupin tří po sobě následujících $(k - 1)$-rozměrných prostorů a jejich prostorů protějších tak, že prostory každé skupiny mají vzájemnou polohu popsanou v první části věty a tak, že některý z daných bodů je prvním bodem určujícím první $(k - 1)$-rozměrný prostor každé skupiny. Potom mají prostory každé skupiny tří po sobě následujících $(k - 1)$-rozměrných prostorů a jejich prostorů protějších vzájemnou polohu popsanou v první části věty při libovolném $k (2 \leq k \leq n)$ a při libovolném uspořádání daných $n + 4$ bodů a tyto body leží na racionální normální křivce n-rozměrného projektivního prostoru určené kterýmkoliv $n + 3$ z nich.*

Důkaz první části věty I. Buďte dány $n + 4$ body n-rozměrného projektivního prostoru v uspořádání $A_1, A_2, \ldots, A_{n+4}$ takové, že žádná skupina

$n + 1$ těchto bodů neleží v téže nadrovině. Buď $L(i, j) = 0$ rovnice nadroviny tohoto prostoru určené body $A_3, A_4, \ldots, A_k, A_{k+4}, \ldots, A_{n+3}, A_i, A_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, k + 1, k + 2, k + 3, n + 4$; potom platí:

1. *Nutná a postačující podmínka, aby body $A_1, A_2, \ldots, A_{n+4}$ určovaly v tomto uspořádání skupinu tří po sobě následujících $(k - 1)$-rozměrných prostorů a jejich prostorů protějších s počátečním bodem A_1 tak, že tyto prostory mají vzájemnou polohu popsanou v první části věty I, je platnost identity:*

$$L(1, 2) \,.\, L(k + 1, k + 2) + L(k + 2, k + 3) \,.\, L(n + 4, 1) = L(1, k + 2) \,. \\ . \,[L(2, k + 1) + L(k + 3, n + 4)]. \quad (1)$$

Počátečním bodem jsme nazvali první bod, který určuje první $(k - 1)$-rozměrný prostor skupiny tří po sobě následujících $(k - 1)$-rozměrných prostorů.

Důkaz. Nechť platí identita (1). Pro určité $k(2 \leq k \leq n)$ jsou prostory skupiny určeny body $A_l(l = 1, 2, \ldots, n + 4)$ takto:

$$\begin{aligned} S_{k-1} &\equiv [A_1, \ldots, A_k], & S_{n-k+1} &\equiv [A_{k+2}, \ldots, A_{k+3}], \\ S'_{k-1} &\equiv [A_2, \ldots, A_{k+1}], & S'_{n-k+1} &\equiv [A_{k+3}, \ldots, A_{n+4}], \\ S''_{k-1} &\equiv [A_3, \ldots, A_{k+2}], & S''_{n-k+1} &\equiv [A_{k+4}, \ldots, A_1]. \end{aligned} \quad (2)$$

Podle předpokladu o bodech A_l tyto prostory určujících mají každé dva protější prostory obecnou vzájemnou polohu a protínají se takto: S_{k-1} a S_{n-k+1} v bodě B, S'_{k-1} a S'_{n-k+1} v bodě B' a S''_{k-1} a S''_{n-k+1} v bodě B''. Podle (2) obsahuje nadrovina $L(1, 2) = 0$ prostor S_{k-1}, nadrovina $L(k + 2, k + 3) = 0$ prostor S_{n-k+1}; leží tedy bod B v $(n - 2)$-rozměrném prostoru $L(1, 2) = 0$, $L(k + 2, k + 3) = 0$ neleží však v $(n - 3)$-rozměrném prostoru S_{n-3}, který je průsečným prostorem všech nadrovin $L(i, j) = 0$, $i \neq j$; $i, j, = 1, 2, k + 1, k + 2, k + 3, n + 4$, určeném body $A_3, \ldots, A_k, A_{k+4}, \ldots, A_{n+3}$. Nechť jsou $x_i^{(l)}$, $(i = 1, \ldots, n + 1)$ souřadnice bodu A_l; kdyby bod B ležel v prostoru S_{n-3}, bylo by možno jeho souřadnice psát $a_3x_i^{(3)} + \ldots + a_kx_i^{(k)}$, protože by ležel v průsečném prostoru prostorů S_{n-3} a S_{k-1} určeném body $A_3, \ldots, A_k$ nebo $a_{k+4}x_i^{(k+4)} + \ldots + a_{n+3}x_i^{(n+3)}$, protože by ležel v průsečném prostoru prostorů S_{n-3} a S_{n-k+1} určeném body $A_{k+4}, \ldots, A_{n+3}$ tak, že podle předpokladu o bodech A_l by bylo v každém z obou součtů alespoň jedno $a_i \neq 0$; existovala by potom konstanta $t \neq 0$ taková, že by platilo

$$a_3x_i^{(3)} + \ldots + a_kx_i^{(k)} - ta_{k+4}x_i^{(k+4)} - \ldots - ta_{n+3}x_i^{(n+3)} = 0$$

proti předpokladu o lineární nezávislosti bodů $A_3, \ldots, A_k, A_{k+4}, \ldots, A_{n+3}$. Stejně leží bod B' v $(n - 2)$-rozměrném prostoru $L(2, k + 1) = 0$, $L(k + 3, n + 4) = 0$ ne však v prostoru S_{n-3} a bod B'' v $(n - 2)$-rozměrném prostoru $L(k + 1, k + 2) = 0$, $L(n + 4, 1) = 0$ ne však v jeho podprostoru S_{n-3}. Bod B tedy vyhovuje rovnici $K = L(1, 2) \,.\, L(k + 1, k + 2) + L(k + 2, k + 3) \,.\, L(n + 4, 1) = 0$ a podle identity (1) vyhovuje tedy také rovnici $L(1, k + 2) \,.\, [L(2, k + 1) + L(k + 3, n + 4)] = 0$. Bod B neleží v nadrovině $L(1, k + 2) = 0$; kdyby v ní ležel, obsahovala by tato nadrovina $(n - 2)$-rozměrný prostor $[S_{n-3}, B]$, tedy průsečný prostor nadrovin $L(1, 2) = 0$, $L(k + 2, k + 3) = 0$ s nimiž by tedy náležela témuž svazku; basí tohoto svazku by byl $(n - 2)$-rozměrný prostor $[S_{n-3}, A_1]$, protože bod A_1, který nenáleží prostoru S_{n-3} je bodem dvou z těchto tří nadrovin; potom by však v nadrovině $L(k + 2, k + 3) = 0$ leželo proti předpokladu $n + 1$ daných bodů, t. j.

$n - 2$ body, které určují prostor S_{n-3} a body A_1, A_{k+2}, A_{k+3}. Bod B proto leží v nadrovině $L(2, k+1) + L(k+3, n+4) = 0$. Bod B'', který leží v $(n-2)$-rozměrném prostoru $L(k+1, k+2) = 0$, $L(n+4, 1) = 0$ splňuje také rovnici $K = 0$ a podle identity (1) tedy vyhovuje také rovnici $L(1, k+2)$ . . $[L(2, k+1) + L(k+3, n+4)] = 0$. Analogicky jako pro bod B se dokáže, že bod B neleží v nadrovině $L(1, k+2) = 0$, že proto leží v nadrovině $L(2, k+1) + L(k+3, n+4) = 0$. Protože v této nadrovině leží také bod B', který je bodem $(n-2)$-rozměrného prostoru $L(2, k+1) = 0$, $L(k+3, n+4) = 0$ a protože podprostorem této nadroviny je prostor S_{n-3}, který je podle (2) spojujícím prostorem $(k-3)$-rozměrného prostoru, v němž se protínají prostory $S_{k-1}, S'_{k-1}, S''_{k-1}$ a $(n-k-1)$-rozměrného prostoru, ve kterém se protínají prostory S_{n-k+1}, S'_{n-k+1} a S''_{n-k+1}, je platnost identity (1) postačující podmínkou pro platnost věty 1.

Nechť mají prostory (2) vzájemnou polohu popsanou v první části věty I. Bod B, který pak náleží $(n-2)$-rozměrnému prostoru $L'(1, 2) = 0$, $L'(k+2, k+3) = 0$ splňuje pro každou dvojici homogenních parametrů λ_2, λ_1 rovnici:

$$\lambda_1 L'(1, 2) + \lambda_2 L'(k+2, k+3) = 0, \tag{3}$$

bod B'', který náleží $(n-2)$-rozměrnému prostoru $L(n+4, 1) = 0$, $L(k+1, k+2) = 0$, splňuje pro každou dvojici homogenních parametrů μ_1, μ_2 rovnici:

$$\mu_1 L(n+4, 1) + \mu_2 L(k+1, k+2) = 0. \tag{4}$$

Svazky (3) a (4) přiřaďme projektivně rovnicí:

$$n\lambda_1\mu_2 + p\mu_1\lambda_2 = 0, \tag{5}$$

jejíž koeficienty n, p určíme takto: Podle předcházejícího je base svazku (3) určena prostorem S_{n-3} a bodem B, base svazku (4) prostorem S_{n-3} a bodem B''; bod B'' neleží v žádné z obou základních nadrovin svazku (3), bod B v žádné z obou základních nadrovin svazku (4). Bod A_1, který nenáleží prostoru S_{n-3}, nesplňuje identicky ani rovnici (3) ani rovnici (4); A_1 tedy nenáleží basi svazku (3) s kterou proto určuje nadrovinu $L'(1, 2) = 0$ a nenáleží basi svazku (4) s kterou určuje nadrovinu $L(n+4, 1) = 0$. Kdyby bod B'' náležel nadrovině $L'(1, 2) = 0$, náležela by jí i base $[S_{n-3}, B'']$ svazku (4) a nadrovina $L(n+4, 1) = 0$, určená touto basí a bodem A_1, by s ní byla totožná; kdyby bod B náležel nadrovině $L(n+4, 1) = 0$, náležela by jí i base $[S_{n-3}, B]$ svazku (3) a nadrovina $L'(1, 2) = 0$ by s ní byla totožná; každá z těchto dvou nadrovin by pak obsahovala body A_i určující prostor S_{n-3} a body A_1, A_2, A_{n+4}, tedy $n + 1$ daných bodů proti předpokladu. Analogický důkaz platí pro zbývající dvě nadroviny. Protože bod B tedy neleží v žádné z obou základních nadrovin svazku (3), existuje určitý poměr parametrů $\lambda_1 : \lambda_2 = \lambda_1^0 : \lambda_2^0 \neq 0$, pro který nadrovina svazku (3) prochází bodem B''; bod B neleží v žádné základní nadrovině svazku (4), existuje tedy určitý poměr parametrů $\mu_1 : \mu_2 = \mu_1^0 : \mu_2^0 \neq 0$ pro který nadrovina svazku (4) prochází bodem B; obě tyto nadroviny nechť si korespondují v projektivnosti (5); rovnice $n\lambda_1^0\mu_2^0 + p\mu_1^0\lambda_2^0 = 0$ pak dává určitý poměr $n : p \neq 0$, kterým je rovnice projektivnosti (5) určena. Je $pn \neq 0$, projektivnost (5) je tedy regulární a projektivní svazky (3) a (4) vytvoří kvadratický nadkužel:

$$n \,.\, L'(1, 2) \,.\, L(k+1, k+2) + p \,.\, L'(k+2, k+3) \,.\, L(n+4, 1) = 0.$$

Nadrovina svazku (3) určená basí $[S_{n-3}, B]$ tohoto svazku a bodem B'', který v této basi neleží, je totožná s nadrovinou svazku (4) určenou basí $[S_{n-3}, B'']$ tohoto svazku a bodem B, který v této basi neleží; je tedy projektivnost (5) svazků (3) a (4) perspektivní se samodružnou nadrovinou určenou prostorem S_{n-3} a body B a B''; podle předpokladu leží v této nadrovině také bod B', leží proto v této nadrovině také $(n - 2)$-rozměrný prostor $[S_{n-3}, B']$, t. j. průsečný prostor nadrovin $L'(2, k + 1) = 0$ a $L'(k + 3, n + 4) = 0$; náleží tedy tato samodružná nadrovina svazku $\nu_1 . L'(2, k + 1) + \nu_2 . L(k + 3, n + 4) = 0$. Stejně jako jsme to dokázali pro základní nadroviny svazku (4) se dokáže, že bod B neleží v žádné základní nadrovině tohoto svazku; existuje proto určitý poměr parametrů $\nu_1 : \nu_2 = \nu_1^0 : \nu_2^0 \neq 0$, pro který nadrovina tohoto svazku prochází bodem B a je tedy samodružnou nadrovinou v perspektivnosti (5) svazků (3) a (4) s rovnicí $\nu_1^0 . L'(2, k + 1) + \nu_2^0 . L(k + 3, n + 4) = 0$. Vedle této nadroviny vytvoří uvedená perspektivnost ještě nadrovinu $L(1, k + 2) = 0$, která spojuje $(n - 2)$-rozměrný průsečný prostoru nadroviny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ svazku (3) a korespondující jí nadroviny $\mu_1 = 0$, $\mu_2 \neq 0$ svazku (4) s $(n - 2)$-rozměrným průsečným prostorem nadroviny $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ svazku (3) a korespondující jí nadroviny $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = 0$ svazku (4), a která je určená prostorem S_{n-3}, bodem A_1 společným první a bodem A_{k+2} společným druhé dvojici korespondujících si nadrovin. Existuje tedy konstanta $m \neq 0$ taková, že je identicky splněna rovnice:

$$n . L'(1, 2) . L(k + 1, k + 2) + p . L'(k + 2, k + 3) . L'(n + 4, 1) =$$
$$= m . L(1, k + 2) . [\nu_1^0 . L'(2, k + 1) + \nu_2^0 . L'(k + 3, n + 4)].$$

Položíme-li $n . L'(1, 2) = L(1, 2)$, $p . L'(k + 2, k + 3) = L(k + 2, k + 3)$, $m . \nu_1^0 . L'(2, k + 1) = L(2, k + 1)$, $m . \nu_2^0 . L'(k + 3, n + 4) = L(k + 3, n + 4)$, dostaneme identitu:

$$L(1, 2) . L(k + 1, k + 2) + L(k + 2, k + 3) . L(n + 4, 1) =$$
$$= L(1, k + 2) . [L(2, k + 1) + L(k + 3, n + 4)]$$

což je identita (1); tím je věta 1 dokázána.

Na racionální normální křivce C_1^n n-rozměrného projektivního prostoru zvolme libovolně $n + 4$ různé body $A_1, A_2, \ldots, A_{n+4}$. Všechny kvadratické nadkužely svazku:

$$L(1, 2) . L(k + 1, k + 2) + \lambda . L(1, k + 2) . L'(2, k + 1) = 0 \qquad (6')$$

mají společný prostor dvojných bodů S_{n-3} určený body $A_3, \ldots, A_k, A_{k+4}, \ldots, A_{n+3}$ křivky C_1^n a procházejí body $A_1, A_2, A_{k+1}, A_{k+2}$ této křivky, které prostoru S_{n-3} nenáleží, protože C_1^n nemůže mít s S_{n-3} víc než $n - 2$ společné body. Každá ze čtyř nadrovin, jejichž rovnice obdržíme, položíme-li formy $L(i, j)$, které se v rovnici (6′) vyskytují, rovny nule, má s křivkou C_1^n právě n společných bodů A_l různých od bodu A_{k+2}; bod A_{k+2} tedy nemůže náležet některé z těchto nadrovin a oba součiny forem $L(i, j)$ v rovnici (6′) nabývají pro tento bod určitých od nuly různých hodnot; existuje proto hodnota parametru $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ taková, že nadkužel

$$L(1, 2) . L(k + 1, k + 2) + \lambda_0 . L'(1, k + 2) . L(2, k + 1) = 0 \qquad (6)$$

svazku (6′) prochází bodem A_{k+3}. Všechny nadkužely svazku:

$$L'(k+2, k+3) \,.\, L(n+4, 1) + \mu \,.\, L(1, k+2) \,.\, L'(k+3, n+4) = 0 \quad (7')$$

mají společný prostor dvojných bodů S_{n-3} a procházejí body A_1, A_{k+2}, A_{k+3} a A_{n+4}, které neleží v prostoru S_{n-3} z téhož důvodu jako v případě svazku (6'); analogicky jako v uvedeném případě se ukáže, že existuje hodnota parametru $\mu = \mu_0 \neq 0$ taková, že nadkužel

$$L'(k+2, k+3) \,.\, L(n+4, 1) + \mu_0 \,.\, L(1, k+2) \,.\, L'(k+3, n+4) = 0 \quad (7)$$

svazku (7') prochází bodem A_{k+1}. Nadkužely (6) a (7) jsou totožné, protože každý z nich je určen týmž prostorem dvojných bodů S_{n-3}, který má s křivkou C_1^n $n - 2$ společné body a pěti dalšími body této křivky; existuje proto konstanta $m \neq 0$ taková, že je identicky splněna rovnice:

$$L(1, 2) \,.\, L(k+1, k+2) + \lambda_0 \,.\, L'(1, k+2) \,.\, L'(2, k+1) =$$
$$= m \,.\, [L'(k+2, k+3) \,.\, L(n+4,1) + \mu_0 \,.\, L(1, k+2) \,.\, L'(k+3, n+4)],$$

t. j.

$$L(1, 2) \,.\, L(k+1, k+2) - m \,.\, L'(k+2, k+3) \,.\, L(n+4, 1) =$$
$$= L(1, k+2) \,.\, [-\lambda_0 \,.\, L'(2, k+1) + m\mu_0 \,.\, L(k+3, n+4)],$$

což je identita (1) položíme-li

$$-m \,.\, L'(k+2, k+3) = L(k+2, k+3), \; -\lambda_0 \,.\, L'(2, k+1) =$$
$$= L(2, k+1), m \,.\, \mu_0 \,.\, L'(k+3, n+4) = L(k+3, n+4).$$

Podle věty 1 je tím první část věty I. dokázána.

D ů k a z v ě t y o b r á c e n é. Buď dáno $n + 4$ bodů n-rozměrného projektivního prostoru, z nichž žádných $n + 1$ neleží v téže nadrovině, v uspořádání A_1, $A_2, \ldots, A_{n+4}$, které pro $k = 2, 3, \ldots, n-1, n$ určují $n - 1$ skupin tří po sobě následujících $(k - 1)$-rozměrných prostorů a jejich prostorů protějších tak, že prostory každé skupiny mají vzájemnou polohu popsanou v první části věty I., a tak, že bod A_1 je počátečním bodem každé skupiny. Pro určité $k (2 \leqq k \leqq n)$ tedy podle věty 1. platí identita:

$$L(1, 2) \,.\, L(k+1, k+2) + L(k+2, k+3) \,.\, L(n+4, 1) =$$
$$= L(1, k+2) \,.\, [L(2, k+1) + L(k+3, n+4)], \quad (8')$$

pro $k + 1$ identita:

$$L'(1, 2) \,.\, L'(k+2, k+3) + L'(k+3, k+4) \,.\, L'(n+4, 1) =$$
$$= L'(1, k+3) \,.\, [L'(2, k+2) + L'(k+4, n+4)], \quad (9')$$

kde mají všechny nadroviny $L(i, j) = 0$ společný $(n - 3)$-rozměrný prostor určený pro $k = 2$ body $A_6, \ldots, A_{n+3}$, pro $k \neq 2$ body $A_3, \ldots, A_k, A_{k+4}, \ldots, A_{n+3}$, nadroviny $L'(i, j) = 0$ společný $(n - 3)$-rozměrný prostor určený pro $k \neq n - 1$ body $A_3, \ldots, A_{k+1}, A_{k+5}, \ldots, A_{n+3}$, pro $k = n - 1$ body $A_3, \ldots, A_n$. Aby byly nevypsané indexy bodů určujících nadroviny $L(i, j) = 0$ a $L'(i, j) = 0$ v obou identitách (8') a (9') tytéž, t. j. aby to byly indexy bodů určujících $(n - 4)$-rozměrný prostor $S_{n-4} \equiv [A_3, \ldots, A_k, A_{k+5}, \ldots, A_{n+3}]$, položme $L(i, j) = L(i, j, k+4)$, $L'(i, j) = L(i, j, k+1)$. V těchto trojindexových symbolech pak pišme obě identity (8') a (9') takto:

$$L(1, 2, k+4) \,.\, L(k+1, k+2, k+4) - L(1, k+2, k+4) \,.\, L(2, k+ \\ +1, k+4) = L(1, k+2, k+4) \,.\, L(k+3, n+4, k+4) - \\ - L(k+2, k+3, k+4) \,.\, L(n+4, 1, k+4), \tag{8}$$

$$L(1, 2, k+1) \,.\, L(k+2, k+3, k+1) - L(1, k+3, k+1) \,.\,.\, L(2, k+ \\ 2, k+1) = L(1, k+3, k+1) \,.\, L(k+4, n+4, k+1) - \\ - L(k+3, k+4, k+1) \,.\, L(n+4, 1, k+1). \tag{9}$$

Položíme-li levou stranu identity (8) rovnou nule, obdržíme rovnici kvadratického nadkužele:

$$L(1, 2, k+4) \,.\, L(k+1, k+2, k+4) - L(1, k+2, k+4) \,.\, L(2, k+ \\ +1, k+4) = 0, \tag{10}$$

vytvořeného projektivními svazky nadrovin:

$$\lambda_k \,.\, L(1, 2, k+4) + \mu_k \,.\, L(1, k+2, k+4) = 0 \tag{11a}$$

$$\lambda_k \,.\, L(2, k+1, k+4) + \mu_k \,.\, L(k+1, k+2, k+4) = 0, \tag{11b}$$

na němž leží všechny dané body: Body určující prostor S_{n-4} a bod A_{k+4} v prostoru dvojných bodů nadkužele, který tyto body určují; podle předpokladu o bodech A_l pak mimo prostor dvojných bodů body A_1, A_2, A_{k+1}, A_{k+2} podle (10), body A_{k+3}, A_{n+4} podle (8) a (10). Anulováním levé strany identity (9) obdržíme rovnici kvadratického nadkužele:

$$L(1, 2, k+1) \,.\, L(k+2, k+3, k+1) - L(1, k+3, k+1) \,.\, L(2, k+ \\ +2, k+1) = 0 \tag{12}$$

vytvořeného projektivními svazky nadrovin:

$$\lambda_{k+1} \,.\, L(1, 2, k+1) + \mu_{k+1} \,.\, L(1, k+3, k+1) = 0 \tag{13a}$$

$$\lambda_{k+1} \,.\, (2, k+2, k+1) + \mu_{k+1} \,.\, L(k+2, k+3, k+1) = 0. \tag{13b}$$

Anulováním pravé strany identity (9) obdržíme rovnici téhož nadkužele ve tvaru:

$$L(1, k+3, k+1) \,.\, L(k+4, n+4, k+1) - L(k+3, k+4, k+ \\ +1) \,.\, L(n+4, 1, k+1) = 0 \tag{14}$$

vytvořeného projektivními svazky nadrovin:

$$\lambda'_{k+1} \,.\, L(1, k+3, k+1) + \mu'_{k+1} \,.\, L(n+4, 1, k+1) = 0 \tag{15a}$$

$$\lambda'_{k+1} L(k+3, k+4, k+1) + \mu'_{k+1} \,.\, L(k+4, n+4, k+1) = 0. \tag{15b}$$

Na tomto nadkuželi leží opět všechny dané body: Body určující S_{n-4} a bod A_{k+1} v prostoru jeho dvojných bodů, mimo prostor dvojných bodů body A_1, A_2, A_{k+2}, A_{k+3} podle (12) a body A_{k+4} a A_{n+4} podle (14).

Svazky nadrovin (13a) a (15a) mají společnou basi $S_{n-2} \equiv [S_{k-4}, A_1, A_{n+1}]$; existuje tedy regulární projektivnost:

$$a'_{k+1}\lambda_{k+1}\lambda'_{k+1} + b'_{k+1}\lambda_{k+1}\mu'_{k+1} + c'\lambda'_{k+1}\mu_{k+1} + d'\mu_{k+1}\mu'_{k+1} = 0, \\ D' = a'_{k+1} \,.\, d'_{k+1} - b'_{k+1} \,.\, c'_{k+1} \neq 0 \tag{16}$$

taková, že každé dvojici poměrů $\lambda_{k+1} : \mu_{k+1}$ a $\lambda'_{k+1} : \mu'_{k+1}$ vyhovující rovnici (16) koresponduje v (13a) a (15a) táž nadrovina, která se tedy s nadrovinami svazků (13b) a (15b), určenými těmito poměry, protíná v témž $(n - 2)$-rozměrném prostoru nadkužele daného rovnicí (12) a (14). Stejně mají svazky (11b) a (15b) společnou basi $S'_{n-2} = [S_{n-4}, A_{k+1}, A_{k+4}]$; existuje tedy regulární projektivnost:

$$a''_{k+1}\lambda'_{k+1} \cdot \lambda_k + b''_{k+1}\lambda'_{k+1}\mu_k + c''_{k+1}\lambda_k\mu'_{k+1} + d''_{k+1}\mu_k\mu'_{k+1} = 0, \qquad (17)$$
$$D'' = a''_{k+1} \cdot d''_{k+1} - b''_{k+1} \cdot c''_{k+1} \neq 0$$

taková, že každá dvojice poměrů $\lambda_k : \mu_k$, $\lambda'_{k+1} : \mu'_{k+1}$ vyhovující rovnici (17) určuje ve svazcích (11b) a (15b) tutéž nadrovinu, která se s nadrovinou svazku (11a) příslušnou poměru $\lambda_k : \mu_k$ protíná v $(n - 2)$-rozměrném prostoru kužele (10). Prochází-li tedy pro určitý poměr $\lambda'^0_{k+1} : \mu'^0_{k+1}$ nadrovina svazku (15a) některým z daných bodů A_l, $(l = 1, \ldots, n + 4)$, prochází jím pro tento poměr i nadrovina svazku (15b) a pro poměr $\lambda^k_{0+1} : \mu^0_{k+1}$ vyhovující s ním rovnici (16) nadroviny svazků (13a) i (13b) a pro poměr $\lambda^0_k : \mu^0_k$ vyhovující s ním rovnici (17) nadroviny svazků (11a) a (11b); tedy pro poměry $\lambda^0_{k+1} : \mu^0_{k+1}$ a $\lambda^0_k : \mu^0_k$ vyhovující rovnici projektivnosti:

$$a_{k+1}\lambda_{k+1}\lambda_k + b_{k+1}\lambda_{k+1}\mu_k + c_{k+1}\lambda_k\mu_{k+1} + d_{k+1}\mu_k\mu_{k+1} = 0, \qquad (18)$$

která je rovnicí produktu projektivností (16) a (17) a proto pro $a_{k+1} \cdot d_{k+1} - b_{k+1} \cdot c_{k+1} = D' \cdot D'' \neq 0$ regulární, procházejí tímto bodem nadroviny svazků (11a) a (13b). Vypíšeme-li u každého z obou těchto svazků basi, můžeme položit $L(1, 2, k + 4) = L_k(2)$ a $L(1, k + 2, k + 4) = L(k + 2)$ ve svazku (11a) a $L(1, 2, k + 1) = L_{k+1}(2)$ a $L(1, k + 3, k + 1) = L(k + 3)$ ve svazku (13b); oba svazky pak dostaneme ve tvaru:

$$\lambda_k \cdot L_k(2) + \mu_k \cdot L(k + 2) = 0, \text{ s basí } [A_1, A_6, \ldots, A_{n+3}] \text{ pro } k = 2,$$
$$[A_1, A_3, \ldots, A_k, A_{k+4}, \ldots, A_{n+3}], \text{ pro } k \neq 2; \qquad (11a')$$

$$\lambda_{k+1} \cdot L_{k+1}(2) + \mu_{k+1} \cdot L(k + 3) = 0 \text{ s basí } [A_1, A_3, \ldots, A_{k+1}, A_{k+5}, \ldots, A_{n+3}], \text{ pro } k \neq n - 1,$$
$$[A_1, A_3, \ldots, A_n] \text{ pro } k = n - 1. \qquad (13b')$$

Svazek (11b) pro $k = 2$ pišme ve tvaru:

$$\lambda_2 L(2) + \mu_2 L(5) = 0, \text{ s basí } [A_3, A_4, A_7, \ldots, A_{n+3}], \qquad (11b')$$

kde jsme položili $L(2, 3, 6) = L(2)$ a $L(3, 4, 6) = L(4)$.

Jsou-li splněny předpoklady o bodech A_l, $(l = 1, \ldots, n + 4)$ uvedené na počátku důkazu pak podle věty 1. platí $n - 1$ identit (1) pro $k = 2, \ldots, n$ s počátečním bodem A_1; potom existuje $n - 1$ projektivních svazků nadrovin (11a') pro $k = 2, \ldots, n$ projektivně přiřazených rovnicemi (18), $(k = 2, \ldots, n - 1)$ a s nimi projektivní svazek (11b'), tedy celkem n projektivních svazků nadrovin, které vytvoří průsečnými prostory korespondujících si nadrovin racionální varietu, na které leží všechny dané body $A_l (l = 1, \ldots, n + 4)$. Dimensi tvořícího prostoru stačí stanovit v jednom zvláštním případě, na př. pro bod A_2. Bod A_2 neleží podle (11a') a (11b') v basi žádného z těchto n svazků a určuje proto s těmito basemi n korespondujících si nadrovin. Base $n - 1$

svazků (11a′) pro $k = 2, \ldots, n$ mají společný pouze bod A_1; kdyby měly společný ještě další bod M, ležel by tento bod v prostoru $S_{n-3} \equiv [A_1, A_7, \ldots, A_{n+3}]$, v němž se protnou base svazků (11a′) pro $k = 2$ a $k = 3$, které nejsou totožné, protože ve druhé z nich leží bod A_3, který není bodem base první; bod M by ležel dále v prostoru $S_{n+4} \equiv [A_1, A_8, \ldots, A_{n+3}]$, ve kterém se protne base svazku (11a′) pro $k = 4$ a prostor S_{n-3}, který není podprostorem této base, protože obsahuje bod A_7, který basi nenáleží. Po $n - 2$ krocích by bod M ležel v prostoru $S_1 = [A_1, A_{n+3}]$; dále by bod M ležel v basi svazku (11a′) pro $k = n$, určené body $A_1, A_3, \ldots, A_n$, která by pro $A_1 \not\equiv M$ obsahovala přímku S_1 proti předpokladu o lineární nezávislosti bodů $A_1, A_3, \ldots, A_n, A_{n+3}$. Base $n - 1$ svazků (11a′) pro $k = 2, \ldots, n$ nemají tedy kromě bodu A_1 žádný další společný bod; bod A_1 však neleží v basi svazku (11b′). Nemají tedy base n projektivních svazků nadrovin varietu vytvořujících žádný společný bod a určují s bodem A_2n korespondujících si nadrovin, které se protnou pouze v tomto bodě; svazky tedy vytvoří racionální normální křivku n-rozměrného prostoru na které leží všechny dané body A_l, $(l = 1, \ldots, n + 4)$; protože tyto body leží na racionální normální křivce, platí pro ně první část věty I. pro libovolné $k (2 \leqq k \leqq n)$ při libovolném uspořádání.

Do redakcie dodané 2. IV. 1956

Расширение теоремы Паскаля для рациональной нормальной кривой проективного n-мерного пространства

Доч. Д-р Ян Срб

Резюме

Пусть точки $A_1, \ldots, A_{n+4}$ являются такими вершинами $(n + 4)$-угольника в проективном n-мерном пространстве, что никаких $n + 1$ вершин из них не лежат в тоиже гиперплоскости. Противоположным пространством будем называть пространство $k - 1$ измерений, определённое k $(2 \geqq k \geqq n)$ последовательными вершинами и пространство $n - k + 1$ измерений, определённое $n - k + 2$ соседними вершинами, которые получим, если из вершин $(n + 4)$-угольника, которые не принадлежат пространству $k - 1$ измерений, выпустим вершины первую и последнюю. Группой трёх последовательных пространств $k - 1$ измерений, будем называть три различные пространства $k - 1$ измерений, из которых каждое определено k последовательными вершинами $(n + 4)$-угольника так, что эти три пространства имеют общее пространство $k - 3$ измерений определённое $k - 2$ соседними вершинами.

Потом имеет место теорема:

В $(n - 4)$-угольнике вписанном в рациональную нормальную кривую проективного пространства n измерений, каждый из трёх последовательных пространств $k - 1$ измерений $(2 \leq k \leq n)$ пересекает своё противоположное пространство $n - k + 1$ измерений в одной точке так, что эти три точки, пространство пересечения $k - 3$ измерений этих трёх пространств $k - 1$ измерений и независимое пространство пересечения $n - к - 1$ измерений противоположных пространств $n - k + 1$ измерений, лежат в тойже гиперплоскости. И обратно: Пусть в проективном пространстве n-измерений дано $n + 4$ точек. Пусть никаких $n + 1$ точек из них не лежит в тойже гиперплоскости. Пусть этих $n + 4$ точек определяют в каком-то упорядочении $n - 1$ групп трёх последовательных пространств $k - 1$ измерений и их противоположных пространств для $k = 2, 3, \ldots, n$ так, что

1. пространства каждой из этих групп имеют взаимное расположение описанное в первой части теоремы;

2. некоторая из данных точек является первой точкой определяющей в каждой группе первое пространство $k - 1$ измерений. Потом пространства каждой группы трёх последовательных пространств $k - 1$ измерений и их противоположных пространств, имеют взаимное расположение описанное в первой части теоремы для произвольного k $(2 \leq k \leq n)$ и для произвольного упорядочения данных $n + 4$ точек, и эти точки лежат на рациональной нормальной кривой проективного пространства n измерений, определённой которыми-либо $n + 3$ из них.

Une generalisation du thèoreme de Pascal sur la courbe rationelle normale de l'espace projectif à n dimensions

J. Srb

(Extrait de l'article précédent)

Dans l'espace projectif à n dimensions soient $A_1, A_2, \ldots, A_{n+4}$ $n + 4$ sommets d'un polygone tels, qu'aucun hyperplan ne contienne $n + 1$ de ces sommets. Nous appelons les espaces opposés un espace à $k - 1$ $(2 \leqq k \leqq n)$ dimensions détérminé par k sommets consécutifs et l'espace à $n - k + 1$ dimensions déterminé par $n - k + 2$ sommets consécutifs di polygone, qui restent en suppriment les sommets qui sont contenus dans l'espace à $k - 1$ dimensions et parmi les sommets qui en ne sont pas contenus le sommet premier et le dernier. Nous appelons encore groupe de 3 espaces consécutifs à $k - 1$ dimensions 3 espaces à $k - 1$ dimensions diférents tels, que chaque de ces 3 espaces est déterminé par k sommets consécutifs du polygone, et que ces espaces ont pour l'espace d'intersection un espace à $k - 3$ dimensions déterminé par $k - 2$ sommets consécutifs du polygone. Puis a lieu le théorème suivant:

Dans un polygone de $n + 4$ côtés, inscrit à une courbe rationnelle normale de l'espace projectif à n dimensions rancontre chaque espace d'une groupe de 3 espaces consécutifs à $k - 1$ dimensions son espace opposé dans un point; ces 3 points, l'espace d'intersection de 3 espaces consécutifs à $k - 1$ dimensions ainsi que l'espace dintersection de leurs 3 espaces opposés sont contenus dans le même hyperplan. Réciproquement, soient $n + 4$ points dans l'espace projectif à n dimensions tels, qu'aucun hyperplan ne contienne $n + 1$ de ces points; ci ces $n + 4$ points, considérés dans un ordre déterminé, déterminent pour $k = 2, 3, \ldots, n$ en somme $n - 1$ groups de 3 espaces consécutifs à $k - 1$ dimensions et leurs espaces opposés de la manière, qu'un de ces points est le premier point qui détermine le premier espace à $k - 1$ dimensions de chaque de ces groups, et que les espaces de chaque de ces groups jouissent de la propriéte précédente, il en jouissent les espaces de chaque group de 3 espaces consécutifs à $k - 1$ dimensions et de leurs espaces opposés pour un k $(2 \leqq k \leqq n)$ quelconque et pour un ordre quelconque de $n + 4$ points donné, et la courbe rationelle normale determinée par $n + 3$ points choisis arbitrermente parmi ces $n + 4$ points donné, contienne aussi le point restant.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. IV-VI MATHEMATICA 1956

Obecné nadkružnice a obecné nadšroubovice

Doc. Dr. M. SYPTÁK

(Věnováno akademikovi J. Hroncovi k jeho 75. narozeninám)

Ve svém pojednání *Nadkružnice a nadšroubovice* [1] jsem studoval křivky, jejichž všechny křivosti jsou konstantní. V předloženém pojednání se zabývám křivkami obecnějšími, u nichž *poměr* každých dvou křivostí je konstantní. Nazývám je *obecnými nadkružnicemi* a *obecnými nadšroubovicemi* podle toho, zda leží v prostoru o sudém ($\geqq$ *4*) nebo lichém ($\geqq$ *3*) počtu dimensí. V trojrozměrném prostoru jsou to tedy obecné šroubovice. Při důkazech jsem použil některých vět z uvedeného pojednání; na druhé straně však z vět odvozených pro obecné nadkružnice a obecné nadšroubovice vyplývají nové věty pro nadkružnice a nadšroubovice. Je tedy toto pojednání doplňkem prvého. Všechny úvahy provádím v euklidovském prostoru, který důsledně značím R_p, kde p značí počet dimensí.

Pojednání má dvě části. V prvé části odvozuji parametrické rovnice obecných nadkružnic a obecných nadšroubovic a na základě toho odvozuji jejich důležité vlastnosti. Ve druhé části uvádím nutné a postačující podmínky, aby křivka byla obecnou nadkružnicí nebo obecnou nadšroubovicí.

Poznamenávám, že některé poučky, v tomto pojednání uvedené, jsem uveřejnil bez důkazu v *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris*, sv. *198*, str. *1665*. Zde uvádím jejich důkazy a doplňuji novými výsledky.

I. Parametrické vyjádření obecných nadkružnic a obecných nadšroubovic

V této kapitole půjde především o odvození parametrického vyjádření (= *p. v.*) těchto křivek vzhledem k pravoúhlému souřadnému systému $(X_1, \ldots, X_p)$. Za tím účelem si nejprve dokážeme dvě poučky, jichž správnost plyne přímo ze systému Frenetových vzorců.

1. *Křivka Γ, ležící v R_p ($p \geqq 3$), má poměry svých křivostí konstantní tehdy a jen tehdy, je-li sférický obraz jejích tečen nadkružnice $\varkappa$ (ležící v R_p pro p sudé a v R_{p-1} pro p liché).*

Abychom dokázali tuto větu dokážeme nejprve platnost následujících vztahů:

Označme po řadě s, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_\mu$, a_μ ($1 \leqq \mu \leqq p-1$) oblouk, jednotkové vektory tečny, μ-té normály a μ-tou křivost křivky Γ. Obdobné veličiny u sférického obrazu tečen $\varkappa$ označme σ, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}_\mu$, α_μ $(1 \leqq \mu \leqq p-1)$. Souřadnice uvedených vektorů vzhledem k pravoúhlému souřadnému systému $(X_1, \ldots, X_p)$ označme $t^{(i)}$, $n_\mu^{(i)}$, $\tau^{(i)}$, $\nu^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq p)$. Označme dále

$$c_0 = 1,\ c_{2m} = \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2m-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2m}} \text{ (pro celé } m \geqq 1),$$

$$b_0 = 1,\ b_{2m} = \sqrt{c_0^2 + c_2^2 + \ldots + c_{2m}^2} \text{ (pro celé } m \geqq 1).$$

Pak platí pro $p = 2n$

$$\boldsymbol{\nu}_{2r} = \boldsymbol{n}_{2r+1}\ (0 \leqq r \leqq n-1;\ \boldsymbol{\nu}_0 = \boldsymbol{\tau}),\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{a_1}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nu}_{2r-1} = -\frac{c_{2r}}{b_{2r-2}b_{2r}} \sum_{\mu=0}^{r-1} c_{2\mu}\boldsymbol{n}_{2\mu} + \frac{b_{2r-2}}{b_{2r}}\boldsymbol{n}_{2r}\ (1 \leqq r \leqq n-1), \tag{2}$$

$$\alpha_{2r} = \frac{a_{2r+1}}{a_1}\frac{b_{2r-2}}{b_{2r}}\ (1 \leqq r \leqq n-1), \tag{3}$$

$$\alpha_{2r-1} = \frac{a_{2r}}{a_1}\frac{b_{2r}}{b_{2r-2}}\ (1 \leqq r \leqq n-1), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\nu}_{2n-1} = -\frac{1}{b_{2n-2}} \sum_{\mu=0}^{n-1} c_{2\mu}\boldsymbol{n}_{2\mu}, \tag{5}$$

$$\alpha_{2n-1} = \frac{a_{2n-1}}{a_1}\frac{c_{2n-1}}{b_{2n-2}}. \tag{6}$$

Pro $p = 2n + 1$ platí vztahy (1), (3) beze změny; přistupuje $\alpha_{2n} = 0$; (2), (4) platí pro $1 \leqq r \leqq n$; (5), (6) odpadá.

Poznámka. Pro $1 \leqq r \leqq n-1$ platí tedy

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{2r-1}\alpha_{2r} = \frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_1} \ldots \frac{a_{2r}}{a_1}\frac{a_{2r+1}}{a_1}.$$

Důkaz. Označme $\boldsymbol{r}$ radiusvektor bodu křivky $\varkappa$. Potom $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{t}$. Podle Frenetových vzorců[1]) platí $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\sigma} = \boldsymbol{\tau} = a_1\boldsymbol{n}_1\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}$, z čehož $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma} = \dfrac{1}{a_1}$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{n}_1$. Dále

$$\alpha_1\boldsymbol{\nu}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}\sigma} = (-a_1\boldsymbol{t} + a_2\boldsymbol{n}_2)\frac{1}{a_1},\ \text{z čehož } \alpha_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2} = \frac{a_1}{a_2}b_2,$$

---

[1]) $\boldsymbol{t}' = a_1\boldsymbol{n}_1$,

$$\boldsymbol{n}'_\mu = -a_\mu\boldsymbol{n}_{\mu-1} + a_{\mu+1}\boldsymbol{n}_{\mu+1} \quad (1 \leqq \mu \leqq p-2), \tag{F}$$

$\boldsymbol{n}'_{p-1} = -a_{p-1}\boldsymbol{n}_{p-2}$,

kde $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{t}$; čárky znamenají derivace podle oblouku s.

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{-\boldsymbol{t} + \frac{a_2}{a_1}\boldsymbol{n}_2}{\frac{a_2}{a_1}b_2} = -\frac{a_1}{a_2 b_2}\boldsymbol{t} + \frac{\boldsymbol{n}_2}{b_2} = -\frac{c_2}{b_2}\boldsymbol{t} + \frac{1}{b_2}\boldsymbol{n}_2.$$ Podle (F) je dále

$$\varkappa_2 \boldsymbol{v}_2 = \frac{d\boldsymbol{v}_1}{d\sigma} + \varkappa_1 \boldsymbol{\tau} = \left[-\frac{c_2}{b_2}a_1\boldsymbol{n}_1 + \frac{1}{b_2}(-a_2\boldsymbol{n}_1 + a_3\boldsymbol{n}_3)\right]\frac{1}{a_1} + \frac{a_2}{a_1}b_2\boldsymbol{n}_1 =$$

$$= \frac{-c_2a_1 - a_2(1 - b_2^2)}{a_1b_2}\boldsymbol{n}_1 + \frac{a_3}{a_1b_2}\boldsymbol{n}_3 = \frac{a_3}{a_1b_2}\boldsymbol{n}_3, \text{ z čehož } \varkappa_2 = \frac{a_3}{a_1b_2}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{n}_3.$$

Jsou tedy vzorce (1), (2), (3), (4) správné pro $r = 1$. Dále dokazujeme úplnou indukcí. a) Buď nejprve $p = 2n$! Předpokládejme, že uvedené vzorce jsou správné pro $r(1 \leqq r \leqq n - 2)$. Za tohoto předpokladu je podle (F):

$$\varkappa_{2r+1}\boldsymbol{v}_{2r+1} = \frac{d\boldsymbol{v}_{2r}}{d\sigma} + \varkappa_{2r}\boldsymbol{v}_{2r-1} = (-a_{2r+1}\boldsymbol{n}_{2r} + a_{2r+2}\boldsymbol{n}_{2r+2})\frac{1}{a_1} -$$

$$- \frac{a_{2r+1}}{a_1}\frac{b_{2r-2}}{b_{2r}}\frac{c_{2r}}{b_{2r-2}b_{2r}}\sum_{\mu=0}^{r-1} c_{2\mu}\boldsymbol{n}_{2\mu} + \frac{a_{2r+1}}{a_1}\frac{b_{2r-2}}{b_{2r}}\frac{b_{2r-2}}{b_{2r}}\boldsymbol{n}_{2r} = -\frac{a_{2r+1}}{a_1}\frac{c_{2r}}{b_{2r}^2}\sum_{\mu=0}^{r-1} c_{2\mu}\boldsymbol{n}_{2\mu} +$$

$$+ \frac{a_{2r+1}}{a_1}\left(-1 + \frac{b_{2r-2}^2}{b_{2r}^2}\right)\boldsymbol{n}_{2r} + \frac{a_{2r+2}}{a_1}\boldsymbol{n}_{2r+2} = -\frac{a_{2r+1}}{a_1}\frac{c_{2r}}{b_{2r}^2}\sum_{\mu=0}^{r} c_{2\mu}\boldsymbol{n}_{2\mu} +$$

$$+ \frac{a_{2r+2}}{a_1}\boldsymbol{n}_{2r+2}, \text{ z čehož } \varkappa_{2r+1} = \sqrt{\frac{a_{2r+1}^2}{a_1^2}\frac{c_{2r}^2}{b_{2r}^4}(c_0^2 + c_2^2 + \ldots + c_{2r}^2) + \frac{a_{2r+2}^2}{a_1^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a_{2r+1}^2}{a_1^2}\frac{c_{2r}^2}{b_{2r}^2} + \frac{a_{2r+2}^2}{a_1^2}} = \frac{a_{2r+2}}{a_1}\sqrt{1 + \frac{c_{2r+2}^2}{b_{2r}^2}} = \frac{a_{2r+2}}{a_1}\frac{b_{2r+2}}{b_{2r}}, \text{ takže } \boldsymbol{v}_{2r+1} =$$

$$= -\frac{a_{2r+1}}{a_1}\frac{c_{2r}}{b_{2r}^2}\frac{a_1}{a_{2r+2}}\frac{b_{2r}}{b_{2r+2}}\cdot\sum_{\mu=0}^{r} c_{2\mu}\boldsymbol{n}_{2\mu} + \frac{a_{2r+2}}{a_1}\frac{a_1}{a_{2r+2}}\frac{b_{2r}}{b_{2r+2}}\boldsymbol{n}_{2r+2} =$$

$$= -\frac{c_{2r+2}}{b_{2r}b_{2r+2}}\sum_{\mu=0}^{r} c_{2\mu}\boldsymbol{n}_{2\mu} + \frac{b_{2r}}{b_{2r+2}}\boldsymbol{n}_{2r+2}.$$

Z toho dále podobnou úpravou:

$$\varkappa_{2r+2}\boldsymbol{v}_{2r+2} = \frac{d\boldsymbol{v}_{2r+1}}{d\sigma} + \varkappa_{2r+1}\boldsymbol{v}_{2r} = -\frac{c_{2r+2}}{a_1b_{2r}b_{2r+2}}[a_1\boldsymbol{n}_1 + c_2(-a_2\boldsymbol{n}_2 + a_3\boldsymbol{n}_3) +$$

$$+ c_4(-a_4\boldsymbol{n}_3 + a_5\boldsymbol{n}_5)] + \ldots + c_{2r}(-a_{2r}\boldsymbol{n}_{2r-1} + a_{2r+1}\boldsymbol{n}_{2r+1}) +$$

$$+ \frac{b_{2r}}{b_{2r+2}a_1}(-a_{2r+2}\boldsymbol{n}_{2r+1} + a_{2r+3}\boldsymbol{n}_{2r+3}) + \frac{a_{2r+2}}{a_1}\cdot\frac{b_{2r+2}}{b_{2r}}\boldsymbol{n}_{2r+1} + \frac{b_{2r}a_{2r+3}}{b_{2r+2}a_1}\boldsymbol{n}_{2r+3} =$$

$$= \left(-\frac{c_{2r}c_{2r+2}}{b_{2r}b_{2r+2}}\frac{a_{2r+1}}{a_1} - \frac{a_{2r+2}}{a_1}\frac{b_{2r}^2 - b_{2r+2}^2}{b_{2r}b_{2r+2}}\right)\boldsymbol{n}_{2r+1} + \frac{b_{2r}}{b_{2r+2}}\frac{a_{2r+3}}{a_1}\boldsymbol{n}_{2r+3} =$$

$$= \frac{c_{2r+2}(-c_{2r}a_{2r+1} + c_{2r+2}a_{2r+2})}{a_1b_{2r}b_{2r+2}}\boldsymbol{n}_{2r+1} + \frac{b_{2r}}{b_{2r+2}}\frac{a_{2r+3}}{a_1}\boldsymbol{n}_{2r+3} = \frac{a_{2r+3}}{a_1}\frac{b_{2r}}{b_{2r+2}}\boldsymbol{n}_{2r+3},$$

z čehož $\alpha_{2r+2} = \frac{a_{2r+3}}{a_1} \cdot \frac{b_{2r}}{b_{2r+2}}$, $\mathbf{v}_{2r+2} = \mathbf{n}_{2r+3}$.

Platí tedy vzorce (1), (2), (3), (4) pro $r + 1$. Konečně $\alpha_{2n-1}\mathbf{v}_{2n-1} =$

$$= \frac{d\mathbf{v}_{2n-2}}{d\sigma} + \alpha_{2n-2}\mathbf{v}_{2n-3} = -\frac{a_{2n-1}}{a_1}\mathbf{n}_{2n-2} - \frac{a_{2n-1}}{a_1}\frac{b_{2n-4}}{b_{2n-2}}\frac{c_{2n-2}}{b_{2n-4}b_{2n-2}}\sum_{\mu=0}^{n-2} c_{2\mu}\mathbf{n}_{2\mu} +$$

$$+ \frac{a_{2n-1}}{a_1}\frac{b_{2n-4}^2}{b_{2n-2}^2}\mathbf{n}_{2n-2} = -\frac{a_{2n-1}}{a_1}\frac{c_{2n-2}}{b_{2n-2}^2}\sum_{\mu=0}^{n-2} c_{2\mu}\mathbf{n}_{2\mu} - \frac{a_{2n-1}}{a_1}\left(1 - \frac{b_{2n-4}^2}{b_{2n-2}^2}\right)\mathbf{n}_{2n-2} =$$

$$= -\frac{a_{2n-1}}{a_1}\frac{c_{2n-2}}{b_{2n-2}^2}\sum_{\mu=0}^{n-1} c_{2\mu}\mathbf{n}_{2\mu}, \text{ z čehož } \alpha_{2n-1} = \frac{a_{2n-1}}{a_1}\cdot\frac{c_{2n-2}}{b_{2n-2}^2}\sqrt{c_0^2 + c_2^2 + \ldots + c_{2n-2}^2} =$$

$$= \frac{a_{2n-1}}{a_1}\frac{c_{2n-2}}{b_{2n-2}}, \quad \mathbf{v}_{2n-1} = -\frac{1}{b_{2n-2}}\sum_{\mu=0}^{n-1} c_{2\mu}\mathbf{n}_{2\mu}, \text{ takže platí (6), (5).}$$

b) Buď $p = 2n + 1$! Předpokládejme, že vzorce (1), (2), (3), (4) platí pro r ($1 \leqq r \leqq n - 2$). Za tohoto předpokladu se zjistí podobně jako v případě $p = 2n$, že platí i pro $r + 1$. Dále je podle (F)

$$\alpha_{2n-1}\mathbf{v}_{2n-1} = \frac{d\mathbf{v}_{2n-2}}{d\sigma} + \alpha_{2n-2}\mathbf{v}_{2n-3} = (-a_{2n-1}\mathbf{n}_{2n-2} + a_{2n}\mathbf{n}_{2n})\frac{1}{a_1} -$$

$$-\frac{a_{2n-1}}{a_1}\frac{b_{2n-4}}{b_{2n-2}}\cdot\frac{c_{2n-2}}{b_{2n-4}b_{2n-2}}\sum_{\mu=0}^{n-2} c_{2\mu}\mathbf{n}_{2\mu} + \frac{a_{2n-1}}{a_1}\frac{b_{2n-4}^2}{b_{2n-2}^2} = -\frac{a_{2n-1}}{a_1}\frac{c_{2n-2}}{b_{2n-2}^2}\sum_{\mu=0}^{n-2} c_{2\mu}\mathbf{n}_{2\mu} +$$

$$+ \frac{a_{2n-1}}{a_1}\left(-1 + \frac{b_{2n-4}^2}{b_{2n-2}^2}\right)\mathbf{n}_{2n-2} + \frac{a_{2n}}{a_1}\mathbf{n}_{2n} = -\frac{a_{2n-1}}{a_1}\frac{c_{2n-2}}{b_{2n-2}^2}\sum_{\mu=0}^{n-1} c_{2\mu}\mathbf{n}_{2\mu} + \frac{a_{2n}}{a_1}\mathbf{n}_{2n},$$

$$\text{z čehož } \alpha_{2n-1} = \sqrt{\frac{a_{2n-2}^2}{a_1^2}\frac{c_{2n-2}^2}{b_{2n-2}^4}(c_0^2 + c_2^2 + \ldots + c_{2n-2}^2) + \frac{a_{2n}^2}{a_1^2}} = \sqrt{\frac{a_{2n-1}^2}{a_1^2}\frac{c_{2n-2}^2}{b_{2n-2}^2} + \frac{a_{2n}^2}{a_2^2}} =$$

$$= \frac{a_{2n}}{a_1}\sqrt{1 + \frac{c_{2n}^2}{b_{2n-2}^2}} = \frac{a_{2n}}{a_1}\frac{b_{2n}}{b_{2n-2}}, \quad \mathbf{v}_{2n-1} = -\frac{c_{2n}}{b_{2n-2}b_{2n}}\sum_{\mu=0}^{n-1} c_{2\mu}\mathbf{n}_{2\mu} + \frac{b_{2n-2}}{b_{2n}}\mathbf{n}_{2n};$$

tedy (2), (4) platí i pro $r = n$. Konečně $\alpha_{2n}\mathbf{v}_{2n} = \frac{d\mathbf{v}_{2n-1}}{d\sigma} + \alpha_{2n-1}\mathbf{v}_{2n-2} =$

$$= -\frac{c_{2n}}{a_1b_{2n-2}b_{2n}}[a_1\mathbf{n}_1 + c_2(-a_2\mathbf{n}_1 + a_3\mathbf{n}_3) + \ldots + c_{2n-2}(-a_{2n-2}\mathbf{n}_{2n-3} + a_{2n-1}\mathbf{n}_{2n-1})] +$$

$$+ \frac{b_{2n-2}}{a_1b_{2n}}(-a_{2n}\mathbf{n}_{2n-1}) + \frac{a_{2n}}{a_1}\frac{b_{2n}}{b_{2n-2}}\mathbf{n}_{2n-1} = \frac{-c_{2n-2}c_{2n}a_{2n-1} + a_{2n}(-b_{2n-2}^2 + b_{2n}^2)}{a_1b_{2n-2}b_{2n}}\cdot$$

$$\cdot\mathbf{n}_{2n-1} = \frac{c_n(-a_{2n-1}c_{2n-2} + a_{2n}c_{2n})}{a_1b_{2n-2}b_{2n}}\mathbf{n}_{2n-1} = 0, \text{ z čehož } \alpha_{2n} = 0.$$

Nyní zjistíme správnost věty *1*. Všimněme si nejprve případu $p = 3$. Ze vztahu (4) pro $r = 1$, t. j. $\alpha_1 = \frac{a_2}{a_1}\sqrt{1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}}$ vidíme: Je-li α_1 konstanta $\neq 0$, je také $\frac{a_2}{a_1}$ konstanta $\neq 0$; a obráceně. Pro $p = 3$ je tedy věta *1* správná. Pro jednoduchost dokažme tuto větu pro R_6 a R_7. Z postupu bude patrné, jak by se důkaz provedl v případě prostoru o libovolném počtu dimensí. Buď tedy $\varkappa$ nadkružnicí v R_6. Z (4) pro $r = 1$ plyne, že $\frac{a_2}{a_1}$ je konstanta $\neq 0$ a následkem toho z (3) pro $r = 1$ také $\frac{a_3}{a_1}$ je konstanta $\neq 0$. Z (4) pro $r = 2$ dále plyne, že $\frac{a_4}{a_1}$ je konstanta $\neq 0$ a následkem toho z (3) pro $r = 2$ také $\frac{a_5}{a_1}$ je konstanta $\neq 0$. Jde-li o R_7, pak ještě z (4) pro $r = 3$ plyne, že $\frac{a_6}{a_1}$ je konstanta $\neq 0$. Má tedy Γ konstantní poměry křivostí. Obráceně: Ať má Γ uvedenou vlastnost! Pak ze (4) a (3) pro $r = 1$ následuje, že α_1, α_2 jsou konstanty $\neq 0$. Podobně z týchž relací pro $r = 2$ plyne, že α_4, α_5 jsou konstanty $\neq 0$. Pro R_7 je ještě $\alpha_6 = 0$. Je tedy $\varkappa$ nadkružnice v R_6.

2. Obdobným způsobem lze dokázati, že *křivka Γ v R_p ($p \geqq 3$) má poměry křivostí konstantní tehdy a jen tehdy, je-li sférický obraz jejích ($p - 1$)-ních normál nadkružnice, ležící v R_p pro p sudé a v R_{p-1} pro p liché.*

3. *Každé křivce Γ s konstantními poměry křivostí v R_{2n+1} ($n \geqq 1$) lze přiřaditi právě jeden směr o, jenž 1° je rovnoběžný s tečným prostorem*[2]) *každého bodu Γ a svírá s tečnou a všemi sudými normálami konstantní úhly $\left(\neq 0, \frac{\pi}{2}\right)$ a 2° je kolmý k nadrovině, v níž leží sférický obraz $\varkappa$ tečen křivky Γ. 3° Tento směr je charakterisován vlastností, že je rovnoběžný se všemi tečnými prostory (čili je kolmý ke všem normálním prostorům*[2]) *křivky Γ. 4°. Je určený jednotkovým vektorem*

$$\mathbf{o} = \frac{1}{b_{2n}} \sum_{\nu=0}^{n} c_{2\nu}\mathbf{n}_{2\nu}. \tag{7}$$

Směr o nazveme *osovým směrem* nadšroubovice Γ.

Důkaz. Především z (F) plyne, že $\mathbf{o}$ nezávisí na s, neboť

$$\frac{d\mathbf{o}}{ds} = \frac{1}{b_{2n}} \sum_{\nu=0}^{n-1} (c_{2\nu}a_{2\nu+1} - c_{2\nu+2}a_{2\nu+2})\mathbf{n}_{2\nu+1} = \mathbf{0}.$$

Vlastnost 1° je patrná přímo ze (7) a z definic b_{2n} $c_{2\nu}$. Vlastnost 2° plyne z toho, že směr o je kolmý k tečně a všem normálám každého bodu na $\varkappa$, neboť podle (1) je $\mathbf{o} \cdot \mathbf{r}_{2r} = 0$ (pro $r = 0, \dots, n - 1$) a podle (2) je

---

[2]) Viz [1], str. 11.

$$\mathbf{o} \, . \, v_{2r-1} = -\frac{c_{2r}}{b_{2r-2}b_{2r}b_{2n}} \sum_{\mu=0}^{r-1} c_\mu^2 + \frac{b_{2r-2}}{b_{2r}b_{2n}} c_{2r} = 0.$$

K odvození vlastnosti 3° si všimněme: Z předpokladu, že nenulový vektor $\mathbf{O} = \sum_{\nu=0}^{n} e_{2\nu}\boldsymbol{n}_{2\nu}$ je nezávislý na s, následuje, že identicky vzhledem k s platí:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{O}}{\mathrm{d}s} = \sum_{\nu=1}^{n} (e_{2\nu-2}a_{2\nu-1} - e_{2\nu}a_{2\nu}) \, \boldsymbol{n}_{2\nu-1} + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mathrm{d}e_{2\nu}}{\mathrm{d}s} \boldsymbol{n}_{2\nu} = 0.$$

Z toho dostáváme $\frac{\mathrm{d}e_{2\nu}}{\mathrm{d}s} = 0$ (pro $o \leqq \nu \leqq n$) a $e_{2\nu-2}a_{2\nu-1} - e_{2\nu}a_{2\nu} = 0$ (pro $1 \leqq \nu \leqq n$). Z těchto relací je patrné, že e_0 je konstanta $\neq 0$ a že $e_{2\nu} = \frac{a_1a_3 \ldots a_{2\nu-1}}{a_2a_4 \ldots a_{2\nu}} e_0 = c_{2\nu}e_0$ pro $1 \leqq \nu \leqq n$. Jsou tedy vektory $\mathbf{o}$, $\mathbf{O}$ navzájem rovnoběžné.

Poznámka. Všimněme si, že z existence pevného směru rovnoběžného se všemi tečnými prostory nějaké křivky v R_{2n+1} ($n \leqq 1$) [čili kolmého ke všem jejím normálním prostorům[2])] následuje, že poměry křivostí

$$\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_3}{a_4}, \ldots, \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$$

této křivky jsou konstantní.

4. *Parametrické vyjádření každé křivky s konstantními poměry křivostí Γ v R_{2n} ($n \geqq 2$), po př. v R_{2n+1} ($n \geqq 1$) lze vhodnou volbou pravoúhlého systému souřadného uvésti do tvaru*

$$x_{2i-1} = r_i \int \cos\,[l_i\varphi(s)]\,\mathrm{d}s, \; x_{2i} = r_i \int \sin\,[l_i\varphi(s)]\,\mathrm{d}s, \text{ po př. } x_{2n+1} = Cs \qquad (8)$$

($i = 1, \ldots, n$), kde r_i, l_i, C jsou kladné konstanty; $l_i \neq l_j$ pro $i \neq j$; s je oblouk křivky Γ; $\varphi(s)$ funkce oblouku s.

Důkaz. Podle poučky *1* je tečným sférickým obrazem Γ nadkružnice $\varkappa$, jejíž p. v. lze psáti ve tvaru $x_{2i-l} = r_i \cos\,[l_i\sigma]$, $x_{2i} = r_i \sin\,[l_i\sigma]$, $i = 1, \ldots, n$, po př. $x_{2n+1} = C$. Přitom σ je parametr a l_i, C jsou kladné konstanty, z nichž l_i jsou navzájem různé. Počátek pravoúhlého systému souřadného je ve středu nadkoule, na níž $\varkappa$ leží a směry os $X_1, \ldots, X_{2n}$ jsou axiálními směry bodu $\sigma = 0$, po př. směr osy X_{2n+1} je kolmý na nadrovinu, v níž $\varkappa$ leží. Lze tedy docíliti toho, že $t^{(2i-1)} = r_i \cos\,[l_i\sigma]$, $t^{(2i)} = r_i \sin\,[l_i\sigma]$, $i = 1, \ldots, n$, po př. $t^{(2n+1)} = C$. Z toho plyne (8).

Definice. V R_{2n} budeme nazývati axiální prostory nadkružnice $\varkappa$ (tvořící skupinu n $(2n - 2)$-rozměrných prostorů, jednoznačně nadkružnici přiřazenou) *axiálními prostory obecné nadkružnice Γ.* Je-li Γ určena rovnicemi (8), pak $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) jsou rovnice axiálních prostorů Γ. V R_{2n+1} budeme nazývati skupinu n $(2n - 1)$-rozměrných prostorů, určených axiálními prostory nadkružnice $\varkappa$ a osovým směrem, *axiálními prostory obecné nadšroubovice Γ.* Při p. v. (8) je směr osy X_{2n+1} osovým směrem a $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) rovnice axiálních prostorů Γ. Axiální prostory křivky s konstantními poměry křivostí v R_p ($p \geqq 3$) tvoří tedy skupinu n ($p - 2$)-rozměrných prostorů, přiřazených této křivce jednoznačně, až na rovnoběžné posunutí; přitom $n = \frac{p}{2}$ pro p sudé a $n = \frac{p-1}{2}$ pro p liché. Kromě toho *axiálními směry (tečného normálního prostoru) bodu P na Γ* v R_p budeme nazývati axiální směry (normálního, tečného prostoru) bodu Q na $\varkappa$; přitom Q je tečný sférický obraz bodu P.

Podle [1], str. 24 jsou tedy směrové kosiny axiálních směrů $\xi^{(i)}$ tečného prostoru v bodě $P(s)$ křivky Γ o p. v. (8) v R_{2n}, po př. v R_{2n+1}

$$\begin{aligned} \xi^{(i)}_{2i-1} &= \cos [l_i\varphi(s)],\ \xi^{(i)}_{2i} = \sin [l_i\varphi(s)], \\ \xi^{(i)}_{\nu} &= 0 \text{ pro } \nu \neq 2i-1,\ 2i, \text{ po př. } \xi^{(i)}_{2n+1} = 0. \end{aligned} \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (8')$$

Podobně směrové kosiny axiálních směrů $\eta^{(i)}$ normálního prostoru jsou

$$\begin{aligned} \eta^{(i)}_{2i-1} &= -\sin [l_i\varphi(s)],\ \eta^{(i)}_{2i} = \cos [l_i\varphi(s)] \\ \eta^{(i)}_{\nu} &= 0 \text{ pro } \nu \neq 2i-1,\ 2i, \text{ po př. } \eta^{(i)}_{2n+1} = 0. \end{aligned} \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (8'')$$

Poznámka. Zvolme s_0 tak, aby $\varphi(s_0)$ bylo definováno. Označme $l_i\varphi(s_0) = k_i$. Otočme křivku Γ o p. v. (8) podle rovnic

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= x_{2i-1} \cos k_i + x_{2i} \sin k_i, \\ X_{2i} &= -x_{2i-1} \sin k_i + x_{2i} \cos k_i, \\ &\text{po př. } X_{2n+1} = x_{2n+1} \end{aligned}$$

($i = 1, \ldots, n$). Dostaneme p. v. téže křivky Γ ve tvaru (8), kde $\varphi(s)$ je nahrazeno $\varphi(s) - \varphi(s_0)$. Souřadné osy $X_1, X_3, \ldots, X_{2n-1}$ ($X_2, \ldots, X_{2n}$) jsou nyní axiální směry tečného (normálního) prostoru bodu $s = s_0$, jak je patrné z (8), (8').

5. *Křivka Γ o p. v. (8), kde $\varphi(s)$ je libovolná funkce parametru s mající derivaci, má v každém svém bodě, v němž $\frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0$, od 0 různé křivosti, jejichž poměry jsou konstantní. Je-li s oblouk, pak složky jednotkových vektorů tečny a jednotlivých normál v tomto bodě jsou:*

$$n^{(2i-1)}_{2\nu} = (-1)^\nu r_i B^{(i)}_{2\nu} \cos [l_i\varphi(s)],\ n^{(2i)}_{2\nu} = (-1)^\nu r_i B^{(i)}_{2\nu} \sin [l_i\varphi(s)], \qquad (9)$$

$$n^{(2i-1)}_{2\nu+1} = (-1)^\nu r_i B^{(i)}_{2\nu+1} \sin [l_i\varphi(s)],\ n^{(2i)}_{2\nu+1} = (-1)^\nu r_i B^{(i)}_{2\nu+1} \cos [l_i\varphi(s)], \qquad (10)$$

$$t^{(2n+1)} = C,\ n^{(2n+1)}_{2\nu} = \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} C,\ n^{(2n+1)}_{2\nu+1} = 0 \qquad (11)$$

($i = 1, 2, \ldots, n$), kde $\nu \geqq 0$ a pro R_{2n} (11) odpadá. Přitom je

$$1^\circ\ B^{(i)}_{\mu} = \frac{D_\mu(l_i)}{A_0 A_1 \ldots A_\mu} \quad (\mu \leqq 0),$$

$$2^\circ\ A_0 = 1,\ A_\mu = \frac{a_\mu}{\varphi'(s)} \quad (\mu \geqq 1) \text{ jsou konstanty } \neq 0$$

(čárka značí derivaci podle s),

3° $D_0(x) = 1,\ D_1(x) = x,\ D_\mu(x) = xD_{\mu-1}(x) - A^2_{\mu-1}D_{\mu-2}(x)\quad (\mu \geqq 2)$.

Poznámka 1. Je-li s obloukem v p. v. (8), pak

a) $l_1, l_2, \ldots, l_n$ jsou kladné kořeny rovnice $D_{2n}(x) = 0$ pro R_{2n}, po př. $D_{2n+1}(x) = 0$ pro R_{2n+1}[3]);

b) $\frac{1}{r_i} = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n+1} B^{(i)2}_{2\nu} + \text{po př. } B^{(i)2}_{2n}} = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n-1} B^{(i)2}_{2\nu+1}}$, po př. $\frac{1}{C} = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n} c^2_{2\nu}}$.

2. Je-li $\varphi(s)$ lineární v s, pak (8) je p. v. nadkružnice, po př. nadšroubovice.

Důkaz. Všimněme si především, že transformací parametru s v t podle rovnice $t = s\sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2}$ lze dosáhnouti toho, že t je oblouk křivky Γ. Stačí tedy důkaz provésti za předpokladu, že s je oblouk. Budeme dokazovati úplnou indukcí vzhledem k ν. 1. Z (8) dostáváme $t^{(2i-1)} = r_i \cos l_i\varphi$, $t^{(2i)} = r_i \sin l_i\varphi$, po př. $t^{(2n+1)} = C$ (píšeme φ místo $\varphi(s)$). Podle (F) je dále $a_1 n_1{}^{(2i-1)} = - r_i l_i\varphi' \sin l_i\varphi$, $a_1 n_1{}^{(2i)} = r_i l_i \varphi' \cos l_i\varphi$, po př. $a_1 n_1{}^{(2n+1)} = 0$, z čehož $a_1 = \varphi'\sqrt{r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2} \neq 0$, $n_1^{(2i-1)} = -r_i B_1^{(i)} \sin l_i\varphi$, $n_1^{(2i)} = r_i B_1^{(i)} \cos l_i\varphi$, po př. $n_1^{(2n+1)} = 0$, $A_1 = \frac{a_1}{\varphi'} = \sqrt{r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2}$. Vidíme tedy, že A_1 je konstanta $\neq 0$ a že (9), (10), po př. (11) platí pro $\nu = 0$. 2. Předpokládejme, že $A_1, A_2, \ldots, A_{2\nu+1}$ jsou konstanty $\neq 0$ a že (9), (10), po př. (11) platí pro ν $(0 \leqq \nu \leqq n - 2)$. Ukážeme, že za tohoto předpokladu jsou $A_{2\nu+2}$, $A_{2\nu+3}$ konstanty $\neq 0$ a že (9), (10), po př. (11) platí i pro $\nu + 1$. Podle (F) je totiž

$$a_{2\nu+2} n_{2\nu+2}^{(2i-1)} = n_{2\nu+1}^{(2i-1)\prime} + a_{2\nu+1} n_{2\nu}^{(2i-1)} = (-1)^{\nu+1} \frac{D_{2\nu+1}(l_i) l_i - A^2_{2\nu+1} D_{2\nu}(l_i)}{A_1 \ldots A_{2\nu+1}} r_i \varphi' \cos l_i\varphi =$$

$$= (-1)^{\nu+1} \frac{D_{2\nu+2}(l_i)}{A_1 \ldots A_{2\nu+1}} r_i\varphi' \cos l_i\varphi,\quad a_{2\nu+2} n^{(2i)}_{2\nu+2} = (-1)^{\nu+1} \frac{D_{2\nu+2}(l_i)}{A_1 \ldots A_{2\nu+1}} r_i\varphi' \sin l_i\varphi,$$

po př. $a_{2\nu+2} n_{2\nu+2}^{(2n+1)} = \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} C$.

$$\text{Z toho}\quad A_{2\nu+2} = \frac{a_{2\nu+2}}{\varphi'} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i^2 D^2_{2\nu+2}(l_i)}{A_1^2 \ldots A^2_{2\nu+1}} + \text{po př. } \frac{a_1^2 a_3^2 \ldots a^2_{2\nu+1}}{a_2^2 a_4^2 \ldots a^2_{2\nu}} \cdot \frac{a^2_{2\nu+1}}{\varphi'^2} C^2}.$$

Je tedy $A_{2\nu+2}$ konstanta, jež pro R_{2n+1} je zřejmě různá od 0. Kdyby pro R_{2n} bylo $A_{2\nu+2} = 0$, bylo by $D_{2\nu+2}(l_i) = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Tedy $\pm l_1, \ldots, \pm l_n$ by byly navzájem různé kořeny rovnice $D_{2\nu+2}(x) = 0$ stupně $2\nu + 2$ v x; avšak $2\nu + 2 < 2n$. Proto $n_{2\nu+2}^{(i-1)} = (-1)^{\nu+1} r_i B^{(}_{2\nu+2} \cos l_i\varphi$, $n^{(2i)}_{2\nu+2} = (-1)^{\nu+1} r_i B^{(i)}_{2\nu+2} \sin l_i\varphi$, po př. $n^{(n+1)}_{2\nu+2} = \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu+2}} C$. Dále je podle ($F$)

$$a_{2\nu+3} n^{(2i-1)}_{2\nu+3} = n^{(2i-1)\prime}_{2\nu+2} + a_{2\nu+2} n^{(2i-i)}_{2\nu+1} = - (-1)^{\nu+1} r_i B^{(i)}_{2\nu+2} l_i \varphi' \sin l_i\varphi -$$

$$- (-1)^{\nu} r_i A_{2\nu+2} \varphi' B^{(i)}_{2\nu+1} \sin l_i\varphi = - (-1)^{\nu+1} r_i \varphi' \frac{l_i D_{2\nu+2}(l_i) - A^2_{2\nu+2} D_{2\nu+1}(l_i)}{A_1 \ldots A_{2\nu+2}} \sin l_i\varphi =$$

---

[3]) Dá se dokázati, že rovnice $D_{2n}(x) = 0$ má právě $2n$ navzájem různých, reálných kořenů $\neq 0$, z nichž vždy dva se od sebe liší jen znaménkem. Rovnice $D_{2n+1}(x) = 0$ má právě $2n + 1$ navzájem různých a reálných kořenů, z nichž jeden je roven 0 a z ostatních vždy dva se od sebe liší jen znaménkem. Viz [1], str. 4.

$$= - (-1)^{\nu+1} \frac{D_{2\nu+3}(l_i)}{A_2 \dots A_{2\nu+2}} r_i \varphi' \sin l_i \varphi; \text{ podobně } a_{2\nu+3} n^{(2i)}_{2\nu+3} =$$

$$= (-1)^{\nu+1} \frac{D_{2\nu+3}(l_i)}{A_1 \dots A_{2\nu+2}} r_i \varphi' \cos l_i \varphi, \text{ po př. } a_{2\nu+3} n^{(n+1)}_{2\nu+3} = 0. \text{ Z toho } A_{2\nu+3} =$$

$$= \frac{a_{2\nu+3}}{\varphi'} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i^2 D^2_{2\nu+3}(l_i)}{A_1^2 \dots A^2_{2\nu+2}}}.$$

Je tedy $A_{2\nu+3}$ konstanta. Kdyby bylo $A_{2\nu+3} = 0$, bylo by $D_{2\nu+3}(l_i) = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Tedy $0, \pm l_1, \dots, \pm l_n$ byly by navzájem různé kořeny rovnice $D_{2\nu+3}(x) = 0$ stupně $2\nu + 3$ v x; avšak $2\nu + 3 < 2n + 1$. Proto $n^{(2i-1)}_{2\nu+3} = - (-1)^{\nu+1} r_i B^{(i)}_{2\nu+3} \sin l_i \varphi$, $n^{(2i)}_{2\nu+3} = (-1)^{\nu+1} r_i B^{(i)}_{2\nu+3} \cos l_i \varphi$, po př. $n^{(2n+1)}_{2\nu+3} = 0$. Pro R_{2n+1} je ještě $a_{2n} n^{(2i-1)}_{2n-1} = n^{(2i-1)'}_{2n-1} + a_{2n-1} n^{(2n-1)}_{2n-2} = -(-1)^{n-1} r_i B^{(i)}_{2n-1} l_i \varphi' \cos l_i \varphi +$

$$+ A_{2n-1} \varphi' (-1)^{n-1} r_i B^{(i)}_{2n-2} \cos l_i \varphi = (-1)^n r_i \varphi' \frac{D_{2n}(l_i)}{A_1 \dots A_{2n-1}} \cos l_i \varphi \text{ a podobně}$$

$$a_{2n} n^{(2i)}_{2n} = (-1)^n r_i \varphi' \frac{D_{2n}(l_i)}{A_1 \dots A_{2n-1}} \sin l_i \varphi, \text{ po př. } a_{2n} n^{(2n+1)}_{2n} = a_{2n-1} \frac{a_1 a_3 \dots a_{2n-3}}{a_2 a_4 \dots a_{2n-2}} C;$$

$$\text{z toho } A_{2n} = \frac{a_{2n}}{\varphi'} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i \frac{D^2_{2n}(l_i)}{A_1^2 \dots A^2_{2n-1}} + \frac{a_1^2 a_3^2 \dots a^2_{2n-3}}{a_2^2 a_4^2 \dots a^2_{2n-2}} \frac{a^2_{2n-1}}{\varphi'^2} C^2}.$$

Je tedy A_{2n} konstanta $\neq 0$ a $n^{(2i-1)}_{2n} = (-1)^n r_i B^{(i)}_{2n} \cos l_i \varphi$, $n^{(2i)}_{2n} =$

$$= (-1)^n r_i B^{(i)}_{2n} \sin l_i \varphi \text{ (pro } i = 1, \dots, n), \ n^{(2n+1)}_{2n} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2n-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2n}} C.$$

Tím jsme dokázali, že $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$, po př. A_{2n} jsou konstanty $\neq 0$ a že (9), (10), (11) platí pro $0 \leqq \nu \leqq n - 1$, po př. (9) pro $\nu = n$.

K dokončení důkazu zbývá dokázati, že křivosti $a_1, a_2, \dots$ jsou $\neq 0$ a že jejich poměry jsou konstantní. To však plyne z toho, že $A_1, A_2, \dots$ jsou konstanty, různé od 0.

Poznámka. a) Pro R_{2n} je podle (F) $\boldsymbol{n}'_{2n-1} = - a_{2n-1} \boldsymbol{n}_{2n-2}$, z čehož po dosazení z (9), (10) pro $\nu = n - 1$ dostáváme, že $l_i B^{(i)}_{2n-1} - \dfrac{a_{2n-1}}{\varphi'} B^{(i)}_{2n-2} = 0$, tedy $l_i B^{(i)}_{2n-1} - A_{2n-1} B^{(i)}_{2n-2} = 0$, tedy $D_{2n}(l_i) = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Pro R_{2n+1} z $\boldsymbol{n}'_{2n} = - a_{2n} \boldsymbol{n}_{2n-1}$ plyne podobně, že $D_{2n+1}(l_i) = 0$ pro $i = 1, \dots, n$.

b) Relace uvedené v poznámce b) plynou z toho, že determinant složek jednotkových vektorů $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_{2n-1}$, po př. $\boldsymbol{n}_{2n}$ (daných vzorci (9), (10), po př. (11)) je ortogonální.

Dodatek. Vět *4* a *5* lze použíti k určení p. v. křivky s konstantními poměry křivostí, *jsou-li její křivosti dány*. Je-li ku př. v R_4 dáno $a_1 = 3s$, $a_2 = 4s$, $a_3 = 5s$ (s oblouk), pak ze vztahu $a_1^2 = \sqrt{r_1^2 l_1^2 + r_2^2 l_2^2} \varphi'_{(s)}{}^2$ následuje, že $\varphi(s) = ks^2 + h$, kde k, h jsou konstanty a $k \neq 0$. Dosadíme-li to do (8) a provedeme-li otočení souřadného systému

$$X_{2i-1} = x_{2i-1} \cos (l_i h) + x_{2i} \sin (l_i h)$$
$$X_{2i} = - x_{2i-1} \sin (l_i h) + x_{2i} \cos (l_i h)$$

$(i = 1, 2)$, dostaneme hledané p. v.

$$X_{2i-1} = r_i \int \cos (l_i k s^2)\, ds,\; X_{2i} = r_i \int \sin (l_i k s^2)\, ds$$

$(i = 1, 2)$, v němž s je oblouk a v němž můžeme zřejmě předpokládati $k > 0$. K numerickému výpočtu r_i, kl_i použijeme poznámky *1* za větu *5*. Položme $\varphi(s) = s^2$; pak $A_1 = \frac{3}{2}$, $A_2 = 2$, $A_3 = \frac{5}{2}$. Tedy kl_i $(i = 1, 2)$ jsou kladné kořeny rovnice $D_4(x) = x^4 - \frac{25}{2}x^2 + \frac{225}{16} = 0$. Z toho $kl_1 = \frac{3}{2}\sqrt{5}$, $kl_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$; následkem toho $\frac{1}{r_1} = \sqrt{10}$, $\frac{1}{r_2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$. P. v. křivky o daných křivostech je tedy

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \int \cos \left(\frac{3}{2}\sqrt{5}\, s^2\right) ds,\; x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \int \sin \left(\frac{3}{2}\sqrt{5}\, s^2\right) ds,$$

$$x_3 = \frac{3}{\sqrt{10}} \int \cos \left(\frac{\sqrt{5}}{2} s^2\right) ds,\; x_4 = \frac{3}{\sqrt{10}} \int \sin \left(\frac{\sqrt{5}}{2} s^2\right) ds.$$

6. Uvedeme ještě jeden důkaz věty *4*, který se neopírá o znalost parametrického vyjádření nadkružnic.

Aby křivka Γ v $R_p (p \geqq 2)$ měla dané křivosti $a_\mu = k_\mu f(s)$, $(\mu = 1, 2, \ldots, p-1)$, kde k_μ jsou konstanty různé od 0 a $f(s)$ funkce jejího oblouku s, stačí v rovnicích (8) (v nichž $p = 2n$, po př. $p = 2n + 1$) voliti

1° $\varphi(s) = \int f(s)\, ds$,

2° *za l_i kladné kořeny sekulární rovnice $D_{2n}(x) = 0$, po př. $D_{2n+1}(x) = 0$, utvořené z konstant $A_\mu = k_\mu$ (viz větu 5),*

$$3°\; \frac{1}{r_i} = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n-1} B_{2\nu}^{(i)2} + \textit{po př. } B_{2n}^{(i)2}} \quad \textit{čili}\; \frac{1}{r_i} = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n-1} B_{2\nu+1}^{(i)2}},$$

kde $B_\mu^{(i)} = \frac{D_\mu(l_i)}{k_0 k_1 \ldots k\mu}$ $(\mu \geqq 0, 1 \leqq i \leqq n, k_0 = 1)$,

$$4°\; \text{po př. } \frac{1}{C} = \sqrt{1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{k_1^2 k_3^2 \ldots k_{2\nu-1}^2}{k_2^2 k_4^2 \ldots k_{2\nu}^2}}.$$

Poznámka. Můžeme položiti také $\varphi(s) = k \int a_i\, ds$, kde k je libovolná konstanta $\neq 0$ a a_i libovolná z daných křivostí. Neboť platí, že $a_\mu = \frac{k_\mu}{kk_i} kk_i f(s)$ pro $\mu = 1, \ldots, p-1$, takže podle 1° můžeme položiti $\varphi(s) = k \int a_i\, ds$.

Důkaz. $k_0 = 1$, $k_1, \ldots, k_p$ jsou konstanty $\neq 0$. Pomocí nich definujme (viz [1], str. 3) mnohočleny $D_0(x) = 1$, $D_1(x) = x, \ldots, D_{2n}(x)$, po př. $D_{2n+1}(x)$. Kladné kořeny rovnice $D_{2n}(x) = 0$, po př. $D_{2n+1}(x) = 0$ označme $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Potom podle [1], (4) je $\sum_{\nu=0}^{n-1} B_{2\nu}^{(i)2} = \sum_{\nu=0}^{n-1} B_{2\nu+1}^{(i)2}$, po př. podle [1], (4') je $\sum_{\nu=0}^{n} B_{2\nu}^{(i)2} =$

$= \sum_{\nu=0}^{n-1} B_{2\nu+1}^{(i)2}$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$. Dále je $\frac{l_i}{r_i} = l_i \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n-1} B_{2\nu}^{(i)2}}$ + po př. $B_{2n}^{(2i)} =$ $= l_i \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n-1} B_{2\nu+1}^{(i)2}}$. Proto podle [1], (13) a [1], (14) je $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 B_{2\nu}^{(i)2} = 1$, $\sum_{i=1}^{n} r_i B_{2\nu+1}^{(i)2} = 1$ $(0 \leqq \nu \leqq n-1)$, $\sum_{i=1}^{n} r_i B_{2\nu}^{(i)2} + \frac{k^2 k_3^2 \ldots k_{2\nu-1}^2}{k_2^2 k_4^2 \ldots k_{2\nu}^2} C^2 = 1$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$. Z těchto relací především plyne, že s je oblouk křivky Γ o p. v. (8), v němž jsme učinili uvedenou volbu $\varphi(s)$, l_i, r_i, po př. C. Dále plyne, že

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} r_i^2 D_{2\nu}^2(l_i) + \text{po př. } k_1^4 k_3^4 \ldots k_{2\nu-1}^4 C^2 = k_1^2 k_2^2 \ldots k_{2\nu}^2 (\nu \geqq 1)$$

$$(**) \sum_{i+1}^{n} r_i^2 D_{2\nu+1}^2(l_i) = k_1^2 k_2^2 \ldots k_{2\nu+1}^2 (\nu \geqq 0).$$

Označme nyní křivosti křivky $\bar{\Gamma}$ po řadě $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{2n-1}$, po př. $\bar{a}_{2n}$. O křivce $\bar{\Gamma}$ platí věta 5, v níž symboly $B_\mu^{(i)}$, $D_\mu(l_i)$, A_μ nahradíme $\bar{B}_\mu^{(i)}$, $\bar{D}_\mu(l_i)$, $\bar{A}_\mu$. Podle (9), (10), (11) platí

$$(+) \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \bar{D}_{2\nu}^2(l_i) + \text{po př. } \left(\frac{\bar{a}_1}{\varphi'}\right)^4 \left(\frac{\bar{a}_3}{\varphi'}\right)^4 \ldots \left(\frac{\bar{a}_{2\nu-1}}{\varphi'}\right)^4 C^2 =$$
$$= \left(\frac{\bar{a}_1}{\varphi'}\right)^2 \left(\frac{\bar{a}_2}{\varphi'}\right)^2 \ldots \left(\frac{\bar{a}_{2\nu}}{\varphi'}\right)^2 (\nu \geqq 1),$$

$$(++) \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \bar{D}_{2\nu+1}^2(l_i) = \left(\frac{\bar{a}_1}{\varphi'}\right)^2 \left(\frac{\bar{a}_2}{\varphi'}\right)^2 \ldots \left(\frac{\bar{a}_{2\nu+1}}{\varphi'}\right)^2 (\nu \geqq 0)$$

Srovnáním relací (*), (+) a (**), (++) dostáváme: $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 l_i^2 = k_1^2$, $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 l_i^2 = \left(\frac{\bar{a}_1}{\varphi'}\right)^2$, z čehož $k_1^2 = \left(\frac{\bar{a}_1}{\varphi}\right)^2$, takže $\bar{a}_1 = k_1^2 f^2(s) = a_1^2$. Dále $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 D_2^2(l_i) +$ po př. $k_1^4 C^2 =$ $= k_1^2 k_2^2$, $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \bar{D}_2^2(l_i)$ + po př. $\left(\frac{\bar{a}_1}{\varphi'}\right)^4 C^2 = \left(\frac{\bar{a}_1}{\varphi'}\right)^2 \left(\frac{\bar{a}_2}{\varphi'}\right)^2$. Poněvadž $D_2(l_i) = \bar{D}_2(l_i)$ [neboť $a_1^2 = \bar{a}_1^2$] a $k_1^2 = \left(\frac{\bar{a}_1}{\varphi'}\right)^2$, platí $k_2^2 = \left(\frac{\bar{a}_2}{\varphi'}\right)^2$ takže $\bar{a}_2^2 = k_2^2 f^2(s) = a_2^2$. Úplnou indukcí můžeme snadno dokázati (používajíce naznačeného postupu), že $\bar{a}_1^2 = a_1^2, \bar{a}_2^2 = a_2^2, \ldots, \bar{a}_{2n-1}^2 = a_{2n-1}^2$, po př. $\bar{a}_{2n}^2 = a_{2n}^2$. Stačí si jen povšimnouti, že polynomy $D_n(x)$, resp. $\bar{D}_n(x)$ obsahují v koeficientech jen $k_1^2, \ldots, k_{\mu-1}^2$, resp. $\left(\frac{\bar{a}_1}{\varphi'}\right)^2, \ldots, \left(\frac{\bar{a}_{\mu-1}}{\varphi'}\right)^2$. Platí tedy $\bar{a}_1 = \pm a_1, \ldots, \bar{a}_{2n-1} = \pm a_{2n-1}$, po př. $\bar{a}_{2n} = \pm a_{2n}$. Vhodnou orientací normál křivky $\bar{\Gamma}$ lze dosáhnouti toho, že platí rovnost křivostí Γ a $\bar{\Gamma}$.

Ku př. pro křivku Γ v R_3 o křivkách $a_1 = 3s$, $a_2 = 4s$ dostáváme $\varphi(s) =$ $= \int s \, ds = \frac{s^2}{2} + h$. Jelikož $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, je $D_3(x) = x(x^2 - 25) = 0$; z toho

$l_1 = 5, \frac{1}{r_1} = \frac{5}{3}, \frac{1}{C} = \frac{5}{4}$. Dosadíme-li to do (8) a provedeme-li otočení souřadného systému $X_1 = x_1 \cos 5h + x_2 \sin 5h$, $X_2 = -x_1 \sin 5h + x_2 \cos 5h$, $X_3 = x_3$, dostaneme p. v. $\Gamma: X_1 = \frac{3}{5}\int \cos\left(\frac{5}{2}s^2\right) ds$, $X_2 = \frac{3}{5}\int \sin\left(\frac{5}{2}s^2\right) ds$, $X_3 = \frac{4}{5}s$.

7. Ze vzorců (9), (10), (11) jsou patrné následující vlastnosti křivky Γ s konstantními poměry křivostí v $R_{2n}(n \geqq 2)$, po př. v R_{2n+1} $(n \geqq 1)$: Označíme-li $E_1, \dots, E_n$ její axiální prostory, potom

a) *tečny křivky Γ svírají konstantní úhly s každým prostorem E_i; totéž platí o každé její μ-té normále* $(\mu \geqq 1)$;

b) *touž vlastnost má každý prostor, v němž se protíná m prostorů E_i* $(1 \leqq m \leqq n - 1$, po př. $1 \leqq m \leqq n)$;

c) *tečny křivky v R_{2n+1} svírají konstantní úhly* $(\neq 0°, 90°)$ *s jejím osovým směrem; totež platí o každé její sudé normále; liché normály jsou k osovému směru kolmé;*

d) *sférický obraz μ-tých normál* $(\mu \geqq 1)$ *je nadkružnice, jejíž axiální prostory jsou rovnoběžné s E_i*.

8. Je-li Γ obecná nadkružnice v R_{2n} $(n \geqq 2)$, pak z (1) je patrné, že normální prostor v bodě $P(s)$ křivky Γ je totálně rovnoběžný s tečným prostorem nadkružnice $\varkappa$ v bodě $Q(s)$. Přitom $Q(s)$ je tečný sférický obraz bodu $P(s)$. Oba prostory mají touž dimensi n. Z toho již plyne (a je to též patrné z (2)), že tečný prostor bodu $P(s)$ je totálně rovnoběžný s normálním prostorem bodu $Q(s)$. Oba prostory mají touž dimensi n. Je-li (8) p. v. křivky Γ, pak rovnice tečného a normálního prostoru v $Q(s)$ jsou (podle [1], odst. 24) po řadě

$$x_{2i-1} \cos[l_i\varphi(s)] + x_{2i} \sin[l_i\varphi(s)] = r_i \qquad (i = 1, \dots, n),$$

$$x_{2i-1} \sin[l_i\varphi(s)] - x_{2i} \cos[l_i\varphi(s)] = 0 \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Proto *rovnice tečného a normálního prostoru obecné nadkružnice Γ* o p. v. (8) v jejím bodě $P(s)$ o souřadnicích $P_j (j = 1, \dots, 2n)$ jsou po řadě

$$(x_{2i-1} - P_{2i-1}) \sin[l_i\varphi(s)] - (x_{2i} - P_{2i}) \cos[l_i\varphi(s)] = 0 \qquad (i = 1, \dots, n), \quad (12)$$

$$(x_{2i-1} - P_{2i-1}) \cos[l_i\varphi(s)] + (x_{2i} - P_{2i}) \sin[l_i\varphi(s)] = 0 \qquad (i = 1, \dots, n). \quad (13)$$

U obecné nadšroubovice Γ v R_{2n+1} $(n \leqq 1)$ je tomu stejně až na to, že dimense tečného prostoru u Γ je $n + 1$ a u $\varkappa$ je n. Podle věty *3* obsahuje každý tečný prostor křivky Γ kolmý směr na nadrovinu, v níž $\varkappa$ leží. Na základě toho můžeme napsati *rovnice tečného a normálního prostoru obecné nadšroubovice Γ* o p. v. (8) v jejím bodě $P(s)$ o souřadnicích $P_j (j = 1, \dots, 2n + 1)$

$$(x_{2i-1} - P_{2i-1}) \sin[l_i\varphi(s)] - (x_{2i} - P_{2i}) \cos[l_i\varphi(s)] = 0 \qquad (i = 1, \dots, n), \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned}&(x_{2i-1} - P_{2i-1}) \cos[l_i\varphi(s)] + (x_{2i} - P_{2i}) \sin[l_i\varphi(s)] = 0 \qquad (i = 1, \dots, n),\\&x_{2n+1} = P_{2n+1}.\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

9. Z nalezených rovnic je patrné: *Křivka Γ s konstantními poměry křivostí v R_p $(p \geqq 3)$ se kolmo promítá do roviny ε, totálně kolmé na její axiální prostor, jako*

křivka, jejíž tečna (normála) v bodě P' je kolmý průmět tečného (normálního) prostoru bodu P na Γ. Přitom P' je kolmý průmět bodu P na ε. Tečna (normála) v P' je rovnoběžná s axiálním směrem tečného (normálního) prostoru bodu P.

Kromě toho z věty 5 plyne, že *křivka Γ s konstantními poměry křivostí v R_p ($p \geqq 3$) se kolmo promítá do prostoru totálně kolmého na prostor, v němž se protíná m jejích axiálních prostorů ($1 \leqq m \leqq n - 1$ pro $p = 2n$, $1 \leqq m \leqq n$ pro $p = 2n + 1$), jako křivka $\varkappa$, která má všechny poměry křivostí konstantní. Přitom tečný (normální) prostor křivky Γ se promítá jako tečný (normální) prostor křivky $\varkappa$. Zejména to tedy platí o kolmém průmětu do nadroviny kolmé k osovému směru obecné nadšroubovice.*

Totéž platí o kolmé projekci křivky Γ v R_p ($p \geqq 4$) do axiálního prostoru nebo do prostoru, v němž se protíná m axiálních prostorů ($1 \leqq m \leqq n - 1$).

II. Charakteristické vlastnosti obecných nadkružnic a nadšroubovic

10. *Pomocná věta.* Buď Γ křivka prostoru R_p ($p \geqq 3$), jíž lze přiřaditi rovinu ε o této vlastnosti: *Tečný a normální prostor každého regulárního bodu P na Γ se kolmo promítají na tuto rovinu jako dvě kolmé přímky.*

Ztotožníme-li ε se souřadnou rovinou (X_1, X_2) pravoúhlého systému souřadného $(X_1, \dots, X_p)$, plynou z této vlastnosti následující relace:

$$n_{2\mu}^{(1)} n_{2\nu+1}^{(1)} + n_{2\mu}^{(2)} n_{2\nu+1}^{(2)} = 0 \qquad (\mu, \nu \geqq 0) \tag{16}$$

$$n_{2\mu}^{(1)} n_{2\mu+2}^{(2)} - n_{2\mu}^{(2)} n_{2\nu+2}^{(1)} = 0 \qquad (\mu, \nu \geqq 0) \tag{17}$$

$$n_{2\mu-1}^{(1)} n_{2\nu+1}^{(2)} - n_{2\mu-1}^{(2)} n_{2\nu+1}^{(1)} = 0 \qquad (\mu \geqq 1, \nu \geqq 0) \tag{18}$$

Na základě těchto relací lze dokázati, že

$$n_{2\mu}^{(1)} n_{2\nu}^{(1)} + n_{2\mu}^{(2)} n_{2\nu}^{(2)} = \text{konst.} \qquad (\mu, \nu \geqq 0) \tag{19}$$

$$n_{2\mu+1}^{(1)} n_{2\nu+1}^{(1)} + n_{2\mu+1}^{(2)} n_{2\nu+1}^{(2)} = \text{konst.} \qquad (\mu, \nu \geqq 0) \tag{20}$$

$$n_{2\mu}^{(1)} n_{2\nu+1}^{(2)} - n_{2\mu}^{(2)} n_{2\nu+1}^{(1)} = \text{konst.} \qquad (\mu, \nu \geqq 0) \tag{21}$$

Derivujeme-li totiž tyto výrazy podle s a použijeme-li vzorců (F), zjistíme snadno, že jejich derivace se identicky rovnají 0.

Derivujme nyní podle s vztah (16) pro $\mu = 0$. Dostaneme

$$a_1(n_1^{(1)} n_{2\nu+1}^{(1)} + n_1^{(2)} n_{2\nu+1}^{(2)}) - a_{2\nu+1}(t^{(1)} n_{2\nu}^{(1)} + t^{(2)} n_{2\nu}^{(2)}) + a_{2\nu+2}(t^{(1)} n_{2\nu+2}^{(1)} + \\ + t^{(2)} n_{2\nu+2}^{(2)}) = 0 \tag{22}$$

(pro $0 \leqq \nu \leqq n - 1$ v R_{2n}, při čemž pro $\nu = n - 1$ poslední člen odpadá; pro $0 \leqq \nu \leqq n - 1$ v R_{2n+1}). Derivací podle s vztahu (17) pro $\mu = 0$ dostáváme dále

$$a_1(n_1^{(1)} n_{2\nu+2}^{(2)} - n_1^{(2)} n_{2\nu+2}^{(1)}) - a_{2\nu+2}(t^{(1)} n_{2\nu+1}^{(2)} - t^{(2)} n_{2\nu+1}^{(1)}) + \\ + a_{2\nu+3}(t^{(1)} n_{2\nu+3}^{(2)} - t^{(2)} n_{2\nu+3}^{(1)}) = 0 \tag{23}$$

(pro $0 \leqq \nu \leqq n - 2$ v R_{2n}; pro $0 \leqq \nu \leqq n - 1$ v R_{2n+1}, při čemž pro $\nu = n - 1$ poslední člen odpadá).

Všimněme si, že koeficienty při $a_1, a_{2\nu+1}, a_{2\nu+2}, a_{2\nu+3}$ v (22), (23) jsou podle (19), (20), (21) konstanty. Všimněme si dále, že ze vztahu $t^{(1)} n_{2\nu+2}^{(1)} + t^{(2)} n_{2\nu+2}^{(2)} = 0$ platného identicky vzhledem k s, následuje $n_{2\nu+2}^{(1)} = n_{2\nu+2}^{(2)} = 0$ identicky.

Vskutku podle (17) platí též $t^{(2)}n^{(1)}_{2\nu+2} - t^{(1)}n^{(2)}_{2\nu+2} = 0$ a determinant soustavy obou rovnic $t^{(1)2} + t^{(2)2}$ je různý od 0, neboť v opačném případě by křivka Γ ležela v prostoru o dimensi $< p$. Podobně ze vztahu $t^{(1)}n^{(2)}_{2\nu+3} - t^{(2)}n^{(1)}_{2\nu+3} = 0$, platného identicky vzhledem k s, následuje $n^{(1)}_{2\nu+3} = n^{(2)}_{2\nu+3} = 0$ identicky. Vskutku podle (16) ptatí též $t^{(2)}n^{(2)}_{2\nu+3} + t^{(1)}n^{(1)}_{2\nu+3} = 0$ a determinant soustavy obou rovnic je různý od 0.

11. Na základě této věty dokážeme, že *nutná a postačující podmínka, aby křivka Γ v R_{2n} ($n \geqq 2$) nebo v R_{2n+1}($n \geqq 1$) měla poměry svých křivostí konstantní, jest, aby existovalo n navzájem totálně kolmých rovin ε_j ($j = 1, \ldots, n$) takových, že do každé z nich se Γ ortogonálně promítá jako křivka γ_j, jejíž tečna a normála v bodě P_j je ortogonální projekcí tečného a normálního prostoru regulárního bodu P křivky Γ. Přitom P_j je ortogonální průmět bodu P na Γ.*

Je-li aspoň jedna z křivek γ_j kružnicí, pak Γ má všechny křivosti konstantní.

Poznámka. Aby křivka Γ měla poměry křivostí konstantní, stačí žádati, aby se tečný a normální prostor každého jejího regulárního bodu P promítaly kolmo do všech rovin ε_j jako dvě kolmé přímky.

Důkaz. Uvedená podmínka je nutná, neboť roviny totálně kolmé na axiální prostory mají vlastnosti rovin ε_j (viz větu 8). Abychom dokázali, že podmínka je dostačující, zvolme si pravoúhlý souřadný systém ($X_1, X_2, \ldots$) tak, aby souřadné roviny (X_1, X_2), $\ldots$, $X_{2n-1}\, X_{2n}$) byly rovnoběžné s rovinami ε_j. Podle (8) platí pak (22), (23) pro rovinu (X_1, X_2). Pro ostatní souřadné roviny platí obdobné relace. Tím dostáváme vztahy — označme je (22'), (23') — které dostaneme z (22), (23), když horní index 1, resp. 2 nahradíme indexem $2i - 1$, resp. $2i$ ($1 \leqq i \leqq n$). Dosaďme do (22') $\nu = 0$! Existuje i takové, že koeficient při a_2 je různý od 0. Jinak by totiž bylo $n^{(1)}_2 = n^{(2)}_2 = \ldots = n^{(2n)}_2 = 0$. Pro R_{2n} je přímo patrné, že to není možné. Pro R_{2n+1} by z toho plynulo, že $n^{(2n+1)}_2 = \pm 1$, z čehož $t^{(2n+1)} = n^{(2n+1)}_1 = n^{(2n+1)}_2 = \ldots = n^{(2n+1)}_{2n} = 0$ identicky vzhledem k s. Křivka Γ by tedy ležela v prostoru o dimensi $< 2n + 1$. Je tedy $\frac{a_2}{a_1}$ konstanta, pokud $a_1 \neq 0$. Současně vidíme, že pro $a_1 = 0$ také $a_2 = 0$. Dosaďme dále do (23') $\nu = 0$! Existuje i takové, že koeficient při a_3 je různý od 0. Jinak by totiž bylo $n^{(1)}_3 = n^{(2)}_3 = \ldots = n^{(2n)}_3 = 0$, což by vedlo opět ke sporu. Je tedy $\frac{a_3}{a_1}$ konstanta, pokud je $a_1 \neq 0$. Současně vidíme, že pro $a_1 = 0$ je též $a_2 = a_3 = 0$. Dále dokazujme úplnou indukcí. Předpokládejme, že $\frac{a_{2\nu}}{a_1}$, $\frac{a_{2\nu+1}}{a_1}$ jsou konstanty, pokud $a_1 \neq 0$, a že z $a_1 = 0$ plyne $a_{2\nu} = a_{2\nu+1} = 0$ ($1 \leqq \nu \leqq n - 2$). Za tohoto předpokladu plyne z (22') a (23'), že $\frac{a_{2\nu+2}}{a_1}$, $\frac{a_{2\nu+3}}{a_1}$ jsou konstanty, pokud $a_1 \neq 0$. Současně vidíme, že z $a_1 = 0$ plyne $a_{2\nu+2} = a_{2\nu+3} = 0$. Jsou tedy $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_1}$, $\ldots$, $\frac{a_{2n-1}}{a_1}$ konstanty, pokud $a_1 \neq 0$ a že z $a_1 = 0$ plyne $a_2 = a_3 = \ldots = a_{2n-1} = 0$. Pro R_{2n+1} jest ještě nutno dokázati, že $\frac{a_{2n}}{a_1}$ je konstanta, pokud $a_1 \neq 0$ a že z $a_1 = 0$ plyne $a_{2n} = 0$. To však je patrné z (22') pro $\nu = n - 1$.

Je-li na př. γ_1 kružnicí, posuneme souřadný systém tak, aby počátek jeho se ztotožnil s jejím středem (při čemž roviny $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ zůstávají rovnoběžné se souřadnými rovinami). Potom kromě (22'), (23') platí ještě identicky k s

$$P^{(1)}n_{2\nu}^{(1)} + P^{(2)}n_{2\nu}^{(2)} = 0 \text{ pro } \nu \geqq 0 \tag{24}$$

a z toho pak dále

$$P^{(1)}n_{2\nu+1}^{(1)} + P^{(2)}n_{2\nu+1}^{(2)} = \text{konst. pro } \nu \geqq 0, \tag{25}$$

neboť derivace tohoto výrazu podle s je identicky rovna 0 (jak se snadno zjistí pomocí (F)). Derivujeme nyní (24) pro $\nu = 0$ podle s! Dostaneme

$$t^{(1)^2} + t^{(2)^2} + a_1(P^{(1)}n_1^{(1)} + P^{(2)}n_1^{(2)}) = 0. \tag{26}$$

Koeficient při a_1 je podle (25) konstanta; že je různá od 0, zjistíme následující úvahou: Je-li $n_1^{(1)^2} + n_1^{(2)^2} \neq 0$, pak $\dfrac{P^{(1)}n_1^{(1)} + P^{(2)}n_1^{(2)}}{\sqrt{P^{(1)^2} + P^{(2)^2}}\sqrt{n_1^{(1)^2} + n_1^{(2)^2}}} = \pm 1$, takže $P^{(1)}n_1^{(1)} + P^{(2)}n_1^{(2)}$ je konstanta $\neq 0$. Nemůže být $n_1^{(1)^2} + n_1^{(2)^2} = 0$; jinak by bylo $n_1^{(1)} = 0$, $n_1^{(2)} = 0$, z čehož by plynulo, že křivka Γ leží v prostoru o dimensi $< 2n$, resp. $2n + 1$. Proto a_1 je konstanta a následkem toho Γ je křivka s konstantními křivostmi.

Poznámka. Z důkazu je patrné: Kdybychom předpokládali existenci pouze *jedné* roviny ε o vlastnosti uvedené ve větě 11, avšak přidali předpoklad, že žádná normála křivky Γ není k ε stále kolmá, pak by z toho již plynulo že Γ má poměry svých křivostí konstantní.

12. Buď Γ křivka prostoru R_p ($p \geqq 3$). Buď $n = \dfrac{p}{2}$ pro p sudé a $n = \dfrac{p-1}{2}$ pro p liché. *Nutná a postačující podmínka, aby křivka Γ měla poměry křivostí konstantní, jest, aby existovali n $(p-2)$-rozměrných prostorů $E_1, \ldots, E_n$*, pro $p \geqq 4$ *po dvou k sobě* $\dfrac{2}{p-2}$ *-kolmých,*[4]) *té vlastnosti, že tečna a každá μ-tá normála křivky Γ ($1 \leqq \mu \leqq p-1$) svírá s nimi konstantní úhly.*

Jestliže kromě toho body křivky Γ mají konstantní vzdálenosti aspoň od jednoho prostoru E_i, pak Γ má všechny křivosti konstantní.

Důkaz. Podmínka je nutná, neboť axiální prostory křivky s konstatními poměry křivostí i s konstantními křivostmi mají uvedené vlastnosti (viz větu 7 a [1], str. 23). Abychom dokázali, že podmínka je postačující, všimněme si především, že roviny $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, vedené totálně kolmo po řadě na $E_1, \ldots, E_n$, jsou navzájem totálně kolmé. Můžeme tedy pravoúhlý souřadný systém $(X_1, \ldots, X_p)$ voliti tak, aby roviny $(X_1, X_2), \ldots, (X_{2n-1}, X_{2n})$ byly totálně rovnoběžně po řadě s rovinami $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Vlastnost tečny a normál vzhledem k E_1 lze pak vyjádřit relacemi

$$t^{(1)^2} + t^{(2)^2} = k_0, \qquad n_\mu^{(1)^2} + n_\mu^{(2)^2} = k_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq p-1),$$

kde k_0, k_μ jsou konstanty. Derivací podle s dostáváme

$$t^{(1)}n_1^{(1)} + t^{(2)}n_1^{(2)} = 0, \qquad n_\mu^{(1)}n_{\mu+1}^{(1)} + n_\mu^{(2)}n_{\mu+1}^{(2)} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq p-2). \tag{27}$$

Jelikož $k_0 \neq 0$, $k_1 \neq 0$ (jinak by Γ ležela v prostoru o dimensi $< p$), promítají

[4]) Viz [2], str. 49.

se ortogonálně tečna a první normála regulárního bodu P křivky Γ na (X_1, X_2) jako dvě kolmé přímky ${}^1t$, ${}^1n_1$. Tvrdíme, že kolmé průměty sudých (lichých) normál bodu P jsou v ${}^1t$ (v ${}^1n_1$). Důkaz nepřímý: Mezi normálami bodu P buď n_μ první (v řadě $n_2, \ldots, n_{p-1}$), která nemá uvedenou vlastnost ($2 \leqq \mu \leqq p - 1$). Rozeznávejme dva případy: a) $k_\mu = 0$; z toho $n_\mu^{(1)} = n_\mu^{(2)} = 0$, takže kolmým průmětem normály n_μ je bod, jenž leží na ${}^1t$ i na ${}^1n_1$. To je spor. *b*) $k_\mu \neq 0$; je-li také $k_{\mu-1} \neq 0$, pak z (27) následuje, že průmět ${}^1n_\mu$ normály n_μ je kolmý na průmět ${}^1n_{\mu-1}$ normály $n_{\mu-1}$, z čehož plyne spor. Je-li $k_{\mu-1} = 0$, pak $n_{\mu-1}^{(1)} = 0$, $n_{\mu-1}^{(2)} = 0$, z čehož podle (F) je $- a_{\mu-1}\, n_{\mu-2}^{(1)} + a_\mu n_\mu^{(1)} = 0$, $- a_{\mu-1} n_{\mu-2}^{(2)} + a_\mu n_\mu^{(2)} = 0$ a z toho $n_{\mu-2}^{(1)} n_\mu^{(2)} - n_{\mu-2}^{(2)} n_\mu^{(1)} = 0$. Jelikož $k_{\mu-2} \neq 0$ (neboť v opačném případě by z (F) plynulo, že $t^{(1)} = t^{(2)} = 0$), jest průmět normály $n_{\mu-2}$ přímka, s níž splývá průmět normály n_μ. Tím dospíváme opět ke sporu.

Promítají se tedy tečný a normální prostor bodu P kolmo na rovinu (X_1, X_2) jako dvě kolmé přímky. Totéž platí o každé rovině (X_{2i-1}, X_{2i}) pro $i = 1, \ldots, n$. Proto podle poznámky za větou 11 jest věta 12 správná.

Poznámka. Z důkazu je patrné: Kdybychom předpokládali existenci pouze *jednoho* $(p-2)$-rozměrného prostoru E (vzhledem k němuž tečna a normály, po př. body křivky Γ mají uvedenou vlastnost), avšak přidali předpoklad, že žádná normála křivky Γ není s E stále rovnoběžná, pak by z toho plynulo, že Γ se kolmo promítá na rovinu ε (totálně kolmou k E) jako křivka, po př. jako kružnice, jejíž tečna a normála je kolmým průmětem tečného a normálního prostoru křivky Γ. Podle poznámky za větou 11 by to již stačilo k tomu, aby Γ měla poměry svých křivostí, po př. všechny své křivosti konstantní.

13. *Nutná a postačující podmínka, aby křivka Γ v R_{2n} ($n \geqq 2$), po př. v R_{2n+1} ($n \geqq 2$) měla poměry křivostí konstantní, jest, aby existovalo n rovin $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, po dvou k sobě totálně kolmých té vlastnosti, že normální prostor každého regulárního bodu P na Γ jest k nim z polovice rovnoběžný.*[5])

Poznámka. Věta platí i pro R_3, když poloviční rovnoběžnost nahradíme (totální) rovnoběžností.

Důkaz. Podmínka je nutná pro každou křivku s konstantními poměry křivostí, neboť roviny totálně kolmé na její axiální prostory mají uvedenou vlastnost — jak je patrné z definice axiálních prostorů v odst. 4. Abychom dokázali, že podmínka je postačující, posuňme rovnoběžně roviny ε_i a normální prostor bodu P (pokud tomu tak není), tak aby měly společný bod O. Tím dostaneme roviny ε_i', které posunutý normální prostor protíná v přímkách p_i. Prostor o dimensi n, po př. $n + 1$, vedený bodem O totálně rovnoběžně s tečným prostorem bodu P, je určen n přímkami q_i, ležícími v rovinách ε_i' a jdoucími bodem O kolmo na p_i a — jde-li o R_{2n+1} — přímkou o kolmou na všechny p_i, q_i. Z toho je patrné, že tečný a normální prostor bodu P se kolmo promítají na každou rovinu ε_i jako dvě kolmé přímky. Z toho následuje podle věty 11, že Γ má poměry křivostí konstantní.

Správnost tvrzení v poznámce plyne z toho, že křivka v R_{2n+1}, jejíž normální prostory jsou kolmé na pevný směr, mají poměry křivostí a_1/a_2, $a_3/a_4, \ldots, a_{2n-1}/a_{2n}$ konstantní. (Viz [1], str. 35).

14. Podobným způsobem se dokáže: *Nutná a postačující podmínka, aby křivka Γ v R_{2n} ($n \geqq 2$), po př. v R_{2n+1} ($n \geqq 2$) měla poměry křivostí konstantní,*

---

[5]) Viz [2], str. 34

jest, aby existovalo n rovin $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, po dvou k sobě totálně kolmých té vlastnosti, že tečný prostor každého regulárního bodu křivky Γ je k nim zpolovice rovnoběžný a — jde-li o R_{2n+1} — obsahuje směr kolmý ke všem rovinám ε_i.

15. *Nutná a postačující podmínka, aby křivka Γ v R_{2n} ($n \geqq 2$) byla nadkružnicí jest, aby existovalo n rovin $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, po dvou k sobě totálně kolmých a jdoucích jedním bodem O té vlastnosti, že normální prostory křivky Γ je protínají v přímkách, jež procházejí bodem* O.

Důkaz. Roviny, jdoucí středem nadkružnice totálně kolmo na její axiální prostory, mají uvedenou vlastnost (viz [1], odst. 27). Obráceně: Má-li Γ uvedenou vlastnost, procházejí její normální prostory pevným bodem O. Z toho následuje, že její první křivost je konstantní (viz [1], str. 33). Další plyne z věty 13.

Poznámka. V R_{2n+1} neexistuje křivka o uvedené vlastnosti; neboť z předpokladu, že normální prostory křivky Γ v R_{2n+1} procházejí pevným bodem, následuje, že aspoň jedna křivost je rovna 0 (viz relace (*) v [1], str. 33), takže Γ leží v prostoru o dimensi $< 2n + 1$.

16. *Aby křivka Γ v R_p ($p \geqq 3$) měla poměry křivostí konstatnní, je nutné a stačí, aby jí bylo možno přiřaditi křivku $\varkappa$ o konstantních křivostech prostoru R_p a stanoviti mezi body Γ a $\varkappa$ takovou korespondenci, aby tečné a normální prostory v odpovídajících bodech byly navzájem totálně rovnoběžné.*

Důkaz. Buď Γ křivka s konstantními poměry křivostí v R_{2n}, po př. v R_{2n+1} o p. v. (8). Přiřaďme jí křivku $\varkappa$ s konstantními křivostmi téhož prostoru o p. v. $x_{2i-1} = R_i \sin [l_i\varphi(s)]$, $x_{2i} = -R_i \cos [l_i\varphi s()]$ $(i = 1, \ldots, n)$, po př. $x_{2n+1} = C\varphi(s)$, kde R_i jsou libovolné konstanty $\neq 0$. Mezi body P na Γ a Q na $\varkappa$ stanovme takovou korespondenci, aby si odpovídaly body určené týmž parametrem s. Tečný a normální prostor křivky $\varkappa$ v bodě $Q(s)$ je dán po řadě rovnicemi

$$x_{21-1} \sin [l_i\varphi(s)] - x_{2i} \cos [l_i\varphi(s)] = R_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$x_{2i-1} \cos [l_i\varphi (s)] + x_{2i} \sin [l_i\varphi (s)] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

po př. $x_{2n+1} = C\varphi(s)$. Z (12), (13), po př. (14), (15) je patrné, že tečný prostor v $Q(s)$ je totálně rovnoběžný s tečným a normální prostor v $Q(s)$ s normálním prostorem křivky Γ v odpovídajícím bodě $P(s)$. — Důkaz, že podmínka, uvedená ve větě 16, je postačující, plyne snadno z věty 13.

17. *Aby křivka Γ v R_{2n+1} ($n \geqq 1$) byla obecnou nadšroubovicí, jest nutné a stačí, aby jí bylo možno přiřaditi nadkružnici $\varkappa$ nadroviny R_{2n} a mezi body Γ a $\varkappa$ stanoviti takovou korespondenci, že normální prostory v odpovídajících bodech jsou navzájem totálně rovnoběžné.*

Důkaz. Křivce Γ s konstantními poměry křivostí o p. v. (8) přiřaďme nadkružnici $\varkappa$ o p. v. $x_{2i-1} = R_i \sin [l_i\varphi(s)]$, $x_{2i} = -R_i \cos [l_i\varphi (s)]$, $(i = 1, \ldots, n)$, $x_{2n+1} = 0$, kde R_i jsou libovolné konstanty $\neq 0$. Mezi body P na Γ a Q na $\varkappa$ stanovme takovou korespondenci, aby si odpovídaly body, určené týmž parametrem s. Normální prostor nadkružnice $\varkappa$ v Q (s) je pak $x_{2i-1} \cos [l_i\varphi(s)] + x_{2i} \sin [l_i\varphi(s)] = 0$, $(i = 1, \ldots, n)$ $x_{2n+1} = 0$. Z (15) je patrné, že tento normální prostor bodu $Q(s)$ je totálně rovnoběžný s normálním prostorem křivky Γ v odpovídajícím bodě $P(s)$. — Důkaz, že podmínka je postačující, plyne pro $n \geqq 2$ z věty 15 a 11. Je-li $n = 1$, pak vidíme přímo, že hlavní normála a rektifikační rovina křivky Γ se kolmo promítají na rovinu, v níž $\varkappa$ leží, jako dvě kolmé přímky. Tedy podle věty 11 je Γ obecnou šroubovicí.

18. *Nutná a postačující podmínka, aby křivka Γ v R_{2n+1} ($n \geqq 1$) byla obecnou nadšroubovicí, jest, aby 1° její normální prostory byly kolmé k pevnému směru o, a — je-li $n > 1$ — 2° sférický obraz $\varkappa$ prvních normál byla křivka nadroviny R_{2n} kolmé k o, jejíž normální prostory procházejí pevným bodem.*

Důkaz. a) Podmínka je nutná, neboť 1° normální prostory obecné nadšroubovice Γ o p. v. (8) jsou kolmé k ose X_{2n+1} (t. j. osovému směru), jak je patrné z (15) a 2° sférický obraz prvních normál křivky Γ je podle (10) nadkružnice o p. v. $x_{2i-1} = -r_i B_1^{(i)} \sin [l_i \varphi(s)]$, $x_{2i+1} = r_i B_1^{(i)} \cos [l_i \varphi(s)]$, $x_{2n+1} = 0$ ($1 \leqq i \leqq n$, $B_1^{(i)}$ jsou konstanty $\neq 0$), jejíž střed je v počátku O souřadného systému; je to tedy křivka nadroviny $x_{2n+1} = 0$, jejíž normální prostory procházejí pevným bodem O. b) Podmínka je postačující: Volme pravoúhlý systém souřadý ($X_1, \ldots, X_{2n+1}$) tak, aby prostor ($X_1, \ldots, X_{2n}$) se ztotožnil s nadrovinou R_{2n}, v níž $\varkappa$ leží. Směr osy X_{2n+1} je pak totožný se směrem o. Z předpokladu, že normální prostory jsou kolmé k X_{2n+1}, následuje podle [1], odst. 49, že poměry

$$a_1/a_2,\ a_3/a_4,\ \ldots,\ a_{2n-1}/a_{2n} \tag{28}$$

jsou konstantní. Pro $n = 1$ je tedy věta dokázaná. Buď dále $n \geqq 2$. P. v. křivky $\varkappa$ jest $x_j = n_1^{(j)}$, $x_{2n+1} = 0$ ($j = 1, 2 \ldots, 2n$). Označme $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}$ její křivosti a $\sigma, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{2n-1}$ po řadě její oblouk a jednotkové vektory tečny, první, ..., $(2n-1)$-ní normály. Z předpokladu, že normální prostory křivky $\varkappa$ procházejí pevným bodem, následuje podle [1], str. 35, že

$$\alpha_1,\ \frac{\alpha_3}{\alpha_2},\ \frac{\alpha_5}{\alpha_4},\ \ldots,\ \frac{\alpha_{2n-1}}{\alpha_{2n-2}} \tag{29}$$

jsou konstanty. Nyní si uvedeme pomocnou větu, jejíž důkaz metodou úplné indukce vzhledem k μ lze pomocí (F) snadno provésti (pro jeho rozvláčnost jest však vynechán): Za předpokladu, že

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2\mu+1};\qquad \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_4}{a_1}, \ldots, \frac{a_{2\mu+2}}{a_1}\qquad (0 \leqq \mu \leqq n-2)$$

jsou konstanty, platí:

$$r_{2\mu+1} = k_1^{(2\mu+1)}\boldsymbol{n}_1 + k_3^{(2\mu+1)}\boldsymbol{n}_3 + \ldots + k_{2\mu+3}^{(2\mu+1)}\boldsymbol{n}_{2\mu+3}, \tag{30}$$

$$r_{2\mu+2} = k_0^{(2\mu+2)}\boldsymbol{t} + k_2^{(2\mu+2)}\boldsymbol{n}_2 + \ldots + k_{2\mu+4}^{(2\mu+2)}\boldsymbol{n}_{2\mu+4}, \tag{31}$$

kde $k_i^{(j)}$ jsou konstanty a $k_{2\mu+3}^{(2\mu+1)} \neq 0$, $k_{2\mu+4}^{(2\mu+2)} \neq 0$,

$$\alpha_{2\mu+1}^2 = h^{(2\mu+1)} + g^{(2\mu+1)} \frac{a_{2\mu+3}^2}{a_1^2}\ , \tag{32}$$

$$\alpha_{2\mu+2}^2 = h^{(2\mu+2)} + g^{(2\mu+2)} \frac{a_{2\mu+4}^2}{a_1^2}\ , \tag{33}$$

kde $h^{(j)}$, $g^{(j)}$ jsou konstanty a $g^{(2\mu+1)} \neq 0$, $g^{(2\mu+2)} \neq 0$.

Pomocí této věty dokážeme nyní, že Γ má poměry křivostí konstantní. Podle (29), (28) jsou $\alpha_1, \dfrac{a_2}{a_1}$ konstanty; jsou tedy splněné předpoklady pomocné věty pro $\mu = 0$. Podle (32) pro $\mu = 0$ je proto $\dfrac{a_3}{a_1}$ konstanta a tedy podle (28) také $\frac{a_4}{a_1}$, podle (33) pro $\mu = 0$ také α_2 a tedy podle (29) také α_3. Nyní zase vidíme, že jsou splněné předpoklady pomocné věty pro $\mu = 1$. Z ní a ze vztahů (28), (29) plyne obdobným způsobem, že $\frac{a_5}{a_1}$, $\frac{a_6}{a_1}$, α_4, α_5 jsou konstanty, Je patrné, že úplnou indukcí lze dokázati, že $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \ldots, \frac{a_{2n}}{a_1}$ (a také $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-1}$) jsou konstanty.

Poznámka. Platí věta, kterou dostaneme z právě dokázané, když podmínku 1° nahradíme podmínkou, aby *tečna a všechny sudé normály křivky Γ svíraly s o konstantní úhly*; obě tyto podmínky jsou ekvivalentní, jak je uvedeno v důkaze věty [1], odst. 49.

19. *Nutná a postačující podmínka, aby křivka Γ v R_{2n+1} ($n \geqq 1$) byla obecnou nadšroubovicí (po př. nadšroubovicí) jest, aby existovala nadrovina R_{2n}, do níž se Γ kolmo promítá jako obecná nadkružnice*[5] *(po př. nadkružnice) $\varkappa$ a to tak, že tečný a normální prostor regulárního bodu P na Γ se promítají jako tečný a normální prostor bodu P' na $\varkappa$; přitom P' je kolmý průmět bodu P.*

Důkaz. Podmínka je nutná, neboť každá nadrovina kolmá k osovému směru (po př. k ose) křivky Γ má vlastnost nadroviny R_{2n}, jak je patrné z (8) a (12), (13), (14), (15) (po př. z [1], (25), (26).) Podmínka je postačující: jestliže $\varkappa$ je obecná nadkružnice (po př. nadkružnice), existuje podle odst. 9 (po př. podle [1], odst. 27) n rovin po dvou k sobě totálně kolmých té vlastnosti, že do každé z nich se $\varkappa$ kolmo promítá jako křivka (po př. jako kružnice), jejíž tečna a normála je kolmým průmětem tečného a normálního prostoru křivky $\varkappa$ a tedy také křivky Γ. Podle věty 11 má Γ poměry křivostí (popř. všechny své křivosti) konstantní.

20. *Nutná a postačující podmínka, aby křivka v R_{2n} ($n \geqq 2$), po př. v R_{2n+1} ($n \geqq 1$) měla poměry křivostí konstantní jest, aby její tečna a všechny její normály svíraly s n rovinami ε_i, navzájem totálně kolmými, konstantní úhly.*

K důkazu stačí poznamenati, že roviny totálně kolmé na axiální prostory mají vlastnosti rovin ε_i a že $(2n-2)$ — rozměrné, po př. $(2n-1)$ — rozměrné prostory, totálně kolmé na ε_i, mají vlastnosti $(p-2)$ — rozměrných prostorů z věty 12.

21. *Nutná a postačující podmínka, aby křivka Γ s konstantními poměry křivostí v R_{2n} [v R_{2n+1}] byla nadkružnicí [nadšroubovicí], jest, aby její normální prostory procházely pevným bodem [protínaly pevnou přímku osového směru Γ].*

Důkaz. Uvedené podmínky jsou nutné podle [1], odst. 48, 51. Podmínky jsou postačující: Prochází-li normální prostory křivky Γ v R_{2n} pevným bodem, jest její první křivost konstantní (viz [1], odst. 48), z čehož plyne, že Γ je nadkružnicí. Protínají-li normální prostory křivky Γ v R_{2n+1} pevnou přímku o osového směru, promítá se Γ kolmo do nadroviny kolmé na o jako křivka $\varkappa$ s konstantními poměry křivostí (viz p. v. (8), v němž směr souřadné osy X_{2n+1} je osovým směrem), jejíž normální prostory procházejí pevným bodem (kolmým průmětem přímky o); $\varkappa$ je tedy nadkružnicí a následkem toho podle věty 19 je Γ nadšroubovicí.

22. *Nutná a postačující podmínka, aby křivka Γ s konstantními poměry kři-*

[5]) Pro $n = 1$ je $\varkappa$ libovolná rovinná křivka.

vostí v R_p ($p \geqq 3$) měla křivosti konstantní jest, aby její body měly konstantní vzdálenosti aspoň od jednoho jejího axiálního prostoru.

Důkaz plyne z [1], odst. 21 a z věty 11.

23. *Buď $\varkappa$ obecná nadkružnice, ležící v nadrovině R_{2n} prostoru R_{2n+1}($n \geqq 1$). Buď π dvourozměrná válcová plocha vytvořená přímkami, jdoucími body $\varkappa$ kolmo na R_{2n}. Pak každá křivka Γ na této ploše, protínající pod konstantním úhlem ω ($\neq 0°$, $90°$) její tvořící přímky, je obecnou nadšroubovicí.*

Vskutku, má-li křivka Γ, jejíž p. v. lze psáti ve tvaru

$$x_{2i-1} = r_i \int \cos\,[l_i\varphi(s)]\,\mathrm{d}s, \qquad x_{2i} = r_i \int \sin\,[l_i\varphi(s)]\,\mathrm{d}s, \qquad x_{2n+1} = f(s)$$

($1 \leqq i \leqq n$; $f(s)$ je funkce oblouku s křivky $\varkappa$), protínati pod konstantním úhlem ω tvořící přímky (rovnoběžné s osou X_{2n+1}), musí býti $f'(s) = K\sqrt{1 + [f'(s)]^2}$, kde K je konstanta různá od 1,0. Z toho plyne, že $f(s) = Cs + C_1$, kde $C \neq 0$, C_1 jsou konstanty. Je tedy Γ obecnou nadšroubovicí podle věty 5. Současně vidíme, že pro $\omega = 90°$ by Γ byla obecnou nadkružnicí shodnou s $\varkappa$.

Poznámka. V R_3 je známé, že křivka, ležící na jakékoli válcové ploše a pod konstantním úhlem ($\neq 0°$, $90°$) protínající její površky, má konstantní poměry křivostí. *V prostoru R_{2n+1}($n \geqq 2$) tomu tak není. Jest nutné a podle dokázane věty také stačí, aby válcová plocha měla tu vlastnost, že nadrovina, kolmá k površkám, ji protíná v obecné nadkružnici.* Svírá-li totiž tečna obecné nadšroubovice Γ v R_{2n+1} konstantní úhel s pevným směrem, pak je to osový směr pro tuto obecnou nadšroubovici. Určíme-li totiž pevný směr jednotkovým vektorem $\mathbf{o}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+1})$ a Γ pomocí (8), pak platí identicky vzhledem k s

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i-1} r_i \cos\,[l_i\varphi(s)] + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i} r_i \sin\,[l_i\varphi(s)] + \alpha_{2n+1}C = \text{konst.}$$

Z této rovnice plyne, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{2n} = 0$. Proto kolmý průmět křivky Γ do nadroviny kolmé k $\mathbf{o}$ čili do nadroviny kolmé k X_{2n+1} je obecná nadkružnice. Leží tedy Γ na válcové ploše o uvedené vlastnosti.

Citovaná literatura

[1] M. Sypták, *Nadkružnice a nadšroubovice* (Spisy přírod. fakulty Masarykovy university, Brno, sv. *312*, r. 1949).

[2] P. H. Schoute, *Mehrdimensionale Geometrie*, I, 1902.

Общие гиперокружности и гипервинтовые линии

М. Сыптак

Резюме

В этой статье рассматриваются кривые евклидового пространства p-измерений, отношения кривизней которых постоянные и не равны нулю. Эти кривые автор называет общие гиперокружности и общие гипервынтовые линии на основании того, лежат ли в пространстве, число измерений которого чётное, или нечётное.

Статья состоит из двух частей. В первой части автор выводит параметрические уравнения этих кривых (8). Если кривизны даны в виде $a_\mu = k_\mu f(s)$ [$\mu = 1, 2, \ldots, p - 1$],

где s представляет дугу и k_μ постоянные $\neq 0$, потом для того чтобы кривые имели предписанные кривизны, достаточно в (8) избрать r_i, l_i, C, $\varphi(s)$ таким образом, как это определяется в теореме *6*. Во второй части находится ряд необходимых и достаточных условий, чтобы кривая в R_p была предписанного вида.

(Смотри резюме: *M. Сыптак, Sur les hypercirconférences et hyperhélices généralisées dans les espaces euclidiens à p dimensions b Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t. 198, cm. 1665.*)

Hypercirconférences et hyperhélices générales

M. Sypták

Résumé

Dans ce Mémoire le sujet de l'étude sont les courbes de l'espace euclidien à p dimensions $R_p(p \geqq 3$, dont les courbures scalaires a_1, a_2, ... sont telles que les rapports a_1/a_2, a_2/a_3, ... sont des constantes, non nulles. Ces courbes sont appellées par l'auteur dans l'espace au nombre pair de dimensions *hypercirconférences générales* et celes dans l'espace au nombre impair de dimensions *hyperhélices générales.* Le Mémoire est divisé en deux chapitres. Le chapitre I présent les équations des courbes en questions (8). Étant données les courbures scalaires $a_\mu = k_\mu f(s)$ $[\mu = 1, \ldots, p-1]$ comme les fonctions de l'arc s [k_μ sont des constantes $\neq 0$], alors il suffit de choisir les constantes r_i, l_i, C et la fonction $\varphi(s)$ dans (8) de manière comme il est indiqué dans le théoreme *6*. Dans le chapitre II on trouve une série des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe dans R_p soit de type en question. Par exemple: Pour qu'une courbe Γ de l'espace $R_{2n}[R_{2n+1}]$ ait les rapports de ses courbures scalaires constantes, il faut et il suffit qu'elle jouisse d'une quelconque des propriétés suivantes:

a) Γ se projette orthogonalement sur n plans ε_i $(i = 1, \ldots, n)$ totalement orthogonaux les uns aux autres suivant des courbes γ_i de manière que la tangente et la normale en P_i de γ_i soit la projection de l'espace tangent et normal en P de Γ (P_i étant la projection de P sur ε_i). Si les courbes sont des circonférences, Γ est une hypercirconférence [hyperhélice].

b) La tangente et toutes les normales de Γ forment avec n plans totalement orthogonaux les uns aux autres des angles constants.

c) L'image sférique des tangentes ou des normales dernières de Γ est une hypercirconférence de l'espace à $2n$ dimensions.

Pour qu'une courbe Γ de l'espace R_{2n+1} soit une hyperhélice générale, il faut et il suffit qu'elle jouisse d'une quelconque des propriétés suivante: d) Les espaces normaux de Γ sont orthogonaux à une direction fixe et l'image sférique de ses normales premières est une courbe dont les espaces normaux passent par un point fixe. e) Γ se projette orthogonalement sur un hyperplan suivant une hypercirconférence générale Γ', dont les espaces tangents et normaux sont des projections des espaces tangents et normaux correspondants de Γ. Si, en particulier, Γ' est une hypercirconférence, Γ est hyperhélice. f) Γ est située sur une surface cylindrique à deux dimensions, telle que chaque hyperplan normal à ses génératrices la coupe suivant une hypercirconférence générale, et Γ coupe les génératrices de la surface en question sous les angles constants. (Voir le résumé dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris,* t. 198, p. 1665 sous le titre: *M. Sypták, Sur les hypercirconférences et hyperhélices généralisées dans les espaces euclidiens à p dimensins.*)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. IV-VI **MATHEMATICA** **1956**

Une amélioration de la méthode de Runge—Kutta—Nyström pour la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre

Doc. Dr. A. HUŤA

(Venované prof. dr. J. Hroncovi k jeho 75. narodeninám)

Soit donnée une équation différentielle du premier ordre

$$y' = f(x, y) \tag{I}$$

et soit

$$y = F(x) \tag{II}$$

une solution particulière de cette équation (I).

Si la courbe integral donnée par l'équation (II) passe par le point (x_0, y_0), on a

$$y_0 = F(x_0). \tag{III}$$

On sait, qu'en dissolvant numériquement une équation différentielle on cherche l'accroissement k de la fonction $F(x)$ correspondant à l'accroissement h de l'argument x. On calcule cet accroissement k de la rélation

$$y_0 + k = F(x_0 + h) \tag{IV}$$

En développant le second membre de la rélation (IV) en série de Taylor en supposant la validité de (III) nous avons

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^i}{i!} F^{(i)}(x_0). \tag{V}$$

En dérivant la rélation (II) par rapport à x et en le comparant avec (I) nous obtenons

$$y' = F'(x) = f(x, y) \tag{VI}$$

on a donc

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^i}{i!} f^{(i-1)}(x_0, y_0). \tag{VII}$$

On sait que pour simplifier les calculs il convient d'éxprimer les dérivations de la fonction $f\,(x,\,y)$ au moyen de certains symbols. Dans les considérations suivantes pour simplifier les calculs nous omettons les arguments de la fonction $f(x,\,y)$ en l'écrivant simplement par f. Ensuite, il c'est montrait convenable d'écrire ${}_pf_q$ au lieu de $\frac{\partial^{p+q}f}{\partial x^p \partial y^q}$ $\left(\text{de sorte que par exemple } f_q \text{ signifiera } \frac{\partial^q f}{\partial y^q}\right)$. Après cela introduisons encore le symbol

$$D^{(n)}f = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^j \cdot {}_{n-j}f_j \tag{VIII}$$

et un autre symbol

$$D^{(n)}f_i = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^j \cdot {}_{n-j}f_{i+j}. \tag{IX}$$

On prouve facilement que pour la dérivation de (VIII) et (IX) sont valables les relations suivantes

$$(D^{(n)}f)' = D^{(n+1)}f + nD^{(n-1)}f_1 Df, \tag{X}$$

$$(D^{(n)}f_i)' = D^{(n+1)}f_i + nD^{(n-1)}f_{i+1} Df. \tag{XI}$$

En se servant des rélations (VIII), (IX), (X) et (XI) on peut exprimer d'accroissement k par la formule

$$\begin{aligned} k = f\,.\,h &+ \frac{1}{2!} Df\,.\,h^2 + \frac{1}{3!}(D^{(2)}f + f_1 Df)\,h^3 + \frac{1}{4!}(D^{(3)}f + 3Df_1Df + \\ &+ f_1D^{(2)}f + f_1^2Df)h^4 + \frac{1}{5!}[D^{(4)}f + f_1D^{(3)}f + f_1^2D^{(2)}f + f_1^3Df + 4D^{(2)}fDf_1 + \\ &+ 6D^{(2)}f_1Df + 7f_1Df_1Df + 3f_2(Df)^2]\,h^5 + \frac{1}{6!}[D^{(5)}f + f_1D^{(4)}f + \\ &+ f_1^2D^{(3)}f + f_1^3D^{(2)}f + f_1^4Df + 5D^{(3)}fDf_1 + 9f_1D^{(2)}fDf_1 + \\ &+ 12_1^2f_1DfDf_1 + 10D^{(3)}f_1Df + 16f_1D^{(2)}f_1Df + 10D^{(2)}f_1D^{(2)}f + 10f_2D^{(2)}fDf + \\ &+ 13f_1f_2(Df)^2 + 15Df_2(Df)^2 + 15(Df_1)^2Df]\,h^6 + \ldots \end{aligned} \tag{XII}$$

En exécutant l'intégration numérique des équations différentielles, on le sait, il s'agit de choisir les valeurs de la fonction $f(x,\,y)$ à de tels arguments, qu'on puisse par la combinaison de ces valeurs obtenir la valeur du deuxième membre de (XII).

Runge, on le sait, a déduit un système des formules qui coincident avec les premiers trois termes de notre développement (XII), c'est-à-dire des formules de troisième ordre. Kutta par la même méthode de Runge a déduit des formules de quatrième ordre; à part de cela, il déduit encore des formules de cinquième ordre qui malheureusement ne sont pas correctes, mais qui ont été corrigées par Nyström et publiées en Acta societatis scientiarum fennicae, Tom 50, n. 13, p. 5. Dans cet article nous nous proposons de déduire les formules des sixième ordre.

On voit bien que le deuxième membre de l'équation (XII) contient 31 termes; on aura donc besoin d'autant valeurs de la fonction $f(x,\,y)$ que le nombre de constantes soit au moins de 31. Si nous choisissons 7 valeurs le nombre des constantes est 28 et si nous en choisissons 8 le nombre des constantes sera 36. Il s'agira donc des valeurs suivantes

$$\begin{aligned} m_0 &= f(x_0, y_0) \\ m_q &= f(x_0 + \varphi_q h, \quad y_0 + l_q h) \text{ pour } q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \end{aligned} \tag{XIII}$$

où

$$\begin{gathered} l_1 = \alpha m_0, \quad l_2 = \beta_0 m_0 + \beta_1 m_1, \quad l_3 = \sum_{j=0}^{2} \gamma_j m_j, \quad l_4 = \sum_{j=0}^{3} \delta_j m_j, \\ l_5 = \sum_{j=0}^{4} \varepsilon_j m_j, \quad l_6 = \sum_{j=0}^{5} \zeta_j m_j, \quad l_7 = \sum_{j=0}^{6} \eta_j m_j \end{gathered} \tag{XIV}$$

cettes constantes doivent satisfaire à cettes relations suivantes[1])

$$\begin{gathered} \varphi_1 = \alpha, \quad \varphi_2 = \beta_0 + \beta_1, \quad \varphi_3 = \sum_{j=0}^{2} \gamma_j, \quad \varphi_4 = \sum_{j=0}^{3} \delta_j, \quad \varphi_5 = \sum_{j=0}^{4} \varepsilon_j \\ \varphi_6 = \sum_{j=0}^{5} \zeta_j, \quad \varphi_7 = \sum_{j=0}^{6} \eta_j \end{gathered} \tag{XV}$$

et si nous désignons encore

$$k_i = m_i h \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \tag{XVI}$$

il sera

$$k = \sum_{i=0}^{7} p_i k_i \tag{XVII}$$

en développant m_q en série de Taylor nous avons

$$\begin{aligned} m_q &= f(x_0 + \varphi_q h, y_0 + l_q h) = f + (\varphi_q \cdot {}_1f + l_q \cdot f_1)h + \frac{1}{2!}(\varphi_q^2 \cdot {}_2f + \\ &+ 2\varphi_q l_q \cdot {}_1f_1 + l_q^2 \cdot f_2)h^2 + \frac{1}{3!}(\varphi_q^3 \cdot {}_3f + 3\varphi_q^2 \cdot l_q \cdot {}_2f_1 + 3\varphi_q \cdot l_q^2 \cdot {}_1f_2 + \\ &+ l_q^3 \cdot f_3)h^3 + \frac{1}{4!}(\varphi_q^4 \cdot {}_4f + 4\varphi_q^3 \cdot l_q \cdot {}_3f_1 + 6\varphi_q^2 \cdot l_q^2 \cdot {}_2f_2 + \\ &+ 4\varphi_q \cdot l_q^3 \cdot {}_1f_3 + l_q^4 \cdot f_4)h^4 + \frac{1}{5!}(\varphi_q^5 \cdot {}_5f + 5\varphi_q^4 \cdot l_q \cdot {}_4f_1 + 10\varphi_q^3 \cdot l_q^2 \cdot {}_3f_2 + \\ &+ 10\varphi_q^2 \cdot l_q^3 \cdot {}_2f_3 + 5\varphi_q \cdot l_q^4 \cdot {}_1f_4 + l_q^5 \cdot f_5)h^5 + \dots \end{aligned} \tag{XVIII}$$

De la formule (XVIII) nous obtenons pour $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ successivement les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} m_1 &= f + \varphi_1 Df \cdot h + \frac{1}{2!}\varphi_1^2 D^{(2)}f \cdot h^2 + \frac{1}{3!}\varphi_1^3 D^{(3)}f \cdot h^3 + \frac{1}{4!}\varphi_1^4 D^{(4)}f \cdot h^4 + \\ &+ \frac{1}{5!}\varphi_1^5 D^{(5)}f \cdot h^5 + \dots \end{aligned} \tag{XIX}$$

---

[1]) Voir p. e. Runge—König: Numerisches Rechnen. Berlin 1924, p. 290.

$$
\begin{aligned}
m_2 = f &+ \varphi_2 Df \,.\, h + \frac{1}{2}[\varphi_2^2 D^{(2)}f + 2\varphi_1\beta_1 f_1 Df]\,h^2 + \frac{1}{6}[\varphi_2^3 D^{(3)}f + \\
&+ 3\varphi_1^2\beta_1 f_1 D^{(2)}f + 6\varphi_1\varphi_2\beta_1 Df_1 Df]\,h^3 + \frac{1}{24}[\varphi_2^4 D^{(4)}f + 4\varphi_1^3\beta_1 f_1 D^{(3)}f + \\
&+ 12\varphi_1^2\varphi_2\beta_1 Df_1 D^{(2)}f + 12\varphi_1\varphi_2^2\beta_1 D^{(2)}f_1 Df + 12\varphi_1^2\beta_1^2 f_2 (Df)^2]\,h^4 + \\
&+ \frac{1}{120}[\varphi_2^5 D^{(5)}f + 5\varphi_1^4\beta_1 f_1 D^{(4)}f + 20\varphi_1^3\varphi_2\beta_1 Df_1 D^{(3)}f + \\
&+ 30\varphi_1^2\varphi_2^2\beta_1 D^{(2)}f_1 D^{(2)}f + 20\varphi_1\varphi_2^3\beta_1 D^{(3)}f_1 Df + 60\varphi_1^3\beta_1^2 f_2 Df D^{(2)}f + \\
&+ 60\varphi_1^2\varphi_2\beta_1^2 Df\,(Df)^2]\,h^5 + \ldots
\end{aligned}
\tag{XX}
$$

$$
\begin{aligned}
m_3 = f &+ \varphi_3 Df \,.\, h + \frac{1}{2}[\varphi_3^2 D^{(2)}f + 2(\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\, f_1 Df]\,h^2 + \frac{1}{6}[\varphi_3^3 D^{(3)}f + \\
&+ 3(\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2) f_1 D^{(2)}f + 6(\varphi_1\varphi_3\gamma_1 + \varphi_2\varphi_3\gamma_2)\, Df_1 Df + \\
&+ 6\varphi_1\beta_1\gamma_2 f_1^2 Df]\,h^3 + \frac{1}{24}[\varphi_3^4 D^{(4)}f + 4(\varphi_1^3\gamma_1 + \varphi_2^3\gamma_2) f_1 D^{(3)}f + \\
&+ 12(\varphi_1^2\varphi_3\gamma_1 + \varphi_2^2\varphi_3\gamma_2)\, Df_1 D^{(2)}f + 12(\varphi_1\varphi_3^2\gamma_1 + \varphi_2\varphi_3^2\gamma_2) D^{(2)}f_1 Df + \\
&+ 12(\varphi_1^2\gamma_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2\gamma_1\gamma_2 + \varphi_2^2\gamma_2^2) f_2 (Df)^2 + 24(\varphi_1\varphi_2\beta_1\gamma_2 + \\
&+ \varphi_1\varphi_3\beta_1\gamma_2) f_1 Df_1 Df + 12\varphi_1^2\beta_1\gamma_2 f_1^2 D^{(2)}f]\,h^4 + \frac{1}{120}[\varphi_3^5 D^{(5)}f + 5(\varphi_1^4\gamma_1 + \\
&+ \varphi_2^4\gamma_2) f_1 D^{(4)}f + 20(\varphi_1^3\varphi_3\gamma_1 + \varphi_2^3\varphi_3\gamma_2) Df_1 D^{(3)}f + 30(\varphi_1^2\varphi_3^2\gamma_1 + \\
&+ \varphi_2^2\varphi_3^2\gamma_2) D^{(2)}f_1 D^{(2)}f + 20(\varphi_1\varphi_3^3\gamma_1 + \varphi_2\varphi_3^3\gamma_2) D^{(3)}f_1 Df + \\
&+ 60(\varphi_1^3\gamma_1^2 + \varphi_1^2\varphi_2\gamma_1\gamma_2 + \varphi_1\varphi_2^2\gamma_1\gamma_2 + \varphi_2^3\gamma_2^2) f_2 D^{(2)}f Df + 60(\varphi_1^2\varphi_3\gamma_1^2 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_2\varphi_3\gamma_1\gamma_2 + \varphi_2^2\varphi_3\gamma_2^2)\, Df_2 (Df)^2 + 60(\varphi_1^2\varphi_2\beta_1\gamma_2 + \\
&+ \varphi_1^2\varphi_3\beta_1\gamma_2) f_1 Df_1 D^{(2)}f + 60(\varphi_1\varphi_2^2\beta_1\gamma_2 + \varphi_1\varphi_3^2\beta_1\gamma_2) f_1 D^{(2)}f_1 Df + \\
&+ 120\varphi_1\varphi_2\varphi_3\beta_1\gamma_2 (Df_1)^2 Df + 20\varphi_1^3\beta_1\gamma_2 f_1^2 D^{(3)}f + 60(\varphi_1^2\beta_1^2\gamma_2 + \\
&+ 2\varphi_1^2\beta_1\gamma_1\gamma_2 + 2\varphi_1\varphi_2\beta_1\gamma_2^2) f_1 f_2 (Df)^2]\,h^5 + \ldots
\end{aligned}
\tag{XXI}
$$

$$
\begin{aligned}
m_4 = f &+ \varphi_4 Df \,.\, h + \frac{1}{2}[\varphi_4^2 D^{(2)}f + 2(\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3) f_1 Df]\,h^2 + \\
&+ \frac{1}{6}[\varphi_4^3 D^{(3)}f + 3(\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3) f_1 D^{(2)}f + 6(\varphi_1\varphi_4\delta_1 + \\
&+ \varphi_2\varphi_4\delta_2 + \varphi_3\varphi_4\delta_3) Df_1 Df + 6(\varphi_1\beta_1\delta_2 + \varphi_1\gamma_1\delta_3 + \varphi_2\gamma_2\delta_3) f_1^2 Df]\,h^3 + \\
&+ \frac{1}{24}[\varphi_4^4 D^{(4)}f + 4(\varphi_1^3\delta_1 + \varphi_2^3\delta_2 + \varphi_3^3\delta_3) f_1 D^{(3)}f + 12(\varphi_1^2\varphi_4\delta_1 + \\
&+ \varphi_2^2\varphi_4\delta_2 + \varphi_3^2\varphi_4\delta_3) Df_1 D^{(2)}f + 12(\varphi_1\varphi_4^2\delta_1 + \varphi_2\varphi_4^2\delta_2 + \\
&+ \varphi_3\varphi_4^2\delta_3) D^{(2)}f_1 Df + 12(\varphi_1^2\delta_1^2 + \varphi_2^2\delta_2^2 + \varphi_3^2\delta_3^2 + 2\varphi_1\varphi_2\delta_1\delta_2 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_3\delta_1\delta_3 + 2\varphi_2\varphi_3\delta_2\delta_3)\, f_2 (Df)^2 + 24(\varphi_1\varphi_2\beta_1\delta_2 + \varphi_1\varphi_3\gamma_1\delta_3 + \\
&+ \varphi_2\varphi_3\gamma_2\delta_3 + \varphi_1\varphi_4\beta_1\delta_2 + \varphi_1\varphi_4\gamma_1\delta_3 + \varphi_2\varphi_4\gamma_2\delta_3) f_1 Df_1 Df + \\
&+ 12(\varphi_1^2\beta_1\delta_2 + \varphi_1^2\gamma_1\delta_3 + \varphi_2^2\gamma_2\delta_3) f_1^2 D^{(2)}f + 24\varphi_1\beta_1\gamma_2\delta_3 f_1^3 Df]\,h^4 + \\
&+ \frac{1}{120}[\varphi_4^5 D^{(5)}f + 5(\varphi_1^4\delta_1 + \varphi_2^4\delta_2 + \varphi_3^4\delta_3) f_1 D^{(4)}f + 20(\varphi_1^3\varphi_4\delta_1 +
\end{aligned}
\tag{XXII}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \varphi_2^3\varphi_4\delta_2 + \varphi_3^3\varphi_4\delta_3)D^{(3)}fDf_1 + 30(\varphi_1^2\varphi_4^2\delta_1 + \varphi_2^2\varphi_4^2\delta_2 + \\
&+ \varphi_3^2\varphi_4^2\delta_3)D^{(2)}fD^{(2)}f_1 + 20(\varphi_1\varphi_4^3\delta_1 + \varphi_2\varphi_4^3\delta_2 + \varphi_3\varphi_4^3\delta_3)D^{(3)}f_1Df + \\
&+ 60(\varphi_1^3\delta_1^2 + \varphi_2^3\delta_2^2 + \varphi_3^3\delta_3^2 + \varphi_1^2\varphi_2\delta_1\delta_2 + \varphi_1\varphi_2^2\delta_1\delta_2 + \varphi_1^2\varphi_3\delta_1\delta_3 + \\
&+ \varphi_1\varphi_3^2\delta_1\delta_3 + \varphi_2^2\varphi_3\delta_2\delta_3 + \varphi_2\varphi_3^2\delta_2\delta_3)f_2D^{(2)}fDf + 60(\varphi_1^2\varphi_4\delta_1^2 + \varphi_2^2\varphi_4\delta_2^2 + \\
&+ \varphi_3^2\varphi_4\delta_3^2 + 2\varphi_1\varphi_2\varphi_4\delta_1\delta_2 + 2\varphi_1\varphi_3\varphi_4\delta_1\delta_3 + 2\varphi_2\varphi_3\varphi_4\delta_2\delta_3)Df_2(Df)^2 + \\
&+ 60(\varphi_1^2\varphi_2\beta_1\delta_2 + \varphi_1^2\varphi_3\gamma_1\delta_3 + \varphi_2^2\varphi_3\gamma_2\delta_3 + \varphi_1^2\varphi_4\beta_1\delta_2 + \varphi_1^2\varphi_4\gamma_1\delta_3 + \\
&+ \varphi_2^2\varphi_4\gamma_2\delta_3)f_1Df_1D^{(2)}f + 60(\varphi_1\varphi_2^2\beta_1\delta_2 + \varphi_1\varphi_3^2\gamma_1\delta_3 + \varphi_2\varphi_3^2\gamma_2\delta_3 + \\
&+ \varphi_1\varphi_4^2\beta_1\delta_2 + \varphi_1\varphi_4^2\gamma_1\delta_3 + \varphi_2\varphi_4^2\gamma_2\delta_3)f_1DfD^{(2)}f_1 + 120(\varphi_1\varphi_2\varphi_4\beta_1\delta_2 + \qquad \textbf{(XXII)} \\
&+ \varphi_1\varphi_3\varphi_4\gamma_1\delta_3 + \varphi_2\varphi_3\varphi_4\gamma_2\delta_3)(Df_1)^2Df + 120(\varphi_1^2\beta_1\delta_1\delta_2 + \varphi_1^2\gamma_1\delta_1\delta_3 + \qquad \textbf{pokrač.} \\
&+ \varphi_2^2\gamma_2\delta_2\delta_3 + \varphi_1\varphi_2\beta_1\delta_2^2 + \varphi_1\varphi_2\gamma_1\delta_2\delta_3 + \varphi_2\varphi_3\gamma_2\delta_3^2 + \varphi_1\varphi_2\gamma_2\delta_1\delta_3 + \\
&+ \varphi_1\varphi_3\beta_1\delta_2\delta_3 + \varphi_1\varphi_3\gamma_1\delta_3^2)f_1f_2(Df)^2 + 20(\varphi_1^3\beta_1\delta_2 + \varphi_1^3\gamma_1\delta_3 + \\
&+ \varphi_2^3\gamma_2\delta_3)f_1^2D^{(3)}f + 60(\varphi_1^2\beta_1^2\delta_2 + \varphi_1^2\gamma_1^2\delta_3 + 2\varphi_1\varphi_2\gamma_1\gamma_2\delta_3 + \\
&+ \varphi_2^2\gamma_2^2\delta_3)f_1f_2(Df)^2 + 120(\varphi_1\varphi_2\beta_1\gamma_2\delta_3 + \varphi_1\varphi_3\beta_1\gamma_2\delta_3 + \\
&+ \varphi_1\varphi_4\beta_1\gamma_2\delta_3)f_1^2Df_1Df + 60\varphi_1^2\beta_1\gamma_2\delta_3f_1^3D^{(2)}f]\,h^5 + \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_5 = {} & f + \varphi_5Df\,.\,h + \frac{1}{2}[\varphi_5^2D^{(2)}f + 2(\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)f_1Df]\,h^2 + \\
&+ \frac{1}{6}[\varphi_5^3D^{(3)}f + 3(\varphi_1^2\varepsilon_1 + \varphi_2^2\varepsilon_2 + \varphi_3^2\varepsilon_3 + \varphi_4^2\varepsilon_4)f_1D^{(2)}f + 6(\varphi_1\varphi_5\varepsilon_1 + \\
&+ \varphi_2\varphi_5\varepsilon_2 + \varphi_3\varphi_5\varepsilon_3 + \varphi_4\varphi_5\varepsilon_4)Df_1Df + 6(\varphi_1\beta_1\varepsilon_2 + \varphi_1\gamma_1\varepsilon_3 + \varphi_2\gamma_2\varepsilon_3 + \\
&+ \varphi_1\delta_1\varepsilon_4 + \varphi_2\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_3\delta_3\varepsilon_4)f_1^2Df]\,h^3 + \frac{1}{24}[\varphi_5^4D^{(4)}f + 4(\varphi_1^3\varepsilon_1 + \\
&+ \varphi_2^3\varepsilon_2 + \varphi_3^3\varepsilon_3 + \varphi_4^3\varepsilon_4)f_1D^{(3)}f + 12(\varphi_1^2\varphi_5\varepsilon_1 + \varphi_2^2\varphi_5\varepsilon_2 + \varphi_3^2\varphi_5\varepsilon_3 + \\
&+ \varphi_4^2\varphi_5\varepsilon_4)\,Df_1D^{(2)}f + 12(\varphi_1\varphi_5^2\varepsilon_1 + \varphi_2\varphi_5^2\varepsilon_2 + \varphi_3\varphi_5^2\varepsilon_3 + \\
&+ \varphi_4\varphi_5^2\varepsilon_4)D^{(2)}f_1Df + 12(\varphi_1^2\varepsilon_1^2 + \varphi_2^2\varepsilon_2^2 + \varphi_3^2\varepsilon_3^2 + \varphi_4^2\varepsilon_4^2 + 2\varphi_1\varphi_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\varphi_1\varphi_4\varepsilon_1\varepsilon_4 + 2\varphi_2\varphi_3\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\varphi_2\varphi_4\varepsilon_2\varepsilon_4 + \\
&+ 2\varphi_3\varphi_4\varepsilon_3\varepsilon_4)f_2(Df)^2 + 24(\varphi_1\varphi_2\beta_1\varepsilon_2 + \varphi_1\varphi_3\gamma_1\varepsilon_3 + \varphi_2\varphi_3\gamma_2\varepsilon_3 + \\
&+ \varphi_1\varphi_4\delta_1\varepsilon_4 + \varphi_2\varphi_4\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_3\varphi_4\delta_3\varepsilon_4 + \varphi_1\varphi_5\beta_1\varepsilon_2 + \varphi_1\varphi_5\gamma_1\varepsilon_3 + \qquad \textbf{(XXIII)} \\
&+ \varphi_2\varphi_5\gamma_2\varepsilon_3 + \varphi_1\varphi_5\delta_1\varepsilon_4 + \varphi_2\varphi_5\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_3\varphi_5\delta_3\varepsilon_4)f_1Df_1Df + \\
&+ 12(\varphi_1^2\beta_1\varepsilon_2 + \varphi_1^2\gamma_1\varepsilon_3 + \varphi_2^2\gamma_2\varepsilon_3 + \varphi_1^2\delta_1\varepsilon_4 + \varphi_2^2\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_3^2\delta_3\varepsilon_4)f_1^2D^{(2)}f + \\
&+ 24(\varphi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3 + \varphi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_1\gamma_1\delta_3\varepsilon_4 + \varphi_2\gamma_2\delta_3\varepsilon_4)f_1^3Df]\,h^4 + \\
&+ \frac{1}{120}[\varphi_5^5D^{(5)}f + 5(\varphi_1^4\varepsilon_1 + \varphi_2^4\varepsilon_2 + \varphi_3^4\varepsilon_3 + \varphi_4^4\varepsilon_4)f_1D^{(4)}f + 20(\varphi_1^3\varphi_5\varepsilon_1 + \\
&+ \varphi_2^3\varphi_5\varepsilon_2 + \varphi_3^3\varphi_5\varepsilon_3 + \varphi_4^3\varphi_5\varepsilon_4)D^{(3)}fDf_1 + 30(\varphi_1^2\varphi_5^2\varepsilon_1 + \varphi_2^2\varphi_5^2\varepsilon_2 + \\
&+ \varphi_3^2\varphi_5^2\varepsilon_3 + \varphi_4^2\varphi_5^2\varepsilon_4)D^{(2)}fD^{(2)}f_1 + 20(\varphi_1\varphi_5^3\varepsilon_1 + \varphi_2\varphi_5^3\varepsilon_2 + \varphi_3\varphi_5^3\varepsilon_3 + \\
&+ \varphi_4\varphi_5^3\varepsilon_4)D^{(3)}f_1Df + 60(\varphi_1^3\varepsilon_1^2 + \varphi_2^3\varepsilon_2^2 + \varphi_3^3\varepsilon_3^2 + \varphi_4^3\varepsilon_4^2 + \\
&+ \varphi_1^2\varphi_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varphi_1\varphi_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varphi_1^2\varphi_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varphi_1\varphi_3^2\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varphi_1^2\varphi_4\varepsilon_1\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_1\varphi_4^2\varepsilon_1\varepsilon_4 + \varphi_2^2\varphi_3\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varphi_2\varphi_3^2\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varphi_2^2\varphi_4\varepsilon_2\varepsilon_4 + \varphi_2\varphi_4^2\varepsilon_2\varepsilon_4 + \varphi_3^2\varphi_4\varepsilon_3\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_3\varphi_4^2\varepsilon_3\varepsilon_4)f_2D^{(2)}fDf + 60(\varphi_1^2\varphi_5\varepsilon_1^2 + \varphi_2^2\varphi_5\varepsilon_2^2 + \varphi_3^2\varphi_5\varepsilon_3^2 + \\
&+ \varphi_4^2\varphi_5\varepsilon_4^2 + 2\varphi_1\varphi_2\varphi_5\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\varphi_1\varphi_3\varphi_5\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\varphi_1\varphi_4\varphi_5\varepsilon_1\varepsilon_4 + \\
&+ 2\varphi_2\varphi_3\varphi_5\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\varphi_2\varphi_4\varphi_5\varepsilon_2\varepsilon_4 + 2\varphi_3\varphi_4\varphi_5\varepsilon_3\varepsilon_4)Df_2(Df)^2 +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 60(\varphi_1^2\varphi_2\beta_1\varepsilon_2 + \varphi_1^2\varphi_3\gamma_1\varepsilon_3 + \varphi_2^2\varphi_3\gamma_2\varepsilon_3 + \varphi_1^2\varphi_4\delta_1\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_2^2\varphi_4\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_3^2\varphi_4\delta_3\varepsilon_4 + \varphi_1^2\varphi_5\beta_1\varepsilon_2 + \varphi_1^2\varphi_5\gamma_1\varepsilon_3 + \varphi_2^2\varphi_5\gamma_2\varepsilon_3 + \\
&+ \varphi_1^2\varphi_5\delta_1\varepsilon_4 + \varphi_2^2\varphi_5\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_3^2\varphi_5\delta_3\varepsilon_4)f_1Df_1D^{(2)}f + 60(\varphi_1\varphi_2^2\beta_1\varepsilon_2 + \\
&+ \varphi_1\varphi_3^2\gamma_1\varepsilon_3 + \varphi_2\varphi_3^2\gamma_2\varepsilon_3 + \varphi_1\varphi_4^2\delta_1\varepsilon_4 + \varphi_2\varphi_4^2\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_3\varphi_4^2\delta_3\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_1\varphi_5^2\beta_1\varepsilon_2 + \varphi_1\varphi_5^2\gamma_1\varepsilon_3 + \varphi_2\varphi_5^2\gamma_2\varepsilon_3 + \varphi_1\varphi_5^2\delta_1\varepsilon_4 + \varphi_2\varphi_5^2\delta_2\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_3\varphi_5^2\delta_3\varepsilon_4)f_1DfD^{(2)}f_1 + 120(\varphi_1\varphi_2\varphi_5\beta_1\varepsilon_2 + \varphi_1\varphi_3\varphi_5\gamma_1\varepsilon_3 + \\
&+ \varphi_2\varphi_3\varphi_5\gamma_2\varepsilon_3 + \varphi_1\varphi_4\varphi_5\delta_1\varepsilon_4 + \varphi_2\varphi_4\varphi_5\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_3\varphi_4\varphi_5\delta_3\varepsilon_4)(Df_1)^2Df + \\
&+ 120(\varphi_1^2\beta_1\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varphi_1^2\gamma_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varphi_1^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_4 + \varphi_2^2\gamma_2\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varphi_2^2\delta_2\varepsilon_2\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_3^2\delta_3\varepsilon_3\varepsilon_4 + \varphi_1\varphi_2\beta_1\varepsilon_2^2 + \varphi_1\varphi_3\gamma_1\varepsilon_3^2 + \varphi_2\varphi_3\gamma_2\varepsilon_3^2 + \varphi_1\varphi_4\delta_1\varepsilon_4^2 + \\
&+ \varphi_2\varphi_4\delta_2\varepsilon_4^2 + \varphi_3\varphi_4\delta_3\varepsilon_4^2 + \varphi_1\varphi_2\gamma_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varphi_1\varphi_2\gamma_2\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varphi_1\varphi_2\delta_1\varepsilon_2\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_1\varphi_2\delta_2\varepsilon_1\varepsilon_4 + \varphi_1\varphi_3\beta_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varphi_1\varphi_3\delta_1\varepsilon_3\varepsilon_4 + \varphi_1\varphi_3\delta_3\varepsilon_1\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_1\varphi_4\beta_1\varepsilon_2\varepsilon_4 + \varphi_1\varphi_4\gamma_1\varepsilon_3\varepsilon_4 + \varphi_2\varphi_3\delta_2\varepsilon_3\varepsilon_4 + \varphi_2\varphi_3\delta_3\varepsilon_2\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_2\varphi_4\gamma_2\varepsilon_3\varepsilon_4)f_1f_2(Df)^2 + 20(\varphi_1^3\beta_1\varepsilon_2 + \varphi_1^3\gamma_1\varepsilon_3 + \varphi_2^3\gamma_2\varepsilon_3 + \\
&+ \varphi_1^3\delta_1\varepsilon_4 + \varphi_2^3\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_3^3\delta_3\varepsilon_4)f_1^2D^{(3)}f + 60(\varphi_1^2\beta_1^2\varepsilon_2 + \varphi_1^2\gamma_1^2\varepsilon_3 + \\
&+ \varphi_1^2\delta_1^2\varepsilon_4 + \varphi_2^2\gamma_2^2\varepsilon_3 + \varphi_2^2\delta_2^2\varepsilon_4 + \varphi_3^2\delta_3^2\varepsilon_4 + 2\varphi_1\varphi_2\gamma_1\gamma_2\varepsilon_3 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_2\delta_1\delta_2\varepsilon_4 + 2\varphi_1\varphi_3\delta_1\delta_3\varepsilon_4 + 2\varphi_2\varphi_3\delta_2\delta_3\varepsilon_4)f_1f_2(Df)^2 + \\
&+ 120(\varphi_1\varphi_2\beta_1\gamma_2\varepsilon_3 + \varphi_1\varphi_3\beta_1\gamma_2\varepsilon_3 + \varphi_1\varphi_2\beta_1\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_1\varphi_3\gamma_1\delta_3\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_2\varphi_3\gamma_2\delta_3\varepsilon_4 + \varphi_1\varphi_4\beta_1\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_1\varphi_4\gamma_1\delta_3\varepsilon_4 + \varphi_2\varphi_4\gamma_2\delta_3\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_1\varphi_5\beta_1\gamma_2\varepsilon_3 + \varphi_1\varphi_5\beta_1\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_1\varphi_5\gamma_1\delta_3\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_2\varphi_5\gamma_2\delta_3\varepsilon_4)f_1^2Df_1Df + 60(\varphi_1^2\beta_1\gamma_2\varepsilon_3 + \varphi_1^2\beta_1\delta_2\varepsilon_4 + \varphi_1^2\gamma_1\delta_3\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_2^2\gamma_2\delta_3\varepsilon_4)f_1^3D^{(2)}f + 120\varphi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\varepsilon_4f_1^4Df]\,h^5 + \dots
\end{aligned}
\tag{XXIII pokrač.}
$$

$$
\begin{aligned}
m_6 = {} & f + \varphi_6Df\,.\,h + \frac{1}{2}[\varphi_6^2D^{(2)}f + 2(\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \\
&+ \varphi_5\zeta_5)f_1Df]\,h^2 + \frac{1}{6}[\varphi_6^3D^{(3)}f + 3(\varphi_1^2\zeta_1 + \varphi_2^2\zeta_2 + \varphi_3^2\zeta_3 + \varphi_4^2\zeta_4 + \\
&+ \varphi_5^2\zeta_5)f_1D^{(2)}f + 6(\varphi_1\varphi_6\zeta_1 + \varphi_2\varphi_6\zeta_2 + \varphi_3\varphi_6\zeta_3 + \varphi_4\varphi_6\zeta_4 + \\
&+ \varphi_5\varphi_6\zeta_5)Df_1Df + 6(\varphi_1\beta_1\zeta_2 + \varphi_1\gamma_1\zeta_3 + \varphi_2\gamma_2\zeta_3 + \varphi_1\delta_1\zeta_4 + \varphi_2\delta_2\zeta_4 + \\
&+ \varphi_3\delta_3\zeta_4 + \varphi_1\varepsilon_1\zeta_5 + \varphi_2\varepsilon_2\zeta_5 + \varphi_3\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_4\varepsilon_4\zeta_5)f_1^2Df]\,h^3 + \\
&+ \frac{1}{24}[\varphi_6^4D^{(4)}f + 4(\varphi_1^3\zeta_1 + \varphi_2^3\zeta_2 + \varphi_3^3\zeta_3 + \varphi_4^3\zeta_4 + \varphi_5^3\zeta_5)f_1D^{(3)}f + \\
&+ 12(\varphi_1^2\varphi_6\zeta_1 + \varphi_2^2\varphi_6\zeta_2 + \varphi_3^2\varphi_6\zeta_3 + \varphi_4^2\varphi_6\zeta_4 + \varphi_5^2\varphi_6\zeta_5)Df_1D^{(2)}f + \\
&+ 12(\varphi_1\varphi_6^2\zeta_1 + \varphi_2\varphi_6^2\zeta_2 + \varphi_3\varphi_6^2\zeta_3 + \varphi_4\varphi_6^2\zeta_4 + \varphi_5\varphi_6^2\zeta_5)D^{(2)}f_1Df + \\
&+ 12(\varphi_1^2\zeta_1^2 + \varphi_2^2\zeta_2^2 + \varphi_3^2\zeta_3^2 + \varphi_4^2\zeta_4^2 + \varphi_5^2\zeta_5^2 + 2\varphi_1\varphi_2\zeta_1\zeta_2 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_3\zeta_1\zeta_3 + 2\varphi_2\varphi_3\zeta_2\zeta_3 + 2\varphi_1\varphi_4\zeta_1\zeta_4 + 2\varphi_2\varphi_4\zeta_2\zeta_4 + \\
&+ 2\varphi_3\varphi_4\zeta_3\zeta_4 + 2\varphi_1\varphi_5\zeta_1\zeta_5 + 2\varphi_2\varphi_5\zeta_2\zeta_5 + 2\varphi_3\varphi_5\zeta_3\zeta_5 + \\
&+ 2\varphi_4\varphi_5\zeta_4\zeta_5)f_2(Df)^2 + 24(\varphi_1\varphi_2\beta_1\zeta_2 + \varphi_1\varphi_3\gamma_1\zeta_3 + \varphi_2\varphi_3\gamma_2\zeta_3 + \\
&+ \varphi_1\varphi_4\delta_1\zeta_4 + \varphi_2\varphi_4\delta_2\zeta_4 + \varphi_3\varphi_4\delta_3\zeta_4 + \varphi_1\varphi_5\varepsilon_1\zeta_5 + \varphi_2\varphi_5\varepsilon_2\zeta_5 + \\
&+ \varphi_3\varphi_5\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_4\varphi_5\varepsilon_4\zeta_5 + \varphi_1\varphi_6\beta_1\zeta_2 + \varphi_1\varphi_6\gamma_1\zeta_3 + \varphi_2\varphi_6\gamma_2\zeta_3 + \\
&+ \varphi_1\varphi_6\delta_1\zeta_4 + \varphi_2\varphi_6\delta_2\zeta_4 + \varphi_3\varphi_6\delta_3\zeta_4 + \varphi_1\varphi_6\varepsilon_1\zeta_5 + \varphi_2\varphi_6\varepsilon_2\zeta_5 + \\
&+ \varphi_3\varphi_6\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_4\varphi_6\varepsilon_4\zeta_5)f_1Df_1Df + 12(\varphi_1^2\beta_1\zeta_2 + \varphi_1^2\gamma_1\zeta_3 + \varphi_2^2\gamma_2\zeta_3 +
\end{aligned}
\tag{XXIV}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \varphi_1^2\delta_1\zeta_4 + \varphi_2^2\delta_2\zeta_4 + \varphi_3^2\delta_3\zeta_4 + \varphi_1^2\varepsilon_1\zeta_5 + \varphi_2^2\varepsilon_2\zeta_5 + \varphi_3^2\varepsilon_3\zeta_5 + \\
&+ \varphi_4^2\varepsilon_4\zeta_5)f_1^2D^{(2)}f + 24(\varphi_1\beta_1\gamma_2\zeta_3 + \varphi_1\beta_1\delta_2\zeta_4 + \varphi_1\gamma_1\delta_3\zeta_4 + \varphi_2\gamma_2\delta_3\zeta_4 + \\
&+ \varphi_1\beta_1\varepsilon_2\zeta_5 + \varphi_1\gamma_1\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_2\gamma_2\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_1\delta_1\varepsilon_4\zeta_5 + \varphi_2\delta_2\varepsilon_4\zeta_5 + \\
&+ \varphi_3\delta_3\varepsilon_4\zeta_5)f_1^3Df]\,h^4 + \frac{1}{120}[\varphi_6^5D^{(5)}f + 5(\varphi_1^4\zeta_1 + \varphi_2^4\zeta_2 + \varphi_3^4\zeta_3 + \varphi_4^4\zeta_4 + \\
&+ \varphi_5^4\zeta_5)f_1D^{(4)}f + 20(\varphi_1^3\varphi_6\zeta_1 + \varphi_2^3\varphi_6\zeta_2 + \varphi_3^3\varphi_6\zeta_3 + \varphi_4^3\varphi_6\zeta_4 + \\
&+ \varphi_5^3\varphi_6\zeta_5)D^{(3)}fDf_1 + 30(\varphi_1^2\varphi_6^2\zeta_1 + \varphi_2^2\varphi_6^2\zeta_2 + \varphi_3^2\varphi_6^2\zeta_3 + \varphi_4^2\varphi_6^2\zeta_4 + \\
&+ \varphi_5^2\varphi_6^2\zeta_5)D^{(2)}f_1D^{(2)}f + 20(\varphi_1\varphi_6^3\zeta_1 + \varphi_2\varphi_6^3\zeta_2 + \varphi_3\varphi_6^3\zeta_3 + \varphi_4\varphi_6^3\zeta_4 + \\
&+ \varphi_5\varphi_6^3\zeta_5)D^{(3)}f_1Df + 60(\varphi_1^3\zeta_1^2 + \varphi_2^3\zeta_2^2 + \varphi_3^3\zeta_3^2 + \varphi_4^3\zeta_4^2 + \varphi_5^3\zeta_5^2 + \\
&+ \varphi_1^2\varphi_2\zeta_1\zeta_2 + \varphi_1\varphi_2^2\zeta_1\zeta_2 + \varphi_1^2\varphi_3\zeta_1\zeta_3 + \varphi_1\varphi_3^2\zeta_1\zeta_3 + \varphi_2^2\varphi_3\zeta_2\zeta_3 + \\
&+ \varphi_2\varphi_3^2\zeta_2\zeta_3 + \varphi_1^2\varphi_4\zeta_1\zeta_4 + \varphi_1\varphi_4^2\zeta_1\zeta_4 + \varphi_2^2\varphi_4\zeta_2\zeta_4 + \varphi_2\varphi_4^2\zeta_2\zeta_4 + \\
&+ \varphi_3^2\varphi_4\zeta_3\zeta_4 + \varphi_3\varphi_4^2\zeta_3\zeta_4 + \varphi_1^2\varphi_5\zeta_1\zeta_5 + \varphi_1\varphi_5^2\zeta_1\zeta_5 + \varphi_2^2\varphi_5\zeta_2\zeta_5 + \\
&+ \varphi_2\varphi_5^2\zeta_2\zeta_5 + \varphi_3^2\varphi_5\zeta_3\zeta_5 + \varphi_3\varphi_5^2\zeta_3\zeta_5 + \varphi_4^2\varphi_5\zeta_4\zeta_5 + \\
&+ \varphi_4\varphi_5^2\zeta_4\zeta_5)f_2D^{(2)}fDf + 60(\varphi_1^2\varphi_6\zeta_1^2 + \varphi_2^2\varphi_6\zeta_2^2 + \varphi_3^2\varphi_6\zeta_3^2 + \varphi_4^2\varphi_6\zeta_4^2 + \\
&+ \varphi_5^2\varphi_6\zeta_5^2 + 2\varphi_1\varphi_2\varphi_6\zeta_1\zeta_2 + 2\varphi_1\varphi_3\varphi_6\zeta_1\zeta_3 + 2\varphi_2\varphi_3\varphi_6\zeta_2\zeta_3 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_4\varphi_6\zeta_1\zeta_4 + 2\varphi_2\varphi_4\varphi_6\zeta_2\zeta_4 + 2\varphi_3\varphi_4\varphi_6\zeta_3\zeta_4 + 2\varphi_1\varphi_5\varphi_6\zeta_1\zeta_5 + \\
&+ 2\varphi_2\varphi_5\varphi_6\zeta_2\zeta_5 + 2\varphi_3\varphi_5\varphi_6\zeta_3\zeta_5 + 2\varphi_4\varphi_5\varphi_6\zeta_4\zeta_5)Df_2(Df)^2 + \\
&+ 60(\varphi_1^2\varphi_2\beta_1\zeta_2 + \varphi_1^2\varphi_3\gamma_1\zeta_3 + \varphi_2^2\varphi_3\gamma_2\zeta_3 + \varphi_1^2\varphi_4\delta_1\zeta_4 + \varphi_2^2\varphi_4\delta_2\zeta_4 + \\
&+ \varphi_3^2\varphi_4\delta_3\zeta_4 + \varphi_1^2\varphi_5\varepsilon_1\zeta_5 + \varphi_2^2\varphi_5\varepsilon_2\zeta_5 + \varphi_3^2\varphi_5\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_4^2\varphi_5\varepsilon_4\zeta_5 + \\
&+ \varphi_1^2\varphi_6\beta_1\zeta_2 + \varphi_1^2\varphi_6\gamma_1\zeta_3 + \varphi_2^2\varphi_6\gamma_2\zeta_3 + \varphi_1^2\varphi_6\delta_1\zeta_4 + \varphi_2^2\varphi_6\delta_2\zeta_4 + \\
&+ \varphi_3^2\varphi_6\delta_3\zeta_4 + \varphi_1^2\varphi_6\varepsilon_1\zeta_5 + \varphi_2^2\varphi_6\varepsilon_2\zeta_5 + \varphi_3^2\varphi_6\varepsilon_3\zeta_5 + \\
&+ \varphi_4^2\varphi_6\varepsilon_4\zeta_5)f_1Df_1D^{(2)}f + 60(\varphi_1\varphi_2^2\beta_1\zeta_2 + \varphi_1\varphi_3^2\gamma_1\zeta_3 + \varphi_2\varphi_3^2\gamma_2\zeta_3 + \\
&+ \varphi_1\varphi_4^2\delta_1\zeta_4 + \varphi_2\varphi_4^2\delta_2\zeta_4 + \varphi_3\varphi_4^2\delta_3\zeta_4 + \varphi_1\varphi_5^2\varepsilon_1\zeta_5 + \varphi_2\varphi_5^2\varepsilon_2\zeta_5 + \\
&+ \varphi_3\varphi_5^2\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_4\varphi_5^2\varepsilon_4\zeta_5 + \varphi_1\varphi_6^2\beta_1\zeta_2 + \varphi_1\varphi_6^2\gamma_1\zeta_3 + \varphi_2\varphi_6^2\gamma_2\zeta_3 + \\
&+ \varphi_1\varphi_6^2\delta_1\zeta_4 + \varphi_2\varphi_6^2\delta_2\zeta_4 + \varphi_3\varphi_6^2\delta_3\zeta_4 + \varphi_1\varphi_6^2\varepsilon_1\zeta_5 + \varphi_2\varphi_6^2\varepsilon_2\zeta_5 + \\
&+ \varphi_3\varphi_6^2\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_4\varphi_6^2\varepsilon_4\zeta_5)f_1DfD^{(2)}f_1 + 120(\varphi_1\varphi_2\varphi_6\beta_1\zeta_2 + \varphi_1\varphi_3\varphi_6\gamma_1\zeta_3 + \\
&+ \varphi_2\varphi_3\varphi_6\gamma_2\zeta_3 + \varphi_1\varphi_4\varphi_6\delta_1\zeta_4 + \varphi_2\varphi_4\varphi_6\delta_2\zeta_4 + \varphi_3\varphi_4\varphi_6\delta_3\zeta_4 + \\
&+ \varphi_1\varphi_5\varphi_6\varepsilon_1\zeta_5 + \varphi_2\varphi_5\varphi_6\varepsilon_2\zeta_5 + \varphi_3\varphi_5\varphi_6\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_4\varphi_5\varphi_6\varepsilon_4\zeta_5)(Df_1)^2Df + \\
&+ 20(\varphi_1^3\beta_1\zeta_2 + \varphi_1^3\gamma_1\zeta_3 + \varphi_2^3\gamma_2\zeta_3 + \varphi_1^3\delta_1\zeta_4 + \varphi_2^3\delta_2\zeta_4 + \varphi_3^3\delta_3\zeta_4 + \\
&+ \varphi_1^3\varepsilon_1\zeta_5 + \varphi_2^3\varepsilon_2\zeta_5 + \varphi_3^3\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_4^3\varepsilon_4\zeta_5)f_1^2D^{(3)}f + 120(\varphi_1\varphi_2\beta_1\gamma_2\zeta_3 + \\
&+ \varphi_1\varphi_3\beta_1\gamma_2\zeta_3 + \varphi_1\varphi_2\beta_1\delta_2\zeta_4 + \varphi_1\varphi_3\gamma_1\delta_3\zeta_4 + \varphi_2\varphi_3\gamma_2\delta_3\zeta_4 + \\
&+ \varphi_1\varphi_4\beta_1\delta_2\zeta_4 + \varphi_1\varphi_4\gamma_1\delta_3\zeta_4 + \varphi_2\varphi_4\gamma_2\delta_3\zeta_4 + \varphi_1\varphi_2\beta_1\varepsilon_2\zeta_5 + \\
&+ \varphi_1\varphi_3\gamma_1\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_2\varphi_3\gamma_2\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_1\varphi_4\delta_1\varepsilon_4\zeta_5 + \varphi_2\varphi_4\delta_2\varepsilon_4\zeta_5 + \\
&+ \varphi_3\varphi_4\delta_3\varepsilon_4\zeta_5 + \varphi_1\varphi_5\beta_1\varepsilon_2\zeta_5 + \varphi_1\varphi_5\gamma_1\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_2\varphi_5\gamma_2\varepsilon_3\zeta_5 + \\
&+ \varphi_1\varphi_5\delta_1\varepsilon_4\zeta_5 + \varphi_2\varphi_5\delta_2\varepsilon_4\zeta_5 + \varphi_3\varphi_5\delta_3\varepsilon_4\zeta_5)f_1^2Df_1Df + 60(\varphi_1^2\beta_1\gamma_2\zeta_3 + \\
&+ \varphi_1^2\beta_1\delta_2\zeta_4 + \varphi_1^2\gamma_1\delta_3\zeta_4 + \varphi_2^2\gamma_2\delta_3\zeta_4 + \varphi_1^2\beta_1\varepsilon_2\zeta_5 + \varphi_1^2\gamma_1\varepsilon_3\zeta_5 + \\
&+ \varphi_2^2\gamma_2\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_1^2\delta_1\varepsilon_4\zeta_5 + \varphi_2^2\delta_2\varepsilon_4\zeta_5 + \varphi_3^2\delta_3\varepsilon_4\zeta_5)f_1^3D^{(2)}f + \\
&+ 120(\varphi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\zeta_4 + \varphi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4\zeta_5 + \varphi_1\gamma_1\delta_3\varepsilon_4\zeta_5 + \\
&+ \varphi_2\gamma_2\delta_3\varepsilon_4\zeta_5)f_1^4Df + 120(\varphi_1\varphi_6\beta_1\gamma_2\zeta_3 + \varphi_1\varphi_6\beta_1\delta_2\zeta_4 + \varphi_1\varphi_6\gamma_1\delta_3\zeta_4 + \\
&+ \varphi_2\varphi_6\gamma_2\delta_3\zeta_4 + \varphi_1\varphi_6\beta_1\varepsilon_2\zeta_5 + \varphi_1\varphi_6\gamma_1\varepsilon_3\zeta_5 + \\
&+ \varphi_2\varphi_6\gamma_2\varepsilon_3\zeta_5 + \varphi_1\varphi_6\delta_1\varepsilon_4\zeta_5 + \varphi_2\varphi_6\delta_2\varepsilon_4\zeta_5 + \varphi_3\varphi_6\delta_3\varepsilon_4\zeta_5)f_1^2Df_1Df +
\end{aligned}
$$

(XXIV)
pokrač.

$$
\begin{aligned}
&+ 60(\varphi_1^2\beta_1^2\zeta_2 + \varphi_1^2\gamma_1^2\zeta_3 + \varphi_2^2\gamma_2^2\zeta_3 + \varphi_1^2\delta_1^2\zeta_4 + \varphi_2^2\delta_2^2\zeta_4 + \varphi_3^2\delta_3^2\zeta_4 + \\
&+ \varphi_1^2\varepsilon_1^2\zeta_5 + \varphi_2^2\varepsilon_2^2\zeta_5 + \varphi_3^2\varepsilon_3^2\zeta_5 + \varphi_4^2\varepsilon_4^2\zeta_5 + 2\varphi_1\varphi_2\gamma_1\gamma_2\zeta_3 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_2\delta_1\delta_2\zeta_4 + 2\varphi_1\varphi_3\delta_1\delta_3\zeta_4 + 2\varphi_2\varphi_3\delta_2\delta_3\zeta_4 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_2\varepsilon_1\varepsilon_2\zeta_5 + 2\varphi_1\varphi_3\varepsilon_1\varepsilon_3\zeta_5 + 2\varphi_1\varphi_4\varepsilon_1\varepsilon_4\zeta_5 + 2\varphi_2\varphi_3\varepsilon_2\varepsilon_3\zeta_5 + \\
&+ 2\varphi_2\varphi_4\varepsilon_2\varepsilon_4\zeta_5 + 2\varphi_3\varphi_4\varepsilon_3\varepsilon_4\zeta_5 + 2\varphi_1^2\beta_1\zeta_1\zeta_2 + 2\varphi_1^2\gamma_1\zeta_1\zeta_3 + \\
&+ 2\varphi_1^2\delta_1\zeta_1\zeta_4 + 2\varphi_1^2\varepsilon_1\zeta_1\zeta_5 + 2\varphi_2^2\gamma_2\zeta_2\zeta_3 + 2\varphi_2^2\delta_2\zeta_2\zeta_4 + 2\varphi_2^2\varepsilon_2\zeta_2\zeta_5 + \\
&+ 2\varphi_3^2\delta_3\zeta_3\zeta_4 + 2\varphi_3^2\varepsilon_3\zeta_3\zeta_5 + 2\varphi_4^2\varepsilon_4\zeta_4\zeta_5 + 2\varphi_1\varphi_2\gamma_2\zeta_1\zeta_3 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_2\delta_2\zeta_1\zeta_4 + 2\varphi_1\varphi_2\varepsilon_2\zeta_1\zeta_5 + 2\varphi_1\varphi_2\beta_1\zeta_2^2 + 2\varphi_1\varphi_2\gamma_1\zeta_2\zeta_3 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_2\delta_1\zeta_2\zeta_4 + 2\varphi_1\varphi_2\varepsilon_1\zeta_2\zeta_5 + 2\varphi_1\varphi_3\delta_1\zeta_1\zeta_4 + 2\varphi_1\varphi_3\varepsilon_3\zeta_1\zeta_5 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_3\beta_1\zeta_2\zeta_3 + 2\varphi_1\varphi_3\gamma_1\zeta_3^2 + 2\varphi_1\varphi_3\delta_1\zeta_3\zeta_4 + 2\varphi_1\varphi_3\varepsilon_1\zeta_3\zeta_5 + \\
&+ 2\varphi_2\varphi_3\delta_3\zeta_2\zeta_4 + 2\varphi_2\varphi_3\varepsilon_3\zeta_2\zeta_5 + 2\varphi_2\varphi_3\gamma_2\zeta_3^2 + 2\varphi_2\varphi_3\delta_2\zeta_3\zeta_4 + \\
&+ 2\varphi_2\varphi_3\varepsilon_2\zeta_3\zeta_5 + 2\varphi_1\varphi_4\varepsilon_4\zeta_1\zeta_5 + 2\varphi_1\varphi_4\beta_1\zeta_2\zeta_4 + 2\varphi_1\varphi_4\gamma_1\zeta_3\zeta_4 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_4\delta_1\zeta_4^2 + 2\varphi_1\varphi_4\varepsilon_1\zeta_4\zeta_5 + 2\varphi_2\varphi_4\varepsilon_4\zeta_2\zeta_5 + 2\varphi_2\varphi_4\gamma_2\zeta_2\zeta_4 + \\
&+ 2\varphi_2\varphi_4\delta_2\zeta_4^2 + 2\varphi_2\varphi_4\varepsilon_2\zeta_4\zeta_5 + 2\varphi_3\varphi_4\varepsilon_4\zeta_3\zeta_5 + 2\varphi_3\varphi_4\delta_3\zeta_4^2 + \\
&+ 2\varphi_3\varphi_4\varepsilon_3\zeta_4\zeta_5 + 2\varphi_1\varphi_5\beta_1\zeta_2\zeta_5 + 2\varphi_1\varphi_5\gamma_1\zeta_3\zeta_5 + 2\varphi_1\varphi_5\delta_1\zeta_4\zeta_5 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_5\varepsilon_1\zeta_5^2 + 2\varphi_2\varphi_5\gamma_2\zeta_3\zeta_5 + 2\varphi_2\varphi_5\delta_2\zeta_4\zeta_5 + 2\varphi_2\varphi_5\varepsilon_2\zeta_5^2 + \\
&+ 2\varphi_2\varphi_5\delta_3\zeta_4\zeta_5 + 2\varphi_3\varphi_5\varepsilon_3\zeta_5^2 + 2\varphi_4\varphi_5\varepsilon_4\zeta_5^2)f_1f_2(Df)^2]\,h^5 + \ldots
\end{aligned}
\tag{XXIV}
$$

(XXIV) pokrač.

$$
\begin{aligned}
m_7 = f &+ \varphi_7 Df\,.\,h + \frac{1}{2}[\varphi_7^2 D^{(2)}f + 2(\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 + \varphi_3\eta_3 + \varphi_4\eta_4 + \\
&+ \varphi_5\eta_5 + \varphi_6\eta_6)f_1Df]\,h^2 + \frac{1}{6}[\varphi_7^3 D^{(3)}f + 3(\varphi_1^2\eta_1 + \varphi_2^2\eta_2 + \varphi_3^2\eta_3 + \\
&+ \varphi_4^2\eta_4 + \varphi_5^2\eta_5 + \varphi_6^2\eta_6)f_1D^{(2)}f + 6(\varphi_1\varphi_7\eta_1 + \varphi_2\varphi_7\eta_2 + \varphi_3\varphi_7\eta_3 + \\
&+ \varphi_4\varphi_7\eta_4 + \varphi_5\varphi_7\eta_5 + \varphi_6\varphi_7\eta_6)Df_1Df + 6(\varphi_1\beta_1\eta_2 + \varphi_1\gamma_1\eta_3 + \\
&+ \varphi_2\gamma_2\eta_3 + \varphi_1\delta_1\eta_4 + \varphi_2\delta_2\eta_4 + \varphi_3\delta_3\eta_4 + \varphi_1\varepsilon_1\eta_5 + \varphi_2\varepsilon_2\eta_5 + \\
&+ \varphi_3\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_4\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_1\zeta_1\eta_6 + \varphi_2\zeta_2\eta_6 + \varphi_3\zeta_3\eta_6 + \varphi_4\zeta_4\eta_6 + \\
&+ \varphi_5\zeta_5\eta_6)f_1^2Df]\,h^3 + \frac{1}{24}[\varphi_7^4 D^{(4)}f + 4(\varphi_1^3\eta_1 + \varphi_2^3\eta_2 + \varphi_3^3\eta_3 + \varphi_4^3\eta_4 + \\
&+ \varphi_5^3\eta_5 + \varphi_6^3\eta_6)f_1D^{(3)}f + 12(\varphi_1^2\varphi_7\eta_1 + \varphi_2^2\varphi_7\eta_2 + \varphi_3^2\varphi_7\eta_3 + \varphi_4^2\varphi_7\eta_4 + \\
&+ \varphi_5^2\varphi_7\eta_5 + \varphi_6^2\varphi_7\eta_6)Df_1D^{(2)}f + 12(\varphi_1\varphi_7^2\eta_1 + \varphi_2\varphi_7^2\eta_2 + \varphi_3\varphi_7^2\eta_3 + \\
&+ \varphi_4\varphi_7^2\eta_4 + \varphi_5\varphi_7^2\eta_5 + \varphi_6\varphi_7^2\eta_6)D^{(2)}f_1Df + 12(\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 + \varphi_3\eta_3 + \\
&+ \varphi_4\eta_4 + \varphi_5\eta_5 + \varphi_6\eta_6)^2 f_2(Df)^2 + 24(\varphi_1\varphi_2\beta_1\eta_2 + \varphi_1\varphi_3\gamma_1\eta_3 + \\
&+ \varphi_2\varphi_3\gamma_2\eta_3 + \varphi_1\varphi_4\delta_1\eta_4 + \varphi_2\varphi_4\delta_2\eta_4 + \varphi_3\varphi_4\delta_3\eta_4 + \varphi_1\varphi_5\varepsilon_1\eta_5 + \\
&+ \varphi_2\varphi_5\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_3\varphi_5\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_4\varphi_5\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_1\varphi_6\zeta_1\eta_6 + \varphi_2\varphi_6\zeta_2\eta_6 + \\
&+ \varphi_3\varphi_6\zeta_3\eta_6 + \varphi_4\varphi_6\zeta_4\eta_6 + \varphi_5\varphi_6\zeta_5\eta_6 + \varphi_1\varphi_7\beta_1\eta_2 + \varphi_1\varphi_7\gamma_1\eta_3 + \\
&+ \varphi_2\varphi_7\gamma_2\eta_3 + \varphi_1\varphi_7\delta_1\eta_4 + \varphi_2\varphi_7\delta_2\eta_4 + \varphi_3\varphi_7\delta_3\eta_4 + \varphi_1\varphi_7\varepsilon_1\eta_5 + \\
&+ \varphi_2\varphi_7\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_3\varphi_7\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_4\varphi_7\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_1\varphi_7\zeta_1\eta_6 + \varphi_2\varphi_7\zeta_2\eta_6 + \\
&+ \varphi_3\varphi_7\zeta_3\eta_6 + \varphi_4\varphi_7\zeta_4\eta_6 + \varphi_5\varphi_7\zeta_5\eta_6)f_1Df_1Df + 12(\varphi_1^2\beta_1\eta_2 + \varphi_1^2\gamma_1\eta_3 + \\
&+ \varphi_2^2\gamma_2\eta_3 + \varphi_1^2\delta_1\eta_4 + \varphi_2^2\delta_2\eta_4 + \varphi_3^2\delta_3\eta_4 + \varphi_1^2\varepsilon_1\eta_5 + \varphi_2^2\varepsilon_2\eta_5 + \\
&+ \varphi_3^2\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_4^2\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_1^2\zeta_1\eta_6 + \varphi_2^2\zeta_2\eta_6 + \varphi_3^2\zeta_3\eta_6 + \varphi_4^2\zeta_4\eta_6 + \\
&+ \varphi_5^2\zeta_5\eta_6)f_1^2D^{(2)}f + 24(\varphi_1\beta_1\gamma_2\eta_3 + \varphi_1\beta_1\delta_2\eta_4 + \varphi_1\gamma_1\delta_3\eta_4 + \varphi_2\gamma_2\delta_3\eta_4 +
\end{aligned}
\tag{XXV}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \varphi_1\beta_1\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_1\gamma_1\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_2\gamma_2\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_1\delta_1\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_2\delta_2\varepsilon_4\eta_5 + \\
&+ \varphi_3\delta_3\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_1\beta_1\zeta_2\eta_6 + \varphi_1\gamma_1\zeta_3\eta_6 + \varphi_2\gamma_2\zeta_3\eta_6 + \varphi_1\delta_1\zeta_4\eta_6 + \\
&+ \varphi_2\delta_2\zeta_4\eta_6 + \varphi_3\delta_3\zeta_4\eta_6 + \varphi_1\varepsilon_1\zeta_5\eta_6 + \varphi_2\varepsilon_2\zeta_5\eta_6 + \varphi_3\varepsilon_3\zeta_5\eta_6 + \\
&+ \varphi_4\varepsilon_4\zeta_5\eta_6)f_1^3Df]h^4 + \frac{1}{120}\{\varphi_7^5D^{(5)}f + 5(\varphi_1^4\eta_1 + \varphi_2^4\eta_2 + \varphi_3^4\eta_3 + \\
&+ \varphi_4^4\eta_4 + \varphi_5^4\eta_5 + \varphi_6^4\eta_6)f_1D^{(4)}f + 20(\varphi_1^3\varphi_7\eta_1 + \varphi_2^3\varphi_7\eta_2 + \varphi_3^3\varphi_7\eta_3 + \\
&+ \varphi_4^3\varphi_7\eta_4 + \varphi_5^3\varphi_7\eta_5 + \varphi_6^3\varphi_7\eta_6)Df_1D^{(3)}f + 30(\varphi_1^2\varphi_7^2\eta_1 + \varphi_2^2\varphi_7^2\eta_2 + \\
&+ \varphi_3^2\varphi_7^2\eta_3 + \varphi_4^2\varphi_7^2\eta_4 + \varphi_5^2\varphi_7^2\eta_5 + \varphi_6^2\varphi_7^2\eta_6)D^{(2)}f_1D^{(2)}f + 20(\varphi_1\varphi_7^3\eta_1 + \\
&+ \varphi_2\varphi_7^3\eta_2 + \varphi_3\varphi_7^3\eta_3 + \varphi_4\varphi_7^3\eta_4 + \varphi_5\varphi_7^3\eta_5 + \varphi_6\varphi_7^3\eta_6)D^{(3)}f_1Df + \\
&+ 60(\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 + \varphi_3\eta_3 + \varphi_4\eta_4 + \varphi_5\eta_5 + \varphi_6\eta_6)(\varphi_1^2\eta_1 + \varphi_2^2\eta_2 + \\
&+ \varphi_3^2\eta_3 + \varphi_4^2\eta_4 + \varphi_5^2\eta_5 + \varphi_6^2\eta_6)f_2D^{(2)}fDf + 60(\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 + \\
&+ \varphi_3\eta_3 + \varphi_4\eta_4 + \varphi_5\eta_5 + \varphi_6\eta_6)^2 \,.\, \varphi_7 \,.\, Df_2\,(Df)^2 + 60(\varphi_1^2\varphi_2\beta_1\eta_2 + \\
&+ \varphi_1^2\varphi_3\gamma_1\eta_3 + \varphi_2^2\varphi_3\gamma_2\eta_3 + \varphi_1^2\varphi_4\delta_1\eta_4 + \varphi_2^2\varphi_4\delta_2\eta_4 + \varphi_3^2\varphi_4\delta_3\eta_4 + \\
&+ \varphi_1^2\varphi_5\varepsilon_1\eta_5 + \varphi_2^2\varphi_5\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_3^2\varphi_5\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_4^2\varphi_5\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_1^2\varphi_6\zeta_1\eta_6 + \\
&+ \varphi_2^2\varphi_6\zeta_2\eta_6 + \varphi_3^2\varphi_6\zeta_3\eta_6 + \varphi_4^2\varphi_6\zeta_4\eta_6 + \varphi_5^2\varphi_6\zeta_5\eta_6 + \varphi_1^2\varphi_7\beta_1\eta_2 + \\
&+ \varphi_1^2\varphi_7\gamma_1\eta_3 + \varphi_2^2\varphi_7\gamma_2\eta_3 + \varphi_1^2\varphi_7\delta_1\eta_4 + \varphi_2^2\varphi_7\delta_2\eta_4 + \varphi_3^2\varphi_7\delta_3\eta_4 + \\
&+ \varphi_1^2\varphi_7\varepsilon_1\eta_5 + \varphi_2^2\varphi_7\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_3^2\varphi_7\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_4^2\varphi_7\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_1^2\varphi_7\zeta_1\eta_6 + \\
&+ \varphi_2^2\varphi_7\zeta_2\eta_6 + \varphi_3^2\varphi_7\zeta_3\eta_6 + \varphi_4^2\varphi_7\zeta_4\eta_6 + \varphi_5^2\varphi_7\zeta_5\eta_6)f_1Df_1D^{(2)}f + \\
&+ 60(\varphi_1\varphi_2^2\beta_1\eta_2 + \varphi_1\varphi_3^2\gamma_1\eta_3 + \varphi_2\varphi_3^2\gamma_2\eta_3 + \varphi_1\varphi_4^2\delta_1\eta_4 + \varphi_2\varphi_4^2\delta_2\eta_4 + \\
&+ \varphi_3\varphi_4^2\delta_3\eta_4 + \varphi_1\varphi_5^2\varepsilon_1\eta_5 + \varphi_2\varphi_5^2\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_3\varphi_5^2\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_4\varphi_5^2\varepsilon_4\eta_5 + \\
&+ \varphi_1\varphi_6^2\zeta_1\eta_6 + \varphi_2\varphi_6^2\zeta_2\eta_6 + \varphi_3\varphi_6^2\zeta_3\eta_6 + \varphi_4\varphi_6^2\zeta_4\eta_6 + \varphi_5\varphi_6^2\zeta_5\eta_6 + \\
&+ \varphi_1\varphi_7^2\beta_1\eta_2 + \varphi_1\varphi_7^2\gamma_1\eta_3 + \varphi_2\varphi_7^2\gamma_2\eta_3 + \varphi_1\varphi_7^2\delta_1\eta_4 + \varphi_2\varphi_7^2\delta_2\eta_4 + \\
&+ \varphi_3\varphi_7^2\delta_3\eta_4 + \varphi_1\varphi_7^2\varepsilon_1\eta_5 + \varphi_2\varphi_7^2\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_3\varphi_7^2\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_4\varphi_7^2\varepsilon_4\eta_5 + \\
&+ \varphi_1\varphi_7^2\zeta_1\eta_6 + \varphi_2\varphi_7^2\zeta_2\eta_6 + \varphi_3\varphi_7^2\zeta_3\eta_6 + \varphi_4\varphi_7^2\zeta_4\eta_6 + \\
&+ \varphi_5\varphi_7^2\zeta_5\eta_6)f_1D^{(2)}f_1Df + 120(\varphi_1\varphi_2\varphi_7\beta_1\eta_2 + \varphi_1\varphi_3\varphi_7\gamma_1\eta_3 + \\
&+ \varphi_2\varphi_3\varphi_7\gamma_2\eta_3 + \varphi_1\varphi_4\varphi_7\delta_1\eta_4 + \varphi_2\varphi_4\varphi_7\delta_2\eta_4 + \varphi_3\varphi_4\varphi_7\delta_3\eta_4 + \\
&+ \varphi_1\varphi_5\varphi_7\varepsilon_1\eta_5 + \varphi_2\varphi_5\varphi_7\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_3\varphi_5\varphi_7\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_4\varphi_5\varphi_7\varepsilon_4\eta_5 + \\
&+ \varphi_1\varphi_6\varphi_7\zeta_1\eta_6 + \varphi_2\varphi_6\varphi_7\zeta_2\eta_6 + \varphi_3\varphi_6\varphi_7\zeta_3\eta_6 + \varphi_4\varphi_6\varphi_7\zeta_4\eta_6 + \\
&+ \varphi_5\varphi_6\varphi_7\zeta_5\eta_6)(Df_1)^2Df + 20(\varphi_1^3\beta_1\eta_2 + \varphi_1^3\gamma_1\eta_3 + \varphi_2^3\gamma_2\eta_3 + \varphi_1^3\delta_1\eta_4 + \\
&+ \varphi_2^3\delta_2\eta_4 + \varphi_3^3\delta_3\eta_4 + \varphi_1^3\varepsilon_1\eta_5 + \varphi_2^3\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_3^3\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_4^3\varepsilon_4\eta_5 + \\
&+ \varphi_1^3\zeta_1\eta_6 + \varphi_2^3\zeta_2\eta_6 + \varphi_3^3\zeta_3\eta_6 + \varphi_4^3\zeta_4\eta_6 + \varphi_5^3\zeta_5\eta_6)f_1^2D^{(3)}f + \\
&+ 120(\varphi_1\varphi_2\beta_1\gamma_2\eta_3 + \varphi_1\varphi_3\beta_1\gamma_2\eta_3 + \varphi_1\varphi_2\beta_1\delta_2\eta_4 + \varphi_1\varphi_3\gamma_1\delta_3\eta_4 + \\
&+ \varphi_2\varphi_3\gamma_2\delta_3\eta_4 + \varphi_1\varphi_4\beta_1\delta_2\eta_4 + \varphi_1\varphi_2\gamma_1\delta_3\eta_4 + \varphi_2\varphi_4\gamma_2\delta_3\eta_4 + \\
&+ \varphi_1\varphi_2\beta_1\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_1\varphi_3\gamma_1\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_2\varphi_3\gamma_2\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_1\varphi_4\delta_1\varepsilon_4\eta_5 + \\
&+ \varphi_2\varphi_4\delta_2\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_3\varphi_4\delta_3\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_1\varphi_5\beta_1\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_1\varphi_5\gamma_1\varepsilon_3\eta_5 + \\
&+ \varphi_2\varphi_5\gamma_2\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_1\varphi_5\delta_1\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_2\varphi_5\delta_2\varepsilon_4\eta_5 + \\
&+ \varphi_3\varphi_5\delta_3\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_1\varphi_2\beta_1\zeta_2\eta_6 + \varphi_1\varphi_3\gamma_1\zeta_3\eta_6 + \varphi_2\varphi_3\gamma_2\zeta_3\eta_6 + \\
&+ \varphi_1\varphi_4\delta_1\zeta_4\eta_6 + \varphi_2\varphi_4\delta_2\zeta_4\eta_6 + \varphi_3\varphi_4\delta_3\zeta_4\eta_6 + \varphi_1\varphi_5\varepsilon_1\zeta_5\eta_6 + \\
&+ \varphi_2\varphi_5\varepsilon_2\zeta_5\eta_6 + \varphi_3\varphi_5\varepsilon_3\zeta_5\eta_6 + \varphi_4\varphi_5\varepsilon_4\zeta_5\eta_6 + \varphi_1\varphi_6\beta_1\zeta_2\eta_6 + \\
&+ \varphi_1\varphi_6\gamma_1\zeta_3\eta_6 + \varphi_2\varphi_6\gamma_2\zeta_3\eta_6 + \varphi_1\varphi_6\delta_1\zeta_4\eta_6 + \varphi_2\varphi_6\delta_2\zeta_4\eta_6 + \\
&+ \varphi_3\varphi_6\delta_3\zeta_4\eta_6 + \varphi_1\varphi_6\varepsilon_1\zeta_5\eta_6 + \varphi_2\varphi_6\varepsilon_2\zeta_5\eta_6 + \varphi_3\varphi_6\varepsilon_3\zeta_5\eta_6 +
\end{aligned}
$$

(XXV)
pokrač.

$$
\begin{aligned}
&+ \varphi_4\varphi_6\varepsilon_4\zeta_5\eta_6 + \varphi_1\varphi_7\beta_1\gamma_2\eta_3 + \varphi_1\varphi_7\beta_1\delta_2\eta_4 + \varphi_1\varphi_7\gamma_1\delta_3\eta_4 + \\
&+ \varphi_2\varphi_7\gamma_2\delta_3\eta_4 + \varphi_1\varphi_7\beta_1\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_1\varphi_7\gamma_1\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_2\varphi_7\gamma_2\varepsilon_3\eta_5 + \\
&+ \varphi_1\varphi_7\delta_1\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_2\varphi_7\delta_2\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_3\varphi_7\delta_3\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_1\varphi_7\beta_1\zeta_2\eta_6 + \\
&+ \varphi_1\varphi_7\gamma_1\zeta_3\eta_6 + \varphi_2\varphi_7\gamma_2\zeta_3\eta_6 + \varphi_1\varphi_7\delta_1\zeta_4\eta_6 + \varphi_2\varphi_7\delta_2\zeta_4\eta_6 + \\
&+ \varphi_3\varphi_7\delta_3\zeta_4\eta_6 + \varphi_1\varphi_7\varepsilon_1\zeta_5\eta_6 + \varphi_2\varphi_7\varepsilon_2\zeta_5\eta_6 + \varphi_3\varphi_7\varepsilon_3\zeta_5\eta_6 + \\
&+ \varphi_4\varphi_7\varepsilon_4\zeta_5\eta_6)f_1^2 Df_1 Df + 60(\varphi_1^2\beta_1\gamma_2\eta_3 + \varphi_1^2\beta_1\delta_2\eta_4 + \varphi_1^2\gamma_1\delta_3\eta_4 + \qquad \text{(XXV)} \\
&+ \varphi_2^2\gamma_2\delta_3\eta_4 + \varphi_1^2\beta_1\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_1^2\gamma_1\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_2^2\gamma_2\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_1^2\delta_1\varepsilon_4\eta_5 + \qquad \text{pokrač.} \\
&+ \varphi_2^2\delta_2\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_3^2\delta_3\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_1^2\beta_1\zeta_2\eta_6 + \varphi_1^2\gamma_1\zeta_3\eta_6 + \varphi_2^2\gamma_2\zeta_3\eta_6 + \\
&+ \varphi_1^2\delta_1\zeta_4\eta_6 + \varphi_2^2\delta_2\zeta_4\eta_6 + \varphi_3^2\delta_3\zeta_4\eta_6 + \varphi_1^2\varepsilon_1\zeta_5\eta_6 + \varphi_2^2\varepsilon_2\zeta_5\eta_6 + \varphi_3^2\varepsilon_3\zeta_5\eta_6 + \\
&+ \varphi_4^2\varepsilon_4\zeta_5\eta_6)f_1^3 D^{(2)}f + 120(\varphi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\eta_4 + \varphi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_1\beta_1\delta_2\varepsilon_4\eta_5 + \\
&+ \varphi_1\gamma_1\delta_3\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_2\gamma_2\delta_3\varepsilon_4\eta_5 + \varphi_1\beta_1\gamma_2\zeta_3\eta_6 + \varphi_1\beta_1\delta_2\zeta_4\eta_6 + \varphi_1\gamma_1\delta_3\zeta_4\eta_6 + \\
&+ \varphi_2\gamma_2\delta_3\zeta_4\eta_6 + \varphi_1\beta_1\varepsilon_2\zeta_5\eta_6 + \varphi_1\gamma_1\varepsilon_3\zeta_5\eta_6 + \varphi_2\gamma_2\varepsilon_3\zeta_5\eta_6 + \varphi_1\delta_1\varepsilon_4\zeta_5\eta_6 + \\
&+ \varphi_2\delta_2\varepsilon_4\zeta_5\eta_6 + \varphi_3\delta_3\varepsilon_4\zeta_5\eta_6)f_1^4 Df + 60[\varphi_1^2\beta_1^2\eta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)^2\eta_3 + \\
&+ (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)^2\eta_4 + (\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)^2\eta_5 + \\
&+ (\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5)^2\eta_6 + 2(\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 + \\
&+ \varphi_3\eta_3 + \varphi_4\eta_4 + \varphi_5\eta_5 + \varphi_6\eta_6)(\varphi_1\beta_1\eta_2 + \varphi_1\gamma_1\eta_3 + \varphi_2\gamma_2\eta_3 + \\
&+ \varphi_1\delta_1\eta_4 + \varphi_2\delta_2\eta_4 + \varphi_3\delta_3\eta_4 + \varphi_1\varepsilon_1\eta_5 + \varphi_2\varepsilon_2\eta_5 + \varphi_3\varepsilon_3\eta_5 + \varphi_4\varepsilon_4\eta_5 + \\
&+ \varphi_1\zeta_1\eta_6 + \varphi_2\zeta_2\eta_6 + \varphi_3\zeta_3\eta_6 + \varphi_4\zeta_4\eta_6 + \varphi_5\zeta_5\eta_6)]f_1 \cdot f_2(Df)^2\}h^5 + \dots
\end{aligned}
$$

Selon la relation (XVI) nous obtenons les expressions pour k_j où $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. En posant k_j pour $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ dans la formule (XVII) nous obtenons une expression. En comparant les coeficients des termes de cette expression avec les termes correspondants de la formule (XII) nous obtenons un système des équations (1′) jusqu'à (31′). [En tête de chaque ligne nous avons mis en évidence le terme dont en comparant les coeficients nous avons obtenu l'équation écrite dans la même ligne (et dans les lignes suivantes).]

$[f]$ $$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1. \tag{1′}$$

$[Df]$ $$p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 + p_3\varphi_3 + p_4\varphi_4 + p_5\varphi_5 + p_6\varphi_6 + p_7\varphi_7 = \frac{1}{2}. \tag{2′}$$

$[D^{(2)}f]$ $$p_1\varphi_1^2 + p_2\varphi_2^2 + p_3\varphi_3^2 + p_4\varphi_4^2 + p_5\varphi_5^2 + p_6\varphi_6^2 + p_7\varphi_7^2 = \frac{1}{3}. \tag{3′}$$

$[D^{(3)}f]$ $$p_1\varphi_1^3 + p_2\varphi_2^3 + p_3\varphi_3^3 + p_4\varphi_4^3 + p_5\varphi_5^3 + p_6\varphi_6^3 + p_7\varphi_7^3 = \frac{1}{4}. \tag{4′}$$

$[D^{(4)}f]$ $$p_1\varphi_1^4 + p_2\varphi_2^4 + p_3\varphi_3^4 + p_4\varphi_4^4 + p_5\varphi_5^4 + p_6\varphi_6^4 + p_7\varphi_7^4 = \frac{1}{5}. \tag{5′}$$

$[D^{(5)}f]$ $$p_1\varphi_1^5 + p_2\varphi_2^5 + p_3\varphi_3^5 + p_4\varphi_4^5 + p_5\varphi_5^5 + p_6\varphi_6^5 + p_7\varphi_7^5 = \frac{1}{6}. \tag{6′}$$

$[f_1Df]$ $$p_2\varphi_1\beta_1 + p_3(\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2) + p_4(\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3) + p_5(\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4) + p_6(\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5) + p_7(\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 + \varphi_3\eta_3 + \varphi_4\eta_4 + \varphi_5\eta_5 + \varphi_6\eta_6) = \frac{1}{6}\,. \qquad (7')$$

$[f_1D^{(2)}f]$ $$p_2\varphi_1^2\beta_1 + p_3(\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2) + p_4(\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3) + p_5(\varphi_1^2\varepsilon_1 + \varphi_2^2\varepsilon_2 + \varphi_3^2\varepsilon_3 + \varphi_4^2\varepsilon_4) + p_6(\varphi_1^2\zeta_1 + \varphi_2^2\zeta_2 + \varphi_3^2\zeta_3 + \varphi_4^2\zeta_4 + \varphi_5^2\zeta_5) + p_7(\varphi_1^2\eta_1 + \varphi_2^2\eta_2 + \varphi_3^2\eta_3 + \varphi_4^2\eta_4 + \varphi_5^2\eta_5 + \varphi_6^2\eta_6) = \frac{1}{12}\,. \qquad (8')$$

$[f_1D^{(3)}f]$ $$p_2\varphi_1^3\beta_1 + p_3(\varphi_1^3\gamma_1 + \varphi_2^3\gamma_2) + p_4(\varphi_1^3\delta_1 + \varphi_2^3\delta_2 + \varphi_3^3\delta_3) + p_5(\varphi_1^3\varepsilon_1 + \varphi_2^3\varepsilon_2 + \varphi_3^3\varepsilon_3 + \varphi_4^3\varepsilon_4) + p_6(\varphi_1^3\zeta_1 + \varphi_2^3\zeta_2 + \varphi_3^3\zeta_3 + \varphi_4^3\zeta_4 + \varphi_5^3\zeta_5) + p_7(\varphi_1^3\eta_1 + \varphi_2^3\eta_2 + \varphi_3^3\eta_3 + \varphi_4^3\eta_4 + \varphi_5^3\eta_5 + \varphi_6^3\eta_6) = \frac{1}{20}\,. \qquad (9')$$

$[f_1D^{(4)}f]$ $$p_2\varphi_1^4\beta_1 + p_3(\varphi_1^4\gamma_1 + \varphi_2^4\gamma_2) + p_4(\varphi_1^4\delta_1 + \varphi_2^4\delta_2 + \varphi_3^4\delta_3) + p_5(\varphi_1^4\varepsilon_1 + \varphi_2^4\varepsilon_2 + \varphi_3^4\varepsilon_3 + \varphi_4^4\varepsilon_4) + p_6(\varphi_1^4\zeta_1 + \varphi_2^4\zeta_2 + \varphi_3^4\zeta_3 + \varphi_4^4\zeta_4 + \varphi_5^4\zeta_5) + p_7(\varphi_1^4\eta_1 + \varphi_2^4\eta_2 + \varphi_3^4\eta_3 + \varphi_4^4\eta_4 + \varphi_5^4\eta_5 + \varphi_6^4\eta_6) = \frac{1}{30}\,. \qquad (10')$$

$[Df_1Df]$ $$p_2\varphi_1\varphi_2\beta_1 + p_3\varphi_3(\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2) + p_4\varphi_4(\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3) + p_5\varphi_5(\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4) + p_6\varphi_6(\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5) + p_7\varphi_7(\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 + \varphi_3\eta_3 + \varphi_4\eta_4 + \varphi_5\eta_5 + \varphi_6\eta_6) = \frac{1}{8}\,. \qquad (11')$$

$[Df_1D^{(2)}f]$ $$p_2\varphi_1^2\varphi_2\beta_1 + p_3\varphi_3(\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2) + p_4\varphi_4(\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3) + p_5\varphi_5(\varphi_1^2\varepsilon_1 + \varphi_2^2\varepsilon_2 + \varphi_3^2\varepsilon_3 + \varphi_4^2\varepsilon_4) + p_6\varphi_6(\varphi_1^2\zeta_1 + \varphi_2^2\zeta_2 + \varphi_3^2\zeta_3 + \varphi_4^2\zeta_4 + \varphi_5^2\zeta_5) + p_7\varphi_7(\varphi_1^2\eta_1 + \varphi_2^2\eta_2 + \varphi_3^2\eta_3 + \varphi_4^2\eta_4 + \varphi_5^2\eta_5 + \varphi_6^2\eta_6) = \frac{1}{15}\,. \qquad (12')$$

$[Df_1D^{(3)}f]$ $$p_2\varphi_1^3\varphi_2\beta_1 + p_3\varphi_3(\varphi_1^3\gamma_1 + \varphi_2^3\gamma_2) + p_4\varphi_4(\varphi_1^3\delta_1 + \varphi_2^3\delta_2 + \varphi_3^3\delta_3) + p_5\varphi_5(\varphi_1^3\varepsilon_1 + \varphi_2^3\varepsilon_2 + \varphi_3^3\varepsilon_3 + \varphi_4^3\varepsilon_4) + p_6\varphi_6(\varphi_1^3\zeta_1 + \varphi_2^3\zeta_2 + \varphi_3^3\zeta_3 + \varphi_4^3\zeta_4 + \varphi_5^3\zeta_5) + p_7\varphi_7(\varphi_1^3\eta_1 + \varphi_2^3\eta_2 + \varphi_3^3\eta_3 + \varphi_4^3\eta_4 + \varphi_5^3\eta_5 + \varphi_6^3\eta_6) = \frac{1}{24}\,. \qquad (13')$$

$[D^{(2)}f_1Df]$ $$p_2\varphi_1\varphi_2^2\beta_1 + p_3\varphi_3^2(\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2) + p_4\varphi_4^2(\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3) + p_5\varphi_5^2(\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4) + p_6\varphi_6^2(\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5) + p_7\varphi_7^2(\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 + \varphi_3\eta_3 + \varphi_4\eta_4 + \varphi_5\eta_5 + \varphi_6\eta_6) = \frac{1}{10}\,. \qquad (14')$$

$[D^{(2)}f_1D^{(2)}f]$

$$\begin{aligned}
&p_2\varphi_1^2\varphi_2^2\beta_1 + p_3\varphi_3^2(\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2) + p_4\varphi_4^2(\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \\
&+ \varphi_3^2\delta_3) + p_5\varphi_5^2(\varphi_1^2\varepsilon_1 + \varphi_2^2\varepsilon_2 + \varphi_3^2\varepsilon_3 + \varphi_4^2\varepsilon_4) + p_6\varphi_6^2(\varphi_1^2\zeta_1 + \\
&+ \varphi_2^2\zeta_2 + \varphi_3^2\zeta_3 + \varphi_4^2\zeta_4 + \varphi_5^2\zeta_5) + p_7\varphi_7^2(\varphi_1^2\eta_1 + \varphi_2^2\eta_2 + \\
&+ \varphi_3^2\eta_3 + \varphi_4^2\eta_4 + \varphi_5^2\eta_5 + \varphi_6^2\eta_6) = \frac{1}{18}\,.
\end{aligned} \tag{15'}$$

$[D^{(3)}f_1Df]$

$$\begin{aligned}
&p_2\varphi_1\varphi_2^3\beta_1 + p_3\varphi_3^3(\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2) + p_4\varphi_4^3(\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \\
&+ \varphi_3\delta_3) + p_5\varphi_5^3(\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4) + p_6\varphi_6^3(\varphi_1\zeta_1 + \\
&+ \varphi_2\zeta_2 + \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5) + p_7\varphi_7^3(\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 + \\
&+ \varphi_3\eta_3 + \varphi_4\eta_4 + \varphi_5\eta_5 + \varphi_6\eta_6) = \frac{1}{12}\,.
\end{aligned} \tag{16'}$$

$[f_2(Df)^2]$

$$\begin{aligned}
&p_2\varphi_1^2\beta_1^2 + p_3(\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)^2 + p_4(\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)^2 + \\
&+ p_5(\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)^2 + p_6(\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \\
&+ \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5)^2 + p_7(\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 + \varphi_3\eta_3 + \\
&+ \varphi_4\eta_4 + \varphi_5\eta_5 + \varphi_6\eta_6)^2 = \frac{1}{20}\,.
\end{aligned} \tag{17'}$$

$[Df_2(Df)^2]$

$$\begin{aligned}
&p_2\varphi_1^2\varphi_2\beta_1^2 + p_3\varphi_3(\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)^2 + p_4\varphi_4(\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \\
&+ \varphi_3\delta_3)^2 + p_5\varphi_5(\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)^2 + \\
&+ p_6\varphi_6(\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5)^2 + p_7\varphi_7(\varphi_1\eta_1 + \\
&+ \varphi_2\eta_2 + \varphi_3\eta_3 + \varphi_4\eta_4 + \varphi_5\eta_5 + \varphi_6\eta_6)^2 = \frac{1}{24}\,.
\end{aligned} \tag{18'}$$

$[f_2DfD^{(2)}f]$

$$\begin{aligned}
&p_2\varphi_1^3\beta_1^2 + p_3(\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)(\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2) + p_4(\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \\
&+ \varphi_3\delta_3)(\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3) + p_5(\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \\
&+ \varphi_4\varepsilon_4)(\varphi_1^2\varepsilon_1 + \varphi_2^2\varepsilon_2 + \varphi_3^2\varepsilon_3 + \varphi_4^2\varepsilon_4) + p_6(\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \\
&+ \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5)(\varphi_1^2\zeta_1 + \varphi_2^2\zeta_2 + \varphi_3^2\zeta_3 + \varphi_4^2\zeta_4 + \\
&+ \varphi_5^2\zeta_5) + p_7(\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 + \varphi_3\eta_3 + \varphi_4\eta_4 + \varphi_5\eta_5 + \\
&+ \varphi_6\eta_6)(\varphi_1^2\eta_1 + \varphi_2^2\eta_2 + \varphi_3^2\eta_3 + \varphi_4^2\eta_4 + \varphi_5^2\eta_5 + \varphi_6^2\eta_6) = \frac{1}{36}\,.
\end{aligned} \tag{19'}$$

$[f_1^2Df]$

$$\begin{aligned}
&p_3\varphi_1\beta_1\gamma_2 + p_4[\varphi_1\beta_1\delta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\delta_3] + p_5[\varphi_1\beta_1\varepsilon_2 + \\
&+ (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\varepsilon_3 + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\varepsilon_4] + \\
&+ p_6[\varphi_1\beta_1\zeta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\zeta_3 + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \\
&+ \varphi_3\delta_3)\zeta_4 + (\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)\zeta_5] + \\
&+ p_7[\varphi_1\beta_1\eta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\eta_3 + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \\
&+ \varphi_3\delta_3)\eta_4 + (\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)\eta_5 + (\varphi_1\zeta_1 + \\
&+ \varphi_2\zeta_2 + \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5)\eta_6] = \frac{1}{24}\,.
\end{aligned} \tag{20'}$$

$[f_1^2D^{(2)}f]$

$$\begin{aligned}
&p_3\varphi_1^2\beta_1\gamma_2 + p_4[\varphi_1^2\beta_1\delta_2 + (\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2)\delta_3] + p_5[\varphi_1^2\beta_1\varepsilon_2 + \\
&+ (\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2)\varepsilon_3 + (\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3)\varepsilon_4] + p_6[\varphi_1^2\beta_1\zeta_2 + \\
&+ (\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2)\zeta_3 + (\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3)\zeta_4 + (\varphi_1^2\varepsilon_1 + \\
&+ \varphi_2^2\varepsilon_2 + \varphi_3^2\varepsilon_3 + \varphi_4^2\varepsilon_4)\zeta_5] + p_7[\varphi_1^2\beta_1\eta_2 + (\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2)\eta_3 + \\
&+ (\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3)\eta_4 + (\varphi_1^2\varepsilon_1 + \varphi_2^2\varepsilon_2 + \varphi_3^2\varepsilon_3 + \\
&+ \varphi_4^2\varepsilon_4)\eta_5 + (\varphi_1^2\zeta_1 + \varphi_2^2\zeta_2 + \varphi_3^2\zeta_3 + \varphi_4^2\zeta_4 + \varphi_5^2\zeta_5)\eta_6] = \frac{1}{60}
\end{aligned} \tag{21'}$$

$$[f_1^2 D^{(3)} f] \quad p_3\varphi_1^3\beta_1\gamma_2 + p_4[\varphi_1^3\beta_1\delta_2 + (\varphi_1^3\gamma_1 + \varphi_2^3\gamma_2)\delta_3] + p_5[\varphi_1^3\beta_1\varepsilon_2 + (\varphi_1^3\gamma_1 + \varphi_2^3\gamma_2)\varepsilon_3 + (\varphi_1^3\delta_1 + \varphi_2^3\delta_2 + \varphi_3^3\delta_3)\varepsilon_4] + p_6[\varphi_1^3\beta_1\zeta_2 + (\varphi_1^3\gamma_1 + \varphi_2^3\gamma_2)\zeta_3 + (\varphi_1^3\delta_1 + \varphi_2^3\delta_2 + \varphi_3^3\delta_3)\zeta_4 + (\varphi_1^3\varepsilon_1 + \varphi_2^3\varepsilon_2 + \varphi_3^3\varepsilon_3 + \varphi_4^3\varepsilon_4)\zeta_5] + p_7[\varphi_1^3\beta_1\eta_2 + (\varphi_1^3\gamma_1 + \varphi_2^3\gamma_2)\eta_3 + (\varphi_1^3\delta_1 + \varphi_2^3\delta_2 + \varphi_3^3\delta_3)\eta_4 + (\varphi_1^3\varepsilon_1 + \varphi_2^3\varepsilon_2 + \varphi_3^3\varepsilon_3 + \varphi_4^3\varepsilon_4)\eta_5 + (\varphi_1^3\zeta_1 + \varphi_2^3\zeta_2 + \varphi_3^3\zeta_3 + \varphi_4^3\zeta_4 + \varphi_5^3\zeta_5)\eta_6] = \frac{1}{120}. \tag{22'}$$

$$[f_1Df_1Df] \quad p_3[\varphi_1\beta_1\gamma_2(\varphi_2 + \varphi_3)] + p_4[\varphi_1\beta_1\delta_2(\varphi_2 + \varphi_4) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\,\delta_3(\varphi_3 + \varphi_4)] + p_5[\varphi_1\beta_1\varepsilon_2(\varphi_2 + \varphi_5) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\,\varepsilon_3(\varphi_3 + \varphi_5) + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\,\varepsilon_4(\varphi_4 + \varphi_5)] + p_6[\varphi_1\beta_1\zeta_2(\varphi_2 + \varphi_6) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\,\zeta_3(\varphi_3 + \varphi_6) + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\,\zeta_4(\varphi_4 + \varphi_6) + (\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)\,\zeta_5(\varphi_5 + \varphi_6)] + p_7[\varphi_1\beta_1\eta_2(\varphi_2 + \varphi_7) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\,\eta_3(\varphi_3 + \varphi_7) + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\,\eta_4(\varphi_4 + \varphi_7) + (\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)\,\eta_5(\varphi_5 + \varphi_7) + (\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5)\,\eta_6(\varphi_6 + \varphi_7)] = \frac{7}{120}. \tag{23'}$$

$$[f_1Df_1D^{(2)}f] \quad p_3[\varphi_1^2\beta_1\gamma_2(\varphi_2 + \varphi_3)] + p_4[\varphi_1^2\beta_1\delta_2(\varphi_2 + \varphi_4) + (\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2)\delta_3(\varphi_3 + \varphi_4)] + p_5[\varphi_1^2\beta_1\varepsilon_2(\varphi_2 + \varphi_5) + (\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2)\varepsilon_3(\varphi_3 + \varphi_5) + (\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3)\varepsilon_4(\varphi_4 + \varphi_5)] + p_6[\varphi_1^2\beta_1\zeta_2(\varphi_2 + \varphi_6) + (\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2)\zeta_3(\varphi_3 + \varphi_6) + (\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3)\zeta_4(\varphi_4 + \varphi_6) + (\varphi_1^2\varepsilon_1 + \varphi_2^2\varepsilon_2 + \varphi_3^2\varepsilon_3 + \varphi_4^2\varepsilon_4)\zeta_5(\varphi_5 + \varphi_6)] + p_7[\varphi_1^2\beta_1\eta_2(\varphi_2 + \varphi_7) + (\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2)\eta_3(\varphi_3 + \varphi_7) + (\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3)\eta_4(\varphi_4 + \varphi_7) + (\varphi_1^2\varepsilon_1 + \varphi_2^2\varepsilon_2 + \varphi_3^2\varepsilon_3 + \varphi_4^2\varepsilon_4)\eta_5(\varphi_5 + \varphi_7) + (\varphi_1^2\zeta_1 + \varphi_2^2\zeta_2 + \varphi_3^2\zeta_3 + \varphi_4^2\zeta_4 + \varphi_5^2\zeta_5)\eta_6(\varphi_6 + \varphi_7)] = \frac{1}{40}. \tag{24'}$$

$$[f_1D^{(2)}f_1Df] \quad p_3[\varphi_1\beta_1\gamma_2(\varphi_2^2 + \varphi_3^2)] + p_4[\varphi_1\beta_1\delta_2(\varphi_2^2 + \varphi_4^2) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\delta_3(\varphi_3^2 + \varphi_4^2)] + p_5[\varphi_1\beta_1\varepsilon_2(\varphi_2^2 + \varphi_5^2) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\varepsilon_3(\varphi_3^2 + \varphi_5^2) + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\varepsilon_4(\varphi_4^2 + \varphi_5^2)] + p_6[\varphi_1\beta_1\zeta_2(\varphi_2^2 + \varphi_6^2) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\zeta_3(\varphi_3^2 + \varphi_6^2) + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\zeta_4(\varphi_4^2 + \varphi_6^2) + (\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)\zeta_5(\varphi_5^2 + \varphi_6^2)] + p_7[\varphi_1\beta_1\eta_2(\varphi_2^2 + \varphi_7^2) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\eta_3(\varphi_3^2 + \varphi_7^2) + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\eta_4(\varphi_4^2 + \varphi_7^2) + (\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)\eta_5(\varphi_5^2 + \varphi_7^2) + (\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5)\eta_6(\varphi_6^2 + \varphi_7^2)] = \frac{2}{45}. \tag{25'}$$

$[(Df_1)^2Df]$

$$\begin{aligned}
&p_3\varphi_1\beta_1\varphi_2\varphi_3\gamma_2 + p_4[\varphi_1\beta_1 \cdot \varphi_2\varphi_4\delta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\varphi_3\varphi_4\delta_3] + \\
&+ p_5[\varphi_1\beta_1 \cdot \varphi_2\varphi_5\varepsilon_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\varphi_3\varphi_5\varepsilon_3 + (\varphi_1\delta_1 + \\
&+ \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\varphi_4\varphi_5\varepsilon_4] + p_6[\varphi_1\beta_1 \cdot \varphi_2\varphi_6\zeta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \\
&+ \varphi_2\gamma_2)\varphi_3\varphi_6\zeta_3 + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\,\varphi_4\varphi_6\zeta_4 + (\varphi_1\varepsilon_1 + \\
&+ \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)\varphi_5\varphi_6\zeta_5] + p_7[\varphi_1\beta_1 \cdot \varphi_2\varphi_7\eta_2 + \\
&+ (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\varphi_3\varphi_7\eta_3 + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\,\varphi_4\varphi_7\eta_4 + \\
&+ (\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)\varphi_5\varphi_7\eta_5 + (\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \\
&+ \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5)\,\varphi_6\varphi_7\eta_6] = \frac{1}{48}\,. \qquad (26')
\end{aligned}$$

$[f_1f_2(Df)^2]$

$$\begin{aligned}
&p_3[\varphi_1^2\beta_1^2\gamma_2 + 2(\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\varphi_1\beta_1\gamma_2] + p_4\{\varphi_1^2\beta_1^2\delta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \\
&+ \varphi_2\gamma_2)^2\delta_3 + 2(\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)[\varphi_1\beta_1\delta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \\
&+ \varphi_2\gamma_2)\delta_3]\} + p_5\{\varphi_1^2\beta_1^2\varepsilon_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)^2\varepsilon_3 + (\varphi_1\delta_1 + \\
&+ \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)^2\varepsilon_4 + 2(\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_4 + \\
&+ \varphi_4\varepsilon_4)[\varphi_1\beta_1\varepsilon_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\varepsilon_3 + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \\
&+ \varphi_3\delta_3)\varepsilon_4]\} + p_6\{\varphi_1^2\beta_1^2\zeta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)^2\zeta_3 + (\varphi_1\delta_1 + \\
&+ \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)^2\zeta_4 + (\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)^2\zeta_5 + \\
&+ 2(\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5)[\varphi_1\beta_1\zeta_2 + \\
&+ (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\zeta_3 + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\zeta_4 + (\varphi_1\varepsilon_1 + \\
&+ \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)\zeta_5]\} + p_7\{\varphi_1^2\beta_1^2\eta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)^2\eta_3 + \\
&+ (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)^2\eta_4 + (\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \\
&+ \varphi_4\varepsilon_4)^2\eta_5 + (\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5)^2\eta_6 + \\
&+ 2(\varphi_1\eta_1 + \varphi_2\eta_2 + \varphi_3\eta_3 + \varphi_4\eta_4 + \varphi_5\eta_5 + \varphi_6\eta_6)[\varphi_1\beta_1\eta_2 + \\
&+ (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\eta_3 + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\eta_4 + \\
&+ (\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)\eta_5 + (\varphi_1\zeta_1 + \varphi_2\zeta_2 + \\
&+ \varphi_3\zeta_3 + \varphi_4\zeta_4 + \varphi_5\zeta_5)\eta_6]\} = \frac{13}{360}\,. \qquad (27')
\end{aligned}$$

$[f_1^3Df]$

$$\begin{aligned}
&p_4\varphi_1\beta_1\gamma_2\delta_3 + p_5\{\varphi_1\beta_1 \cdot \gamma_2\varepsilon_3 + [\varphi_1\beta_1 \cdot \delta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \\
&+ \varphi_2\gamma_2)\delta_3]\varepsilon_4\} + p_6\{\varphi_1\beta_1 \cdot \gamma_2\zeta_3 + [\varphi_1\beta_1 \cdot \delta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \\
&+ \varphi_2\gamma_2)\delta_3]\zeta_4 + [\varphi_1\beta_1 \cdot \varepsilon_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\varepsilon_3 + (\varphi_1\delta_1 + \\
&+ \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\varepsilon_4]\zeta_5\} + p_7\{\varphi_1\beta_1 \cdot \gamma_2\eta_3 + [\varphi_1\beta_1 \cdot \delta_2 + \\
&+ (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\delta_3]\eta_4 + [\varphi_1\beta_1 \cdot \varepsilon_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\varepsilon_3 + \\
&+ (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\varepsilon_4]\eta_5 + [\varphi_1\beta_1 \cdot \zeta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \\
&+ \varphi_2\gamma_2)\zeta_3 + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\zeta_4 + (\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2 + \\
&+ \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)\zeta_5]\eta_6\} = \frac{1}{120}\,. \qquad (28')
\end{aligned}$$

$[f_1^2Df_1Df]$

$$\begin{aligned}
&p_4\varphi_1\beta_1\gamma_2\delta_3(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + p_5\{\varphi_1\beta_1\gamma_2(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_5)\varepsilon_3 + \\
&+ [\varphi_1\beta_1\delta_2(\varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_5) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\delta_3(\varphi_3 + \varphi_4 + \\
&+ \varphi_5)]\varepsilon_4\} + p_6\{\varphi_1\beta_1\gamma_2(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_6)\zeta_3 + [\varphi_1\beta_1\delta_2(\varphi_2 + \\
&+ \varphi_4 + \varphi_6) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\delta_3(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_6)]\zeta_4 +
\end{aligned}$$

$[f_1^3 Df_1 Df]$

$$\begin{aligned} & + [\varphi_1\beta_1\varepsilon_2(\varphi_2 + \varphi_5 + \varphi_6) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\varepsilon_3(\varphi_3 + \varphi_5 + \\ & + \varphi_6) + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\varepsilon_4(\varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6)]\zeta_5\} + \\ & + p_7\{\varphi_1\beta_1\gamma_2(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_7)\eta_3 + [\varphi_1\beta_1\delta_2(\varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_7) + \\ & + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\delta_3(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_7)]\eta_4 + [\varphi_1\beta_1\varepsilon_2(\varphi_2 + \\ & + \varphi_5 + \varphi_7) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\varepsilon_3(\varphi_3 + \varphi_5 + \varphi_7) + (\varphi_1\delta_1 + \\ & + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\varepsilon_4(\varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_7)]\eta_5 + [\varphi_1\beta_1\zeta_2(\varphi_2 + \\ & + \varphi_6 + \varphi_7) + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\zeta_3(\varphi_3 + \varphi_6 + \varphi_7) + \\ & + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \varphi_3\delta_3)\zeta_4(\varphi_4 + \varphi_6 + \varphi_7) + (\varphi_1\varepsilon_1 + \\ & + \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3 + \varphi_4\varepsilon_4)\zeta_5(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7)]\eta_6\} = \frac{1}{60}\,. \end{aligned} \tag{29'}$$

$[f_1^3 D^{(2)} f]$

$$\begin{aligned} & p_4\varphi_1^2\beta_1\gamma_2\delta_3 + p_5\{\varphi_1^2\beta_1\gamma_2\varepsilon_3 + [\varphi_1^2\beta_1\delta_2 + (\varphi_1^2\gamma_1 + \\ & + \varphi_2^2\gamma_2)\delta_3]\varepsilon_4\} + p_6\{\varphi_1^2\beta_1\gamma_2\zeta_3 + [\varphi_1^2\beta_1\delta_2 + (\varphi_1^2\gamma_1 + \\ & + \varphi_2^2\gamma_2)\,\delta_3]\zeta_4 + [\varphi_1^2\beta_1\varepsilon_2 + (\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2)\varepsilon_3 + (\varphi_1^2\delta_1 + \\ & + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3)\varepsilon_4]\zeta_5\} + p_7\{\varphi_1^2\beta_1\gamma_2\eta_3 + [\varphi_1^2\beta_1\delta_2 + \\ & + (\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2)\delta_3]\eta_4 + [\varphi_1^2\beta_1\varepsilon_2 + (\varphi_1^2\gamma_1 + \varphi_2^2\gamma_2)\varepsilon_3 + \\ & + (\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3)\varepsilon_4]\eta_5 + [\varphi_1^2\beta_1\zeta_2 + (\varphi_1^2\gamma_1 + \\ & + \varphi_2^2\gamma_2)\zeta_3 + (\varphi_1^2\delta_1 + \varphi_2^2\delta_2 + \varphi_3^2\delta_3)\zeta_4 + (\varphi_1^2\varepsilon_1 + \varphi_2^2\varepsilon_2 + \\ & + \varphi_3^2\varepsilon_3 + \varphi_4^2\varepsilon_4)\zeta_5]\eta_6\} = \frac{1}{360}\,. \end{aligned} \tag{30'}$$

$[f_1^4 Df]$

$$\begin{aligned} & p_5\varphi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\varepsilon_4 + p_6\big(\varphi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\zeta_4 + \{\varphi_1\beta_1\cdot\gamma_2\varepsilon_3 + \\ & + [\varphi_1\beta_1\cdot\delta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\delta_3]\varepsilon_4\}\,\zeta_5\big) + p_7\big(\varphi_1\beta_1\gamma_2\delta_3\eta_4 + \\ & + \{\varphi_1\beta_1\gamma_2\varepsilon_3 + [\varphi_1\beta_1\delta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\delta_3]\varepsilon_4\}\,\eta_5 + \\ & + \{\varphi_1\beta_1\gamma_2\zeta_3 + [\varphi_1\beta_1\cdot\delta_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\delta_3]\zeta_4 + \\ & + [\varphi_1\beta_1\cdot\varepsilon_2 + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\varepsilon_3 + (\varphi_1\delta_1 + \varphi_2\delta_2 + \\ & + \varphi_3\delta_3)\varepsilon_4]\zeta_5\}\,\eta_6\big) = \frac{1}{720}\,. \end{aligned} \tag{31'}$$

Pour simplifier cettes équations introduisons-y les substitutions suivantes

$(u_1)\quad u_1 = \varphi_1\beta_1,\qquad (u_3)\quad u_3 = \sum_{i=1}^{3}\varphi_i\delta_i,\qquad (u_5)\quad u_5 = \sum_{i=1}^{5}\varphi_i\zeta_i,$

$(u_2)\quad u_2 = \sum_{i=1}^{2}\varphi_i\gamma_i.\qquad (u_4)\quad u_4 = \sum_{i=1}^{4}\varphi_i\varepsilon_i,\qquad (u_6)\quad u_6 = \sum_{i=1}^{6}\varphi_i\eta_i.$

$(v_1)\quad v_1 = \varphi_1^2\beta_1,\qquad (v_3)\quad v_3 = \sum_{i=1}^{3}\varphi_i^2\delta_i,\qquad (v_5)\quad v_5 = \sum_{i=1}^{5}\varphi_i^2\zeta_i,$

$(v_2)\quad v_2 = \sum_{i=1}^{2}\varphi_i^2\gamma_i,\qquad (v_4)\quad v_4 = \sum_{i=1}^{4}\varphi_i^2\varepsilon_i,\qquad (v_6)\quad v_6 = \sum_{i=1}^{6}\varphi_i^2\eta_i.$

$(w_1)\quad w_1 = \varphi_1^3\beta_1,\qquad (w_3)\quad w_3 = \sum_{i=1}^{3}\varphi_i^3\delta_i,\qquad (w_5)\quad w_5 = \sum_{i=1}^{5}\varphi_i^3\zeta_i,$

$(w_2)\quad w_2 = \sum_{i=1}^{2}\varphi_i^3\gamma_i,\qquad (w_4)\quad w_4 = \sum_{i=1}^{4}\varphi_i^3\varepsilon_i,\qquad (w_6)\quad w_6 = \sum_{i=1}^{6}\varphi_i^3\eta_i.$

(t_1) $t_1 = \varphi_1^4\beta_1,$ (t_3) $t_3 = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i^4\delta_i,$ (t_5) $t_5 = \sum_{i=1}^{5} \varphi_i^4\zeta_i,$

(t_2) $t_2 = \sum_{i=1}^{2} \varphi_i^4\gamma_i,$ (t_4) $t_4 = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i^4\varepsilon_i,$ (t_6) $t_6 = \sum_{i=1}^{6} \varphi_i^4\eta_i.$

(s_1) $s_1 = u_1\gamma_2,$ (s_3) $s_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\varepsilon_{i+1},$ (s_5) $s_5 = \sum_{i=1}^{5} u_i\eta_{i+1}.$

(s_2) $s_2 = \sum_{i=1}^{2} u_i\delta_{i+1},$ (s_4) $s_4 = \sum_{i=1}^{4} u_i\zeta_{i+1},$

(r_1) $r_1 = v_1\gamma_2,$ (r_3) $r_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\varepsilon_{i+1},$ (r_5) $r_5 = \sum_{i=1}^{5} v_i\eta_{i+1}.$

(r_2) $r_2 = \sum_{i=1}^{2} v_i\delta_{i+1},$ (r_4) $r_4 = \sum_{i=1}^{4} v_i\zeta_{i+1},$

(q_1) $q_1 = w_1\gamma_2,$ (q_3) $q_3 = \sum_{i=1}^{3} w_i\varepsilon_{i+1},$ (q_5) $q_5 = \sum_{i=1}^{5} w_i\eta_{i+1}.$

(q_2) $q_2 = \sum_{i=1}^{2} w_i\delta_{i+1},$ (q_4) $q_4 = \sum_{i=1}^{4} w_i\zeta_{i+1},$

(U_1) $U_1 = u_1\gamma_2\varphi_2,$ (U_3) $U_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\varepsilon_{i+1}\varphi_{i+1},$ (U_5) $U_5 = \sum_{i=1}^{5} u_i\eta_{i+1}\varphi_{i+1}.$

(U_2) $U_2 = \sum_{i=1}^{2} u_i\delta_{i+1}\varphi_{i+1},$ (U_4) $U_4 = \sum_{i=1}^{4} u_i\zeta_{i+1}\varphi_{i+1},$

(V_1) $V_1 = v_1\gamma_2\varphi_2,$ (V_3) $V_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\varepsilon_{i+1}\varphi_{i+1},$ (V_5) $V_5 = \sum_{i=1}^{5} v_i\eta_{i+1}\varphi_{i+1}.$

(V_2) $V_2 = \sum_{i=1}^{2} v_i\delta_{i+1}\varphi_{i+1},$ (V_4) $V_4 = \sum_{i=1}^{4} v_i\zeta_{i+1}\varphi_{i+1},$

(T_1) $T_1 = s_1\delta_3,$ (T_3) $T_3 = \sum_{i=1}^{3} s_i\zeta_{i+2},$

(T_2) $T_2 = \sum_{i=1}^{2} s_i\varepsilon_{i+2},$ (T_4) $T_4 = \sum_{i=1}^{4} s_i\eta_{i+2}.$

(R_1) $R_1 = r_1\delta_3,$ (R_3) $R_3 = \sum_{i=1}^{3} r_i\zeta_{i+2},$

(R_2) $R_2 = \sum_{i=1}^{2} r_i\varepsilon_{i+2},$ (R_4) $R_4 = \sum_{i=1}^{4} r_i\eta_{i+2}.$

Ainsi nous obtenons un système des équations simples (1) jusqu'à (31)

$$\sum_{i=0}^{7} p_i = 1. \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{7} p_i\varphi_i = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{7} p_i\varphi_i^2 = \frac{1}{3}. \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{7} p_i\varphi_i^3 = \frac{1}{4}. \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{7} p_i\varphi_i^4 = \frac{1}{5}. \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{7} p_i\varphi_i^5 = \frac{1}{6}. \tag{6}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i u_{i-1} = \frac{1}{6}. \tag{7}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i\varphi_i u_{i-1} = \frac{1}{8}. \tag{8}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i\varphi_i^2 u_{i-1} = \frac{1}{10}. \tag{9}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i\varphi_i^3 u_{i-1} = \frac{1}{12}. \tag{10}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i u_{i-1}^2 = \frac{1}{20}. \tag{11}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i\varphi_i u_{i-1}^2 = \frac{1}{24}. \tag{12}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i v_{i-1} = \frac{1}{12}. \tag{13}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i\varphi_i v_{i-1} = \frac{1}{15}. \tag{14}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i\varphi_i^2 v_{i-1} = \frac{1}{18}. \tag{15}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i u_{i-1} v_{i-1} = \frac{1}{36}. \tag{16}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i w_{i-1} = \frac{1}{20}. \tag{17}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i\varphi_i w_{i-1} = \frac{1}{24}. \tag{18}$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i t_{i-1} = \frac{1}{30}. \tag{19}$$

$$\sum_{i=3}^{7} p_i s_{i-2} = \frac{1}{24}. \tag{20}$$

$$\sum_{i=3}^{7} p_i(U_{i-2} + s_{i-2}\varphi_i) = \frac{7}{120}. \tag{21}$$

$$\sum_{i=3}^{7} p_i\varphi_i U_{i-2} = \frac{1}{48}. \tag{22}$$

$$\sum_{i=3}^{7} p_i r_{i-2} = \frac{1}{60}. \tag{23}$$

$$\sum_{i=3}^{7} p_i(V_{i-2} + r_{i-2}\varphi_i) = \frac{1}{40}. \tag{24}$$

$$\sum_{i=3}^{7} p_i q_{i-2} = \frac{1}{120}. \tag{25}$$

$$\begin{aligned} p_3u_1\gamma_2\varphi_2^2 + p_4\sum_{i=2}^{3} u_{i-1}\delta_i\varphi_i^2 + p_5\sum_{i=2}^{4} u_{i-1}\varepsilon_i\varphi_i^2 + p_6\sum_{i=2}^{5} u_{i-1}\zeta_i\varphi_i^2 + \\ + p_7\sum_{i=2}^{6} u_{i-1}\eta_i\varphi_i^2 + \sum_{i=3}^{7} p_i s_{i-2}\varphi_i^2 = \frac{2}{45}. \end{aligned} \tag{26}$$

$$p_3 u_1^2 \gamma_2 + p_4 \sum_{i=2}^{3} u_{i-1}^2 \delta_i + p_5 \sum_{i=2}^{4} u_{i-1}^2 \varepsilon_i + p_6 \sum_{i=2}^{5} u_{i-1}^2 \zeta_i +$$

$$+ p_7 \sum_{i=2}^{6} u_{i-1}^2 \eta_i + 2 \sum_{i=3}^{7} p_i u_{i-1} s_{i-2} = \frac{13}{360} . \qquad (27)$$

$$\sum_{i=4}^{7} p_i T_{i-3} = \frac{1}{120} . \qquad (28)$$

$$p_4 \delta_3 (U_1 + s_1 \varphi_3) + p_5 \sum_{i=3}^{4} \varepsilon_i (U_{i-2} + s_{i-2} \varphi_i) + p_6 \sum_{i=3}^{5} \zeta_i (U_{i-2} + s_{i-2} \varphi_i) +$$

$$+ p_7 \sum_{i=3}^{6} \eta_i (U_{i-2} + s_{i-2} \varphi_i) + \sum_{i=4}^{7} p_i \varphi_i T_{i-3} = \frac{1}{60} . \qquad (29)$$

$$\sum_{i=4}^{7} p_i R_{i-3} = \frac{1}{360} . \qquad (30)$$

$$p_5 T_1 \varepsilon_4 + p_6 \sum_{i=4}^{5} T_{i-3} \zeta_i + p_7 \sum_{i=4}^{6} T_{i-3} \eta_i = \frac{1}{720} . \qquad (31)$$

C'est un système de 31 équations aux 36 inconnues, de sorte que nous pouvons choisir arbitrairement 5 conditions. En choisissant $p_1 = 0$ nous obtenons au lieu des équations (2), (3), (4), (5) et (6) les équations suivantes

$$\sum_{i=2}^{7} p_i \varphi_i = \frac{1}{2} . \qquad (2a) \qquad\qquad \sum_{i=2}^{7} p_i \varphi_i^4 = \frac{1}{5} . \qquad (5a)$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i \varphi_i^2 = \frac{1}{3} . \qquad (3a) \qquad\qquad \sum_{i=2}^{7} p_i \varphi_i^5 = \frac{1}{6} . \qquad (6a)$$

$$\sum_{i=2}^{7} p_i \varphi_i^3 = \frac{1}{4} . \qquad (4a)$$

En comparant les équations (3a), resp. (4a), resp. (5a), resp. (6a) avec les équations (7), resp. (8), resp. (9), resp. (10) nous obtenons la relation $u_i = \frac{1}{2} \cdot \varphi_{i+1}^2$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; simultanément sont satisfaites les équations (11) et (12). Analogiquement en comparant les équations (4a), resp. (5a), resp. (6a) avec les équations (13), resp. (14), resp. (15) nous obtenons la relation $v_i = \frac{1}{3} \cdot \varphi_{i+1}^3$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; simultanément est satisfaite l'équation (16).

Dans les considérations suivantes, il c'est montré convenable d'introduire dans les équations (7), (13), (17), (19), (20), (23), (25), (26), (27), (28), (29), (30) et (31) les substitutions suivantes

$$\begin{aligned} p_2\beta_1 + p_3\gamma_1 + p_4\delta_1 + p_5\varepsilon_1 + p_6\zeta_1 + p_7\eta_1 &= z_1 \\ p_3\gamma_2 + p_4\delta_2 + p_5\varepsilon_2 + p_6\zeta_2 + p_7\eta_2 &= z_2 \\ p_4\delta_3 + p_5\varepsilon_3 + p_6\zeta_3 + p_7\eta_3 &= z_3 \\ p_5\varepsilon_4 + p_6\zeta_4 + p_7\eta_4 &= z_4 \\ p_6\zeta_5 + p_7\eta_5 &= z_5 \\ p_7\eta_6 &= z_6 \end{aligned}$$

de cette manière nous obtenons les équations

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_i z_i = \frac{1}{6}. \qquad (7a) \qquad\qquad \sum_{i=1}^{6} \varphi_i^3 z_i = \frac{1}{20}. \qquad (17a)$$

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_i^2 z_i = \frac{1}{12}. \qquad (13a) \qquad\qquad \sum_{i=1}^{6} \varphi_i^4 z_i = \frac{1}{30}. \qquad (19a)$$

$$\sum_{i=2}^{6} u_{i-1} z_i = \frac{1}{24}. \qquad (20a) \qquad\qquad \sum_{i=2}^{6} w_{i-1} z_i = \frac{1}{120} \qquad (25a)$$

$$\sum_{i=2}^{6} v_{i-1} z_i = \frac{1}{60}. \qquad (23a)$$

$$\sum_{i=2}^{6} (u_{i-1}\varphi_i^2 z_i + p_{i+1}\varphi_{i+1}^2 s_{i-1}) = \frac{2}{45}. \qquad (26a)$$

$$\sum_{i=2}^{6} (u_{i-1}^2 z_i + 2p_{i+1}u_i s_{i-1}) = \frac{13}{360}. \quad (27a) \qquad\qquad \sum_{i=3}^{6} s_{i-2} z_i = \frac{1}{120}. \qquad (28a)$$

$$\sum_{i=3}^{6} [(U_{i-2} + s_{i-2}\varphi_i) z_i + p_{i+1}\varphi_{i+1} T_{i-2}] = \frac{1}{60} \qquad (29a)$$

$$\sum_{i=3}^{6} r_{i-2} z_i = \frac{1}{360}. \qquad (30a) \qquad\qquad \sum_{i=4}^{6} T_{i-3} z_i = \frac{1}{720}. \qquad (31a)$$

De relation (13a)—2. (20a) et aussi simultanément de relation (17a)—3. (23a) nous avons $z_1 = 0$. En comparant les équations (17)—(18) avec (25a) nous avons

$$z_i = p_i\,(1 - \varphi_i) \qquad \text{pour} \qquad i = 2, 3, 4, 5, 6.$$

Enfin formons encore trois équations dépendantes des équations précédentes c'est-à-dire les équations

$$\sum_{i=3}^{7} p_i \varphi_i^2 s_{i-2} = \frac{1}{36} \qquad\qquad (32) \equiv \frac{1}{2}\,(27a) - \frac{1}{8}\ (19a)$$

$$\sum_{i=3}^{6} U_{i-2} z_i = \frac{1}{240} \qquad (33) \equiv (29a) + (31a) - (20) + (26a) - \frac{1}{2}\ (19a)$$

$$\sum_{i=4}^{7} p_i \varphi_i T_{i-3} = \frac{1}{144} \qquad (34) \equiv (28) - (31a)$$

Après avoir préparé les équations de cette manière, nous pouvons déterminer les constantes inconnues:

Une solution du système des équations (2a), (3a), (4a), (5a) et (6a) est donnée par $p_2 = \frac{216}{840}$, $p_3 = \frac{27}{840}$, $p_4 = \frac{272}{840}$, $p_5 = \frac{27}{840}$, $p_6 = \frac{216}{840}$, $p_7 = \frac{41}{840}$, $\varphi_2 = \frac{1}{6}$, $\varphi_3 = \frac{2}{6}$, $\varphi_4 = \frac{3}{6}$, $\varphi_5 = \frac{4}{6}$, $\varphi_6 = \frac{5}{6}$, $\varphi_7 = 1$. De là, nous pouvons déterminer les valeurs des inconnues u_i, v_i pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, qui sont (selon les relations $u_i = \frac{1}{2} \cdot \varphi_{i+1}^2$, $v_i = \frac{1}{3} \cdot \varphi_{i+1}^3$)

$$u_1 = \frac{1}{72},\ u_2 = \frac{4}{72},\ u_3 = \frac{9}{72},\ u_4 = \frac{16}{72},\ u_5 = \frac{25}{72},\ u_6 = \frac{36}{72},\ v_1 = \frac{1}{648},$$

$v_2 = \frac{8}{648}$, $v_3 = \frac{27}{648}$, $v_4 = \frac{64}{648}$, $v_5 = \frac{125}{648}$, $v_6 = \frac{216}{648}$. Selon la formule $z_i = p_i(1 - \varphi_i)$ pour $i = 2, 3, 4, 5, 6$ nous avons

$$z_2 = \frac{180}{840},\ z_3 = \frac{18}{840},\ z_4 = \frac{136}{840},\ z_5 = \frac{9}{840},\ z_6 = \frac{36}{840}.$$

De l'équation (1) nous obtenons $p_0 = \frac{41}{840}$. Des relations (u_1), (v_1) nous avons

$$\varphi_1 = \frac{1}{9},\ \beta_1 = \frac{3}{24} \text{ et de là } w_1 = \frac{68}{396576},\ t_1 = \frac{43112}{2262862656}.$$

Analogiquement de relations (u_2), (v_2) nous obtenons $\gamma_1 = -\frac{3}{6}$, $\gamma_2 = \frac{4}{6}$ et de là

$$w_2 = \frac{952}{396576},\ t_2 = \frac{991576}{2262862656},\ s_1 = \frac{272}{29376},\ r_1 = \frac{4}{3888},\ q_1 = \frac{544}{4758912},$$

$$U_1 = \frac{4}{2592},\ V_1 = \frac{43112}{251429184}.$$

Une solution du système des équations (20), (28a) et (32) est donnée par

$$s_2 = \frac{927}{29376},\ s_3 = -\frac{6800}{29376},\ s_4 = \frac{3774}{29376},\ s_5 = \frac{14}{123}.$$

Du système des équations (u_3), (v_3) et (s_2) nous avons les constantes

$$\delta_1 = -\frac{945}{544},\ \delta_2 = \frac{840}{544},\ \delta_3 = \frac{99}{544},$$

et de là

$$w_3 = \frac{4563}{396576}, \quad t_3 = \frac{7181001}{2262862656}, \quad r_2 = \frac{18}{3888}, \quad q_2 = \frac{3339}{4758912},$$

$$U_2 = \frac{18}{2592}, \quad V_2 = \frac{288153}{251429184}, \quad T_1 = \frac{594}{352512}, \quad R_1 = \frac{594}{3172608}.$$

Une solution du système des équations (21), (22) et (33) est

$$U_3 = \frac{336}{2592}, \quad U_4 = \frac{98}{2592}, \quad U_5 = \frac{19188}{41 \,.\, 2592}.$$

En comparant les relations (r_i) avec les relations (U_i) pour $i = 1, 2, 3, 4$ nous voyons qu'il en suit $r_i = \frac{2}{3} \,.\, U_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$ et de là nous avons les valeurs

$$r_3 = \frac{336}{3888} \text{ et } r_4 = \frac{98}{3888}.$$

Une solution du système des équations (u_4), (v_4) et (s_3) est donnée par les valeurs

$$\varepsilon_1 = \frac{273}{6}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{104}{6}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{107}{6}, \quad \varepsilon_4 = \frac{48}{6}$$

desquelles nous pouvons obtenir aussi les valeurs des constantes suivantes

$$w_4 = \frac{127568}{396576}, \quad t_4 = \frac{618657200}{2262862656}, \quad q_3 = \frac{220176}{4758912}, \quad V_3 = \frac{22332016}{251429184},$$

$$T_2 = \frac{30784}{352512}, \quad R_2 = \frac{59296}{3172608}.$$

Des équations (17) et (18) nous calculons les constantes

$$w_5 = \frac{27166}{396576} \text{ et } w_6 = \frac{6062472}{41 \,.\, 396576};$$

et des équations (28) et (34) les valeurs

$$T_3 = \frac{1484}{352512} \text{ et } T_4 = \frac{1154304}{41 \,.\, 352512}.$$

Du système des équations (u_5), (v_5), (w_5), (s_4) et (T_3) nous pouvons calculer les valeurs des inconnues

$$\zeta_1 = -\frac{236799}{45648}, \quad \zeta_2 = \frac{68376}{45648}, \quad \zeta_3 = \frac{103803}{45648}, \quad \zeta_4 = -\frac{10240}{45648}, \quad \zeta_5 = \frac{1926}{45648},$$

et de là les valeurs suivantes:

$$t_5 = \frac{51486982}{2262862656}, \quad q_4 = \frac{25203406}{317 \,.\, 4758912}, \quad V_4 = \frac{1973190}{251429184},$$

$$R_3 = \frac{4975492}{317 \,.\, 3172608}.$$

De l'équation (19) il suit

$$t_6 = \frac{33545904840}{41 \,.\, 2262862656}$$

et de l'équation (30) la valeur

$$R_4 = \frac{713234592}{41 \,.\, 317 \,.\, 3172608}.$$

Enfin la solution du système des équations (u_6), (v_6), (w_6), (t_6), (s_5) et (R_4) est donnée par

$$\eta_1 = \frac{222534}{25994}, \quad \eta_2 = -\frac{71988}{25994}, \quad \eta_3 = -\frac{26109}{25994}, \quad \eta_4 = -\frac{20000}{25994},$$

$$\eta_5 = -\frac{72}{25994}, \quad \eta_6 = \frac{22824}{25994}.$$

Pendant toute la résolution nous n'avons pas utilisé l'équation (24) ou qui lui est identique c'est-à-dire l'équation (24a). On peut facilement prouver que cette équation dépende des équations (18a), (19a) et (22a). Écrivons les équations (18a) et (22a) de la manière suivante

$$\begin{aligned} &\varphi_1^3 (p_2\varphi_2\beta_1 + p_3\varphi_3\gamma_1 + p_4\varphi_4\delta_1 + p_5\varphi_5\varepsilon_1 + p_6\varphi_6\zeta_1 + p_7\varphi_7\eta_1) + \varphi_2^3 (p_3\varphi_3\gamma_2 + \\ &+ p_4\varphi_4\delta_2 + p_5\varphi_5\varepsilon_2 + p_6\varphi_6\zeta_2 + p_7\varphi_7\eta_2) + \varphi_3^3 (p_4\varphi_4\delta_3 + p_5\varphi_5\varepsilon_3 + p_6\varphi_6\zeta_3 + \\ &+ p_7\varphi_7\eta_3) + \varphi_4^3 (p_5\varphi_5\varepsilon_4 + p_6\varphi_6\zeta_4 + p_7\varphi_7\eta_4) + \varphi_5^3 (p_6\varphi_6\zeta_5 + p_7\varphi_7\eta_5) + \\ &+ \varphi_6^3 p_7\varphi_7\eta_6 = \frac{1}{24}, \end{aligned} \tag{18a}$$

$$\begin{aligned} &u_1\varphi_2 (p_3\varphi_3\gamma_2 + p_4\varphi_4\delta_2 + p_5\varphi_5\varepsilon_2 + p_6\varphi_6\zeta_2 + p_7\varphi_7\eta_2) + u_2\varphi_3 (p_4\varphi_4\delta_3 + \\ &+ p_5\varphi_5\varepsilon_3 + p_6\varphi_6\zeta_3 + p_7\varphi_7\eta_3) + u_3\varphi_4 (p_5\varphi_5\varepsilon_4 + p_6\varphi_6\zeta_4 + p_7\varphi_7\eta_4) + \\ &+ u_4\varphi_5 (p_6\varphi_6\zeta_5 + p_7\varphi_7\eta_5) + u_5\varphi_6 \,.\, p_7\varphi_7\eta_6 = \frac{1}{48} \end{aligned} \tag{22a}$$

de cettes équations il suit [(18a)—2.(22a)]

$$p_2\varphi_2\beta_1 + p_3\varphi_3\gamma_1 + p_4\varphi_4\delta_1 + p_5\varphi_5\varepsilon_1 + p_6\varphi_6\zeta_1 + p_7\varphi_7\eta_1 = 0 \tag{e}$$

en posant dans l'équation (18a) la valeur de l'expression (e) nous obtenons l'équation suivante

$$\begin{aligned} &\varphi_2^3 (p_3\varphi_3\gamma_2 + p_4\varphi_4\delta_2 + p_5\varphi_5\varepsilon_2 + p_6\varphi_6\zeta_2 + p_7\varphi_7\eta_2) + \varphi_3^3 (p_4\varphi_4\delta_3 + \\ &p_5\varphi_5\varepsilon_3 + p_6\varphi_6\zeta_3 + p_7\varphi_7\eta_3) + \varphi_4^3 (p_5\varphi_5\varepsilon_4 + p_6\varphi_6\zeta_4 + p_7\varphi_7\eta_4) + \\ &+ \varphi_5^3 (p_6\varphi_6\zeta_5 + p_7\varphi_7\eta_5) + \varphi_6^3 \,.\, p_7\varphi_7\eta_6 = \frac{1}{24}. \end{aligned} \tag{18b}$$

Analogiquement nous pouvons écrir l'équation (24a) de la manière suivante

$$v_1\varphi_2 z_2 + v_2\varphi_3 z_3 + v_3\varphi_4 z_4 + v_4\varphi_5 z_5 + v_5\varphi_6 z_6 + v_1(p_3\varphi_3\gamma_2 + p_4\varphi_4\delta_2 + p_5\varphi_5\varepsilon_2 +$$
$$+ p_6\varphi_6\zeta_2 + p_7\varphi_7\eta_2) + v_2(p_4\varphi_4\delta_3 + p_5\varphi_5\varepsilon_3 + p_6\varphi_6\zeta_3 + p_7\varphi_7\eta_3) + \qquad (24a)$$
$$+ v_3(p_5\varphi_5\varepsilon_4 + p_6\varphi_6\zeta_4 + p_7\varphi_7\eta_4) + v_4(p_6\varphi_6\zeta_5 + p_7\varphi_7\eta_5) + v_5 \cdot p_7\varphi_7\eta_6 = \frac{1}{40}$$

comme nous voyons la somme de premier 5 termes de cette équation nous forment le côté gauche de l'équation (19a) et c'est pourquoi nous avons la relation

$$(24a) - \frac{1}{3} \cdot (19a) = \frac{1}{3} \cdot (18b) \qquad c.q.f.d.$$

Les dernières constantes inconnues nous pouvons calculer des relations (XV); ainsi nous obtenons les valeurs suivantes

$$\alpha = \frac{1}{9}, \quad \beta_0 = \frac{1}{24}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{6}, \quad \delta_0 = \frac{278}{544}, \quad \varepsilon_0 = -\frac{106}{6},$$

$$\zeta_0 = \frac{110974}{45648}, \quad \eta_0 = -\frac{101195}{25994}.$$

En remplaçant les constantes inconnues des équations (XIII), (XIV), (XVI) et (XVII) par les valeurs calculées nous obtenons enfin les formules de sixième ordre dans la forme suivante

$$\begin{aligned}
k_0 &= f(x_0, y_0) \cdot h \\
k_1 &= f\left(x_0 + \frac{1}{9}h,\ y_0 + \frac{1}{9}k_0\right) \cdot h, \\
k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{6}h,\ y_0 + \frac{k_0 + 3k_1}{24}\right) \cdot h, \\
k_3 &= f\left(x_0 + \frac{2}{6}h,\ y_0 + \frac{k_0 - 3k_1 + 4k_2}{6}\right) \cdot h, \qquad \text{(XXVI)} \\
k_4 &= f\left(x_0 + \frac{3}{6}h,\ y_0 + \frac{278k_0 - 945k_1 + 840\,k_2 + 99k_3}{544}\right) \cdot h, \\
k_5 &= f\left(x_0 + \frac{4}{6}h,\ y_0 + \frac{-106k_0 + 273k_1 - 104k_2 - 107k_3 + 48k_4}{6}\right) \cdot h, \\
k_6 &= f\left(x_0 + \frac{5}{6}h,\ y_0 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{110974k_0 - 236799k_1 + 68376k_2 + 103803k_3 - 10240k_4 + 1926k_5}{45648}\right) \cdot h,
\end{aligned}$$

$$k_7 = f\left(x_0 + h, y_0 + \vphantom{\frac{A}{B}}\right.$$

$$\left. + \frac{-101195k_0 + 222534k_1 - 71988k_2 - 26109k_3 - \atop - 20000k_4 - 72k_5 + 22824k_6}{25994}\right) . h$$

$$k = \frac{41k_0 + 216k_2 + 27k_3 + 272k_4 + 27k_5 + 216k_6 + 41k_7}{840} .$$

Zostrenie Runge—Kutta—Nyströmovej metódy pre numerické riešenie diferenciálnej rovnice prvého rádu

Doc. Dr. A. Huťa

Zhrnutie

Nech má dif. rov. (I) jedno partikulárne riešenie (II) vyhovujúce vzťahu (III). Ako je známe, prírastok k vo vzťahu (IV) je daný výrazom (XII). Účeľom tohto článku je nájdenie vzorcov 6. rádu, t. j. takých, ktoré sa s (XII) zhodujú až po člen s h^6. Keď urobíme naznačené výkony v (XIII), dostaneme výraz, ktorý porovnaný s (XII) na základe metódy neurčitých súčiniteľov nám podáva rovnice (1') až (31'). Použitím 57 substitúcií na túto sústavu dostávame sústavu rovníc (1) až (31). Napokon riešením tejto sústavy dostaneme hodnoty koeficientov, ktoré dosadené do (XIII) nám dávajú hľadané vzorce 6. rádu (XXVI).

Улучшение метода Рунге—Кутта—Нистрёма для численного решения дифференциального уравнения первого порядка

Доч. Др. А. Гутя

Резюме

Пусть дифференциальное уравнение (I) имеет одно частное решение (II) удовлетворяющее соотношению (III). Как известно, приращение κ в соотношении (IV) данно выражением (XII). Целью этой статьи является нахождение формул 6-порядка т. е. таких, которые по член содержающий κ^6 не отличаются от формул (XII). Если провести назначенные действия в (XIII) получим выражение, из которого вытекают все уравнения с (1') по (31') если его сравнить с (XII) по основании метода неотределённых коэффициентов. Воспользуясь 57 подстановками для этой системы получаем систему уравнений с (1) по (31). Решением этой системы окончательно получим величины коэффициентов, которые подставлены в (XIII), дают исканные формулы 6-порядка (XXVI).

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. IV-VI MATHEMATICA 1956

K metrickému triedeniu stredových nadkvadrík v E_4

Doc. dr. M. HARANT

(Venované prof. dr. J. Hroncovi k jeho 75. narodeninám)

V predloženom pojednaní v I. časti rozšírením úvah z E_3, odvádzame teóriu nadkvadrík vo štvorrozmernom euklidovskom priestore, dotýkajúc sa najmä tých problémov, ktoré sú vzhľadom na metrické triedenie dôležité. Po tejto úvodnej časti všímame si v druhej časti nadkvadriky se stredom v konečne, určením ich kanonických tvarov i konštrukčného zostrojenia v klinogonálnej axonometrii použitím rozšírenej Pelcovej vety. V III. časti pojednávame o paraboloidických nadkvadrikách a tieto zasa zobrazujeme.

I. Všeobecná teória

1. *Rovnica nadkvadriky*

Vezmime do úvahy štvorrozmerný euklidovský priestor rozšírený o úbežné elementy. Nech $[O;\ x_1x_2x_3x_4)$ je ortogonálna báza a nech x_i; $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sú homogénne súradnice bodu $B\,(x_i)$ tohto priestoru. Ak $f(x) = \Sigma\, a_{ik}\, x_i x_k$, potom rovnica

$$f(x) \equiv \sum a_{ik}\, x_i x_k = 0, \qquad i, k = 1, \ldots, 5, \tag{1,1}$$

pričom reálne, konštantné koeficienty a_{ik} splňujú vzťah $a_{ik} = a_{ki}$, určí nadplochu druhého stupňa — nadkvadriku, niekedy aj kvadratickú varietu V_3^2. Na jej určenie, ako vyplýva z (1,1), potrebujeme 14 jednoduchých podmienok (napr. bodov).

Zavedieme niektoré označenia.

Ak polovičné parciálne derivácie kvadratickej formy $f(x) = \Sigma\, a_{ik} x_i x_k$ podľa premenných x_i označíme

$$f_i(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum a_{ik} x_k, \tag{1,2}$$

potom platí

$$f(x) = \sum x_i f_i(x). \tag{1,3}$$

Determinant koeficientov kvadratickej formy

$$A = |a_{ik}| \tag{1,4}$$

nazývame diskriminantom nadkvadriky.

Ak body ${}^mB$ a ${}^nB$ majú homogénne súradnice ${}^mx_i$, resp. ${}^nx_i$, potom zavedieme ďalšie značenie:

$$f_k({}^mx_i) = f_k({}^mx_1, {}^mx_2, {}^mx_3, {}^mx_4, {}^mx_5) = f_k^{(m)}, \tag{1,5}$$

$$\sum {}^nx_i f_i^{(m)} = f^{(m,n)}, \tag{1,6}$$

pričom platí

$$f^{(m,n)} = f^{(n,m)}. \tag{1,7}$$

2. *Prenik nadkvadriky s úbežným priestorom U_3*

Úbežná nadrovina U_3 priestoru P_4 je určená rovnicou $x_5 = 0$, ale vtedy prenik nadkvadriky V_3^2 a priestoru U_3 je kvadratická plocha o rovnici

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0, \qquad i, k = 1, 2, 3, 4$$

a jej vlastnosti charakterizuje diskriminant $\bar{A}$ tejto kvadratickej formy

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{2,1}$$

Porovnaním s determinantom (1,3) máme, že $\bar{A} = A_{55}$. *Podľa toho, či je tento od nuly rôzny, bude prenikom kvadratická plocha vlastná; keď $A_{55} = 0$, pretína U_3 uvažovanú nadplochu v kvadratickej ploche singulárnej.* Ďalšie špecifické vlastnosti tohto preniku sú závislé od špecifických vlastností subdeterminantu A_{55}. Pri triedení nadkvadrík je spomínaný prenik veľmi dôležitý.

3. *Nadkvadrika a priamka*

Uvažujme o nadkvadrike danej rovnicou (1,1) a o priamke ${}^1B{}^2B$ o rovnici

$$x_i = {}^1x_i - k{}^2x_i, \tag{3,1}$$

v ktorej k je deliaci pomer. Každej hodnote k prislúcha jediný bod ležiaci na spojnici obidvoch bodov. Hodnoty k patriace k priesečným bodom uvažovanej spojnice a nadkvadriky splňujú rovnicu

$$f(x_i) = f({}^1x_i - k{}^2x_i) = f^{(11)} - 2kf^{(12)} + k^2f^{(22)} = 0, \tag{3,2}$$

ktorá je pre k kvadratická, teda priamka ${}^1B{}^2B$ a V_3^2 môžu mať najviac dva spoločné body. Je preto V_3^2 nadplocha kvadratická. Keď spojnica ${}^1B{}^2B$ má s nadplochou viac spoločných bodov, celá leží na nej, hovoríme, že je tvoriacou priamkou nadplochy. Keď je diskriminant rovnice (3,2)

$$D = f^{(11)}f^{(22)} - (f^{(12)})^2$$

kladný, priamka nepretína nadplochu v reálnych priesečíkoch, keď je záporný, je jej sečnicou, majúc s ňou dva reálne body spoločné. Pri

$$f^{(11)}f^{(22)} - (f^{(12)})^2 = 0$$

je spojnica $^1B\,^2B$ *dotykovou priamkou nadkvadriky.* Keď je rovnica (3,2) splnená pre ľubovoľné k, t. j. *keď* $f^{(11)} = f^{(22)} = f^{(12)} = 0$, potom všetky body priamky vyhovujú nadkvadrike, teda v tomto prípade *ide o tvoriacu priamku nadplochy.*

4. *Dotyková nadrovina*

Nech ^1B leží na V_3^2. Potom platí $f^{(11)} = 0$. Rovnica (3,2) prejde vtedy na tvar

$$-2kf^{(12)} + k^2f^{(22)} = 0,$$

z čoho vyplýva, že $k_1 = 0$. Predpokladajme, že druhý bod na spojnici, t. j. bod ^2B neleží na ploche, t. j. $f^{(22)} \neq 0$. Hľadajme podmienku, aby aj druhý priesečník spojnice $^1B\,^2B$ padol do bodu ^1B. Vtedy nutne $k_1 = k_2 = 0$. To je však len tak možné, ak

$$f^{(12)} = 0. \tag{4,1}$$

Keď poznačíme $^2B = B\,(x)$, potom (4,1) možno prepísať na tvar

$$^1x_1f_1 + {}^1x_2f_2 + {}^1x_3f_3 + {}^1x_4f_4 + {}^1x_5f_5 = 0 \tag{4,2}$$

alebo aj

$$x_1f_1^{(1)} + x_2f_2^{(1)} + x_3f_3^{(1)} + x_4f_4^{(1)} + x_5f_5^{(1)} = 0, \tag{4,2}$$

kde do lineárnych výrazov $f_i^{(1)}$ dosadíme súradnice dotykového bodu $^1B(^1x_i)$. *Rovnica* (4,2) je v premenných x_i lineárna, teda ak nie je súčasne

$$f_1^{(1)} = f_2^{(1)} = f_3^{(1)} = f_4^{(1)} = f_5^{(1)} = 0,$$

geometricky *určí dotykovú nadrovinu, ktorá sa kvadratickej plochy dotýka v bode* ^1B.

5. *Singulárne body nadkvadriky*

Rovnica dotykovej nadroviny je v bode $^1B(^1x_i)$ neurčitá, keď

$$f_\nu(^1x_i) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, 5. \tag{5,1}$$

Potom takýto bod nazývame singulárnym bodom kvadratickej nadplochy. Potom však systém (homogénny) rovníc (5,1) má pre ^1x_i nenulové riešenie vtedy a len vtedy, keď determinant sústavy je nula, t. j. keď

$$A = 0. \tag{5,2}$$

Teda nutná a postačujúca podmienka, aby nadkvadrika obsahovala singulárny bod, je, aby pre hodnosť h matice

$$(a_{ik}),\ i, k = 1, \ldots, 5 \tag{5,3}$$

platilo $h < 5$. Keď je $h = 4$, vtedy možno zo systému (5,1) určiť pomer súradníc ${}^1x_1; {}^1x_2; {}^1x_3; {}^1x_4; {}^1x_5$, a tieto stanovia jediný singulárny bod nadplochy. Hovoríme tiež o *singularite prvého stupňa*. Ak v tomto prípade vezmeme priamku idúcu singulárnym bodom ${}^1B$ a ešte jedným bodom nadplochy ${}^2B$, vtedy kvadratická rovnica (3,2) je splnená identicky pre každú hodnotu k, takže ${}^1B{}^2B$ určujú tvoriacu priamku nadplochy. V tomto prípade kvadratická nadplocha vytvorená sústavou priamok, ktoré prechádzajú singulárnym bodom, nazýva sa *kuželová nadkvadrika*.

Keď $h = 3$, sú v sústave (5,1) len tri nezávislé rovnice. Každá z nich stanoví nadrovinu. Tieto sa v E_4 pretínajú v priamke. V tomto prípade dostávame výsledok:

Keď hodnosť matice (5,3) je $h = 3$, *potom singulárne body nadkvadriky vyplnia priamku, ktorá patrí nadkvadrike.*

Pri $h = 2$ sú v sústave (5,1) len dve rovnice nezávislé. Tieto stanovia 2 nadroviny, ktoré sa pretínajú v rovine singulárnych bodov. *Kvadratická nadplocha sa rozpadá na dve rôzne nadroviny.*

Ak hodnosť matice je $h = 1$, *vtedy jediná nezávislá rovnica* zo sústavy (5,1) *stanoví jedinú nadrovinu*, na ktorú sa rozpadá nadkvadrika a ktorá je súčasne množinou singulárnych bodov. Pri rozpade nadkvadriky spomínanú nadrovinu treba počítať dvojnásobne.

Všeobecne teda platí: *Keď hodnosť diskriminantu nadkvadriky je h, potom singulárne body vyplnia (4-h) — rozmerný lineárny priestor.*

6. *Pól a polárna nadrovina*

Nech ani jeden z bodov ${}^1B$, ${}^2B$ nie je incidentný s kvadratickou nadplochou. Nech ${}^1B = {}^0B({}^0x_i)$ je pevný bod. Nazveme ho pól. Hľadajme podmienku pre množinu bodov ${}^2B$, aby vzhľadom na obidva priesečníky ${}^1Q(k_1)$, ${}^2Q(k_2)$ spojnice ${}^0B{}^2B$ s danou V_3^2 platil vzťah

$$({}^0B, {}^2B, {}^1Q, {}^2Q) = -1, \tag{6,1}$$

t. j. aby bod ${}^2B$ oddeľoval obidva priesečné body ${}^1Q$, ${}^2Q$ vzhľadom na pól ${}^0B$ harmonicky. Zo vzťahu (6,1) nutne vyplýva $k_1 = -k_2$, čo je len tak možné, ak sa v relácii (3,2) splní

$$f^{(12)} = 0. \tag{6,2}$$

Keď rozpíšeme podmienku (6,2) a pritom uvážime, že ${}^1B = {}^0B$, a ak označíme ešte ${}^2B = B$, máme

$${}^0x_1f_1 + {}^0x_2f_2 + {}^0x_3f_3 + {}^0x_4f_4 + {}^0x_5f_5 = 0 \tag{6,3}$$

alebo

$$x_1f_1^{(0)} + x_2f_2^{(0)} + x_3f_3^{(0)} + x_4f_4^{(0)} + x_5f_5^{(0)} = 0.$$

Výsledná rovnica je rovnicou nadroviny. *Nadrovinu obsahujúcu body harmonicky pridružené k pólu vzhľadom na obidva priesečné body nadkvadriky a priamok prechádzajúcich pólom nazývame polárnou nadrovinou.* Vzájomná priradenosť pólu a jeho odpovedajúcej polárnej nadroviny vzhľadom na danú nadkvadriku je (1,1) — značná.

Porovnaním rovníc (4,2) a (6,3) máme vetu: *Keď je pól incidentný s nadplochou, príslušná polárna nadrovina je dotyčnicovou nadrovinou o dotykovom bode v tomto bode.*

Polárna nadrovina pretína nadkvadriku v kvadratickej ploche, podľa ktorej sa dotýkajú dotykové priamky vedené z ${}^0B$ ku kvadratickej variete V_3^2.

Keď vyplní pól ${}^0B$ bodový rad, potom korešpondujúce polárne nadroviny tvoria lineárny zväzok nadrovín idúcich polárnou rovinou, ktorá je v polarite priradená k nositeľke bodového radu. Zrejme tu platí projektívnosť medzi bodovým radom a zväzkom polárnych nadrovín.

7. *Priemerové nadroviny, združené priemerové nadroviny, hlavné priemerové nadroviny*

Polarita zostáva v platnosti, aj *keď sa pól stane bodom úbežným.* Potom *príslušná polárna nadrovina je priemerová nadrovina.* Nech teda pól je ${}^0B_\infty(\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0, \cos\delta_0, 0)$; potom rovnica príslušnej priemerovej nadroviny je

$$\begin{aligned}&(a_{11}\cos\alpha_0 + a_{12}\cos\beta_0 + a_{13}\cos\gamma_0 + a_{14}\cos\delta_0)\,.\,x_1 + \\ &+ (a_{21}\cos\alpha_0 + a_{22}\cos\beta_0 + a_{23}\cos\gamma_0 + a_{24}\cos\delta_0)\,.\,x_2 + \\ &+ (a_{31}\cos\alpha_0 + a_{32}\cos\beta_0 + a_{33}\cos\gamma_0 + a_{34}\cos\delta_0)\,.\,x_3 + \\ &+ (a_{41}\cos\alpha_0 + a_{42}\cos\beta_0 + a_{43}\cos\gamma_0 + a_{44}\cos\delta_0)\,.\,x_4 = 0.\end{aligned} \tag{7,1}$$

Analogicky ako v polarite v priestore E_3 vzhľadom na kvadratickú plochu platí aj v E_4 to isté o vlastnostiach *združených polárnych nadrovín a o združených póloch.*

Ak si zvolíme v priemerovej nadrovine patriacej k pólu ${}^0B_\infty$ bod ${}^1B_\infty(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1, \cos\delta_1, 0)$, tak jeho priemerová nadrovina obsahuje pól ${}^0B_\infty$. Obidvom takto definovaným polárnym priemerovým nadrovinám hovoríme *združené priemerové nadroviny* a smery určené bodmi ${}^0B_\infty$ ${}^1B_\infty$ sa volajú *polárne združené smery.* Podmienka pre polárne združené smery je

$$\begin{aligned}&\cos\alpha_1\,.\,(a_{11}\cos\alpha_0 + a_{12}\cos\beta_0 + a_{13}\cos\gamma_0 + a_{14}\cos\delta_0) + \\ &+ \cos\beta_1\,.\,(a_{21}\cos\alpha_0 + a_{22}\cos\beta_0 + a_{23}\cos\gamma_0 + a_{24}\cos\delta_0) + \\ &+ \cos\gamma_1\,.\,(a_{31}\cos\alpha_0 + a_{32}\cos\beta_0 + a_{33}\cos\gamma_0 + a_{34}\cos\delta_0) + \\ &+ \cos\delta_1\,.\,(a_{41}\cos\alpha_0 + a_{42}\cos\beta_0 + a_{43}\cos\gamma_0 + a_{44}\cos\delta_0) = 0.\end{aligned} \tag{7,2}$$

Z harmonických vlastností pólu a polárnej nadroviny vyplýva, že *polárna priemerová nadrovina rozpoľuje tetivy smerujúce do jej pólu* ${}^0B_\infty$. Podmienka, aby smer do ${}^0B_\infty$ bol kolmý na príslušnú priemerovú nadrovinu, je vyjadrená reláciami

$$\begin{aligned}a_{11}\cos\alpha_0 + a_{12}\cos\beta_0 + a_{13}\cos\gamma_0 + a_{14}\cos\delta_0 &= \lambda\cos\alpha_0\\ a_{21}\cos\alpha_0 + a_{22}\cos\beta_0 + a_{23}\cos\gamma_0 + a_{24}\cos\delta_0 &= \lambda\cos\beta_0\\ a_{31}\cos\alpha_0 + a_{32}\cos\beta_0 + a_{33}\cos\gamma_0 + a_{34}\cos\delta_0 &= \lambda\cos\gamma_0\\ a_{41}\cos\alpha_0 + a_{42}\cos\beta_0 + a_{43}\cos\gamma_0 + a_{44}\cos\delta_0 &= \lambda\cos\delta_0\end{aligned} \tag{7,3}$$

Smer tejto vlastnosti nazveme *smer hlavného priemeru.* Tento systém má pre smerové kosínusy $\cos\alpha_0$, $\cos\beta_0$, $\cos\gamma_0$, $\cos\delta_0$, smeru kolmého na korešpondujúcu priemerovú nadrovinu nenulové riešenie vtedy a len vtedy, keď determinant sústavy je nula, t. j.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \lambda, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (7,4)$$

Korene λ_i sekulárnej rovnice (7,4) sú reálne, pretože a_{ik} sú reálne. Pri uvážení (7,4), (7,3) a základného vzorca pre smerové kosínusy smeru v P_4 postupne vypočítame smerové kosínusy hlavných priemerov. Označme ich

$$\cos \alpha_i = a_i, \quad \cos \beta_i = b_i, \quad \cos \gamma_i = c_i, \quad \cos \delta_i = d_i. \qquad (7,5)$$

Pretože každá dvojica zo štyroch výsledných hlavných priemerov je združená, dosadením smerových kosínusov (7,5) do (7,3) dostanema šesť relácií tvaru.

$$\begin{aligned} a_i \,.\, (a_{11}a_k + a_{12}b_k + a_{13}c_k + a_{14}d_k) &+ \\ + b_i \,.\, (a_{21}a_k + a_{22}b_k + a_{23}c_k + a_{24}d_k) &+ \\ + c_i \,.\, (a_{31}a_k + a_{32}b_k + a_{33}c_k + a_{34}d_k) &+ \\ + d_i \,.\, (a_{41}a_k + a_{42}b_k + a_{43}c_k + a_{44}d_k) &= 0, \end{aligned} \qquad (7,6)$$

kde indexy i, k súčasne vezmeme po dvojiniach (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4).

Dve priemerové nadroviny určia priemerovú rovinu, tri priemerové nadroviny priemer nadkvadriky. *Bod incidentný so všetkými 4-mi združenými priemerovými nadrovinami je stred kvadratickej nadplochy*, z ktorého vychádzajú 4 združené priemery nadkvadrík. Keď ich smerové kosínusy splňujú relácie (7,6), potom ide o hlavné priemery, ktorým hovoríme aj *osi kvadratickej nadplochy*. Dĺžky tetív osí nazývame *dĺžkami osí*.

Sekulárna rovnica (7,4) je veľmi dôležitá v teórii nadkvadrík. Keď má rozličné korene, potom jestvujú aj 4 rozdielne hlavné priemery. No keď má rovnica 2,3, resp. 4-násobný koreň, potom 2,3, prípadne 4 hlavné priemerové nadroviny sú neurčité.

8. *Sekulárna rovnica*

Sekulárna rovnica dá sa rozpísať na tvar

$$D(\lambda) \equiv \lambda^4 - I_1 \,.\, \lambda^3 + I_2 \,.\, \lambda^2 - I_3 \,.\, \lambda + I_4 = 0, \qquad (8,1)$$

pričom platí

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \qquad (8,2)$$

$$I_3 = A_{11}^{(5)} + A_{22}^{(5)} + A_{33}^{(5)} + A_{44}^{(5)};$$

$$I_4 = A_{55},$$

kde $A_{11}^{(5)}$ je napr. subdeterminant determinantu A_{55} patriaci k prvku a_{11}. Je dôležité povšimnúť si, že I_1 sa rovná súčtu prvkov hlavnej diagonály determinantu A_{55}, I_2 sa zasa rovná súčtu hlavných subdeterminantov 2^0 determinantu A_{55}, I_3 súčtu hlavných subdeterminantov 3^0 determinantu A_{55} napokon $I_4 = A_{55}$. Dá sa ukázať, že uvedené koeficienty sú invariantami nadkvadriky (1,1).

Je dôležité pripomenúť si, aký je súvis koreňov sekulárnej rovnice $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ s uvedenými invariantami

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\
I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 \\
I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 \\
I_4 &= A_{55} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4
\end{aligned}
$$

a z tohto plynúce dôsledky, keď 1, 2, 3, resp. všetky štyri korene sekulárnej rovnice sú nula!

9. *Stred nadkvadriky*

Nech je U_3 polárna nadrovina nejakého pólu vzhľadom na nadkvadriku. Hľadajme jeho súradnice. Keď je pól ${}^0B_\infty$ ľubovoľný bod U_3, t. j. keď $\cos\alpha_0$, $\cos\beta_0$, $\cos\gamma_0$, $\cos\delta_0$ sú hodnoty meniace sa, potom rovnica korešpondujúcej polárnej nadroviny je

$$\cos\alpha_0 f_1 + \cos\beta_0 f_2 + \cos\gamma_0 f_3 + \cos\delta_0 f_4 = 0.$$

Táto je identicky splnená pre každú hodnotu skupiny súradníc pohyblivého bodu ${}^0B_\infty$ len vtedy, keď sú splnené rovnice

$$f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{9,1}$$

Vtedy však príslušné polárne nadroviny patriace k bodom úbežného priestoru všeobecne tvoria trs nadrovín. Stred tohto trsu je *stred kvadratickej nadplochy*, ktorý je teda *pólom úbežnej nadroviny vzhľadom na nadkvadriku*. Súradnice stredu vyhovujú teda aj predošlým rovniciam, lebo každá z nich reprezentuje určitú nadrovinu. Tieto nadroviny sú základné nadroviny trsu polárnych nadrovín o strede v S.

Keď rovnice (9,1) rozpíšeme, je

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 &= 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 &= 0, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 &= 0, \\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 &= 0.
\end{aligned} \tag{9,1}
$$

takže máme dostatočný počet rovníc na určenie pomeru $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5$ súradníc stredu. Dostávame

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = A_{51} : A_{52} : A_{53} : A_{54} : A_{55}.$$

Nehomogénne súradnice stredu nadkvadriky sú preto

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1}{x_5} = \frac{A_{51}}{A_{55}}, \\ \bar{x}_2 &= \frac{x_2}{x_5} = \frac{A_{52}}{A_{55}}, \\ \bar{x}_3 &= \frac{x_3}{x_5} = \frac{A_{53}}{A_{55}}, \\ \bar{x}_4 &= \frac{x_4}{x_5} = \frac{A_{54}}{A_{55}}. \end{aligned} \qquad (9,3)$$

Môžeme potom rozlišovať tieto *špec. prípady nadkvadrík s ohľadom na stred:*

I. Stredové nadkvadriky majú jediný bod o súradniciach (9,3) za stred

a) *Pri* $A_{55} \neq 0$ bude nadkvadrika mať stred v konečne. Kvadratickým nadplochám takto definovaným budeme hovoriť: „*Nadkvadriky o strede v konečne*". Pri $A \neq 0$ pôjde o nesingulárne stredové nadkvadriky, pri $A = 0$ zas o singulárne. Medzi tieto patria určité kužeľové nadkvadriky, u ktorých singulárny bod (vrchol) je súčasne stredom.

b) Keď $A_{55} = 0$, ale ostatné subdeterminanty patriace k prvkom posledného riadku matice (5,3) nie sú nula, potom kvadratická nadplocha má stred v úbežnom priestore U_3, ktorý je dotykovým priestorom nadkvadriky V_3^2. Tejto skupine nadkvadrík hovoríme *nadkvadriky so stredom v úbežnom priestore.*

II. Nadkvadriky so singulárnym stredovým útvarom

Ak $A_{51} = A_{52} = A_{53} = A_{54} = A_{55} = 0$, potom stred je neurčitý, teda nie jediný bod. Stredy nadkvadriky vyplňujú určitý útvar, podľa ktorého ich roztrieďujeme na štyri typy.

1. *Nadkvadriky so stredovou osou*

Nech pri uvedenej podmienke je *hodnosť matice koeficientov systému (9,1)* $h' = 3$. Vtedy sú len tri z rovníc (9,1) nezávislé. Tieto geometricky interpretujú tri nadroviny, ktoré určia jedinú priamku, obsahujúcu stredy nadkvadriky. Táto priamka je stredová os singulárnej V_3^2. Keď subdeterminanty 3-ho stupňa determinantu A_{55} nie sú všetky nula, potom stredová os prebieha v konečne, keď sú všetky nula, je stredová os úbežnou priamkou.

2. *Nadkvadriky sú stredovou rovinou*

Keď hodnosť matice koeficientov systému (9,1) *je* $h' = 2$, vtedy v lineárnom systéme (9,1) sú dve nezávislé rovnice interpretujúce dve nadroviny, ktoré sa pretínajú v stredovej rovine singulárnej nadkvadriky. Keď nie sú všetky subdeterminanty 2^0 determinantu A_{55} nula, je táto rovina v konečne, keď sú nula, je incidentná s úbežným priestorom.

3. *Nadkvadriky so stredovým priestorom*

Keď je hodnosť matice $h' = 1$, t. j. všetky jej subdeterminanty druhého stupňa sú nula ale jej prvky nie sú nula, jestvuje jediná nezávislá rovnica predstavujúca geometricky jedinú stredovú nadrovinu, ktorá je v konečne, keď prvky determinantu A_{55} nie sú všetky nula, keď sú nula ale $a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45}$, nie sú všetky nula, stotožní sa stredová nadrovina s U_3.

4. *Nadkvadriky s neurčitým stredom*

Ak všetky prvky matice sú nula, iba a_{55} je rozličný od nuly, je stred neurčitý.

II. Nadkvadriky so stredom v konečne

10. *Normálny tvar*

Rovnica nadkvadriky (1,1) je rovnicou V_3^2 v obecnej polohe vzhľadom na pravouhlý súradný systém $(0; x_1, x_2, x_3, x_4)$. Túto rovnicu určitou regulárnou substitúciou možno previesť na normálny tvar, ktorý obsahuje popri konštantách len kvadráty premenných x_i. Geometricky — ako si ukážeme — odpovedá takto transformovanej rovnici nadkvadrika v tzv. stredovej a osovej polohe, t. j. taká, že jej stred je v začiatočnom bode súradnej sústavy a osi padnú do súradných osí sústavy. Vtedy aj hlavné priemerové roviny sú súradnými rovinami a hlavné priemerové nadroviny zasa súradnými nadrovinami sústavy.

a) *Transformácia posunutím začiatočného bodu súradnej sústavy do stredu nadkvadriky.* Predpokladajme, že $A_{55} \neq 0$. Transformačné vzorce sú potom

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + \frac{A_{51}}{A_{55}} \,.\, x_5', \\ x_2 &= x_2' + \frac{A_{52}}{A_{55}} \,.\, x_5', \\ x_3 &= x_3' + \frac{A_{53}}{A_{55}} \,.\, x_5', \\ x_4 &= x_4' + \frac{A_{54}}{A_{55}} \,.\, x_5', \\ x_5 &= x_5'. \end{aligned} \tag{10,1}$$

Keď tieto porovnáme s rovnicami (3,1), dostávame rovnicu tvaru (3,2)

$$f^{(11)} - 2k f^{(12)} + k^2 f^{(22)} = 0,$$

kde do foriem $f^{(11)}, f^{(12)}, f^{(22)}$ musíme vložiť

$$\begin{aligned} ({}^1x_i) &= (x_1', x_2', x_3', x_4', 0,) \\ k &= -x_5' \\ ({}^2x_i) &= \left(\frac{A_{51}}{A_{55}}, \frac{A_{52}}{A_{55}}, \frac{A_{53}}{A_{55}}, \frac{A_{54}}{A_{55}}, 1\right), \end{aligned}$$

takže dostaneme

$$
\begin{aligned}
f^{(11)} &= f(x_1', x_2', x_3', x_4', 0); \\
f^{(12)} &= 0, \\
f^{(22)} &= \frac{A}{A_{55}},
\end{aligned}
$$

a preto rovnica (1,1) nadkvadriky pri transformácii (10,1) prejde na tvar

$$
\begin{aligned}
f(x_1', x_2', x_3', x_4') &= a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2 + 2a_{13}x_1'x_3' + 2a_{23}x_2'x_3' + \\
&+ a_{33}x_3'^2 + 2a_{14}x_1'x_4' + 2a_{24}x_2'x_4' + 2a_{34}x_3'x_4' + a_{44}x_4'^2 + \frac{A}{A_{55}} = 0. \qquad (10,2)
\end{aligned}
$$

b) *Transformácia otočením súradnej sústavy do hlavných priemerov.* Keď použijeme na rovnicu (10,2) ortogonálnu transformáciu tvaru

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4, \\
x_2' &= b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4, \\
x_3' &= c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4, \\
x_4' &= d_1X_1 + d_2X_2 + d_3X_3 + d_4X_4,
\end{aligned} \qquad (10,3)
$$

pričom a_i, b_i, c_i, d_i sú smerové kosínusy osí nadkvadriky, po dosadení vzhľadom na uvedených šesť relácií (7,6) dostaneme

$$
f(X_i) = a_{11}'X_1^2 + a_{22}'X_2^2 + a_{33}'X_3^2 + a_{44}'X_4^2 + \frac{A}{A_{55}} = 0. \qquad (10,4)
$$

Rovnica (10,2) bez absolútneho člena je kvadratická forma a táto substitúciou (10,3), ktorá je ortogonálna, transformuje sa na tvar (10,4), ale vtedy koeficienty tohto tvaru sú koreňmi sekulárnej rovnice, ako je z teórie kvadratických foriem známe. Rovnica (10,4) nazýva sa *normálna rovnica nadkvadriky v* E_4, takže po uvážení predošlého môžeme ju prepísať na tvar

$$
\lambda_1X_1^2 + \lambda_2X_2^2 + \lambda_3X_3^2 + \lambda_4X_4^2 + \frac{A}{A_{55}} = 0. \qquad (10,5)
$$

Podmienkou stredovej nadkvadriky, ako sme videli, je, aby $A_{55} \neq 0$! Vtedy však zo vzťahov (8,4) je

$$
A_{55} = \lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 . \lambda_4,
$$

takže s ohľadom na predchádzajúce dostávame výsledok, že *pre nadkvadriku so stredom v konečne nie je ani jeden koreň sekulárnej rovnice nula, preto nutne rovnica* (10,5) *obsahuje 4 kvadratické výrazy v premenných* X_i.

Vidíme, že je treba rozoznávať dva hlavné podtypy, a to:

a) $A \neq 0$, $A_{55} \neq 0$; tieto *sú stredové nesingulárne nadkvadriky so stredom v konečne*

b) $A = 0$, $A_{55} \neq 0$; *toto sú singulárne kvadratické nadplochy so stredom v konečne*;

11. *Elipsoidicko-elipsoidická nadkvadrika. Nadguľa*

Normálna rovnica nadkvadriky (10,5) po vydelení výrazom $-\dfrac{A}{A_{55}}$ a po zavedení vhodného označenia

$$\frac{1}{a^2} = -\frac{\lambda_1 A_{55}}{A}, \quad \frac{1}{b^2} = -\frac{\lambda_2 A_{55}}{A}, \quad \frac{1}{c^2} = -\frac{\lambda_3 A_{55}}{A}, \quad \frac{1}{d^2} = -\frac{\lambda_4 A_{55}}{A} \tag{11,1}$$

je tvaru

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} + \frac{X_4^2}{d^2} - 1 = 0, \tag{11,2}$$

ktorý nazývame *kanonickým tvarom*.

Predpokladajme, že všetky výrazy na pravej strane relácií (11,1) sú kladné. Ako vidieť z tejto rovnice, to je len tak možné, že sgn λ_1 = sgn λ_2 = sgn λ_3 = = sgn λ_4, a pritom je takého znamienka, aby platil uvedený predpoklad. Každý zo súradných priestorov (X_1, X_2, X_3), (X_1, X_2, X_4), (X_1, X_3, X_4) alebo (X_2, X_3, X_4) pretína nadkvadriku (11,2) v reálnych elipsoidoch. Aj *preniky ľubovoľnými nadrovinami môžu byť len elipsoidy*. Nazveme preto kvadratickú nadplochu o rovnici (11,2) *reálnou elipsoidicko-elipsoidickou nadkvadrikou, stručne* $(E + E)$ — *nadkvadrika* (obr. 1). Konštanty a, b, c, d určia dĺžky polosí $(E + E)$ — nadkvadriky. Vidíme, že popri invariantoch A, A_{55} ich hodnoty závisia od koreňov sekulárnej rovnice $D(\lambda) = 0$.

Keď má sekulárna rovnica dvojnásobný koreň $\lambda_1 = \lambda_2$, potom $a = b$ a vtedy preniky súradných nadrovín obsahujúcich súradné osi X_1, X_2 sú rotačné elipsoidy a tak isto aj prieseky nadrovinami s nimi rovnobežnými.

Keď má sekulárna rovnica trojnásobný koreň $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, potom aj $a = b = c$ a preniky súradnými nadrovinami obsahujúcimi po dvoch príslušné osi a tak isto aj prieseky nadrovinami s týmito rovnobežnými sú rotačné elipsoidy. Nadrovina (X_1, X_2, X_3) a s ňou rovnobežne pretínajú nadkvadriku v guľových plochách.

Keď $D(\lambda) = 0$ má štvornásobný koreň, t. j. ak

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda, \tag{11,3}$$

potom pri označení

$$-\frac{\lambda A_{55}}{A} = \frac{1}{r^2} \tag{11,4}$$

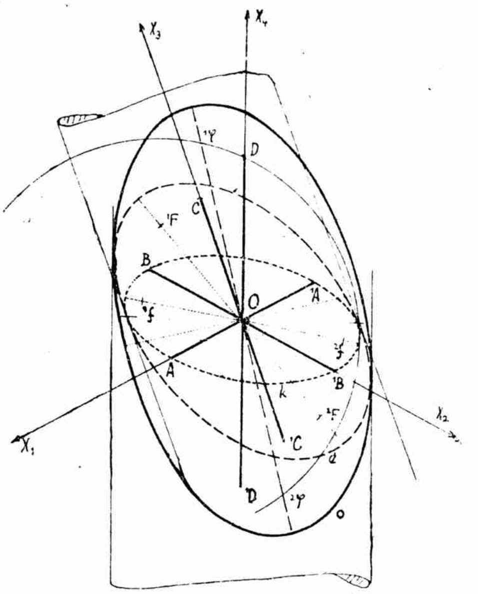
prejde (11,1) na tvar

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = r^2. \tag{11,5}$$

Táto rovnica je rovnica nadplochy guľovo-guľovej alebo ináč zvanej hypersféry.

Konštrukciu obrysu $(E + E)$ — nadkvadriky zostrojíme v klinogonálnej axonometrii, pričom používame rozšírenú Pelcovu vetu o ohniskách obrysových kriviek rezových plôch priestormi navzájom rovnobežnými.[1]) Tieto plochy sú homotetické a ohniská ich obrysových kriviek vyplňujú 2 kužeľosečky konfokálne s obrysovou kužeľosečkou nadkvadriky.

Uvažovanú nadkvadriku určíme združenými priemermi A^1A, B^1B, C^1C, D^1D. Použitím Chaslesovej konštrukcie z dĺžok ${}^1f^2f$ a C^1C ako združených priemerov určíme ohniská ${}^1F^2F$ tejto kužeľosečky, ktoré sú podľa Pelcovej vety ohniskami obrysovej kužeľosečky elipsoidickej rezovej plochy nadroviny $(X_1X_2X_3)$ a nad-



Obr. 1.

kvadriky. Opakovaním tejto konštrukcie pre ${}^1F^2F$; D^1D čo združených priemerov určíme ${}^1\varphi$, ${}^2\varphi$ — ohniska obrysovej kužeľosečky o nadkvadriky. Na jej určenie použijeme obrysové priamky valcovej plochy opísanej elipsoidu v nadrovine $(X_1X_2X_3)$ v smere osi X_4.

12. *Elipsoidicko-hyperboloidická nadkvadrika*

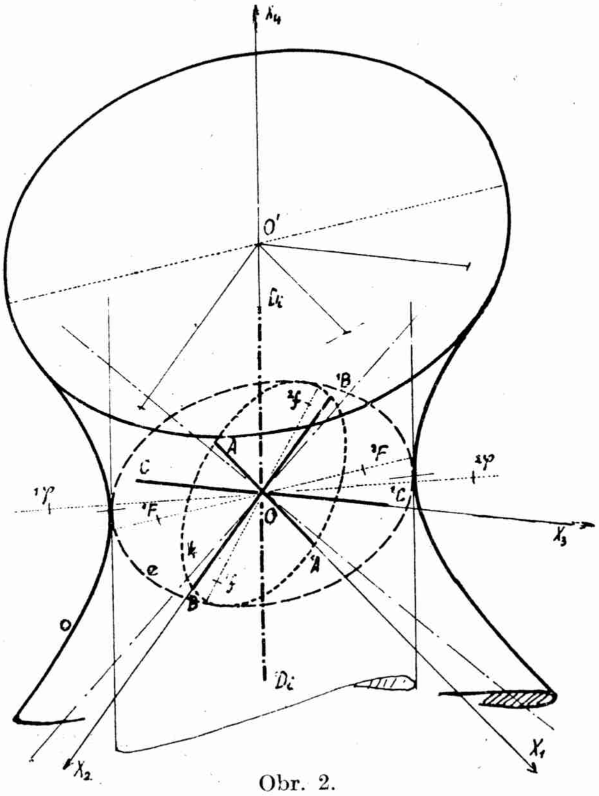
Predpokladajme, že v normálnom tvare (11,1) je jeden z koeficientov pri premenných záporný, t. j. nech kanonický tvar pri uvedenom označení je

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} - \frac{X_4^2}{d^2} = 1. \qquad (12,1)$$

Základné súradné nadroviny, a to: (X_1, X_2, X_3) preniká nadplochu danú rovnicu (12,1) v reálnom elipsoide, nadroviny (X_1, X_2, X_4), (X_1, X_3, X_4)

[1]) Pozri napr. Hlavatý: Promítání z přímky na rovinu v prostoru čtyřrozměrném. Časopis pro pěstování mat. a fys., Praha, 1923, str. 250—272.

a (X_2, X_3, X_4) zas v reálnych jednodielnych hyperboloidoch. Nazvime preto nadplochu kvadratickú tejto vlastnosti nadkvadrikou *elipsoidicko-hyperboloidickou*, krátko písané *nadkvadrikou* $(E + H)$.



Obr. 2.

Od úvah, keď sekulárna rovnica má viacnásobné korene (2,3), upúšťame. Štvornásobný koreň zrejme nemôže mať.

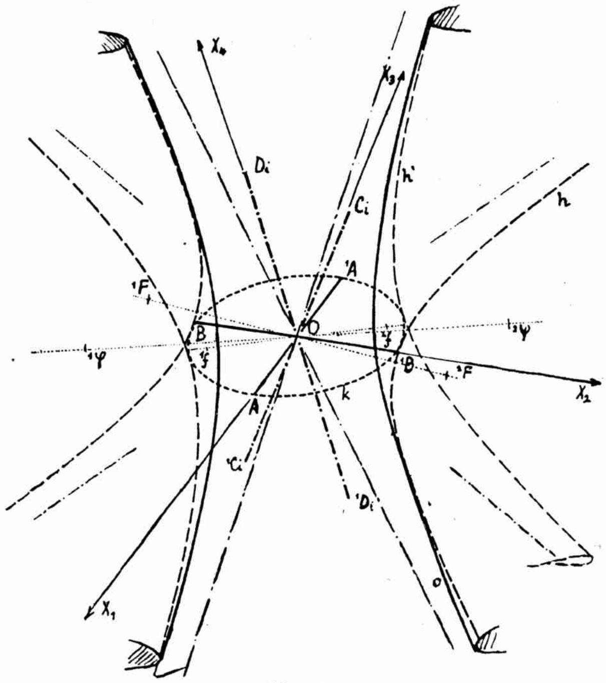
Analogicky ako v predchádzajúcej konštrukcii, zostrojíme konštrukciu obrysu nadkvadriky $(E + H)$ danej združenými priemermi A^1A; B^2B; C^1C; $D_i^1D_i$. Na obrazci je zostrojené obmedzenie nadkvadriky nadrovinou incidentnou bodom O', rovnobežnou s priestorom $(X_1X_2X_3)$ (obr. 2.)

13. *Hyperboloidicko-hyperboloidická nadkvadrika prvého druhu*

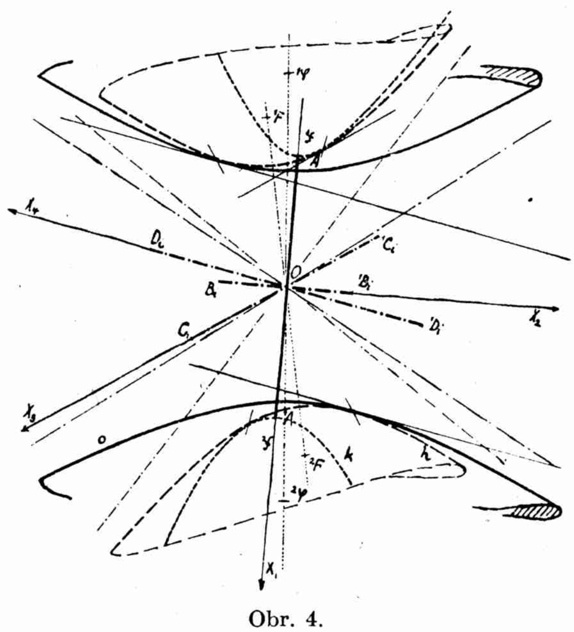
Uvažujme o prípade, keď v normálnom tvare sú zo spomínaných koeficientov dva záporné. Potom príslušný kanonický tvar je

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} - \frac{X_4^2}{d^2} = 1. \qquad (13,1)$$

Súradné nadroviny (X_1, X_2, X_3) a (X_1, X_2, X_4) prenikajú nadkvadriku (13,1) v jednodielnych hyperboloidoch. Súradné nadroviny (X_1, X_3, X_4) a (X_2, X_3, X_4) prenikajú nadplochu vo dvojdielnych hyperboloidoch.



Obr. 3.



Obr. 4.

Na obr. 3 je zostrojenie obrysu $(H + H)$-nadkvadriky danej združenými priemermi A^1A; B^1B; $C_i^1C_i$; $D_i^1D_i$. Priemet obrysu nadkvadriky je hyperbola o. Zostrojené sú aj rezové hyperboloidické rezy nadrovinami $(X_1X_2X_3)$, $(X_1X_2X_4)$.

14. *Hyperboloidicko-hyperboloidická nadkvadrika druhého druhu*

Nech sú tri zo spomínaných koeficientov záporné. Potom kanonický tvar takejto nadkvadriky je

$$\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} - \frac{X_4^2}{d^2} = 1. \tag{14,1}$$

Súradné nadroviny (X_1, X_2, X_3), (X_1, X_2, X_4) a (X_1, X_3, X_4) prenikajú nadplochu (14,1) vo dvojdielnych hyperboloidoch, súradný priestor (X_2, X_3, X_4) v imaginárnom elipsoide. Nadkvadriku (14,1) nazveme *$(H + H)$ - nadkvadrika druhého druhu.*

Na obr. 4 zostrojili sme obrysovú kužeľosečku o *$(H + H)$-nadkvadriky* danej združenými priemermi A^1A; $B_i^1B_i$; $C_i^1C_i$; $D_i^1D_i$.

15. *Imaginárna elipsoidicko-elipsoidická nadkvadrika*

Ako posledný prípad nastane, keď všetky zo spomínaných koeficientov sú záporné; potom máme

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} + \frac{X_4^2}{d^2} + 1 = 0. \tag{15,1}$$

V tomto prípade všetky nadroviny prenikajú nadkvadriku v imaginárnych elipsoidoch. Hovoríme o imaginárnej elipsoidicko-elipsoidickej nadkvadrike. Keď má v tomto prípade sekulárna rovnica štvornásobný koreň, analogický podľa § 11 dostaneme

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = (ir)^2. \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Toto je rovnica imaginárnej hypersféry.

16. *Kužeľové nadkvadriky*

Singulárne nadkvadriky so stredom v konečne, t. j. splňujúce vzťahy

$$A_{55} \neq 0, \qquad A = 0, \tag{16,1}$$

sú *kužeľové nadkvadriky*. Tieto nadkvadriky majú singularitu prvého stupňa — singulárny bod, ktorý je súčasne aj stredom nadkvadriky. Keď padne singulárny bod do začiatočného bodu súradnej sústavy a pri vhodnom pootočení súradnej sústavy (podľa odst. 10) dostávame normálny tvar

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2 = 0. \tag{16,2}$$

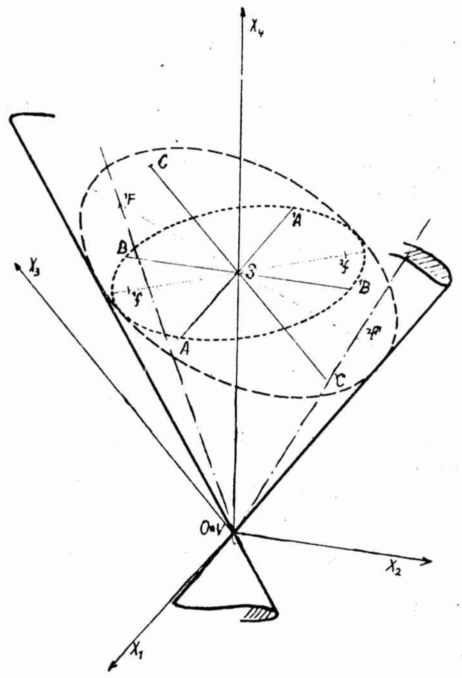
Nadkvadriky o normálnom tvare (16,2) nazývame kužeľové nadkvadriky. Podľa toho aké znamienka majú korene sekulárnej rovnice, po preznačení dostávame 3 kanonické tvary:

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} - \frac{X_4^2}{d^2} = 0, \tag{16,3a}$$

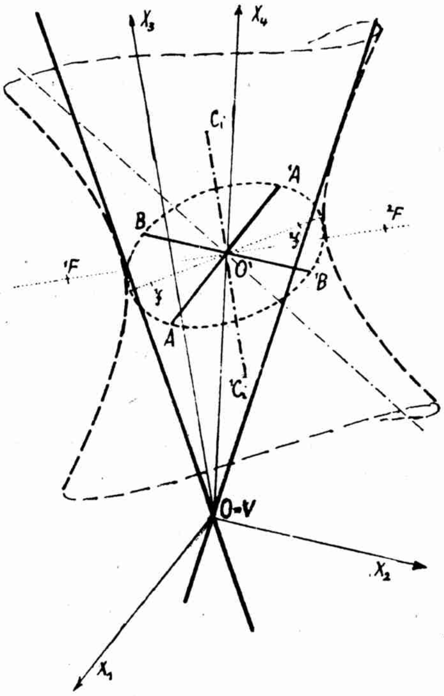
$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} - \frac{X_4^2}{d^2} = 0, \qquad (16,3b)$$

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} + \frac{X_4^2}{d^2} = 0. \qquad (16,3c)$$

a) Súradné nadroviny (X_1, X_2, X_4), (X_1, X_3, X_4) a (X_2, X_3, X_4) prenikajú uvažovanú nadkvadriku (16,3a) v reálnych kužeľových plochách o vrchole v začiatočnom bode súradnej sústavy. Nadrovina (X_1, X_2, X_3) preniká nad-



Obr. 5.



Obr. 6.

kvadriku v imaginárnej kužeľovej ploche. Nadroviny rovnobežné s touto súradnou nadrovinou prenikajú nadkvadriku v reálnych elipsoidoch. Nazvime túto nadkvadriku preto *elipsiodicko-kužeľovou nadkvadrikou, krátko reálnou* $(E + K)$*-nadkvadrikou.*

Na tejto nadkvadrike sú všetky druhy rezov nadrovinami, t. j. *rezy elipsoidické, paraboloidické a hyperboloidické*. Ich konštrukčné zostrojenie robím v práci „*Kótovanoaxonometrická zobrazovacia metóda* v E_4", ktorá vyjde v Sborníku prác Prírodovedeckej fakulty MU v Brne. V *obr. 5* je zostrojená $(E + K)$-nadkvadrika, tým že sme určili združenými priemermi A^1A; B^1B; C^1C elipsoidický rez nadrovinou obsahujúcou bod S a rovnobežnou s priestorom $(X_1X_2X_3)$. Bod $O = V$ je *vrchol* tejto *kužeľovej nadkvadriky*. Homotetické elipsoidické rezy priestormi rovnobežnými s $(X_1X_2X_3)$ majú za priemety kužeľosečky o osiach rovnobežných so spojnicou ${}^1F^2F$, pričom na spojniciach V^1F, V^2F sa nachádzajú zas ohniská týchto kužeľosečiek!

Spomínaný elipsoidický rez je podstavnou plochou $(E + K)$ nadkvadriky, aj jej tvoriace priamky sú spojnice vrcholu V s bodmi elipsoidu.

b) Podtyp daný rovnicou (16,3b) je *hyperboloidicko-kužeľová nadkvadrika (obr. 6).* Súradné nadroviny pretínajú nadkvadriku v kužeľových plochách o vrcholoch v začiatočnom bode. Podstavnou plochou je JH daný združenými priemermi A^1A, B^1B, $C_i{}^1C_i$ v nadrovine rovnobežnej s priestorom $(X_1X_2X_3)$; potom spojnice bodov JH s bodom $O = V$ sú tvoriace priamky $(H + K)$-nadkvadriky.

c) Rovnica (16,3c) reprezentuje *imaginárnu $(E + K)$-nadkvadriku.* Každá zo súradných nadrovín preniká ju v imaginárnej kužeľovej ploche.

III. Nadkvadrika so stredom v nekonečne

17. *Normálny tvar*

V odst. 9 sme uviedli, že túto skupinu kvadratických nadplôch charakterizuje vzťah

$$A_{55} = 0. \tag{17,1}$$

Potom však z rozpísanej sekulárnej rovnice a zo súvisu koreňov a koeficientov vyplýva

$$A_{55} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0.$$

Nadkvadriky tohto typu majú vlastnosť, že jeden koreň sekulárnej rovnice je nula. Predpokladajme, že $\lambda_4 = 0$. Pri tejto podmienke transformuje sa rovnica V_3^2 (1,1) do súradnej sústavy o osiach rovnobežných s hlavnými priemermi nadkvadriky, teda pri ortogonálnej transformácii

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3' + a_4x_4', \\ x_2 &= b_1x_1' + b_2x_2' + b_3x_3' + b_4x_4', \\ x_3 &= c_1x_1' + c_2x_2' + c_3x_3' + c_4x_4', \\ x_4 &= d_1x_1' + d_2x_2' + d_3x_3' + d_4x_4' \end{aligned} \tag{17,3}$$

na tvar

$$\lambda_1x_1'^2 + \lambda_2x_2'^2 + \lambda_3x_3'^2 + 2a_{15}'x_1' + 2a_{25}'x_2' + 2a_{35}'x_3' + a_{55} = 0,$$

pretože pri tejto transformácii šesť koeficientov $a_{12}' = a_{13}' = a_{14}' = a_{23}' = a_{24}' = a_{34}' = 0$ podľa (7,6) a pretože aj $\lambda_4 = 0$.

Substitúcia (17,3) je však ortogonálna, preto diskriminant kvadratickej formy je absolútnym invariantom. Tento je

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & a_{15}' \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & a_{25}' \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & a_{35}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}' \\ a_{15}' & a_{25}' & a_{35}' & a_{45}' & a_{55} \end{vmatrix} = -(a_{45}')^2 \,.\, \lambda_1 \,.\, \lambda_2 \,.\, \lambda_3 \tag{17,5}$$

a z toho po uvážení výsledkov ods. 8 máme

$$a'_{45} = \pm \sqrt{-\frac{A}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}} = \pm \sqrt{-\frac{A}{I_3}}\,; \tag{17,6}$$

pritom je nevyhnutné predpokladať, že

$$I_3 \neq 0. \tag{17,7}$$

Vykonajme teraz transformáciu posunutím pri vhodnej voľbe začiatočného bodu súradnej sústavy podľa transformačných vzorcov

$$x'_i = X_i + {}^0x_i\,, \quad i = 1 \ldots 4., \tag{17,8}$$

v ktorých ${}^0x_i$ sú súradnice nového, vhodne zvoleného začiatočného bodu. Rovnica (17,4) predošlou substitúciou prejde na tvar

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 + \bar{a} X_1 + \bar{b} X_2 + \bar{c} X_3 + 2a'_{45} X_4 + \bar{d} = 0, \tag{17,9}$$

kde

$$\bar{a} = 2a'_{15} + 2\lambda_1{}^0x_1,$$

$$\bar{b} = 2a'_{25} + 2\lambda_2{}^0x_2,$$

$$\bar{c} = 2a'_{35} + 2\lambda_3{}^0x_3,$$

$$\bar{d} = \lambda_1{}^0x_1^2 + \lambda_2{}^0x_2^2 + \lambda_3{}^0x_3^2 + 2a'_{15}{}^0x_1 + 2a'_{25}{}^0x_2 + 2a'_{35}{}^0x_3 + 2a'_{45}{}^0x_4 + a_{55}.$$

Spomínanú vhodnú voľbu začiatočného bodu súradnej sústavy $(0; X_1, X_2, X_3, X_4)$ vykonáme tak, aby $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{d} = 0$. Z týchto vzťahov však vyplýva, že *nový začiatočný bod leží na nadploche* ($\bar{d} = 0$!), *a to v bode, v ktorom jeden z hlavných priemerov pretína našu kvadratickú varietu. Tento bod je teda vrcholom nadkvadriky so stredom v nekonečne*. Súradnice vrcholu môžeme vypočítať z uvedených relácií, a to pomocou koeficientov a_{ik} a koeficientov substitúcie (17,3).

Po takto vykonanej voľbe začiatočného bodu súradnej sústavy môžeme rovnici (17,9) po uvážení relácie (17,6) dať konečný tvar

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 \pm 2\sqrt{-\frac{A}{I_3}}\,X_4 = 0. \tag{17,10}$$

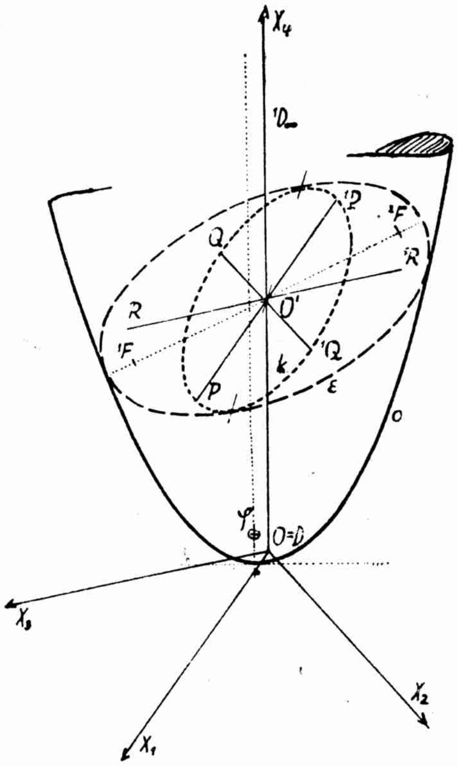
Nadkvadriky, ktorých normálny tvar je (17,10), nazývame *paraboloidické nadkvadriky*.

18. *Elipsoidicko-paraboloidická nadkvadrika*

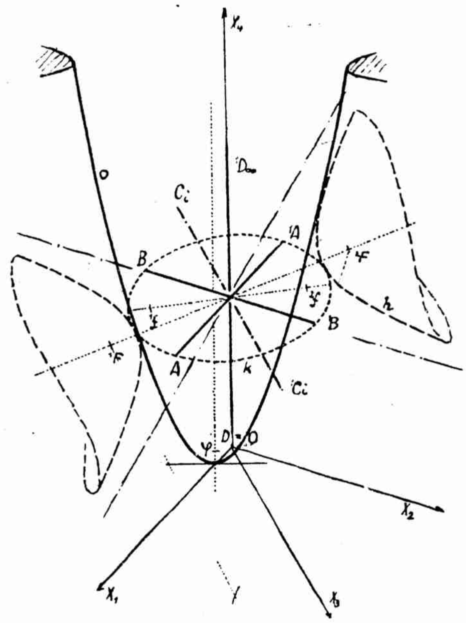
Predpokladajme, že koeficienty pri kvadratických členoch v kanonickom tvare (17,10) sú všetky kladné. Potom normálny tvar nadkvadriky pri vhodnom preznačení bude

$$\frac{X_1^2}{p^2} + \frac{X_2^2}{q^2} + \frac{X_3^2}{r^2} \pm 2X_4 = 0. \tag{18,1}$$

Preniky so súradnými nadrovinami (X_1, X_2, X_4), (X_1, X_3, X_4) a (X_2, X_3, X_4) sú eliptické paraboloidy. Zvyšná súradná nadrovina preniká nadplochu (18,1) v bode (imag. kužeľ), spomínanom už *vrchole*. Nadroviny rovnobežné so súradnou nadrovinou (X_1, X_2, X_3) prenikajú v homotetických elipsoidoch (pre $X_4 \neq 0$). V smere osi X_4 je v úbežnom priestore U_3 jediný reálny bod,



Obr. 7.



Obr. 8.

v ktorom sa U_3 dotýka uvažovanej kvadratickej nadplochy. Nadroviny obsahujúce tento bod prenikajú nadkvadriku v eliptických paraboloidoch, obecne položené nadroviny v elipsoidoch. Preto zavedieme pre túto nadkvadriku pomenovanie *elipsoidicko-paraboloidická nadkvadrika, krátko* $(E + P)$-*nadkvadrika.*

Pri trojnásobnom koreni sekulárnej rovnice táto nadplocha bude mať prenik nadrovinami rotačné paraboloidy a guľové plochy. Na obr. 7. je zostrojený *obrys* $(E + P)$-nadkvadriky, ktorej prenik nadrovinou rovnobežnou s priestorom $(X_1X_2X_3)$ je elipsoid daný priemermi P^1P, C^1C, R^1R a ďalší priemer je D^1D_∞. $D \equiv 0$ *je vrchol nadkvadriky.*

19. *Hyperboloidicko-paraboloidická nadkvadrika prvého druhu*

Jej kanonický tvar je

$$\frac{X_1^2}{p^2} + \frac{X_2^2}{q^2} - \frac{X_3^2}{r^2} \pm 2X_4 = 0. \qquad (19,1)$$

Nadroviny (X_1, X_3, X_4), (X_2, X_3, X_4), (X_1, X_3, X_4) prenikajú nadkvadriku v eliptickom, resp. v hyperbolickom paraboloide, nadrovina $(X_1X_2X_3)$ v kužeľovej ploche, ktorej vrchol je v zač. bode súradnej sústavy.

Nadroviny rovnobežné s podpriestorom $(X_1X_2X_3)$ prenikajú nadkvadriku v jednodielnych hyperboloidoch. (Ide o nadroviny, pre ktoré $\pm 2X_4 > 0$.) Hovoríme preto o *$(H + P)$-nadkvadrike prvého druhu*. Toto nám slúži i na geometrické zobrazenie nadkvadriky. Na obrazci je zostrojený jej obrys, ak sú dané združené priemery $A^1A : B^1B$, $C_i^1C_i$, D^1D_∞, pričom $D \equiv 0$ je vrchol nadkvadriky. Všetky hyperboloidické rezy majú obrysové krivky hyperboly, ktoré sa z vonkajšej strany dotýkajú obrysovej paraboly o (obr. 8).

20. *Hyperboloidicko-paraboloidická nadkvadrika druhého druhu*

Jej kanonický tvar je

$$\frac{X_1^2}{p^2} - \frac{X_2^2}{q^2} - \frac{X_3^2}{r^2} \pm 2X_4 = 0. \tag{20,1}$$

Túto nadkvadriku prenikajú súradné priestory v paraboloidoch, resp. kužeľovej ploche, pokiaľ nadroviny rovnobežné s priestorom $(X_1X_2X_3)$, splňujúce reláciu $\pm 2X_4 > 0$, prenikajú nadkvadriku v dvojdielnom hyperboloide. Toto nám slúži na konštrukciu obrysu nadkvadriky. Bude daná priemermi A^1A, $B_i^1B_i$, $C_i^1C_i$, D^1D_∞. Jej konštrukcia je analogická ako v predchádzajúcom prípade.

Tým sme ukončili triedenie stredových nadkvadrík zo stanoviska metrickej geometrie. *V ďalšom pojednaní si povšimnem metrické triedenie nadkvadrík, ktorých stred nie je bod, ale vyplňuje určitý stredový útvar.*

Do redakcie dodané 10. III. 1956

К метрической классификации центральных гиперквадрик в E_4

Михаил Гарант

Резюме

Пусть $[0; x_1, x_2, x_3, x_4]$ прямоугольная система координат в четырёхмерном евклидовом пространстве и пусть $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ являются однородные координаты точки $B(x_i)$ этого пространства. Следовательно, соотношением (1,1), причём a_{ik} являются реальными коэффициентами удовлетворяющими равенству $a_{ik} = a_{ki}$ дана гиперквадрика V_3^2 в E_4. Если введем подходящее обозначение (1,2), (1,5), можно получить уравнение (4,2) касательной гиперплоскости в точке гиперквадрики и уравнение (6,3) — полярной гиперплоскости точки ${}^0B({}^0x_i)$ относительно гиперквадрики. Для косинусов направления $(\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0, \cos\delta_0)$ главных диаметров исполнено соотношение (7,3), причём для $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ имеет место известное характеристическое уравнение (7,4).

Соотношения (9,3) определяют координаты центра гиперквардики, где A_{ik} миноры определителя A составлённого из коэффициентов соотношения (1,1).

Если $A \neq 0$ — то гиперквардики регулярны.

Если $A = 0$ — то гиперквардики особы.

Если $A_{55} \neq 0$, то гиперквардики центральны с центром в конечности.

Если $A_{55} = 0$, но $A_{5i} \neq 0$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, то центром будет несобственная точка.

Если $A_{51} = A_{52} = A_{53} = A_{54} = A_{55} = 0$, то центр неопределён и выполняет определённую центральную фигуру а именно, если h' рангг матрицы системы (9,1) *и* $h' = 3$ —

то центр выполняет центральную ось, если $h' = 2$ — центральную плоскость, $h' = 1$ — центральное пространство, если только коэффициент $a_{55} \neq 0$, то центр неопределён.

Преобразованиями (10,1), (10,3) при предположении $A_{55} \neq 0$ получим (10,5), нормальное уравнение центральной гиперквадрики *в* E_4. Каноническая форма (11,2) определяет *эллипсоидическо-эллипсоидическую гиперквадрику*, контур которой (черт. 1), если она дана сопряженными диаметрами A^1A, B^1B, C^1C, D^1 знаем построить в косоугольной аксонометрии, пользуясь расширенной теоремой Пелца. *Эллипсоидическо-гиперболоидическая* гиперквадрика (12,1) изображёна на чертеже 2. На чертеже 3 изображена *гиперболоидическо-гиперболоидическая гиперквадрика 1-ого рода* (уравнение (13,1)) а на чертеже 4 опять *гиперболоидическо-гиперболоидическая гиперквадрика 2-ого рода*, (14,1), Уравнением (15,1) данна *мнимая эллипсоидическо-эллипсоидическая гиперквадрика*.

Для $A = 0$, $A_{55} \neq 0$ *получаем конические гипервардики с тремя возможными каноническими формами* (16,3а), (16,3в), (16,3с) и первые две изображёны на чертежах 5, 6, 7, третья геометризуется как точка.

Соотношением (17,10) данна нормальная форма *параболоидических гиперквадрик*. Канонической формой (18,1) дана *эллипсоидическо-параболоидическая гиперквадратика* (черт. 7), формой (19,1) *гиперболоидическо-параболоидическая гиперквадрика 2-ого рода*.

В дальнейшей статье сделаем метрическую классификацию и конструктивные построения гиперквадрик, *центр которых выполняет определённую фигуру*.

Zur metrischen Klassifikation der Zentralhyperkvadrik im $\dot{E}_4$

Doz. Dr. M. Harant

Zusammenfassung

Es sei $[0; x_1, x_2, x_3, x_4]$ eine ortogonale Basis im vierdimensionalen euklidischen Raum und x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) seien homogene koordinaten des Punktes $B(x_i)$ dieses Raumes. Dann ist durch die Relation [1, 1] die kvadratische Variete V_3^2 — Hyperkvadrik im E_4 gegeben, wobei die realen Koeffizienten a_{ik} die Beziehungen $a_{ik} = a_{ik}$ erfüllen.

Nach Einführung passender Bezeichnungen [1, 2], [1, 5] leiteten wir die Gleichung [4, 2] der berührender Tangentialhyperebene im Punkte der Hyperquadrik ab, und ebenso [6, 3] die Gleichung der Polarhyperebene sed Punktes $°B(°x_i)$ bezüglich der Hyperkvadrik. Für die Richtungskosinen $\cos \alpha_0$, $\cos \beta_0$, $\cos \gamma_0$, $\cos \delta_0$ der Hauptdurchmesser ist die Beziehung [7, 3] erfüllt, wobei für λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die bekannte Sekulärgleichung [7, 4] gilt. Die Relation [9, 3] bestimmen die Koordinanten des Mittelpunktes der Hyperkvadrik, wo A_{ik} Subdeterminanten des Determinanten A sind, welcher aus Koeffizienten der Relation [1, 1] zusammengesetzt ist.

Ist $A \neq 0$, dann ist die Hyperkvadrik regulär, ist $A = 0$ dann ist die Hyperkvadrik singulär.

Ist $A_{55} \neq 0$, dann handelt sich un Zentralhyperkvadriken mit dem Mittelpunkt im Endlichen.

Ist $A_{55} = 0$, aber $A_{5i} \neq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), dann ist der Mittelpunkt uneigentlich.

Ist $A_{51} = A_{52} = A_{53} = A_{54} = 0$, so ist der Mittelpunkt unbestimmt. Die Mittelpunkte sind Punkte eines Zentralgebildes, und zwar: ist die Valenz h'der Matrix des Systems [9,1] $h' = 3$, dann bestimmen die Mittelpunkte die Zentralachse der Hyperkvadrik, ist sie $h' = 2$ bestimmen sie die Zentralebene, bei $h' = 1$ handelt es sich um einen Zentralraum und nur wenn der Koeffizient $a_{55} = 0$, ist der Mittelpunkt umbestimmt.

Unter der Voransetzung $A_{55} \neq 0$, erhalten wir nach Durchführung den Transformationen [10, 1] und [10, 3] eine Normalgleichung der Zentralhyperkvadrik im E_4. Die kanonische Form [11, 2] bestimmt die elipsoidisch-elipsoidische Hyperkvadrik deren Umriß (Bild 1) wir mit Benutzung des erweiterten Satzes von Pelz in der klinogonalen Axonometrie konstruieren können, wenn sie durch konjugierte Durchmesser A^1A, B^1B, C^1C, D^1D bestimmt ist. Die elipsoidisch-hyperboloidische Hyperkvadrik [12, 1] ist auf dem Bilde 2 abgebildet. Auf dem Bilde 3 ist die hyperboloidisch-hyperboloidische Hyperkvadrik erster Art mit der Gleichung [13, 1] und auf dem Bilde 4 wieder die hyper-

boloidisch-hyperboloidische Hyperkvadrik der zweiten Art mit der Gleichung [14, 1] abgebildet. Die Gleichung [15, 1] bestimmt die immaginäre elipsoidisch- elipsoidische Hyperkvadrik.

Wenn $A = 0$, $A_{55} = 0$ ist, so bekommen wir die Hyperkegel mit den drei möglichen kanonischen Formen [16, 3*a*], [16, 3*b*], [16, 3*c*] von welchen die beiden ersten auf die Bilde 5,6 abgebildet sind, die dritte besitzt nur einen realen Punkt.

Der Normalpunkt der paraboloidischen Hyperkvadrik ist durch [17, 10] bestimmt.

Durch die kanonische Form [18, 1] bestimmt die elipsoidisch-paraboloidische Hyperkvadrik (Bild 7), die Form [19, 1] die hyperboloidisch-paraboloidische Hyperkvadrik erster Art (Bild 8) und die Relation [20, 1] bestimmt die hyperboloidisch-paraboloidische Hyperkvadrik zweiter Art.

In der nächsten Abhandlung wollen wir metrische Klassifikation und Konstruktionen den Hyperkvadriken mit bestimmten Zentralgebilden durchführen.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. IV-VI MATHEMATICA 1956

O kongruenciách na distributívnych sväzoch

M. KOLIBIAR

(Venované akademikovi J. Hroncovi k jeho 75. narodeninám)

Pod sväzom v celej práci rozumieme distributívny sväz (označenie S).

Ak sú R, R' rozklady množiny M, $R \leqq R'$ značí, že $R(R')$ je zjemnením (zákrytom) rozkladu $R'(R)$. Najväčšie spoločné zjemnenie a najmenší spoločný zákryt rozkladov R, R' označíme resp. $R \wedge R'$, $R \vee R'$. Najväčšie spoločné zjemnenie a najmenší spoločný zákryt systému $\{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ rozkladov na M označujeme resp. $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$, $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$. Ak je R rozklad na M a $\overline{R}$ rozklad na R, rozklad $\overline{R}$ určuje prirodzeným spôsobom rozklad R' na $M(R' \geqq R)$. Hovoríme, že R' je *zákryt rozkladu R vynútený rozkladom $\overline{R}$* (pozri [1]). Rozklad R daný kongruenciou na sväze S nazývame *vytvorujúcim rozkladom* na S. Príslušný faktorový sväz označujeme S/R. Ak $x \in S$, $\overline{x}$ značí prvok v S/R, pre ktorý $x \in \overline{x}$. Ak $x_1, x_2 \in \overline{x}$, píšeme $x_1 \equiv x_2(R)$.

Ak je A konvexný podsväz v S, označíme J_A (J^A) prenik všetkých ideálov (duálnych ideálov) obsahujúcich množinu A. Zrejme x je prvkom ideálu J_A (duálneho ideálu J^A) vtedy a len vtedy, keď existuje prvok $a \in A$, pre ktorý $x \leqq a(x \geqq a)$. Ak $A = \{a\} (a \in S)$, používame označenie J_a, J^a (hlavný ideál a hlavný duálny ideál).

Ak sú A, B konvexné podsväzy v S, $A \cap B$ bude značiť množinový prenik konvexných podsväzov A, B; znakom $A \cup B$ označíme najmenší konvexný podsväz obsahujúci množiny A, B (prenik všetkých konvexných podsväzov obsahujúcich obidve množiny).

Ak je A konvexný podsväz v S, existuje aspoň jeden vytvorujúci rozklad na S s triedou A. Znakom $\underline{R}(A)$ označíme najmenší vytvorujúci rozklad na S, v ktorom sa množina A anuluje (zrejme A tvorí triedu v $\underline{R}(A)$), znakom $\overline{R}(A)$ najväčší vytvorujúci rozklad s triedou A. Ak je J ideál v S, sú rozklady $\underline{R}(J)$, $\overline{R}(J)$ definované takto (pozri [2]): $x \equiv y(\underline{R}(J))$ vtedy a len vtedy, keď existuje prvok $a \in J$, pre ktorý platí $a \cup x = a \cup y$. $x \equiv y(\overline{R}(J))$ vtedy a len vtedy, keď $a \in S$, $a \cap (x \cap y) \in J \Rightarrow a \cap (x \cup y) \in J$. (Alebo podľa [3] $x \equiv y(\overline{R}(J))$, ak pre $a \in S$ platí $a \cap x \in J \Leftrightarrow a \cap y \in J$.) V prípade, že J je duálny ideál, definujú sa rozklady $\underline{R}(J)$, $\overline{R}(J)$ duálne. Ak je J ideál (duálny ideál), nazývame $\underline{R}(J)$ *minimálnym vytvorujúcim rozkladom podľa ideálu* (duálneho ideálu) J.

Konvexný podsväz A v S nazývame *charakteristickým*, ak platí $\underline{R}(A) = \overline{R}(A)$ (t. j. existuje jediný vytvorujúci rozklad na S s triedou A).

V práci [2] uvažoval G. Ja. Areškin o distributívnych sväzoch S s najmenším prvkom O, ktoré spĺňajú podmienku:

(J) *Každý vytvorujúci rozklad na S je jednoznačne určený svojím jadrom (t. j. príslušným ideálom).*

V spomenutej práci je dokázaná veta (uvedieme ju v inej formulácii): (A) *Nutná a postačujúca podmienka, aby distributívny sväz s O spĺňal podmienku (J), je, aby sväz S bol relatívne komplementárny.*[1])

Pri svojich úvahách Areškin použil pojem *slabo komplementárneho sväzu.* Takto sa nazýva sväz S s najmenším prvkom O, spĺňajúci podmienku: K ľubovoľným prvkom $x, y \in S$, $x \neq y$, existuje taký prvok $z \in S$, že platí $z \cap (x \cap y) = 0$, $z \cap (x \cup y) \neq 0$.

Poznámka. Ľahko vidíme, že táto podmienka je ekvivalentná s podmienkou (porovnaj s [3]):

Ak $x, y \in S$, $x \neq y$, existuje taký prvok $z \in S$, že platí buď $z \cap x = 0$, $z \cap y \neq 0$, buď $z \cap x \neq 0$, $z \cap y = 0$.

V ods. 2 ukážeme, že nutná a postačujúca podmienka, aby v distributívnom sväze S (pritom nemusí mať prvok O) každý vytvorujúci rozklad bol jednoznačne určený ľubovoľnou zo svojich tried je, aby S bol relatívne komplementárny (veta 2.6). V ods. 1 uvedieme niektoré jednoduché vety o vytvorujúcich rozkladoch na S (napríklad veta 1.5).

1.1. *Nech J je ideál v distributívnom sväze. Pre vytvorujúci rozklad $\underline{R}(J)$ platí:* $\underline{R}(J) = \bigvee_{a \in J} \underline{R}(J_a)$.

Poznámka. Podobne pre duálny ideál J platí $\underline{R}(J) = \bigvee_{a \in J} \underline{R}(J^a)$.

Dôkaz. Pre každý prvok $a \in J$ zrejme platí $\underline{R}(J_a) \leq \underline{R}(J)$. Z toho vyplýva $\bigvee_{a \in J} \underline{R}(J_a) \leq \underline{R}(J)$. Obrátene, nech $x \equiv y(\underline{R}(J))$. Potom existuje prvok $a \in J$, pre ktorý platí $a \cup x = a \cup y$, t. j. $x \equiv y(\underline{R}(J_a))$, teda aj $x \equiv y(\bigvee_{a \in J} \underline{R}(J_a))$. Z toho vyplýva $\underline{R}(J) \leq \bigvee_{a \in J} \underline{R}(J_a)$.

1.2. *Nech R je vytvorujúci rozklad na S. Nech $\{A_\gamma\}_{\gamma \in I}$ je množina všetkých tried rozkladu R. Potom $R = \bigvee_{\gamma \in I} \underline{R}(A_\gamma)$.*

Dôkaz je zrejmý.

1.3. *Nech R je vytvorujúci rozklad na S a R^* vytvorujúci rozklad na sväze $S/R = S^*$. Potom zákryt rozkladu R, vynútený rozkladom R^*, je vytvorujúci rozklad na S.*

Tvrdenie je zrejmé.

1.4. *Nech A je trieda vytvorujúceho rozkladu R na sväze S. Potom existuje vytvorujúci rozklad R_1, ktorého jednou triedou je ideál J_A a vytvorujúci rozklad R_2, ktorého jednou triedou je duálny ideál J^A a platí $R = R_1 \wedge R_2$.*

Dôkaz. Prvky sväzu $S/R = S^*$ označujme $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$, triedu A znakom $\bar{a}$. Ideál $J_{\bar{a}}$ a duálny ideál $J^{\bar{a}}$ definujú na sväze S^* vytvorujúce rozklady resp. $R_1^* = \underline{R}(J_{\bar{a}})$, $R_2^* = \underline{R}(J^{\bar{a}})$. Nech R_1, R_2 sú zákryty rozkladu R, vynútené roz-

[1]) Pozri aj [3], [5].

kladmi resp. R_1^*, R_2^*. Podľa 1.3 sú R_1, R_2 vytvorujúce rozklady na S a zrejme $R \leqq R_1 \wedge R_2$. Obrátene, nech $x \equiv y(R_1 \wedge R_2)$. Potom $x \equiv y(R_1)$, $x \equiv y(R_2)$, t. j. $\bar{x} \equiv \bar{y}(R_1^*)$, $\bar{x} \equiv \bar{y}(R_2^*)$. Vo sväze S^* platí potom $\bar{a} \cup \bar{x} = \bar{a} \cup \bar{y}$, $\bar{a} \cap \bar{x} = \bar{a} \cap \bar{y}$, z čoho vyplýva $\bar{x} = \bar{y}$ (pretože sväz S^* je distributívny), t. j. $x \equiv y(R)$. Z toho vyplýva $R_1 \wedge R_2 \leqq R$, a teda $R = R_1 \wedge R_2$.

Nech J je trieda rozkladu R_1, obsahujúca množinu A. Zrejme $J_A \subset J$. Ak $x \in J$, platí $\bar{x} \leqq \bar{a}$; v triede A existuje potom prvok a_1, pre ktorý platí $x \leqq a_1$. Teda $x \in J_A$, a preto $J \subset J_A$. Ideál J_A je teda triedou v rozklade R_1. Rovnako sa ukáže, že J^A je triedou v rozklade R_2.

Dôsledky. 1. Nech A je konvexný podsväz v S. Potom $\underline{R}(A) = \underline{R}(J_A) \wedge \underline{R}(J^A)$, $\bar{R}(A) = \bar{R}(J_A) \wedge \bar{R}(J^A)$.

Dôkaz. Nech R je ľubovoľný vytvorujúci rozklad s triedou A. Vyjadrime podľa 1.4 $R = R_1 \wedge R_2$. Platí $\underline{R}(J_A) \leqq R_1 \leqq \bar{R}(J_A)$, $\underline{R}(J^A) \leqq R_2 \leqq \bar{R}(J^A)$, z čoho vyplýva $\underline{R}(J_A) \wedge \underline{R}(J^A) \leqq R \leqq \bar{R}(J^A) \wedge \bar{R}(J_A)$. Z tohto vzťahu vyplýva ihneď dané tvrdenie.

Poznámka. Ľahko vidíme, že $x \equiv y(\underline{R}(A))$ vtedy a len vtedy, ak existujú prvky $a, b \in A$, pre ktoré platí $a \cup x = a \cup y$, $b \cap x = b \cap y$ (porovnaj [4]).

Z dôsledku 1 vyplýva bezprostredne:

2. Ak je v S každý ideál a každý duálny ideál charakteristický, potom každý konvexný podsväz v S je charakteristický.

Platí teda: *V distributívnom sväze je každý konvexný podsväz charakteristický vtedy a len vtedy, keď každý ideál a každý duálny ideál je charakteristický.*

1.5. Veta. *Nech* **S** *je sväz (všetkých) vytvorujúcich rozkladov na S. Sväz* **S** *je vytvorený minimálnymi vytvorujúcimi rozkladmi podľa hlavných ideálov a duálnych hlavných ideálov sväzu S.*

Dôkaz. Veta vyplýva z 1.2, 1.4 a 1.1.

1.6. *Nech A je konvexný podsväz v S. Nech R je vytvorujúci rozklad na A. Potom existuje taký vytvorujúci rozklad R' na S, že každá trieda rozkladu R je súčasne triedou v rozklade R'.*

Stručne budeme hovoriť, že *vytvorujúci rozklad R' je rozšírením vytvorujúceho rozkladu R na sväz S.*

Dôkaz. Nech $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je množina všetkých tried rozkladu R. Zostrojme na sväze S vytvorujúci rozklad $R' = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \underline{R}(A_\gamma)$. Tvrdíme, že R' je hľadaným vytvorujúcim rozkladom.

Zrejme sa každá trieda A_γ rozkladu R anuluje v rozklade R'. Stačí teraz dokázať: 1. Ak $x, y \in A$ a $x \equiv y(\underline{R}(A_\gamma))$²) pre niektoré $\gamma \in \Gamma$, potom na sväze A platí $x \equiv y(R)$. 2. Ak $u \in A$, $x \in S$ a $u \equiv x(\underline{R}(A_\gamma))$²) pre niektoré $\gamma \in \Gamma$, potom $x \in A$.

V prípade 1 existujú prvky $a, b \in A_\gamma$, pre ktoré platí $a \cup x = a \cup y$, $b \cap x = b \cap y$. Teda vo sväze A platí $x \equiv y(\underline{R}(A_\gamma))$³), a preto $x \equiv y(R)$. V prípade 2 existujú prvky $a, b \in A_\gamma$, pre ktoré platí $a \cup u = a \cup x$, $b \cap u = b \cap x$. Potom $b \cap u \leqq \leqq x \leqq a \cup u$, $b \cap u \in A$, $a \cup u \in A$, teda $x \in A$.

Dôsledok. *Ak má S tú vlastnosť, že v S je každý konvexný podsväz charakteristický, potom túto vlastnosť má každý konvexný podsväz sväzu S.*

²) $\underline{R}(A_\gamma)$ značí tu vytvorujúci rozklad na S.

³) Tu značí $\underline{R}(A_\gamma)$ vytvorujúci rozklad na A.

1.7. Ukážeme ešte, že tvrdenie dôsledku 1 v 1.4 možno zovšeobecniť.

1.7.1. *Nech A, B sú konvexné podsväzy v S a nech $A \cap B \neq \emptyset$. Ak $a \in A$, $b \in B$, potom v intervale $< a \cap b, a \cup b >$ existuje prvok $z \in A \cap B$.*

Dôkaz. Označme $a \cap b = u$, $a \cup b = v$. Nech $x \in A \cap B$. Potom $a \cap x \in A$, $a \cup x \in A$, $a \cap x \leqq u \cup x = (a \cup x) \cap (b \cup x) \leqq a \cup x$, teda $u \cup x \in A$. Podobne, $u \cup x \in B$. Teda $u \cup x \in A \cap B$. Rovnako sa ukáže: Ak $y \in A \cap B$, potom $v \cap y \in A \cap B$. Z toho vyplýva, že $z = v \cap (u \cup x) \in A \cap B$; pritom $z \in < u, v >$.

1.7.2. *Nech A, B sú konvexné podsväzy v S. Konvexný podsväz $A \cup B$ sa skladá z tých a len tých prvkov $x \in S$, pre ktoré existujú také prvky $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, že platí $a_1 \leqq a_2$, $b_1 \leqq b_2$, $a_1 \cap b_1 \leqq x \leqq a_2 \cup b_2$.*

Tvrdenie je zrejmé.

1.7.3. *Nech A, B sú konvexné podsväzy v S, $A \cap B \neq \emptyset$. Potom $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}(A) \wedge \underline{R}(B)$, $\underline{R}(A \cup B) = \underline{R}(A) \vee \underline{R}(B)$.*[4])

Poznámka. Na jednoduchom príklade ľahko vidíme, že uvedené vzťahy nemusia platiť, ak v nich namiesto $\underline{R}$ píšeme $\overline{R}$. (V prípade, že A je ideál a B duálny ideál, platí podľa 1.4 prvý vzťah aj pre $\overline{R}$; druhý vzťah je v tomto prípade zrejmý.)

Dôkaz. Zrejme $\underline{R}(A \cap B) \leqq \underline{R}(A)$, $\underline{R}(B) \leqq \underline{R}(A \cup B)$, teda $\underline{R}(A \cap B) \leqq \leqq \underline{R}(A) \wedge \underline{R}(B)$, $\underline{R}(A) \vee \underline{R}(B) \leqq \underline{R}(A \cup B)$.

Ak $x \equiv y(\underline{R}(A) \wedge \underline{R}(B))$, existujú prvky $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, pre ktoré platí $a_1 \cup x = a_1 \cup y$, $a_2 \cap x = a_2 \cap y$; $b_1 \cup x = b_1 \cup y$, $b_2 \cap x = b_2 \cap y$. Z toho vyplýva $(a_1 \cup b_1) \cup x = (a_1 \cup b_1) \cup y$, $(a_1 \cap b_1) \cup x = (a_1 \cap b_1) \cup y$. Podľa 1.7.1 v intervale $< a_1 \cap b_1, a_1 \cup b_1 >$ existuje prvok $c \in A \cap B$. Pretože $c \cup (a_1 \cap b_1) = c$, platí $c \cup x = c \cup y$. Rovnako sa ukáže, že existuje prvok $d \in A \cap B$, pre ktorý platí $d \cap x = d \cap y$. Teda $x \equiv y(\underline{R}(A \cap B))$. Úhrnom, $\underline{R}(A) \wedge \underline{R}(B) \leqq \underline{R}(A \cap B)$, teda $\underline{R}(A) \wedge \underline{R}(B) = \underline{R}(A \cap B)$.

K dôkazu vzťahu $\underline{R}(A \cup B) \leqq \underline{R}(A) \vee \underline{R}(B)$ stačí dokázať, že pre prvky $x, y \in A \cup B$ platí $x \equiv y(\underline{R}(A) \vee \underline{R}(B))$.

Nech teda $x, y \in A \cup B$. Podľa 1.7.2 existujú také prvky $a_i \in A$, $b_i \in B$, $i = 1, 2, 3, 4$, že platí $a_1 \cap b_1 \leqq x \leqq a_2 \cup b_2$, $a_3 \cap b_3 \leqq y \leqq a_4 \cup b_4$, $a_1 \leqq a_2$, $b_1 \leqq b_2$, $a_3 \leqq a_4$, $b_3 \leqq b_4$. Podľa 1.7.1 existuje v intervale $< a_1 \cap a_3 \cap b_1 \cap b_3, (a_1 \cap a_3) \cup \cup (b_1 \cap b_3) >$ prvok $c \in A \cap B$. Označme $a = a_1 \cap a_3 \cap c$, $b = b_1 \cap b_3 \cap c$, $a' = = a_2 \cup a_4 \cup c$, $b' = b_2 \cup b_4 \cup c$. Prvky x, y, c ležia v intervale $< a \cap b, a' \cup b' >$; pritom $a, a' \in A$, $b, b' \in B$. Stačí dokázať, že

$$a \cap b \equiv a' \cup b'(\underline{R}(A) \vee \underline{R}(B)). \tag{1}$$

Z rovností $b \cap (a \cap b) = b \cap a$, $c \cup (a \cap b) = c = c \cup a$ $(b, c \in B)$ vyplýva

$$a \cap b \equiv a(\underline{R}(B)). \tag{2}$$

Z rovností $a \cap a = a \cap c$, $c \cup a = c \cup c$ $(a, c \in A)$ vyplýva

$$a \equiv c(\underline{R}(A)). \tag{3}$$

---

[4]) V prípade, že A, B sú ideály, sú tieto vzťahy dokázané v [4].

Podobne, z rovností $c \cap c = c \cap b'$, $b' \cup c = b' \cup b'$ vyplýva

$$c \equiv b'(\underline{R}(B)) \tag{4}$$

a z rovností $c \cap b' = c \cap (a' \cup b')$, $a' \cup b' = a' \cup (a' \cup b')$ vyplýva

$$b' \equiv a' \cup b'(\underline{R}(A)). \tag{5}$$

Vzťah (1) vyplýva bezprostredne zo vzťahov (2) až (5).

2.1. *Nech J je ideál v S. Nutná a postačujúca podmienka, aby platilo $\underline{R}(J) = \overline{R}(J)$ je, aby sväz $S/\underline{R}(J) = S^*$ bol slabo komplementárny.*

Dôkaz. a) Nech S^* je slabo komplementárny. Triedu J označme znakom $\overline{O}$. Nech $\overline{x}, \overline{y} \in S^*$, $\overline{x} \neq \overline{y}$. Potom existuje taký prvok $\overline{a} \in S^*$, že $\overline{a} \cap \overline{x} \cap \overline{y} = \overline{0}$, $\overline{a} \cap (\overline{x} \cup \overline{y}) \neq \overline{O}$. Pre prvky $a, x, y \in S$, patriace do tried $\overline{a}, \overline{x}, \overline{y}$ platí potom $a \cap x \cap y \in J$, $a \cap (x \cup y) \notin J$, teda $x \not\equiv y(\overline{R}(J))$. Z toho vyplýva, že $x \equiv y(\overline{R}(J)) \Rightarrow x \equiv y(\underline{R}(J))$, t. j. $\overline{R}(J) = \underline{R}(J)$.

b) Nech $\overline{R}(J) = \underline{R}(J)$. Nech $\overline{x}, \overline{y} \in S^*$, $\overline{x} \neq \overline{y}$, $x \in \overline{x}$, $y \in \overline{y}$. Pretože $x \not\equiv y(\overline{R}(J))$, existuje taký prvok $a \in S$, že $a \cap (x \cap y) \in J$, $a \cap (x \cup y) \notin J$. Platí potom $\overline{a} \cap (\overline{x} \cap \overline{y}) = \overline{O}$, $\overline{a} \cap (\overline{x} \cup \overline{y}) \neq \overline{O}$.

2.2. *Nech S je relatívne komplementárny. Nech J je ideál v S. Potom sväz $S/\underline{R}(J) = S^*$ je slabo komplementárny.*

Dôkaz. Nech $\overline{x}, \overline{y} \in S^*$, $\overline{x} \neq \overline{y}$. Potom $\overline{x} \cap \overline{y} < \overline{x} \cup \overline{y}$. Ak $\overline{x} \cap \overline{y} = \overline{0}$, aspoň jeden z prvkov $\overline{x}, \overline{y}$ je rôzny od $\overline{O}$. Nech napr. $\overline{x} \neq \overline{O}$. Potom platí $\overline{x} \cap (\overline{x} \cap \overline{y}) = \overline{O}$, $\overline{x} \cap (\overline{x} \cup \overline{y}) = \overline{x} \neq \overline{O}$.

Nech $\overline{O} < \overline{x} \cap \overline{y}$. Potom existujú prvky $u \in \overline{O}$, $t \in \overline{x} \cap \overline{y}$, $v \in \overline{x} \cup \overline{y}$, pre ktoré platí $u < t < v$. Nech z je komplement prvku t v intervale $< u, v >$. Keby bolo $\overline{z} = \overline{O}$, platilo by $\overline{z} \cup \overline{t} = \overline{t}$, t. j. $v = z \cup t \in \overline{x} \cap \overline{y}$, čo je spor. Teda $\overline{z} \neq \overline{O}$. Platí teraz $\overline{z} \cap (\overline{x} \cap \overline{y}) = \overline{z \cap t} = \overline{O}$, $\overline{z} \cap (\overline{x} \cup \overline{y}) = \overline{z \cap v} = \overline{z} \neq \overline{O}$. Tým sme dôkaz ukončili.

2.3. *V relatívne komplementárnom (distributívnom) sväze každý ideál (duálny ideál) je charakteristický.*

Dôkaz. Pre ideály vyplýva tvrdenie z 2.2 a 2.1. Tvrdenie o duálnych ideáloch vyplýva z duality.

2.4. *V relatívne komplementárnom (distributívnom) sväze každý konvexný podsväz je charakteristický.*

Dôkaz. Veta vyplýva z 2.3 a 1.4 (dôsledok 2).

2.5. *Nech každý konvexný podsväz v S je charakteristický. Potom S je relatívne komplementárny.*

Dôkaz. Stačí dokázať, že každý hlavný duálny ideál v S je relatívne komplementárny. Nech J je hlavný duálny ideál v S. Podľa dôsledku 1.6 v podsväze J každý konvexný podsväz je charakteristický. Z toho vyplýva, že v J je splnená podmienka (J), teda podľa vety (A) je J relatívne komplementárny.

2.6. Veta. *Nutná a postačujúca podmienka, aby v (distributívnom) sväze S každý konvexný podsväz bol charakteristický je, aby S bol relatívne komplementárny.*

Dôkaz. Veta vyplýva z 2.4 a 2.5.

Literatúra

[1] **Borůvka O.**, Úvod do theorie grup. Praha, 1952.
[2] **Арешкин Г. Я.**, Об отношениях конгруенции в дистрибутивных структурах с нулевым элементом. Доклады Акад. Наук СССР, 90, 1953, 485—486.
[3] **Pierce R. S.**, Homomorphisms of semi-groups. Ann. of Math., 59, 1954, 287—291.
[4] **Якубик Ян**, Системы отношений конгруентности в структурах. Чехосл. мат. журнал, 4 (79), 1954, 248—273.
[5] **Hashimoto J.**, Ideal theory for Lattices. Math. Japonicae, 1952, 149—186.

Do redakcie dodané 10. IV. 1956

Об отношениях конгруенции в дистрибутивных структурах

Милан Колибиар

Резюме

В целой работе S обозначает дистрибутивную структуру. *Г. Я. Арешкин* [2] доказал следующую теорему: (A) *На дистрибутивной структур (S с нулевым элементом всякое отношение конгруенции однозначно определено своим ядром (т. е. принадлежащим идеалом) тогда и только тогда, если структура S является обобщенной булевской структурой.*

В настоящей работе не требуется существование нулевого элемента в S и вместо ядра пользуемся смежным классом отношения конгруенции. Доказывается следующая теорема:

На дистрибутивной структуре S всякое отношение конгруенции однозначно определено произвольным своим смежным классом тогда и только тогда, если S структура с относительными дополнениями.[1])

Для доказательства этой теоремы пользуемся теоремой (A), понятием *слабо-дополнительной структуры*, введенным Г. Я. Арешкиным и следующими леммами:

1.4. Пусть A смежный класс отношения конгруенции R на (дистрибутивной) структуре S. Класс A является пересечением идеала J_A и дуального идеала J^A. Имеются отношения конгруенции R_1, R_2 с смежными классами J_A, J^A (в этом порядке), для которых имеет место $R = R_1 \wedge R_2$. ($R_1 \wedge R_2$ обозначает общее наибольшее уплотнение R_1 и R_2, $R_1 \vee R_2$ имеет двойственное значение.)

1.6. Пусть A выпуклая подструктура в S, R отношение конгруенции на структуре A. Существует такое отношение конгруенции R' на структуре S, что всякий смежный класс отношения конгруенции R является одновременно смежным классом отношения конгруенции R'.

Связь с понятием слабо-дополнительной структуры дана следующими леммами (Для дистрибутивных структур с нулевым элементом эти теоремы находятся в иной формулировке в работе [2]. Если J идеал структуры S, $\underline{R}(J)$ ($\overline{R}(J)$) обозначает наименьшее (наибольшее) отношение конгруенции с смежным классом J):

2.1. Пусть J — идеал структуры S. $\underline{R}(J) = \overline{R}(J)$ тогда и только тогда, если структура $S/\underline{R}(J)$ слабо-дополнительна.

2.2. Пусть S-структура с относительными дополнениями, пусть J — идеал структуры S. Структура $S/\underline{R}(J)$ слабо-дополнительна.

В 1. части работы доказаны некоторые теоремы об отношениях конгруенции на S, как например:

---

[1]) В формулировке этой теоремы и нескольких других теорем пользуемся понятием *характеристической выпуклой подструктуры*. Этим разумеется выпуклая подструктура A, для которой имеется только одно отношение конгруенции, содержащее A в качестве смежного класса.

Структура всех отношений конгруенции на S порожденна минимальными отношениями конгруенции определенными главными идеалами и дуальными главными идеалами. (Теорема 1.5.)

Если A, B выпуклые подструктуры в S, $A \cap B$ обозначает пересечение A и B, $A \cup B$ — минимальную выпуклую подструктуру, содержащую A и B. Если $A \cap B \neq \neq 0$, имеем $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}(A) \wedge \underline{R}(B)$, $\underline{R}(A \cup B) = \underline{R}(A) \vee \underline{R}(B)$. (Для $\overline{R}$ эти равенства не всегда справедливы.)

Über Kongruenzen in distributiven Verbänden

Milan Kolibiar

Zusammenfassung

In der ganzen Arbeit bedeutet S einen distributiven Verband. G. Ja. Areschkin hat in [2] folgenden Satz bewiesen:

(A) *Im distributiven Verbande S mit Nullelement ist jede Kongruenz durch ihren Kern (d. h. durch ihr zugehöriges Ideal) dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn S relativ komplementär ist.*

In der vorliegenden Arbeit verlangt man nicht die Existenz des Nullelements in S und statt des Kongruenzkernes benutzt man eine beliebige Klasse der Kongruenz. Dabei wird folgender Satz (2.6) bewiesen:

Im distributiven Verbande S ist jede Kongruenz durch jede beliebige ihrer Klassen dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn S relativ komplementär ist.[1])

Zum Beweis dieses Satzes benutzt man den Satz (A), sowie den von Areschkin eingeführten Begriff des schwach komplementären Verbandes und folgende Hilfssätze:

1.4. A sei eine Klasse der Kongruenz R in dem (distributiven) Verbande S. Die Klasse A ist der Durchschnitt des Ideals J_A und des dualen Ideals J^A. Es existieren die Kongruenzen R_1, R_2 mit den Klassen J_A bezw. J^A, so daß $R = R_1 \wedge R_2$ gilt. ($R_1 \wedge R_2$ bedeutet die größte gemeinsame Verfeinerung der Kongruenzen R_1, R_2. $R_1 \vee R_2$ hat duale Bedeutung.)

1.6. A sei ein konvexer Unterverband in S, R eine Kongruenz in dem Verbande A. Dann existiert eine solche Kongruenz R' in dem Verbande S, daß jede Klasse der Kongruenz R zugleich eine Klasse der Kongruenz R' ist.

Der Zusammenhang mit dem Begriffe des schwach komplementären Verbandes ist durch folgende Hilfssätze gegeben (Für distributive Verbände mit O sind diese Sätze in einer anderen Formulation in [2] enthalten. Bezeichnet J das Ideal in S, bedeutet $\underline{R}(J)$ und $\overline{R}(J)$ die minimale, bezw. die maximale Kongruenz mit der Klasse J):

2.1. Es sei J das Ideal in S. $\underline{R}(J) = \overline{R}(J)$ dann und nur dann, wenn der Verband $S/\underline{R}(J)$ schwach komplementär ist.

2.2. S sei relativ komplementär, J sei ein Ideal in S. Der Verband $S/\underline{R}(J)$ ist schwach komplementär.

Im 1. Teile der Abeit sind einige Sätze über Kongruenzen auf S bewiesen, wie z. B.:

Der Verband aller Kongruenzen in S wird durch die zu den Hauptidealen und dualen Hauptidealen gehörigen minimalen Kongruenzen erzeugt. (1.5. Satz.)

Bezeichnen A und B konvexe Unterverbände in S, bedeutet $A \cap B$ den Durchschitt von A, B, $A \cup B$ den minimalen konvexen Unterverband C, für welchen $A \subset C$, $B \subset C$ gilt. Wenn $A \cap B \neq 0$, bekommt man (1.7.3) $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}(A) \wedge \underline{R}(B)$, $\underline{R}(A \cup B) = \underline{R}(A) \vee \underline{R}(B)$. (Für $\overline{R}$ gelten solche Gleichheiten nicht.)

---

[1]) In der Formulierung dieses Satzes, sowie einiger anderer Sätze wird der Begriff des *charakteristischen konvexen Unterverbandes* verwendet. Man versteht darunter den konvexen Unterverband A, zu dem es eine einzige Kongruenz gibt, welche A als Klasse enthält.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. IV-VI MATHEMATICA 1956

Grafový izomorfizmus multisväzov

Dr. J. JAKUBÍK, Košice

(Venované akademikovi J. Hroncovi k jeho 75. narodeninám)

G. Birkhoff položil otázku, kedy z izomorfizmu grafov sväzov S, S' vyplýva, že sväzy S, S' sú izomorfné (pozri [1], problém 8). Táto otázka bola vyriešená pre distributívne sväzy v práci [3] a inou metódou pre modulárne sväzy v práci [4]. Na jej riešenie je potrebné charakterisovať všetky sväzy S', ktoré sú grafove izomorfné s daným sväzom S. Výsledok môžeme formulovať takto:

(A) *Nutná a postačujúca podmienka, aby diskrétne modulárne sväzy* S, S' *boli grafove izomorfné, je: existujú sväzy* A, B *tak, že platí* $S \sim A \times B$ (1), $S' \sim A \times \tilde{B}$ (2) ($\tilde{B}$ je sväz duálny ku sväzu B), *pričom prvky* $x \in S$, $x' \in S'$, *ktoré si odpovedajú v grafovom izomorfizme, zobrazia sa v izomorfizme* (1), *resp.* (2) *na tú istú dvojicu* (a, b), $a \in A$, $b \in B$.

V nedávno vydanej práci [2] M. Benado zaviedol zaujímavé zovšeobecnenie pojmu sväz, ktorý nazval *multisväzom*. Multisväz S možno definovať ako čiastočne usporiadanú množinu (vyhovujúcu určitým dodatočným podmienkam) a zároveň ako algebraický systém s dvoma binárnymi operáciami $\wedge$, $\vee$, ktoré však na rozdiel od sväzových operácií nemusia byť definované pre všetky dvojice a, $b \in S$ (inak povedané: pre niektorú dvojicu a, $b \in S$ $a \vee b$, resp. $a \wedge b$ môže byť prázdna množina) a ďalej tieto operácie nemusia byť jednoznačné. Zároveň bol v práci [2] uvedený rad typických príkladov čiastočne usporiadaných množín, ktoré sú multisväzmi a pritom nie sú sväzmi. Dôležitým príkladom je štvorrozmerný priestor, študovaný v špeciálnej teórii relativity, ktorý je určitým prirodzeným spôsobom čiastočne usporiadaný.

V tejto poznámke sa skúma grafový izomorfizmus distributívnych multisväzov. Dokazuje sa, že za určitých predpokladov (ak totiž $a \wedge b$, $a \vee b$ sú neprázdne množiny pre každú dvojicu prvkov a, $b \in S$ a podobne pre S') platí pre distributívne multisväzy tvrdenie analogické k tvrdeniu vety (A); na príkladoch sa dokazuje, že podobné tvrdenie neplatí pre modulárne multisväzy.

1.

V tomto odseku pripomenieme pre úplnosť základné pojmy, týkajúce sa multisväzov (pozri [2]; označenia sú čiastočne zmenené, najmä preto, aby sa dosiahla väčšia zhoda s označeniami pre čiastočne usporiadané množiny, používanými v knihe [1]).

Čiastočne usporiadaná množina S je multisväz, ak 1) pre každé dva prvky $a, b \in S$ z podmienky $c \in S$, $c \geqq a$, $c \geqq b$ vyplýva existencia (aspoň jedného) prvku $M \in S$, $M \leqq c$, pre ktorý platí $M \geqq a$, $M \geqq b$ (3) a zároveň $x \in S$, $x \leqq M$, $x \geqq a$, $x \geqq b \Rightarrow x = M$(4), 2) platí podmienka duálna k podmienke 1).

Množinu všetkých prvkov $M \in S$, ktoré vyhovujú podmienkam (3) a (4), označíme $a \vee b$; množinu všetkých prvkov $m \in S$, ktoré vyhovujú podmienkam duálnym k (3), (4), označíme $a \wedge b$. (Vo všeobecnosti môže byť množina $a \vee b$, resp. $a \wedge b$ prázdna.)

Pojmy interval a reťazec sú známe z čiastočne usporiadaných množín (pozri [1]). Reťazec r s najmenším prvkom a a s najväčším b nazývame maximálnym, ak nie je vlastnou podmnožinou žiadneho reťazca r' s najmenším prvkom a a s najväčším prvkom b. Hovoríme, že multisväz S je diskrétny, ak každý reťazec v S, majúci najmenší a najväčší prvok, je konečný. Všade v ďalšom znaky S, S' udávajú diskrétne multisväzy. V celom článku (okrem jedného miesta, na ktorom je to výslovne pripomenuté) budeme ďalej predpokladať, že skúmané multisväzy spĺňajú nasledujúcu podmienku (P):

$$(P) \quad x, y \in S \Rightarrow x \wedge y \neq \emptyset \neq x \vee y.$$

Ak $a, b \in S$, $a < b$ a ak neexistuje prvok x, pre ktorý by platilo $a < x < b$, hovoríme, že $<a, b>$ je prvointerval. (Vtedy hovoríme tiež, že prvok a je pokrytý prvkom b, alebo že b pokrýva prvok a.)

Multisväz S je modulárny, ak platí nasledujúca podmienka (σ') a podmienka (σ'') duálna k podmienke (σ') (malé písmená označujú prvky multisväzu S; pozri [2], 4.7.4):

(σ') Ak $<d, a>$, $<d, b>$ sú prvointervaly a ak $M \in a \vee b$, potom $<a, M>$, $<b, M>$ sú prvointervaly.

Ak $a \in x \wedge y$, $b \in x \vee y$, hovoríme, že prvok y je relatívnym komplementom prvku x v intervale $<a, b>$. Multisväz S je distributívny, ak pre každú trojicu prvkov $a, b, x \in S$ z podmienky $a \leqq x \leqq b$ vyplýva, že prvok x má najviac jeden relatívny komplement v intervale $<a, b>$ ([2], str. 338).

Každý distributívny multisväz je zároveň modulárny.

Nech S je modulárny multisväz. Potom platí nasledujúce tvrdenie (π') a tvrdenie k nemu duálne:

(π') Ak $d \in a \wedge b$ a ak $<d, b>$ je prvointerval, potom pre každé $M \in a \vee b$ $<a, M>$ je prvointerval.

Nech $d \in a \wedge b$, $M \in a \vee b$. Hovoríme, že intervaly $<d, b>$, $<a, M>$ (v ľubovoľnom poradí) sú navzájom transponované. Hovoríme, že intervaly $<a, b>$, $<c, d>$ sú navzájom projektívne, ak existujú intervaly $<a_i, b_i>$, $i = 1, \ldots, n$, $<a_0, b_0> = <a, b>$, $<a_n, b_n> = <c, d>$ také, že pre $i = 1, \ldots, n$ intervaly $<a_{i-1}, b_{i-1}>$, $<a_i, b_i>$ sú navzájom transportované. (Z predošlého vyplýva: ak intervaly $<a, b>$, $<c, d>$ modulárneho multisväzu sú navzájom projektívne a ak jeden z nich je prvointerval, potom aj druhý je prvointerval.)

V ďalšom použijeme nasledujúce dôležité tvrdenia:

($T1$) *Nech C_1, C_2 sú maximálne reťazce v modulárnom multisväze S, majúce najmenší prvok a a najväčší prvok b. Potom dĺžky reťazcov C_1, C_2 sú rovnaké a ku každému prvointervalu $<a_1, b_1>$ reťazca C_1 existuje prvointerval $<a_2, b_2>$ reťazca C_2 tak, že prvointervaly $<a_1, b_1>$, $<a_2, b_2>$ sú navzájom projektívne* (pozri [2], veta 4.5).

($T2$) *Nech S je modulárny multisväz, $u \in a \wedge b$, $v \in a \vee b$. Nech $<p_1, p_2>$ je prvointerval obsiahnutý v intervale $<u, a>$ ($<b, v>$). Potom existuje prvointerval $<p_3, p_4>$ obsiahnutý v intervale $<b, v>$ ($<u, a>$) taký, že intervaly $<p_1, p_2>$, $<p_3, p_4>$ sú projektívne.* (pozri [2], veta 4.3).

Priamy súčin (kardinálny súčin) dvoch multisväzov A, B definujeme ako v [1], str. 7 (t. j. pomocou čiastočného usporiadania dvojíc). Ľahko sa dokáže, že priamy súčin $A \times B$ dvoch multisväzov A, B je multisväz. Pojem izomorfizmu pre multisväzy je zrejmý; izomorfizmus multisväzov A, B označíme $A \sim B$. Hovoríme, že multisväz S je priamo nerozložiteľný, ak z každého rozkladu na priamy súčin $S \sim A \times B$ vyplýva, že A alebo B obsahuje jediný prvok.

Ďalej zavedieme označenia týkajúce sa grafového izomorfizmu multisväzov. Ak $<x, y>$ je prvointerval multisväzu S, hovoríme, že dvojica prvkov (x, y) (ktorú berieme do úvahy bez ohľadu na poradie) je *elementárna* (stručne: *e.* dvojica). Nech existuje jednoznačné zobrazenie multisväzu S na multisväz S' (ktoré označíme $S \to S'$) také, že z podmienky $x, y \in S$, $x', y' \in S'$, $x \to x'$, $y \to y'$ vyplýva: (x, y) je *e.* dvojica vtedy a len vtedy, keď (x', y') je *e.* dvojica. Potom hovoríme, že S, S' sú *grafove izomorfné* a že zobrazenie, ktoré berieme do úvahy, je grafový izomorfizmus; píšeme $S \overset{g}{\sim} S'$. Ak pritom $x < y$ a súčasne $x' < y'$ ($y' < x'$) hovoríme, že prvointerval $<x, y>$ sa pri uvedenom grafovom izomorfizme zachová (prevráti). Všeobecnejšie, interval $<u, v>$ sa zachová (prevráti). ak každý prvointerval tohto intervalu sa zachová (prevráti). (Pre zjednodušenie formulácie niektorých ďalších tvrdení výraz $<x, x>$ považujeme tiež za interval; hovoríme o ňom, že sa zároveň zachová i prevráti.)

Napokon poznamenajme: Ak S, S' sú diskrétne modulárne sväzy a ak sväz S je priamo nerozložiteľný, potom zo vzťahu $S \overset{g}{\sim} S'$ podľa vety (A) vyplýva, že je alebo $S \sim S'$ (i_1), alebo $S \sim \tilde{S}'$ (i_2). Pritom zobrazenie, ktoré udáva izomorfizmus (i_1), resp. (i_2), je to isté ako zobrazenie, ktoré určuje grafový izomorfizmus $S \overset{g}{\sim} S'$.

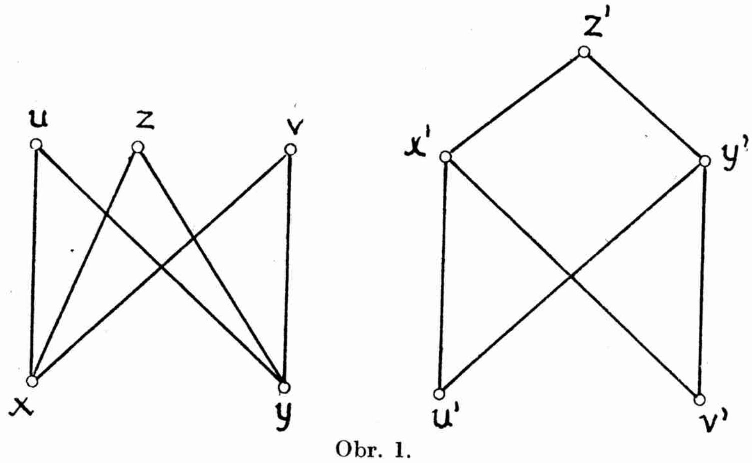
2.

Ak nepredpokladáme podmienku (P), potom veta (A) neplatí pre distributívne multisväzy (t. j. neplatí, ak v nej všade slovo „sväz" nahradíme slovom „multisväz", a namiesto modulárnosti predpokladáme distributívnosť).

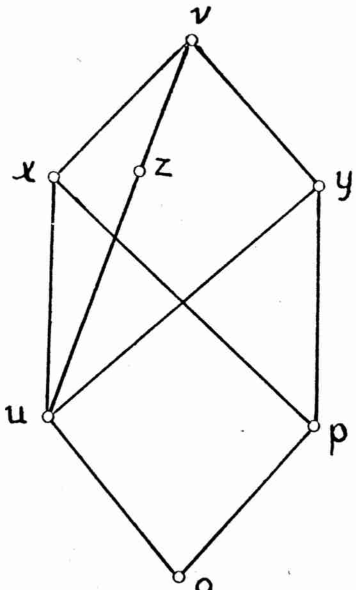
Dôkaz: multisväzy S, S' na obr. 1 sú grafove izomorfné, obidva sú distributívne a multisväz S je priamo nerozložiteľný (keďže počet jeho prvkov je prvočíslo). Ľahko sa zistí, že multisväzy S, S' nie sú ani izomorfné, ani duálne izomorfné. Ukončenie dôkazu vyplýva z analogickej úvahy ako v poznámke na konci ods. 1.

Veta (A) neplatí pre modulárme multisväzy (splňujúce podmienku (P).)

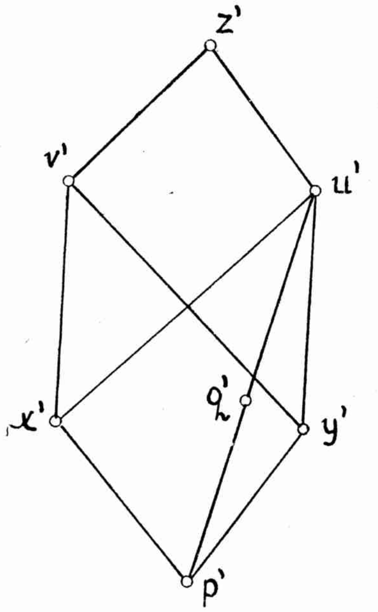
Dôkaz. Nech S, resp. S', je multisväz na obr. 2a, resp. 2b. Zrejme $S \overset{g}{\sim} S'$, pričom prvku $x \in S$ zodpovedá prvok $x' \in S'$ atď. Multisväzy S, S' sú modulárne. Keďže multisväz S obsahuje 7 prvkov, je priamo nerozložiteľný. Ak by platila veta A pre modulárne multisväzy, potom by analogicky ako v po-



Obr. 1.



Obr. 2a.



Obr. 3a.

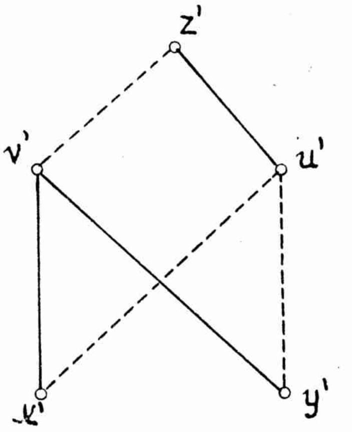
známke na konci odseku 1 zobrazenie $S \overset{g}{\sim} S'$ určujúce grafový izomorfizmus muselo dávať alebo izomorfizmus, alebo duálny izomorfizmus multisväzov S, S'. Keďže je však $p < x$, $p' < x'$ a zároveň $u < x$, $u' > x'$, vzniká spor.

Všade ďalej predpokladáme, že S, S' sú distributívne multisväzy a že platí

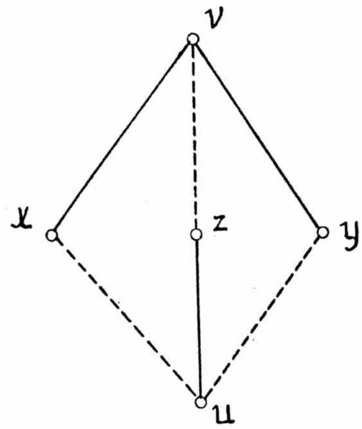
$S \overset{g}{\sim} S'$. Ak $x \in S$, označíme obraz prvku x v uvažovanom grafovom izomorfizme znakom x'.

Lemma 1. *Nech* $u \in x \wedge y$, $v \in x \vee y$, *nech* $<u, x>$, $<u, y>$ *sú prvointervaly, nech* $x' < u' < y'$. *Potom* $x' \in u' \wedge v'$, $y' \in u' \vee v'$.

Dôkaz. Podľa (π') $<x, v>$, $<y, v>$ sú prvointervaly, teda (x', v'), (y', v') sú *e*. dvojice. Ak $v' < x'$, potom by interval $<v', y'>$ nebol prvointervalom, teda by (v', y') nebola *e*. dvojica, čo je spor. Musí teda byť $x' < v'$; podobným postupom sa zistí, že musí byť $v' < y'$. Keďže $<v', y'>$, $<u', y'>$ sú prvointervaly, musí byť $y' \in u' \vee v'$; podobne sa dokáže $x' \in u' \wedge v'$.



Obr. 3a.



Obr. 3b.

Lemma 2. *Nech* $u \in x \wedge y$, $v \in x \vee y$, nech $<x, v>$, $<y, v>$ *sú prvointervaly, nech* $x' < v'$, $y' < v'$. *Potom* $u' \in x' \wedge y'$.

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady lemmy. Ak $u' < x'$, $u' < y'$, je zrejme $u' \in x' \wedge y'$. Predpokladajme, že by platilo $x' < u'$. Ak by zároveň bolo $u' < y'$, dostali by sme spor s tvrdením lemmy 1. Musí teda byť $u' > y'$ (pozri obr. 3a; plnými, resp. čiarkovanými úsečkami sú naznačené prvointervaly, ktoré sa zachovajú, resp. prevrátia). Keďže $<x', v'>$, $<x', u'>$ sú prvointervaly, platí zrejme $x' \in u' \wedge v'$. Analogicky (keďže S je distributívny multisväz) platí $y' \in u' \wedge v'$. Nech $z' \in u' \vee v'$. Zrejme je $z' \neq x'$. Keďže S' je distributívny multisväz, podľa (π') $<v', z'>$, $<u', z'>$ sú prvointervaly. Podľa lemmy 1 (pričom vymeníme úlohy multisväzov S, S') platí $u \in y \wedge z$, $v \in y \vee z$ (pozri obr. 3b). Prvok y by teda mal v intervale $<u, v>$ dva rôzne relatívne komplementy x, z, čo je spor s predpokladom o distributívnosti sväzu S.

Analogicky sa dokážu tvrdenia duálne k lemmám 1 a 2.

Lemma 3. *Nech* $u \in x \wedge y$, $v \in x \vee y$, *nech* $<u, x>$, $<u, y>$ *sú prvointervaly. Potom platí* $u' < x'$ ($x' < u'$) *vtedy a len vtedy, keď* $y' < v'$ ($v' < y'$).

Dôkaz. Ak $u' < v'$ ($v' < u'$), vyplýva tvrdenie z lemmy 1 (2).

Lemma 4. *Nech* $u \in x \wedge y$, $v \in x \vee y$, *nech* $<u, x>$ *je prvointerval. Potom platí* $u' < x'$ *vtedy a len vtedy, keď* $y' < v'$.

Dôkaz vykonáme indukciou vzhľadom na dĺžku maximálneho reťazca medzi prvkami u, y. Nech R je ľubovoľný takýto reťazec. Ak dĺžka reťazca R je 0, t. j. $y = u$, $x = v$, tvrdenie je triviálne. Predpokladajme, že dĺžka reťazca R je $n > 0$. Vyberme v reťazci R prvok u_1, ktorý pokrýva u. Ďalej vyberme $x_1 \in x \vee u_1$, $x_1 \leqq v$. Zrejme platí $u \in u_1 \wedge x$. Podľa lemmy 3 $u_1' < x_1'$ vtedy a len vtedy, keď $u' < x'$. Pritom $<u_1, x_1>$ je prvointerval. Zrejme je $u_1 \in x_1 \wedge y$, $v \in v_1 \vee y$. Keďže existuje maximálny reťazec s najmenším prvkom u_1 a najväčším y dĺžky $n - 1$, tvrdenie lemmy vyplýva z indukčného predpokladu.

Lemma 5. *Nech prvointervaly $<u, x>$, $<y, v>$ sú projektívne. Potom platí $u' < x'$ vtedy a len vtedy, keď $y' < v'$.*

Dôkaz sa vykoná indukciou na základe lemmy 4.

Lemma 6. *Nech $x < y$, nech $x = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = y$ je maximálny reťazec medzi prvkami x, y, nech $a_{i-1}' < a_i'$ ($a_{i-1}' > a_i'$) pre $i = 1, \ldots, n$. Potom pre každý prvointerval $<b, c>$, obsiahnutý v intervale $<x, y>$, platí $b' < c'$ ($c' < b'$).*

Dôkaz. Zrejme existuje maximálny reťazec R medzi prvkami x, y taký, že $b, c \in R$. Podľa tvrdenia ($T1$) prvointerval $<b, c>$ je projektívny s niektorým prvointervalom $<a_{i-1}, a_i>$; podľa lemmy 5 platí teda $b' < c'$ ($c' < b'$).

Lemma 6'. *Nech existuje prvok $v_1 \in x \vee y$ a maximálne reťazce r_1, resp. r_2, s najmenším prvkom x, resp. y, a najväčším v_1 také, že každý prvointerval, obsiahnutý v reťazci r_1 sa zachová (prevráti) a zároveň každý prvointerval, obsiahnutý v r_2 sa zachová (prevráti). Potom pre každé $u_2 \in x \wedge y$, $v_2 \in x \vee y$ platí: interval $<u_2, v_2>$ sa zachová (prevráti).*

Dôkaz. Z predpokladu lemmy a lemmy 6 vyplýva, že intervaly $<x, v_1>$, $<y, v_1>$ sa zachovajú (prevrátia). Podľa lemmy 5 a tvrdenia ($T2$) intervaly $<u_2, x>$, $<u_2, y>$ sa zachovajú (prevrátia). Opätovným použitím lemmy 5 a ($T2$) dostávame, že intervaly $<x, v_2>$, $<y, v_2>$ sa zachovajú (prevrátia). Z lemmy 6 vyplýva, že interval $<u_2, v_2>$ sa zachová (prevráti). (Analogicky sa dokáže duálne tvrdenie.)

Nech $x \in S$. Označme znakom $\bar{x}^1$ ($\bar{x}^2$) množinu všetkých prvkov $y \in S$, pre ktoré existuje $z \in x \vee y$ a maximálne reťazce r_1, resp. r_2, s najmenším prvkom x, resp. y, a najväčším z také, že každý prvointerval, obsiahnutý v niektorom z týchto reťazcov sa zachová (prevráti). Podľa lemmy 6' a lemmy k nej duálnej význam $\bar{x}^1$ ($\bar{x}^2$) sa nezmení, ak píšeme v definícii týchto symbolov $\wedge$ namiesto $\vee$. Ďalej ak vyslovená podmienka platí pre niektorý prvok $z_0 \in x \vee y$, platí podľa lemmy 6' pre každý prvok $z \in x \vee y$ a ľubovoľné maximálne reťazce medzi x, z, resp. y, z. Ak $y \in \bar{x}^1$ ($y \in \bar{x}^2$), píšeme $y \equiv x(R_1)$ ($y \equiv x(R_2)$). Analogicky definujeme $\bar{x}'^1$, $\bar{x}'^2$, R_1', R_2' pre multisväz S'.

Lemma 7. *Relácia R_1 (R_2) určuje rozklad množiny S na dizjunktné triedy.*

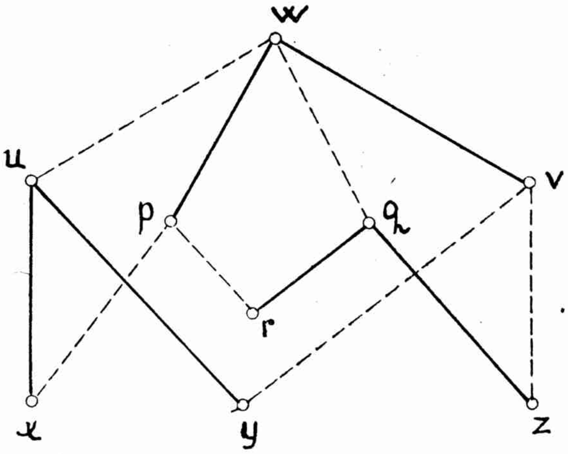
Dôkaz. Relácia R_1 je zrejme reflexívna a symetrická. Nech $x \equiv y(R_1)$, $y \equiv z(R_1)$. Vyberme prvky $a_1 \in x \vee y$, $a_2 \in y \vee z$, $a_3 \in a_1 \wedge a_2$, $a_3 \geqq y$. Keďže $a_3 \in <y, a_1>$, $a_3 \in <y, a_2>$, podľa lemmy 6 intervaly $<a_3, a_1>$, $<a_3, a_2>$ sa zachovajú, teda $a_1 \equiv a_2$ (R_1). Vyberme prvok $a_4 \in a_1 \vee a_2$ a prvok $a_5 \in x \vee z$, $a_5 \leqq a_4$. Podľa lemmy 6 existujú maximálne reťazce r_1, resp. r_2 s najmenším prvkom x, resp. y, a najväčším a_5 také, že všetky prvointervaly týchto reťazcov sa zachovajú. Teda $x \equiv z(R_1)$. Postup dôkazu pre R_2 je rovnaký.

Podľa predošlého platí ďalej: ak $x \equiv y(R_i)$, $u \in x \wedge y$, $v \in x \vee y$, potom $x \equiv u \equiv v$ (R_i), $i = 1$ resp. 2. Teda $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$ sú multisväzy (pri rovnakom, čiastočnom usporiadaní ako v S). Označme písmenami R_1, resp. R_2, zároveň rozklady množiny S určené reláciami R_1, R_2. Z toho, že pre každý prvointerval $<a, b>$ platí presne jeden zo vzťahov $a \equiv b(R_1)$, $a \equiv b(R_2)$, vyplýva: $R_1 \cap R_2 = 0$ (najmenší rozklad), $R_1 \cup R_2 = J$ (najväčší rozklad).

Lemma 8. *Nech $u \in x \wedge y$, $v \in x \vee y$. Potom interval $<u, x>$ sa zachová (prevráti) vtedy a len vtedy, keď interval $<y, v>$ sa zachová (prevráti).*

Dôkaz vyplýva z ($T2$) a z lemmy 5.

Lemma 9. *Nech $u \leqq x$, $u \leqq y$, $u \equiv x(R_1)$, $u \equiv y(R_2)$. Potom $u \in x \wedge y$.*



Obr. 4.

Dôkaz. Vyberme $u_1 \in x \wedge y$, $u_1 \geqq u$. Podľa lemmy 6 $u_1 \equiv u(R_1)$, $u_1 \equiv u(R_2)$, teda podľa poznámky za lemmou 7 $u_1 = u$. Analogicky sa dokáže tvrdenie duálne k lemme 9.

Lemma 10. *Rozklady R_1, R_2 sú doplnkové [podrobnejšie povedané: ak $x \equiv y(R_1)$, $y \equiv z(R_2)$, potom existuje prvok r taký, že platí $x \equiv r(R_2)$, $r \equiv z(R_1)$].*

Dôkaz (pozri obr. 4). Nech $x \equiv y(R_1)$, $y \equiv z(R_2)$. Zvoľme si prvky $u \in x \vee y$, $v \in y \vee z$. Platí $x \equiv u \equiv y(R_1)$, $y \equiv v \equiv z(R_2)$. Podľa lemmy 9 $y \in u \wedge v$. Zvoľme si prvok $w \in u \vee v$. Podľa lemmy 8 $u \equiv w(R_2)$, $w \equiv v(R_1)$. V multisväze S' potom platí $x' < u'$, $w' < u'$, $x' \equiv u'(R_1')$, $u' \equiv w'(R_2')$. Podľa lemmy 9 $u' \in x' \vee w'$. Zvoľme si $p' \in x' \wedge w'$. Podľa lemmy 8 platí $x' \equiv p'(R_2')$, $p' \equiv w'(R_1')$, teda aj $x \equiv p(R_2)$, $p \equiv w(R_1)$, $p \leqq w$. Analogicky nájdeme prvok q, pre ktorý platí $z \equiv q(R_1)$, $q \equiv w(R_2)$, $q \leqq w$. Podľa lemmy 9 $w \in p \vee q$. Vyberme prvok $r \in p \wedge q$. Podľa lemmy 8 $r \equiv p(R_2)$, $r \equiv q(R_1)$. Úhrnne dostávame $x \equiv r(R_2)$, $r \equiv z(R_1)$.

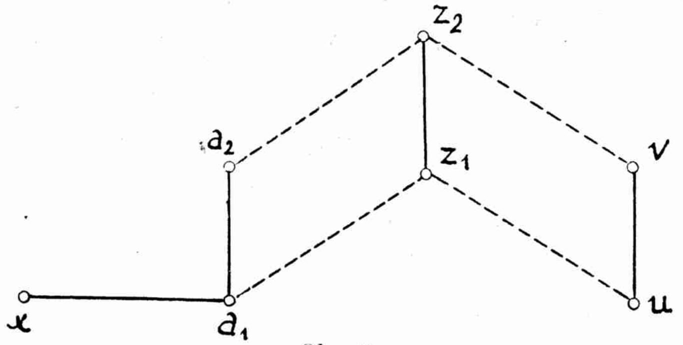
Lemma 11. *Pre každé $x, y \in S$ množina $\bar{x}^1 \cap \bar{y}^2$ obsahuje jediný prvok.*

Dôkaz vyplýva bezprostredne z rovnosti $R_1 \cap R_2 = 0$.

Lemma 12. *Nech $<u, v>$ je prvointerval, nech $a_1 \in \bar{x}^1 \cap \bar{u}^2$, $a_2 \in \bar{x}^1 \cap \bar{v}^2$. Potom je alebo $a_1 = a_2$ (a to vtedy, keď sa prvointerval $<u, v>$ prevráti), alebo $<a_1, a_2>$ je prvointerval (a to vtedy, keď $<u, v>$ sa zachová).*

Dôkaz. Ak sa prvointerval $<u, v>$ prevráti, potom $v \equiv u \equiv a_1(R_2)$, teda podľa lemmy 11 $a_1 = a_2$. Predpokladajme, že sa prvointerval $<u, v>$ zachová.

Zvoľme si prvok $z_1 \in a_1 \vee u$. (Pozri obr. 5.) Podľa predošlého je $z_1 \equiv u(R_2)$, teda podľa lemmy 9 $u \in v \wedge z_1$. Vyberme prvok $z_2 \in z_1 \vee v$; potom je $< z_1, z_2 >$ prvointerval a platí podľa lemmy 8 $z_1 \equiv z_2(R_1)$, $v \equiv z_2(R_2)$. V multisväze S' musí potom byť $z_1' \in a_1' \wedge z_2'$. Zvoľme si prvok $a' \in a_1' \vee z_2'$. Platí



Obr. 5.

$a_1' \equiv a'(R_1')$, $a' \equiv z_2'(R_2')$ a $< a_1', a' >$ je prvointerval. Je teda aj $< a_1, a >$ prvointerval a platí $a_1 \equiv a(R_1)$, $a \equiv z_2(R_2)$. Z toho vyplýva $a \in \bar{x}^1 \cap \bar{v}^2$, takže $a = a_2$ a tvrdenie sme dokázali.

Analogicky sa dokáže tvrdenie, ktoré vznikne z predošlej lemmy zamenením indexov 1, 2.

Zvoľme si pevný prvok $x_0 \in S$ a označme $\bar{x}_0^1 = A$, $\bar{x}_0^2 = B$, $S_1 = A \times B$. Prvku $x \in S$ priraďme dvojicu $(a, b) \in A \times B$, pričom $a \in \bar{x}_0^1 \cap \bar{x}^2$, $b \in \bar{x}_0^2 \cap \bar{x}^1$. Nech (a, b) je ľubovoľný prvok množiny S_1. Skúmame prvok $z \in \bar{a}^2 \cap \bar{b}^1$; zrejme v uvažovanom zobrazení platí $z \to (a, b)$. Z toho vyplýva, že opísané zobrazenie je zobrazením množiny S na množinu S_1; ľahko sa ďalej dokáže (z podmienky $R_1 \cap R_2 = \emptyset$), že zobrazenie je jedno-jednoznačné.

Lemma 13. *Nech $< u, v >$ je prvointerval, $u \to (a_1, b_1)$, $v \to (a_2, b_2)$. Potom prvok (a_1, b_1) je pokrytý prvkom (a_2, b_2) v multisväze S_1.*

Dôkaz. Predpokladajme, že prvointerval $< u, v >$ sa zachová. Potom $v \equiv u \equiv b_1(R_1)$. teda $b_1 = b_2$. Ďalej podľa lemmy 12 $< a_1, a_2 >$ je prvointerval, teda prvok (a_1, b_1) je pokrytý prvkom (a_2, b_2) v multisväze S_1. Ak sa prvointerval $< u, v >$ prevráti, je dôkaz podobný.

Dôsledok. Ak $u \to (a_1, b_1)$, $v \to (a_2, b_2)$, $u < v$, platí $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$.

Lemma 14. *Nech $u \to (a_1, b_1)$, $v \to (a_2, b_2)$, nech prvok (a_1, b_1) je pokrytý prvkom (a_2, b_2). Potom prvok v pokrýva u.*

Dôkaz. Predpokladajme napr., že $b_1 = b_2$ a že prvok a_1 je pokrytý prvkom a_2 (v druhom prípade je postup analogický). Keďže $u \in \bar{b}_1^1 \cap \bar{a}_1^2$, $v \in \bar{b}_1^1 \cap \bar{a}_2^2$, tvrdenie vyplýva z lemmy 12.

Dôsledok. *Ak $u \to (a_1, b_1)$, $v \to (a_2, b_2)$, $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$, potom $u < v$.*

Z lemmy 13 a 14 vyplýva:

Lemma 15. *Opísané zobrazenie multisväzu S na S_1 je izomorfizmus.*

Je teda $S \sim A \times B$. Keďže pre multisväz S' môžeme previesť rovnakú úvahu, platí $S' \sim A' \times B'$. Podľa predošlého je však $A' \sim A$, $B' \sim \tilde{B}$, pričom tieto izomorfizmy sú dané priradením (vyplývajúcim z grafového izomorfizmu svätzov S, S') $a' \to a$, $b' \to b$. Je teda $S' \sim A \times \tilde{B}$.

Veta 1. *Nech S, S' sú diskrétne distributívne multisväzy, v ktorých platí podmienka (P). Nutná a postačujúca podmienka pre existenciu grafového izomorfizmu $S \underset{\sim}{g} S'$ je: existujú multisväzy A, B tak, že platí $S \sim A \times B$, $S' \sim A \times \tilde{B}$, pričom prvky $x \in S$, $x' \in S'$, ktoré si zodpovedajú v grafovom izomorfizme, zobrazia sa v obidvoch izomorfizmoch na tú istú dvojicu (a, b), $a \in A$, $b \in B$.*

Dôkaz. Nutnosť podmienky sme dokázali v predošlom. Dôkaz toho, že podmienka je postačujúca, je jednoduchý a môže sa vykonať rovnakým postupom ako pre sväzy (pozri [3]).

Veta 2. *Nech S je konečný distributívny multisväz, v ktorom platí podmienka (P). Nutná a postačujúca podmienka, aby pre každý konečný distributívny multisvaz S' splňujúci podmienku (P) zo vzťahu $S \underset{\sim}{g} S'$ vyplývalo, že multisvazy S, S' sú izomorfné, je: každý nerozložiteľný priamy faktor multisväzu S je samoduálny.*

Dôkaz. Konečný multisväz S (a rovnako S') možno rozložiť na priamy súčin nerozložiteľných faktorov. Podľa [5] tieto rozklady sú jednoznačné. Ďalší postup dôkazu je rovnaký ako v [3].

Literatúra

[1] Birkhoff G.: Lattice theory, New York 1948.

[2] Benado M.: Les ensembles partiellement ordonnées et le théorème de raffinement de Schreier, II, Čechoslovackij mat. žurnal 5 (80), 308—344, 1955.

[3] Jakubík J. — Kolibiar M.: O nekotorych svojstvach par struktur, Čechoslovackij mat. žurnal 4 (79), 1—27, 1954.

[4] Jakubík J.: O grafičeskom izomorfizme struktur, Čechoslovackij mat. žurnal 4 (79), 131—142, 1954.

[5] Hashimoto J.: On direct product decomposition of partially ordered sets, Annals of Math (2) 54, 315—318, 1951.

Do redakcie dodané 15. III. 1956

О графическом изоморфизме мултиструктур

Якубик Ян, Кошице

Г. Биркгоф поставил вопрос ([1], проблема 8) найти условия, при которых из изоморфизма графов структур S, S' вытекает, что структуры S, S' изоморфны. Этот вопрос решен для дистрибутивных структур в статье [3] и для модулярных структур в [4]. При этом надо характеризовать все структуры S', графы которых изоморфны с графом данной структуры S. Результат можно формулировать как следует: Пусть S и S' — модулярные структуры, в которых все ограниченные цепи конечны. Тогда имеет место утверждение (A): Необходимое и достаточное условие для изоморфизма графов структур S и S' следующее: $S \sim A \times B$ (1), $S' \sim A \times \tilde{B}$ (2) ($\tilde{B}$ — полуупорядоченное множество, дуальное к B) и если элементы $x \in S$, $x' \in S'$ соответствуют один другому в графическом изоморфизме, тогда в изоморфизмах (1) и (2) имеют как образ ту самую пару $(a, в)$, $a \in A$, $b \in B$.

Теперь мы исследуем случай, когда S и S' — мултиструктуры, в которых все ограниченные цепи конечны. Доказываются утверждения:

1. Теорема (A) имеет место, если S и S' — дистрибутивные мултиструктуры.

2. Если S, S' — дистрибутивные мултиструктуры и если для всех $x, y \in S$, $x', y' \in S'$ $x \wedge y \neq \emptyset \neq x \vee y$, $x' \wedge y' \neq \emptyset \neq x' \vee y'$ (3) тогда теорема (A) справедлива.

3. Если S, S' — модулярные структуры, для которых выполняется (3), теорема (A) не имеет место.

L'isomorphisme des graphes des multistructures

Ján Jakubík, Košice

G. Birkhoff a posé la question ([1], Problem 8) de trouver les conditions, pourque, si les graphes des structures S, S' sont isomorphes, les structures S et S' soient, elles-aussi, isomorphes. Cette question a été résolu dans [3] pour les structures distributives et dans [4] (avec une autre méthode) pour les structures modulaires. Pour sa résolution il faut caractériser toutes les structures S', dont les graphes sont isomorphes avec le graphe d'une structure donnée S. Le résultat peut été formulé comme suit:

(A) La condition nécessaire et suffisante pourque les graphes de deux structures discrètes (c'est — a — dire telles dont toutes les chaines bornées sont de longueur finie) et modulaires soient isomorphes, est: $S \sim A \times B$ (1), $S' \sim A \times \tilde{B}$ (2) ($\tilde{B}$ est la structure dual de B) et, si des éléments $x \in S$, $x' \in S'$ correspondent l'un a l'autre dans l'isomorphisme des graphes de S, S', alors, dans les isomorphismes (1) et (2) ces éléments ont pour l'image la même couple (a, b), $a \in A$, $b \in B$.

Nous considérons maintenant le cas ou S et S' sont multistructures ([2]) modulaires resp. distributives. Les résultats sont suivants:

1. Si nous replacons dans le théoreme (A) les mots ,,structures discrètes et modulaires" par ,,multistructures discrètes et distributives", le théoreme ne reste pas vrai.

2. Si nous supposons que les multistructures S et S' sont des ensembles filtrants, le théoreme (A) reste vrai pour les multistructures discrétes et distributives.

3. Le théoreme (A) ne reste pas vrai si S et S' sont des multistructures discrètes, modulaires et filtrantes.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. IV-VI MATHEMATICA 1956

O niektorých vzťahoch medzi integrálmi navzájom adjungovaných lineárnych diferenciálnych rovníc tretieho rádu a o jednom okrajovom probléme

Dr. M. GREGUŠ

(Venované k 75. narodeninám prof. dr. J. Hronca)

Práca je rozdelená na dve časti. V prvej časti sú opísané niektoré vzájomné vzťahy medzi integrálmi diferenciálnej rovnice

$$y''' + 2Ay' + (A' + b)\, y = 0 \tag{a}$$

a integrálmi diferenciálnej rovnice k nej adjungovanej

$$y''' + 2Ay' + (A' - b)\, y = 0. \tag{b}$$

V druhej časti je rozriešený určitý okrajový problém týkajúci sa integrálov diferenciálnej rovnice (a) toho druhu, že k určitej postupnosti hodnôt parametra λ existuje postupnosť systémov funkcií tej vlastnosti, že každá funkcia zo systému je integrálom diferenciálnej rovnice (a) a pritom spĺňa určité okrajové podmienky. Problém je rozriešený na základe výsledkov odseku I a na základe známych už okrajových úloh [1].

I.

Uvažujme o diferenciálnej rovnici (a). O koeficientoch A, A', b predpokladajme:

Nech $A(x) > \varrho^2$, (ϱ^2 konštanta), $A'(x)$, $b(x) > 0$ sú spojité funkcie $x \in (-\infty, \infty)$. Nech $b(x)$ sa nerovná nule v žiadnom čiastočnom intervale z intervalu $(-\infty, \infty)$.

Pre integrály diferenciálnej rovnice (a) platí tzv. integrálna identita

$$y \cdot y'' - \frac{1}{2} y'^2 + Ay^2 + \int_a^x by^2\, \mathrm{d}x = \text{konšt.}, \tag{1}$$

kde $a \in (-\infty, \infty)$ je pevné číslo. Integrálna identita pre integrály diferenciálnej rovnice (b) je tvaru

$$yy'' - \frac{1}{2} y'^2 + Ay^2 - \int_a^x by^2 \, dx = \text{konšt.} \tag{2}$$

Je známe [2], že z každého bodu a na číselnej osi vychádza zväzok integrálov diferenciálnej rovnice (a), ktoré môžeme písať v tvare $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, kde y_1, y_2 sú integrály diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $y_1(a) = y_1'(a) = 0$, $y_2(a) = y_2''(a) = 0$, pritom integrály zväzku pre $x > a$ osciľujú a vyhovujú diferenciálnej rovnici druhého rádu tvaru

$$\left[\frac{1}{\omega} y'\right]' + \left[\frac{2A}{\omega} + \frac{\omega''}{\omega^2}\right] y = 0, \tag{c}$$

kde w je integrálom diferenciálnej rovnice (b) s dvojnásobným nulovým bodom v bode a, ktorý nemá napravo od a žiadny nulový bod, čo vyplýva z integrálnej identity (2).¹)

Samoadjungovaná diferenciálna rovnica tretieho rádu je tvaru

$$y''' + 2Ay' + A'y = 0. \tag{d}$$

G. Sansone [3] dokázal tzv. porovnávaciu vetu. Uvedieme ju v špeciálnom znení pre porovnávanie rovníc (a) a (d).

Nech $A'(x)$ a $b(x) \geqq 0$ sú spojité funkcie $x \in \langle a, b \rangle$. Nech $y(x)$ je integrálom diferenciálnej rovnice (a), ktorý spĺňa v čísle a podmienku

$$y(a) \,.\, y''(a) - \frac{1}{2} y'^2(a) + A(a) \,.\, y^2(a) \leqq 0. \tag{3}$$

Nech $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$. Nech $z(x)$ je integrálom diferenciálnej rovnice (d), ktorý má v číslach α, β dvojnásobné nulové body nasledujúce za sebou. Potom $y(x)$ má v (α, β) aspoň jeden nulový bod.

Porovnávacia veta platí aj v pozmenenom tvare. Namiesto $b(x) \geqq 0$ predpokladajme $b(x) \leqq 0$ pre $x \in \langle a, b \rangle$ a nech $y(x)$ spĺňa podmienku (3) v čísle b. Všetky ostatné predpoklady nech ostanú nezmenené. Tvrdenie našej vety platí aj za takto pozmenených predpokladov. Dôkaz takto pozmenenej porovnávacej vety je totožný s dôkazom pôvodnej vety.

G. Mammana [4] dokázal túto vetu:

Nech $u(x)$, $v(x)$ sú dva nezávislé integrály diferenciálnej rovnice

$$u'' + \frac{1}{2} Au = 0. \tag{e}$$

Potom u^2, v^2, $u \,.\, v$ tvoria fundamentálny systém diferenciálnej rovnice (d).

---

¹) Podobné zväzky vytvárajú integrály diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $y'(a) = 0$ alebo $y''(a) = 0$. Ale tieto zväzky nemusia oscilovať pre $x > a$. V práci [2] je tvrdenie vo vete 6 vzťahujúce sa na tieto zväzky nesprávne.

Z tejto vety vyplýva, že každý jednoduchý nulový bod integrálu u je dvojnásobným nulovým bodom u^2, t. j. integrálu diferenciálnej rovnice (d).

Veta 1: Integrál $w(x)$ diferenciálnej rovnice (b) s dvojnásobným nulovým bodom v čísle a osciľuje naľavo od a.

Dôkaz: Nech $u(x)$ je ľubovoľným integrálom diferenciálnej rovnice (e). $u(x)$ zrejme osciľuje v celom intervale $(-\infty, \infty)$, nakoľko $A(x) > \varrho^2$ pre $x \in (-\infty, \infty)$. Nakoľko $b(x) \geqq 0$ podľa predpokladu, je preto $-b(x) \leqq 0$ pre $x \in (-\infty, \infty)$. $w(x)$ spĺňa v čísle a podmienku (3), a teda osciľuje pre $x < a$, nakoľko medzi každými dvoma nulovými bodmi u^2 existuje aspoň jeden nulový bod integrálu $w(x)$. Tým sme vetu dokázali.

Veta 2: Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby niektorý integrál diferenciálnej rovnice (a), s dvojnásobným nulovým bodom naľavo od a, prechádzal bodom a, je, aby jeho dvojnásobný nulový bod ležal v mieste niektorého nulového bodu integrálu $w(x)$ diferenciálnej rovnice (b), ktorý má v čísle a dvojnásobný nulový bod.

Dôkaz: 1. Nutná podmienka.

Nech $y(x)$ je integrálom diferenciálnej rovnice (a), ktorý prechádza bodom a a má dvojnásobný nulový bod v bode $\bar{x} < a$.

Nakoľko patrí do zväzku v bode a, môžeme ho písať v tvare $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, kde $y_1(a) = y_1'(a) = 0$, $y_2(a) = y_2''(a) = 0$.

V bode $\bar{x} < a$ má byť:

$$c_1 y_1(\bar{x}) + c_2 y_2(\bar{x}) = 0,$$
$$c_1 y_1'(\bar{x}) + c_2 y_2'(\bar{x}) = 0.$$

Existencia takých c_1, c_2 rôznych od nuly, aby posledné dve rovnice boli splnené pre $\bar{x} < a$, vyžaduje, aby v tých číslach $\bar{x}$ bolo:

$$\begin{vmatrix} y_1(\bar{x}), & y_2(\bar{x}) \\ y_1'(\bar{x}), & y_2'(\bar{x}) \end{vmatrix} = 0.$$

Ale je známe [4], že tento determinant je riešením rovnice (b), ktoré má v čísle a dvojnásobný nulový bod a ktoré podľa vety 1 osciľuje naľavo od čísla a. Teda ak $y(x)$ má dvojnásobný nulový bod naľavo od a, tak ho má práve v mieste niektorého nulového bodu integrálu $w(x)$.

2. Postačujúca podmienka.

Ukážme, že z každého nulového bodu $\bar{x}$ integrálu $w(x)$ vychádza integrál diferenciálnej rovnice (a) s dvojnásobným nulovým bodom v bode $\bar{x}$, ktorý prechádza bodom a.

Vskutku, nech $\bar{x}$ je ľubovoľný nulový bod integrálu $w(x)$ naľavo od a. Potom integrál y diferenciálnej rovnice (a) s dvojnásobným nulovým bodom v bode $\bar{x}$ môžeme písať v tvare:

$$y = c_1 y_2 + c_2 y_2 + c_3 y_3,$$

kde y_1, y_2, y_3 je fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (a) vlastností:

$$y_1(a) = y_1'(a) = 0, \qquad y_2(a) = y_2''(a) = 0, \qquad y_3'(a) = y_3''(a) = 0$$

a c_1, c_2, c_3 sú konštanty, ktoré treba vhodne voliť.

Má byť:

$$c_1y_1(\bar{x}) + c_2y_2(\bar{x}) + c_3y_3(\bar{x}) = 0$$
$$c_1y_1'(\bar{x}) + c_2y_2'(\bar{x}) + c_3y_3'(\bar{x}) = 0$$
$$c_1y_1''(\bar{x}) + c_2y_2''(\bar{x}) + c_3y_3''(\bar{x}) = k \neq 0.$$

Z toho pre c_1, c_2, c_3 vyplýva, že

$$c_1 = \frac{k \begin{vmatrix} y_2(\bar{x}) & y_3(\bar{x}) \\ y_2'(\bar{x}) & y_3'(\bar{x}) \end{vmatrix}}{W(\bar{x})}, \quad c_2 = \frac{-k \begin{vmatrix} y_1(\bar{x}) & y_3(\bar{x}) \\ y_1'(\bar{x}) & y_3'(\bar{x}) \end{vmatrix}}{W(\bar{x})}, \quad c_3 = \frac{k \begin{vmatrix} y_1(\bar{x}) & y_2(\bar{x}) \\ y_1'(\bar{x}) & y_2'(\bar{x}) \end{vmatrix}}{W(\bar{x})},$$

kde $W(\bar{x})$ je wronskianom fundamentálneho systému diferenciálnej rovnice (a).

Ale $c_3 \equiv 0$, pretože $\begin{vmatrix} y_1(\bar{x}) & y_2(\bar{x}) \\ y_1'(\bar{x}) & y_2'(\bar{x}) \end{vmatrix} = w(x) = 0$ podľa predpokladu. Preto $y(x)$, ktorý má v bode $\bar{x}$ dvojnásobný nulový bod, je tvaru $y = c_1y_1 + c_2y_2$, a teda prechádza bodom a.

Veta 3: *Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby integrál $y(x)$ diferenciálnej rovnice (a), ktorý v niektorom bode $\bar{x} < a$ spĺňa podmienku $y(\bar{x}) = y''(\bar{x}) = 0$, prechádzal bodom a, je, aby $\bar{x}$ bol nulovým bodom $w'(x)$, t. j. derivácie integrálu $w(x)$ diferenciálnej rovnice (b) s dvojnásobným nulovým bodom v bode a.*

Dôkaz: 1. Nutná podmienka.

Nech $y(x)$ je integrálom diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $y(a) = 0$, $y(\bar{x}) = y''(\bar{x}) = 0$, kde $\bar{x} < a$. Z vlastnosti $y(a) = 0$ vyplýva, že patrí do zväzku v bode a, teda ho môžeme písať v tvare $y = c_1y_1 + c_2y_2$, pričom c_1, c_2 treba určiť tak, aby

$$c_1y_1(\bar{x}) + c_2y_2(\bar{x}) = 0$$
$$c_1y_1''(\bar{x}) + c_2y_2''(\bar{x}) = 0.$$

Ale posledné dve rovnice majú len vtedy riešenie rôzne od nuly, ak je

$$\begin{vmatrix} y_1(\bar{x}) & y_2(\bar{x}) \\ y_1''(\bar{x}) & y_2''(\bar{x}) \end{vmatrix} = 0,$$

t. j. ak $w'(\bar{x}) = 0$. Teda $\bar{x}$ musí byť nulovým bodom derivácie integrálu $w(x)$.

2. Postačujúca podmienka.

Nech $\bar{x} < a$ je ľubovoľným nulovým bodom derivácie integrálu $w(x)$. Potom integrál $y(x)$ diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $y(\bar{x}) = y''(\bar{x}) = 0$ je tvaru $y = c_1y_1 + c_1y_2 + c_3y_3$, kde y_1, y_2, y_3 je fundamentálny systém ako vo vete 2 a konštanty c_1, c_2, c_3 treba voliť tak, aby bolo

$$c_1y_1(\bar{x}) + c_2y_2(\bar{x}) + c_3y_3(\bar{x}) = 0$$
$$c_1y_1'(\bar{x}) + c_2y_2'(\bar{x}) + c_3y_3'(\bar{x}) = k \neq 0$$
$$c_1y_1''(\bar{x}) + c_2y_2''(\bar{x}) + c_3y_3''(\bar{x}) = 0.$$

Z toho pre c_1, c_2, c_3 vychádza

$$c_1 = \frac{-k\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}{W(\bar{x})}, \quad c_2 = \frac{k\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1'' & y_3'' \end{vmatrix}}{W(\bar{x})}, \quad c_3 = \frac{-k\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{W(\bar{x})}.$$

Ale $c_3 = 0$, pretože $\begin{vmatrix} y_1(\bar{x}) & y_2(\bar{x}) \\ y_1''(\bar{x}) & y_2''(\bar{x}) \end{vmatrix} = w'(\bar{x}) = 0$. Teda $y(x)$ prechádza bodom a.

Podobným spôsobom, ako vety 2 a 3, môžeme dokázať nasledujúcu vetu:

Veta 4: *Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby integrál $y(x)$ diferenciálnej rovnice (a), ktorý pre $\bar{x} < a$ spĺňa podmienku $y'(\bar{x}) = y''(\bar{x}) = 0$, prechádzal bodom a, je, aby $\bar{x}$ bol nulovým bodom funkcie $w'' + 2Aw$, kde w je integrálom diferenciálnej rovnice (b) s dvojnásobným nulovým bodom v bode a.*

Poznámka 1: Vetu 2 môžeme pozmeniť v tom smere, že z každého nulového bodu $\bar{x} > a$ integrálu y_1 diferenciálnej rovnice (a), ktorý má v čísle a dvojnásobný nulový bod, vychádza jeden a len jeden integrál diferenciálnej rovnice (b) s dvojnásobným nulovým bodom v bode $\bar{x}$, ktorý prechádza bodom a. Podobným spôsobom môžeme pozmeniť aj vety 3 a 4.

II.

O koeficientoch diferenciálnej rovnice (a) predpokladajme:

1. Nech $A = A(x, \lambda) > 0$, $\frac{\partial}{\partial x} A(x, \lambda)$, $b(x, \lambda) \geqq 0$ *sú spojitými funkciami premennej* $x \in (-\infty, \infty)$ *a* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$.

2. Nech $A(x, \lambda)$ *je rastúcou funkciou parametra* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ *pri každom* $x \in (-\infty, \infty)$ *a nech* $\lim_{\lambda \to \Lambda_2} A(x, \lambda) = +\infty$ *pri každom* $x \in (-\infty, \infty)$. *Nech sa ešte* $b(x, \lambda)$ *nerovná nule v žiadnom čiastočnom intervale pre* $x \in (-\infty, \infty)$.

V práci [1] sme dokázali nasledujúci okrajový problém:

O koeficientoch diferenciálnej rovnice (a) nech platia predpoklady 1, 2 tohto odseku. Nech $a < b \in (-\infty, \infty)$ pevné čísla. Potom existuje nekonečne mnoho hodnôt parametra $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$: $\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}, \ldots, \lambda_{\nu+p}, \ldots$, ku ktorým patrí postupnosť funkcií: $y_\nu, y_{\nu+1}, y_{\nu+2}, \ldots, y_{\nu+p}, \ldots$ tej vlastnosti, že $y_{\nu+p} = y(x, \lambda_{\nu+p})$ je integrálom diferenciálnej rovnice (a), ktorý spĺňa okrajove podmienky:

$$y(a, \lambda_{\nu+p}) = y'(a, \lambda_{\nu+p}) = y(b, \lambda_{\nu+p}) = 0$$

a má v intervale (a, b) práve $\nu + p$ nulových bodov.

Ak predpokladáme $b(x, \lambda) \leqq 0$ namiesto $b(x, \lambda) \geqq 0$, potom veta platí pre prípad $a > b$.

Poznámka 2: Ak sú splnené predpoklady 1, 2 tohto odseku a pritom $a > b$, potom uvedená veta platí pre diferenciálnu rovnicu (b), pretože je $-b(x, \lambda) \leqq 0$.

Pomocou tejto vety a vety 2 odseku I dokážeme nasledujúcu vetu:

Veta 5: *Nech koeficienty diferenciálnej rovnice (a) spĺňajú predpoklady 1, 2 tohto odseku. Nech* $a < b \in (-\infty, \infty)$ *pevné čísla.*

Potom existuje nekonečne mnoho hodnôt parametra $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$:

$$\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+p}, \ldots\ldots,$$

ku ktorým patrí postupnosť systémov funkcií:

$$(y_{\nu,1}, y_{\nu,2}, \ldots, y_{\nu,\nu+1}), (y_{\nu+1,1}, y_{\nu+1,2}, \ldots, y_{\nu+1,\nu+2}), \ldots$$
$$\ldots, (y_{\nu+p,1}, y_{\nu+p,2}, \ldots, y_{\nu+p,\nu+p+1}), \ldots,$$

takých, že $y_{\nu+p,1} = y_1(x, \lambda_{\nu+p})$ *je integrálom diferenciálnej rovnice (a), ktorý spĺňa okrajové podmienky:*

$$y_1(a, \lambda_{\nu+p}) = y_1'(a, \lambda_{\nu+p}) = y_1(b, \lambda_{\nu+p}) = 0$$

a ďalej

$$y_{\nu+p,i} = y_i(x, \lambda_{\nu+p}), \quad i = 2, 3, \ldots, \quad \nu + p + 1,$$

je integrálom diferenciálnej rovnice (a) vlastnosti $y_i(b, \lambda_{\nu+p}) = 0$ *a* $y_i(x, \lambda_{\nu+p})$ *má v* (a, b) *práve jeden dvojnásobný nulový bod.*

D ô k a z: Za predpokladov 1, 2 tohto odseku z poznámky 2 vyplýva, že existuje nekonečne mnoho hodnôt parametra $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2) : \lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+p}, \ldots$, ku ktorým patrí postupnosť funkcií: $w_\nu, w_{\nu+1}, \ldots, w_{\nu+p}, \ldots$ takých, že $w_{\nu+p} = w(x, \lambda_{\nu+p})$ je integrálom diferenciálnej rovnice (b), ktorý spĺňa okrajové podmienky

$$w(a, \lambda_{\nu+p}) = w(b, \lambda_{\nu+p}) = w'(b, \lambda_{\nu+p}) = 0$$

a má v intervale (a, b) práve $\nu + p$ nulových bodov.

Podľa vety 2 odseku I z každého nulového bodu integrálu $w(x, \lambda_{\nu+p})$ vychádza práve jeden (okrem lineárnej závislosti) integrál diferenciálnej rovnice (a) s dvojnásobným nulovým bodom v tomto bode, ktorý sa anuluje v b. Ak si označíme integrály vychádzajúce z nulových bodov integrálu $w(x, \lambda_{\nu+p})$:

$$(y_{\nu+p,1}, y_{\nu+p,2}, \ldots, y_{\nu+p,\nu+p+1}),$$

dostaneme žiadaný systém funkcií patriaci k parametru $\lambda_{\nu+p}$. Tým sme vetu dokázali.

Literatura

[1] Greguš M.: O niektorých nových okrajových problémoch diferenciálnej rovnice tretieho rádu, Чехослов. мат. журнал, Praha 1956, v tlači.

[2] Greguš M.: O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu, Matematicko-fyzikálny časopis SAV, 2, 73, Bratislava 1955.

[3] Sansone G.: Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale Revista Mathem. y Fisica Theorica, Seria A, p. 195, Tucuman 1948.

[4] Mammana G.: L'equazione del terzo ordine lineare omogenea, Rend. R. ist. Lombardo Sc. e Lettere, 272, 1930.

Do redakcie dodané 5. IV. 1956

О некоторых соотношениях между интегралами взаимно сопряженных линейных дифференциальных уравнений третьего порядка и об одной краевой проблеме

Михаил Грегуш

Работа разделена на две части. В первой части говорится о некоторых соотношениях между решениями дифференциального уравнения

$$y''' + 2Ay' + (A' + b)\, y = 0 \tag{a}$$

и решениями дифференциального уравнения

$$y''' + 2Ay' + (A' - b)\, y = 0, \tag{b}$$

сопряженного с уравнением (a). Притом предполагается, что $A(x) > \varrho^2$, $A'(x)$, $b(x) \geqq \geqq 0$ непрерывные функции для $x \in (-\infty, \infty)$.

Результаты находятся в следующей теореме:

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы решение $y(x)$ дифференциального уравнения (a), обладающее некоторым из следующих свойств

1. $y(\bar{x}) = y'(\bar{x}) = 0$, или
2. $y(\bar{x}) = y''(\bar{x}) = 0$, или
3. $y'(\bar{x}) = y''(\bar{x}) = 0$, где $\bar{x} < a$,

проходило точкой a, является то, чтобы точка $\bar{x}$ была нулевой точкой функции

1. $w(x)$, или
2. $w'(x)$, или
3. $w''(x) + 2A(x)\, w(x)$,

где $w(x)$ является решением дифференциального уравнения (b) с двухкратной нулевой точкой в точке a.

В другой части разрешена следующая краевая проблема:

Пусть

1. $A = A(x, \lambda) > 0$, $A' = \dfrac{\partial}{\partial x} A(x, \lambda)$, $b(x, \lambda) \geqq 0$ непрерывные функции для $x \in \in (-\infty, \infty)$ и $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$.

2. $A(x, \lambda)$ возрастающая функция параметра $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ и пусть $\lim\limits_{\lambda \to \Lambda_2} A(x, \lambda) = +\infty$ для каждого $x \in (-\infty, \infty)$. Пусть далее $b(x, \lambda)$ не равно нулю в никаком частичном интервале для $x \in (-\infty, \infty)$. Пусть $a < b \in (-\infty, \infty)$.

Потом существует бесконечное множество значений параметра $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$:

$$\lambda_\nu,\ \lambda_{\nu+1},\ \ldots,\ \lambda_{\nu+p},\ \ldots,$$

к которым принадлежит последовательность систем функций:

$$(y_{\nu,1},\ y_{\nu,2},\ \ldots,\ y_{\nu,\nu+1}), \quad (y_{\nu+1,1},\ y_{\nu+1,2},\ \ldots,\ y_{\nu+1,\nu+2}), \ \ldots$$
$$\ldots\ (y_{\nu+p,1},\ y_{\nu+p,2},\ \ldots,\ y_{\nu+p,\nu+p+1}), \ \ldots$$

такого свойства, что $y_{\nu+p,1} = y_1(x, \lambda_{\nu+p})$ является решением дифференциального уравнения (a), которое выполняет краевые условия

$$y_1(a, \lambda_{\nu+p}) = y_1'(a, \lambda_{\nu+p}) = y_1(b, \lambda_{\nu+p}) = 0$$

и далее $y_{\nu+p,i} = y_i(x, \lambda_{\nu+p})$, $i = 2, 3, \ldots, \nu + p + 1$, является решением дифференциального уравнения (a), которое обладает свойством $y_i(b, \lambda_{\nu+p}) = 0$ и $y_i(x, \lambda_{\nu+p})$ имеет в интервале как раз одну двухкратную нулевую точку.

Über einige Zusammenhänge zwischen der Integralen der gegenseitig adjungierten linearen Differentialgleichungen der dritten Ordnung und über ein Randwertproblem

Michal Greguš

Zusammenfassung

Die Arbeit ist in zwei Teile geteilt. Der erste Teil behandelt einige Zusammenhänge zwischen den Integralen der Differentialgleichung

$$y''' + 2Ay' + (A' + b)\, y = 0 \tag{a}$$

und den Integralen der Differentialgleichung

$$y''' + 2Ay' + (A' - b)\, y = 0, \tag{b}$$

welche zu der Differentialgleichung (a) adjungiert ist.

Dabei wird vorausgesetzt, daß $A(x) > \varrho^2$, $A'(x)$, $b(x) \geqq 0$ stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ sind. Das Ergebnis ist im folgenden Satz zusammengefaßt:

Eine notwendige und genügende Bedingung dazu, daß ~~der~~ Integral $y(x)$ der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft

1. $y(\bar{x}) = y'(\bar{x}) = 0$, oder
2. $y(\bar{x}) = y''(\bar{x}) = 0$, oder
3. $y'(\bar{x}) = y''(\bar{x}) = 0$,

wo $\bar{x} < a$, durch den Punkt a gehe, ist, daß $\bar{x}$ eine Nullstelle der Funktion

1. $w(x)$, oder
2. $w'(x)$, oder
3. $w''(x) + 2A(x)\, w(x)$ ist.

Die Funktion $w(x)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung (b), welche in der Zahl a eine Doppelnullstelle besitzt.

Im zweiten Teil ist das folgende Randwertproblem bewiesen:

Es seien

1. $A = A(x, \lambda) > 0$, $A' = \dfrac{\partial}{\partial x} A(x, \lambda)$, $b(x, \lambda) \geqq 0$

stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ und $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$

2. $A(x, \lambda)$ eine steigende Funktion des Parameters $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ bei jedem $x \in (-\infty, \infty)$ und es sei $\lim\limits_{\lambda \to \Lambda_2} A(x, \lambda) = +\infty$ bei jedem $x \in (-\infty, \infty)$. Es sei weiter $b(x, \lambda)$ nicht gleich Null in keinem Teilinterval von $x \in (-\infty, \infty)$. Es sei $a < b\ (-\infty, \infty)$.

Unter diesem Bedingungen existieren unendlich viele Werte des Parameters $\lambda \in \Lambda_1, \Lambda_2)$:

$$\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+p} \ldots,$$

zu welchen die Folge der Systeme der Funktionen gehört:

$$(y_{\nu,1}, y_{\nu,2}, \ldots, y_{\nu,\nu+1}), \quad (y_{\nu+1,1}, y_{\nu+1,2}, \ldots, y_{\nu+1,\nu+2}), \ldots$$
$$\ldots (y_{\nu+p,1}, y_{\nu+p,2}, \ldots, y_{\nu+p,\nu+p+1}), \ldots,$$

wo $y_{\nu+p,1} = y_1(x, \lambda_{\nu+p})$ ein Intergal der Differentialgleichung (a) ist, welcher folgende Randbedingungen erfüllt:

$$y_1(a, \lambda_{\nu+p}) = y_1'(a, \lambda_{\nu+p}) = y_1(b, \lambda_{\nu+p}) = 0;$$

weiter ist

$$y_{\nu+p,i} = y_i(x, \lambda_{\nu+p}), \qquad i = 2, 3, \ldots,$$

ein Integral der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y_i(b, \lambda_{\nu+p}) = 0$, welcher im (a, b) genau eine Doppelnullstelle hat.

Akademiker Jur Hronec — 75 jährig

Akademiker Jur Hronec wurde am 17. Mai 1881 in Gočovo geboren. Er besuchte das Gymnasium in Rožňava, wo er auch maturierte. Jur Hronec studierte an der Universität in Cluj (Rumänien), wo er im Jahre 1906 seine Studien beendete. In diesem Jahre wurde er Professor am Gymnasium in Kežmarok, wo er bis zum Jahre 1922 wirkte. Im Jahre 1912 wurde ihm von der Universität in Giessen das Doktorat verliehen, elf Jahre danach habilitierte er sich an der Karlsuniversität in Prag. Schon im Jahre 1924 finden wir ihn an der Tschechischen technischen Hochschule in Brünn als außerordentlichen Professor.

Die königliche Tschechische Gesellschaft der Wissenschaften ernannte Prof. Hronec im Jahre 1926 zu ihren Korrespondenten. Im Schuljahre 1928/1929 wurde er Dekan der Fakultät für Bauingenieure an der Tschechischen technischen Hochschule in Brünn, zu dieser Zeit schon als ordentlicher Professor. Im Jahre 1936 wurde er zum ordentlichen Mitglied der Mährisch-schlesischen naturwissenschaftlichen Akademie ernannt. Professor Hronec ist Begründer der Slowakischen technischen Hochschule, wo er dreimal zum Rektor gewählt wurde. Außerdem ist er Begründer der Handelshochschule in Bratislava, Vorsitzender der Komission für Organisation der Forst- und Landwirtschaftlichen Hochschule in Košice, Organisator und erster Dekan der pädagogischen Fakultät der Slowakischen Universität, Präsident der Matica Slovenská, Präsident des Kunst- und Wissenschaftsrates, Präsident des Slowakischen Museums, Doctor honoris causa der pädagogischen Wissenschaften der Slowakischen Universität, Doctor der mathematisch-physikalischen Wissenschaften.

Für seine Verdienste erhielt er im Jahre 1927 den Staatspreis und im Jahre 1948 den Nationalpreis. Außerdem wurde er im Jahre 1955 mit dem Orden der Arbeit ausgezeichnet.

Derzeit ist er Professor und Leiter des mathematischen Lehrstuhls der naturwissenschaftlichen Fakultät der Komenský-Universität in Bratislava.

OBSAH