ACTA

FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. I. FASC. I.

MATHEMATICA

1956

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NÁKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

Sborník Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae. Vydáva Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasinkova 5, čís. tel. 458-51. Povolilo Povereníctvo kultúry číslom 2265/56-IV/1. — Tlač: Brnenské knihtlačiarne, n. p., Brno, ul. 9. května č. 7.

S-117228

PREDSLOV

Mnohí, ktorí nepoznajú život na Prírodovedeckej fakulte UK, spýtajú sa, či je potrebné obnoviť vydávanie periodického časopisu „Sborník prác Prírodovedeckej fakulty UK".

Fakultná rada PFUK mnoho uvažovala o tejto veci a prišla k úsudku, že vydávanie tohto časopisu je veľmi potrebné, a to z hľadiska fakulty, univerzity, Slovenska a celej našej republiky. Prírodovedecká fakulta počas svojho 15-ročného jestvovania neobyčajne vzrástla tak odborne, ako aj ideologicky, v spôsobe výchovy, v ideologickom základe svojej vedeckej činnosti, v rozšírení vedných odborov. Usiluje o intenzívny rozvoj a vysokú úroveň, ktorou by sa dôstojne zaradila medzi popredné vysoké školy doma i v zahraničí. Prírodovedecká fakulta UK chce zintenzívniť svoje styky s našimi aj zahraničnými vysokými školami a vedeckými inštitúciami.

Pri všetkých nedostatkoch už aj doteraz sme dosiahli mnoho úspechov, ktoré sú o to cennejšie, že len pred 15 rokmi sme začínali z ničoho a bez tradície.

Dnes je už vo všetkých vedných odboroch našej fakulty mnoho hodnotných vedeckých prác. Tieto výsledky boli viac ráz hodnotené a dôležité je to, že v posledných rokoch intenzívne rastieme. Dnes má fakulta 16 profesorov a docentov a 33 odborných asistentov, ktorí sa snažia zverejniť svoje vedecké a praktické práce. Publikačné možnosti členov fakulty však nerástli úmerne so zintenzívnením vedeckej práce na fakulte, ba naopak, zrušením pôvodného sborníka veľmi sa obmedzili, preto jedinou správnou cestou vo vývine našej fakulty je vyplniť túto medzeru.

Sborník bude pomáhať vedeckým pracovníkom a spolupracovníkom fakulty a bude uverejňovať príležitostne aj výsledky vynikajúcich diplomových prác, prípadne študentských vedeckých krúžkov a študentskej vedeckej spoločnosti. Počet samostatných diplomových prác, vhodných pre uverejnenie, neprestajne rastie.

V sborníku sa budú uverejňovať aj dôležité zprávy zo života fakulty, zprávy z domácej a zahraničnej odbornej literatúry. Sborník bude zachytávať obraz života na našej fakulte a bude dokumentáciou rastu jej členov.

Styk so zahraničnými vysokými školami, vedeckými inštitúciami a pracovníkmi môžeme dosiahnuť len tlačou, teda vydávaním tohto Sborníka. Preto ho chceme zasielať na výmenu do zahraničia, aby sme takto získali vedeckú literatúru zo zahraničia. Mnohé zahraničné vysoké školy a vedecké inštitúcie priamo ponúkajú alebo žiadajú výmenu vedeckej literatúry.

Pri osobnom styku so zahraničnými vedeckými pracovníkmi pri takejto ponuke často sa dostávame do veľmi nepríjemnej situácie, pretože nevieme ponúknuť náhradu, a tak fakulta stráca cenné vedecké práce. Takáto okolnosť nijako nepodporí pocit sebadôvery našich vedeckých pracovníkov. Výmena je veľmi potrebná aj preto, že nedostávame dostatok valút pre zahraničné nákupy.

Vysoké školy, fakulty v zahraničí, ba aj doma, vydávajú svoje periodické vedecké časopisy. Aj my sa chceme týmto prispôsobiť, a nie zaostávať na vedeckom a výskumníckom poli. Chceme intenzívne vedecky pracovať, naše výsledky uverejňovať, a tak dvíhať u nás úroveň odboru matematiky a prírodných vied.

Časopis bude vychádzať každý mesiac okrem júla a augusta. Bude mať päť sérií, a to matematickú, fyzikálnu, chemickú, botanickú a zoologickú.

Bratislava 3. novembra 1955.

Redakčná rada

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. I. MATHEMATICA 1956

Sur la théorie du système différentiel général à coefficients variables

J. HRONEC, membre de l'Academie slovaque

I. Quelques théorèmes sur les systèmes différentiels

1. Soit le système différentiel

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

dont le système fondamental est

$$(y_{ik}), \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Si nous écrivons ce système différentiel à l'aide des matrices, nous avons

$$\left(\frac{dy_{ik}}{dx}\right) = (y_{ik}) \cdot (a_{ik}).$$

On en tire

$$(a_{ik}) = (y_{ik})^{-1} \cdot \left(\frac{dy_{ik}}{dx}\right), \tag{2a}$$

c'est à dire que nous avons

$$a_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{D_{\nu k}}{D} \cdot \frac{dy_{\nu k}}{dx}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

où les $D_{\nu k}$ sont les mineurs, relatifs aux éléments $y_{\nu i}$, du déterminant $D = \|y_{ik}\|$.

La connaissance du système fondamental permet, d'après (2) de déterminer le système différentiel qui lui correspond.

2. Si on donne le système fondamental (η_{ik}), le système fondamental est

$$(y_{ik}) = (c_{ik}) \cdot (\eta_{ik}),$$

où les c_{ik} sont des constantes arbitraires choisies de telle manière, que $\|c_{ik}\| \neq 0$. Si on les porte dans (2a) on obtient

$$(a_{ik}) = (\eta_{ik})^{-1} \cdot \left(\frac{d\eta_{ik}}{dx}\right),$$

c'est à dire que les coefficients du système différentiel sont invariants par rapport aux différents systèmes fondamentaux.

3. *Le système différentiel* (1) *a n solution indépendantes et n seulement, car,* s'il en avait $n + 1$, on aurait

$$-\frac{\mathrm{d}y_{ik}}{\mathrm{d}x} + \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda}a_{\lambda k} = 0, \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n + 1 \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Mais alors, nous devons avoir

$$\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}y_{ik}}{\mathrm{d}x}, y_{11}, \ldots & , y_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{\mathrm{d}y_{nk}}{\mathrm{d}x}, y_{n1}, \ldots & , y_{nn} \\ \frac{\mathrm{d}y_{n+1,k}}{\mathrm{d}x}, y_{n+1,1}, \ldots, & y_{n+1,n} \end{vmatrix} = D(y_{n+1,k}, y_{ik}) = 0,$$

c'est à dire que le système diffiérentiel

$$\frac{\mathrm{d}y_{n+1,k}}{\mathrm{d}x} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{D_{n+1,\lambda}^{(k)}}{D} \cdot y_{n+1,\lambda} = 0,$$

est vérifié, $D = ||y_{ik}||$ étant le déterminant fondamental et les $D_{n+1}^{(k)}$, les mineurs relatifs aux eléments $y_{n+1,\lambda}$ du déterminant $D(y_{n+1,k}, y_{ik})$ avec $\lambda =$ $= 1, 2, \ldots, n$, si bien que les $y_{n+1,k}$ sont des fonctions des n solutions y_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

4. D'après ce dernier théorème, si on donne le système fondamental (y_{ik}), le système différentiel gui lui correspond sera

$$(3) \qquad D\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda D_{\lambda k} = \begin{vmatrix} y'_{1k}, y_{11}, \ldots, y_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_{nk}, y_{n1}, \ldots, y_{nn} \\ y'_k, \ y_1, \ldots, y_n \end{vmatrix} = D(y_k, y_{ik}) = 0,$$

où y'_{ik} désigne $\frac{\mathrm{d}y_{ik}}{\mathrm{d}x}$, D étant le déterminant fondamental affecté du signe $(-1)^n$ et

$$
(4a) \qquad D_{\lambda k} = (-1)^{\lambda} \begin{vmatrix} y'_{1k}, & y_{11}, \ldots, & y_{1,\lambda-1}, & y_{1,\lambda+1}, \ldots, & y_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y'_{nk}, & y_{n1}, \ldots, & y_{n,\lambda-1}, & y_{n,\lambda+1}, \ldots, & y_{nn} \end{vmatrix} =
$$

$$
= - \begin{vmatrix} y_{11}, \ldots, & y_{1,\lambda-1}, & y'_{1k}, & y_{1,\lambda+1}, \ldots, & y_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}, \ldots, & y_{n,\lambda-1}, & y'_{nk}, & y_{k,\lambda+1}, \ldots, & y_{nn} \end{vmatrix} .
$$

Si nous comparons les formes (1) et (3) du système différentiel, nous obtenons

$$
(4) \qquad a_{\lambda k} = - \frac{D_{\lambda k}}{D} .
$$

II. Conditions nécessaires pour que le système différentiel n'ait pas de points d'indétermination

Si le point $x = 0$ est un point singulier du système différentiel, mais non un point indéterminé, les solutions du système différentiel relatives à ce point singulier sont

$$
(5) \qquad y_{ik} = x^{r_{ik}} . \varphi_{ik}(x), \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n.
$$

Si, comme nous le supposons, le point singulier $x = 0$ n'est pas un point de ramification, alors les r_{ik} sont des nombres entiers constants et les $\varphi_{ik}(x)$ des fonctions holomorphes au point $x = 0$. Leur développement en série au voisinage de ce point est

$$
\varphi_{ik}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{ik}^{(\nu)} x^{\nu},
$$

où les $c_{ik}^{(\nu)}$ sont des constantes. Les singularités, c'est à dire les pôles de la solution proviennent donc du facteur $x^{r_{ik}}$.

D'après (4a), on tire de (4), pour $\lambda = k$

$$
a_{\lambda k} = \frac{\begin{vmatrix} y_{11}, \ldots, & y_{1,k-1}, & y'_{1,k}, & y_{1,k+1}, \ldots, & y_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}, \ldots, & y_{n,k-1}, & y'_{nk}, & y_{n,k+1}, \ldots, & y_{nn} \end{vmatrix}}{D}
$$

soit, si nous tenons compte de (5), ce qui donne

$$
y'_{ik} = r_{ik} x^{r_{ik}-1} . \varphi_{ik} + x^{r_{ik}} . \varphi'_{ik}, \qquad \varphi'_{ik} = \frac{d\varphi_{ik}}{dx},
$$

$$a_{\lambda k} = \frac{1}{x} \frac{\begin{vmatrix} y_{11}, \dots, y_{1,k-1}, r_{1k} y_{1k}, y_{1,k+1}, \dots, y_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n1}, \dots, y_{n,k-1}, r_{nk} y_{nk}, y_{n,k+1}, \dots, y_{nn} \end{vmatrix}}{D} +$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} y_{11}, \dots, y_{1,k-1}, x^{r_{1k}} \cdot \varphi'_{1k}, y_{1,k+1}, \dots, y_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n1}, \dots, y_{n,k-1}, x^{r_{nk}} \cdot \varphi'_{nk}, y_{n,k+1}, \dots, y_{nn} \end{vmatrix}}{D}.$$

Ici, tant au numérateur qu'au dénominateur apparaissent ces mêmes puissances

$$x^{\sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i}, \tag{6}$$

où α_i désigne le i-ième élément de la permutation de α nombres $1, 2, \dots, n$, le nombre de ces puissances étant n! Parmi elles, il en existe une au moins pour laquelle

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i \tag{7}$$

a la plus petite valeur. Si nous simplifions par cette puissance, nous obtenons au numérateur comme au dénominateur une fonction holomorphe qui, au point $x = 0$, a une valeur constante non nulle: c'est pourquoi les coefficients a_{kk} où k prend les valeurs entières de 1 a n inclus doivent avoir un pôle simple au point $x = 0$.

Pour $\lambda \neq k$, on a

$$a_{\lambda k} = \frac{\begin{vmatrix} y_{11}, \dots, y_{1,\lambda-1}, y'_{1k}, y_{1,\lambda+1}, \dots, y_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n1}, \dots, y_{n,\lambda-1}, y'_{nk}, y_{n,\lambda+1}, \dots, y_{nn} \end{vmatrix}}{D} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{\begin{vmatrix} y_{11}, \dots, y_{1,\lambda-1}, r_{1k} y_{1k}, y_{1,\lambda+1}, \dots, y_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n1}, \dots, y_{n,\lambda-1}, r_{nk} y_{nk}, y_{n,\lambda+1}, \dots, y_{nn} \end{vmatrix}}{D} +$$

$$+\frac{\begin{vmatrix} y_{11}, \dots, & y_{1,\lambda-1}, & x^{r_{1k}} \cdot \varphi'_{1k}, & y_{1,\lambda+1}, \dots, & y_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}, \dots & y_{n,\lambda-1}, & x^{r_{nk}} \cdot \varphi'_{nk}, & y_{n,\lambda+1}, \dots, & y_{nn} \end{vmatrix}}{D}.$$

Au dénominateur interviennent à nouveau les puissances (6), parmi lesquelles, il y en a au moins une dont l'exposant (7) a la plus petite valeur. Si nous la mettons en facteur, il restera au dénominateur une fonction holomorphe ne s'annulant pas pour $x = 0$.

De même, dans les différents termes du numérateur, apparaissent les puissances (6), à cette différence près que dans l'exposant (7), α_i a 2 fois la même valeur, a savoir quand $i = \lambda$ et $i = k$, c'est-à-dire qu'au lieu de α_λ on trouve encore une fois α_k et que le nombre λ ne se présente jamais comme indice.

Si parmi les puissances du dénominateur, c'est justement

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i$$

la plus petite valeur, alors la plus petite valeur de l'exposant au numérateur est

$$r_{1\alpha_1} + r_{2\alpha_2} + \dots + r_{\lambda-1,\alpha_{\lambda-1}} + r_{k\alpha_k} + r_{\lambda+1,\alpha_{\lambda+1}} + \dots + r_{n\alpha_n},$$

car la partie

$$r_{1,\alpha_1} + r_{2,\alpha_2} + \dots + r_{\lambda-1,\alpha_{\lambda-1}} + r_{\lambda+1,\alpha_{\lambda+1}} + \dots + r_{n\alpha_n}$$

est aussi au numérateur la plus petite valeur et qu'à cette partie appartient encore le terme $r_{k\alpha_k}$.

Si nous mettons en facteur au numérateur cette puissance de plus petit exposant, il y reste une fonction holomorphe ayant au point $x = 0$ une valeur constante non nulle.

Il vient alors

$$a_{\lambda k} = x^{r_{k\alpha_k} - r_{\lambda\alpha_\lambda} - 1} \cdot \psi_{\lambda k}(x), \qquad \lambda \neq k,$$

où $\psi_{\lambda k}(x)$ est une fonction holomorphe, qui prend au point $x = 0$ une valeur constante non nulle.

Notons

(8) $$r_{\lambda\alpha_\lambda} - r_{k\alpha_k} + 1 = s_{\lambda k}, \qquad \lambda \neq k,$$

Les $r_{\lambda\alpha_\lambda}$ et $r_{k\alpha_k}$ étaient des nombres finis quelconques, il en est donc de même des $s_{\lambda k}$ et on a

$$a_{\lambda k} = \frac{\psi_{\lambda k}(x)}{x^{s_{\lambda k}}}, \qquad \lambda \neq k.$$

Il en résulte que, si les solutations du système différentiel (1) n'ont pas de point indéterminé au point $x = 0$, les coefficients du système différentiel doivent être de la forme

$$a_{ik} = \frac{\psi_{ik}(x)}{x^{s_{ik}}},$$

où les $s_{ik} = 1$ pour $i = k$ et sont des nombres entiers finis quelconques pour $i \neq k$, les $\psi_{ik}(x)$ étant des fonctions entiers rationnelles ou transcendantes.

Si les coefficients a_{ik} du système différentiel (1) ont des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$, qui ne soient pas des points d'indétermination, ils doivent être de la forme

$$a_{ik} = \frac{G_{ik}(x)}{[\varphi(x)]^{s_{ik}}}, \tag{9}$$

où $\varphi(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \ldots (x - a_\sigma)$, les s_{ik} étant égaux a 1 pour $i = k$ et à des nombres entiers finis quelconques pour $i \neq k$. Les $G_{ik}(x)$ sont des fonctions entières rationnelles ou transcendantes. Mais dans ce cas les fonctions $G_{ik}(x)$ de même que les coefficients a_{ik} ont encore une singularité au point $x = \infty$. Ce point non plus ne doit pas être un point d'indétermination. Pour étudier dans quelles conditions il ne sera pas point d'indétermination, posons $x = \frac{1}{\xi}$ et nous sommes ramenés à chercher quand le point $\xi = 0$ ne sera pas un point d'indétermination.

Pour qu'il ne le soit pas, il faut que le système différentiel soit de la forme

$$\frac{dy_k}{d\xi} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \cdot \frac{1}{\xi^{s_{\lambda k}}} A_{\lambda k}(\xi),$$

où les $s_{\lambda k}$ sont égaux à 1 pour $\lambda = k$ et à des nombres entiers finis quelconques pour $\lambda \neq k$ et où les $A_{\lambda k}(\xi)$ désignent des fonctions holomorphes.

Si on y fait la substitution $x = \frac{1}{\xi}$, le système différentiel (1) se présente sous la forme

$$\frac{dy_k}{d\xi} = - \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \frac{1}{\xi^{s_{\lambda k}}} \cdot a_{\lambda k}\left(\frac{1}{\xi}\right) \cdot \xi^{s_{\lambda k}-2}.$$

De la comparaison des 2 formes du système différentiel il résulte, que nous avons

$$a_{\lambda k}\left(\frac{1}{\xi}\right) = - A_{\lambda k}(\xi) \cdot \xi^{2-s_{\lambda k}},$$

c'est-à-dire que les coefficients $a_{\lambda k}\left(\frac{1}{\xi}\right) = a_{\lambda k}(x)$ doivent avoir au point $\xi = 0$, donc au point $x = \infty$ un zéro de degré $(2 - s_{\lambda k})$, mais il résulte de (9) que les *$G_{ik}(x)$ doivent être des fonctions rationnelles entières de degré au plus égal à* $(\sigma + 1) \cdot s_{ik} - 2 = p_{ik}$. Si $i = k$, alors $p_{kk} = \sigma - 1$.

III. Les conditions necessaires sont aussi suffisantes pour la résolution d'un système différentiel n'ayant pas de point d'indétermination

Soit le système différentiel

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

où on a

$$a_{\lambda k} = \frac{G_{\lambda k}(x)}{[\varphi(x)]^{s_{\lambda k}}}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n,$$

où les $s_{\lambda k}$ sont encore égaux à 1 pour $\lambda = k$ et pour $\lambda \neq k$ à des nombres entiers finis quelconques.

La forme normale de ce système différentiel relative au point singulier $x = a_1$ est

$$(x - a_1)P_{0k}\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda P_{\lambda k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

où, en désignant par m_k la plus grande des valeurs $s_{\lambda k}$, $\lambda \neq k$, on a

$$P_{0k} = \frac{[\varphi(x)]^{m_k}}{x - a_1},$$

$$P_{\lambda k} = [\varphi(x)]^{m_k - s_k}G_{\lambda k}(x),$$

ce qui entraîne que les P_{0k} sont des fonctions rationnelles entières de degré au plus égal à $\sigma m_k - 1 = q_k$ et les $P_{\lambda k}$ des fonctions rationnelles entières de degré au plus égal à $\sigma m_k + s_{\lambda k} - 2 = q_{\lambda k}$. Si on a $\lambda = k$ les P_{kk} sont des fonctions rationnelles de degré au plus égal à $\sigma m_k - 1 = q_k$. Dans le cas où $n = 2$, pour $k = 1,2$, P_{0k} et P_{kk} sont de fonctions rationnelles entières de degré au plus égal à $\sigma s_{\lambda k} - 1 = q_k$ et les $P_{\lambda k}$, $\lambda \neq k$, des fonctions rationnelles entières de degré au plus égal à $(\sigma + 1)\, s_{\lambda k} - 2 = q_{\lambda k}$.

Les développements en série des fonctions $\mathrm{P}_{0k}(x)$ et $P_{\lambda k}(x)$ au voisinage du point singulier $x = a_1$ du système différentiel sont

$$P_{0k} = \sum_{\varrho_k=0}^{q_k} b_{0\varrho_k}^{(k)}(x - a_1)^{\varrho_k}, \qquad P_{\lambda k} = \sum_{\mu_k=0}^{q_{\lambda k}} b_{\lambda\mu_k}^{(k)}(x - a_1)^{\mu_k}, \qquad \lambda \neq k, \tag{11}$$

$$P_{kk} = \sum_{\varrho_k=0}^{q_k} b_{k\varrho_k}^{(k)}(x - a_1)^{\varrho_k},$$

où $b_{00}^{(k)}$, $b_{\lambda 0}^{(k)}$, $b_{k0}^{(k)}$ ne sont pas nuls.

Si le point singulier $x = a_1$ n'est pas un point d'indétermination, de la solution du système différentiel, au voisinage de ce point singulier la solution et sa dérivée sont

$$y_k = (x - a_1)^{r_k}\sum_{\nu_k=0}^{\infty} c_k^{(\nu_k)}(x - a_1)^{\nu_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} = (x - a_1)^{r_k}\sum_{\nu_k=0}^{\infty} (r_k + \nu_k)c_k^{(\nu_k)} \cdot (x - a_1)^{\nu_k - 1},$$

où les $c_k^{(0)}$ ne sont pas nuls.

Si nous portons dans (10) nous avons

$$(x-a_1)^{r_k}\sum_{\nu_k=0}^{\infty}\sum_{\varrho_k=0}^{q_k}[(r_k+\nu_k)b_{0\varrho_k}^{(k)}-b_{k\varrho_k}^{(k)}]\,.\,c_k^{(\nu_k)}(x-a_1)^{\varrho_k+\nu_k}\equiv$$

$$\equiv\sum_{\lambda=1}^{n-1}(x-a_1)^{r_\lambda}\sum_{\lambda_\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu_k=0}^{q_{\lambda k}}b_{\lambda\mu_k}^{(k)}c_\lambda^{(\nu_k)}\,.\,(x-a_1)^{\mu_k+\nu_k},\qquad \lambda\neq k.$$

Pour simplifier nous poserons

$$(12)\qquad [(r_k+\nu_k)b_{0\varrho_k}^{(k)}-b_{k\varrho_k}^{(k)}]c_k^{(\nu_k)}=A_{\nu_k\varrho_k}^{(k),k},\qquad b_{\lambda\mu_k}^{(k)}c_\lambda^{(\nu_k)}=B_{\nu_k\mu_k}^{(k),\lambda},$$

alors on a

$$(x-a_1)^{r_k}\sum_{\nu_k=0}^{\infty}\sum_{\varrho_k=0}^{q_k}A_{\nu_k\varrho_k}^{(k),k}(x-a_1)^{\varrho_k+\nu_k}\equiv\sum_{\lambda=1}^{n-1}(x-a_1)^{r_\lambda}\sum_{\nu_\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu_k=0}^{q_{\lambda k}}B_{\nu_\lambda\mu_k}^{(k),\lambda}.$$

$$(x-a_1)^{\mu_k+\nu_\lambda},\quad \lambda\neq k.$$

Si nous écrivons cette identité pour les valeurs $k=1,2,\ldots,n$ et les $\lambda=$ $=1,2,\ldots,n$, correspondants et si nous effectuons ensuite le produit, nous obtenons

$$(x-a_1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}r_k}\prod_{k=1}^{n}\sum_{\nu_k=0}^{\infty}\sum_{\varrho_k=0}^{q_k}A_{\nu_k\varrho_k}^{(k),k}(x-a_1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}(\varrho_k+\nu_k)}\equiv$$

$$\equiv(x-a_1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{n}r_\lambda}\sum_{s=1}^{n-1}(s)\prod_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu_\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu_k=0}^{q_{\lambda k}}B_{\nu_\lambda\mu_k}^{(k),\lambda}(x-a_1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k+\sum\limits_{\lambda=1}^{n}\nu_\lambda}+$$

$$+(x-a_1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{n}\mathrm{e}_\lambda^{(s)}r_\lambda}\sum_{s=1}^{N}(s)\prod_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu_\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu_k=0}^{q_{\lambda k}}B_{\nu_\lambda\mu_k}^{(k),\lambda}\,.\,(x-a_1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k+\sum\limits_{\lambda=1}^{n}\mathrm{e}_\lambda^{(s)}\nu_\lambda},$$

$$k=1,2,\ldots,n,$$

où $\lambda\neq k$. Les $\mathrm{e}_\lambda^{(s)}$ out les valeurs $0,1,2,\ldots,n-1$, mais de telle manière que

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\mathrm{e}_\lambda^{(s)}=n$$

et r_λ, ou ν_λ se répetent autant de fois qu'il a d'unité dans le nombre $\mathrm{e}_\lambda^{(s)}$, $\lambda=1,2,\ldots,n$. Dans le premier terme du second membre, les ν_λ sont différents, c'est pourquoi le nombre de termes dans la première sommation y demeure $n-1$. Dans le deuxième terme, au contraire, les ν_λ pouvent se répéter et cela jusqu'à $(n-1)$ fois, mais certains autres ν_λ disparaîtront, ce qui entraîne que le nombre des termes dans la première sommation du 2e terme du 2d membre est

$$(n-1)^n-(n-1)=N.$$

Dans ce 2e terme, les sommations relatives à un certain nombre ν_λ se présentent autant de fois, qu'il y a d'unités dans le nombre $\mathrm{e}_\lambda^{(s)}$.

Si nous divisons cette identité par

$$(x-a_1)^{\sum\limits_{k=1} r_k} = (x-a_1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} r_\lambda},$$

nous obtenons

$$\prod_{k=1}^{n} \sum_{\nu_k=0}^{\infty} \sum_{\varrho_k=0}^{q_k} A_{\nu_k \varrho_k}^{(k),k} (x-a_1)^{\sum\limits_{k=1}^{n} (\varrho_k+\nu_k)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{s=1}^{n-1} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} \sum_{\nu_\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu_k=0}^{q_{\lambda k}} B_{\nu_\lambda \mu_k}^{(k),\lambda} \cdot (x-a_1)^{\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k + \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \nu_\lambda} +$$

$$+ (x-a_1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} \mathrm{e}_\lambda^{(s)} r_\lambda - \sum\limits_{k=1}^{n} r_k} \sum_{s=1}^{N} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} \sum_{\nu_\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu_k=0}^{q_{\lambda k}} B_{\nu_\lambda \mu_k}^{(k),\lambda} (x-a_1)^{\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k + \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \mathrm{e}_\lambda^{(s)} \nu_\lambda}.$$

Dans le second terme du second membre, dans les sommations particulières, les ν_λ se répètent, c'est-à-dire que parmi ces ν_λ, le même est pris autant de fois qu'il y a de e_λ et dans chaque groupe il y a autant de termes qui, sont les mêmes que d'unités dans e_λ pour ν_λ.

Ordonnons maintenant cette identité suivant les puissances de $(x-a_1)$. Pour cela posons $\varrho_k + \nu_k = \varkappa_k$, il vient alors

$$\sum_{\nu_k=0}^{\infty} \sum_{\varrho_k=0}^{q_k} A_{\nu_k \varrho_k}^{(k),k} (x-a_1)^{\sum\limits_{k=1}^{n} \varkappa_k} = \sum_{\varkappa_k=0}^{\infty} \sum_{i_k=0}^{\varkappa_k} A_{i_k, \varkappa_k - i_k}^{(k),k} (x-a_1)^{\varkappa_k}$$

et alors, si nous posons

$$\sum_{k=1}^{n} (\varrho_k + \nu_k) = \sum_{k=1}^{n} \varkappa_k = \sigma_1,$$

on a

$$\prod_{k=1}^{n} \sum_{\nu_k=0}^{\infty} \sum_{\varrho_k=0}^{q_k} A_{\nu_k}^{(k),k} (x-a_1)^{\sum\limits_{k=1}^{n} (\varrho_k+\nu_k)} = \sum_{\sigma_1=0}^{\infty} C_{\sigma_1} (x-a_1)^{\sigma_1} =$$

$$= \sum_{\sigma_1=0}^{\infty} \sum_{\varkappa_1=0}^{\sigma_1 - \sum\limits_{j=2}^{n-1} \varkappa_j} \cdots \sum_{\varkappa_{n-1}=0}^{\sigma_1 - \sum\limits_{j=1}^{n-1} \varkappa_j} \sum_{i_1=0}^{\varkappa_1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{\varkappa_{n-1}} \sum_{i_n=0}^{\sigma_1 - \sum\limits_{j=1}^{n-1} \varkappa_j} A_{i_1, \varkappa_1 - i_1}^{(1)} \cdots$$

$$A_{i_{n-1}, \varkappa_{n-1} - i_{n-1}}^{(n-1)} \cdot A_{i_n, \sigma_1 - \sum\limits_{j=1}^{n-1} \varkappa_j - i_n}^{(n)} (x-a_1)^{\sigma_1}.$$

De même, si nous posons

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k + \sum_{\lambda=1}^{n} \nu_\lambda = \sigma_2,$$

nous obtenons

$$(s)\prod_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu_\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu_k=0}^{q_{\lambda k}} B^{(k),\lambda}_{\nu_\lambda \mu_k} = C^{(s)}_{\sigma_2} =$$

$$= \sum_{\varkappa_1=0}^{\sigma_2-\sum\limits_{j=2}^{n-1}\varkappa_j} \cdots \sum_{\varkappa_{n-1}=0}^{\sigma_2-\sum\limits_{i-1}^{n-1}\varkappa_j} \sum_{i_1=0}^{\varkappa_1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{\varkappa_{n-1}} \sum_{i_n=0}^{\sigma_2-\sum\limits_{j=1}^{n-1}\varkappa_j} B^{(1)}_{i_1,\varkappa_1-i_1} \cdots$$

$$B^{(n-1)}_{i_{n-1},\varkappa_{n-1}-i_{n-1}} \cdot B^{(n)}_{i_n,\ \sigma_2-\sum\limits_{j=1}^{n-1}\varkappa_j-i_n}.$$

De même, si nous posons

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_k + \sum_{\lambda=1}^{n} \mathrm{e}^{(s)}_{\nu}\nu_\lambda = \sigma^{(s)}_3,$$

nous avons au second membre dans le second terme de l'identité

$$(s)\prod_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu_\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu_k=0}^{q_{\lambda k}} B^{(k),\lambda}_{\nu_\lambda \mu_k} = C^{(s)}_{\sigma_3} = \sum_{\varkappa_1=0}^{\sigma_3^{(s)}-\sum\limits_{j=2}^{n-1}\varkappa_j} \cdots \sum_{\varkappa_{n-1}=0}^{\sigma_3^{(s)}-\sum\limits_{j=1}^{n-1}\varkappa_j} \sum_{i_1=0}^{\varkappa_1} \cdots$$

$$\sum_{i_{n-1}=0}^{\varkappa_{n-1}} \sum_{i_n=0}^{\sigma_3^{(s)}-\sum\limits_{j=1}^{n-1}\varkappa_j} B^{(k),(1)}_{i_1,\varkappa_1-i_1} \cdots B^{(k),(n-1)}_{i_{n-1},\varkappa_{n-1}-i_{n-1}} B^{(k),(n)}_{i_n,\ \sigma_3^{(s)}-\sum\limits_{j=1}^{n-1}\varkappa_j-i_n},$$

où parmi les $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ et parmi les $\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_n$ le même se répète autant de fois qu'il y a de $\mathrm{e}^{(s)}_\lambda$ et où dans chaque groupe, il y a autant de termes égaux que e_λ a d'unités.

Alors l'équation obtenue prendra la forme

$$\text{(13)} \qquad \sum_{\sigma_1=0}^{\infty} C_{\sigma_1}(x-a_1)^{\sigma_1} - \sum_{s=1}^{n-1}\sum_{\sigma_2=0}^{\infty} C^{(s)}_{\sigma_2}(x-a_1)^{\sigma_2} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N}\sum_{\sigma_3=0}^{\infty} C^{(s)}_{\sigma_3}(x-a_1)^{\sigma_3^{(s)}+\sum\limits_{\lambda=1}^{n}\mathrm{e}^{(s)}_\lambda r_\lambda-\sum\limits_{k=1}^{n} r_k}.$$

Jusqu'à la plus petite valeur de $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{q}_k$ et $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{q}_{\lambda k}$, $\lambda = 1, 2, \ldots n$, $\lambda \neq k$, on a $\sigma_1 = \sigma_2$ et même ensuite ce résultat subsiste et on a

$$\text{(14)} \quad \sum_{\sigma_1=0}^{\infty} C_{\sigma_1}(x-a_1)^{\sigma_1} - \sum_{s=1}^{n-1}\sum_{\sigma_2=0}^{\infty} C^{(s)}_{\sigma_2}(x-a_1)^{\sigma_2} \equiv \sum_{s=1}^{N}\sum_{\sigma_3=0}^{\infty} C^{(s)}_{\sigma_3}(x-a_1)^{\sigma_3^{(s)}+R^{(s)}_\lambda}$$

avec

$$R^{(s)}_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{n}\mathrm{e}^{(s)}_\lambda r_\lambda - \sum_{k=1}^{n} r_k \neq 0.$$

Si nous avons, par exemple

$$\sum_{k=1}^{n} q_k \leqq \sum_{k=1}^{n} q_{\lambda k}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n, \qquad \lambda \neq k,$$

et si nous posons

$$\sigma = \sigma_1 + Q_\lambda = \sigma_2,$$

où

$$Q_\lambda = \sum_{k=1}^{n} q_{\lambda k} - \sum_{k=1}^{n} q_k,$$

nous obtenons l'identité (14).

Si $\sigma_1 = 0$, alors $\sigma_3 = 0$ aussi, mais si $\sigma_3 = 0$, σ_1 n'est pas encore nul. Si $\sigma_1 = 0$, l'exposant au second membre de (14) est $R_\lambda^{(s)}$ qui n'est pas nul. Si pour une certaine valeur de λ, on a

$$\sigma_1 = \sigma_3 + R_\lambda^{(s)},$$

les coefficients correspondant a cette valeur de λ au 1er et au 2d membre comme coefficients de puissances égales sont égaux.

Pour $\sigma_1 = 0$, on doit donc avoir

$$\text{(15a)} \qquad \prod_{k=1}^{n} A_{00}^{(k),k} - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \prod_{\lambda=1}^{n} B_{00}^{(k),\lambda} = 0, \quad \lambda \neq k,$$

ou, si nous tenons compte de (12), il vient

$$\left[\prod_{k=1}^{n} (r_k b_{00}^{(k)} - b_{k0}^{(k)}) - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \prod_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda 0}^{(k)}\right] c_1^{(0)} c_2^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)} = 0.$$

Etant donné que $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)}$ sont les premières valeurs de la solution du système différentiel (1), on a

$$c_1^{(0)} c_2^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)} \neq 0$$

et ainsi il vient

$$\text{(15)} \qquad \prod_{k=1}^{n} (r_k b_{00}^{(k)} - b_{k0}^{(k)}) - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \prod_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda 0}^{(k)} = 0, \qquad \lambda \neq k.$$

Pour $n = 2$, cette équation devient

$$\text{(16)} \qquad (r_1 b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)})(r_2 b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}) - b_{20}^{(1)} b_{10}^{(2)} = 0$$

et pour $n = 3$, on a

$$\text{(17)} \quad (r_1 b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)})(r_2 b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)})(r_3 b_{00}^{(3)} - b_{30}^{(3)}) - (b_{20}^{(1)} b_{30}^{(2)} b_{10}^{(3)} + b_{30}^{(1)} b_{10}^{(2)} b_{20}^{(3)}) = 0$$

mais la relation (8) s'applique encore à $r_1, r_2, \ldots, r_n$

$$\text{(18)} \qquad r_\lambda - r_k + 1 = s_{\lambda k}, \qquad \lambda \neq k,$$

où r_λ et r_k appartiennent au même groupe α de la permutation des éléments $1, 2, \ldots, n$ auquel appartiennent aussi les $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de l'équation (14).

Si dans le système d'équations (18) nous considérons les $n - 1$ équations

$$r_\lambda - r_1 + 1 = s_{\lambda 1}, \qquad \lambda = 2, 3, \ldots, n,$$

en leur adjoignant l'équation (15) écrite pour r_1, nous obtenons une équation algébrique de degré n, qui donne n valeurs pour r_1

$$r_{11}, r_{21}, \ldots, r_{n1},$$

valeurs qui peuvent être distinctes ou confondues. Supposons d'abord qu elles soient toutes distinctes. Si dans le système (18) nous choisissons les $n - 1$ équations

$$r_\lambda - r_2 + 1 = s_{\lambda 2}, \qquad \lambda = 1, 3, \ldots, n, \qquad \lambda \neq 2,$$

en leur adjoignant l'équation (15) écrite pour r_2 nous obtenons une équation algébrique de degré n, qui résulte aussi de léquation algébrique qui précède par permutation des indices 1 et 2. Elle donne pour r_2 n valeurs

$$r_{12}, r_{22}, \ldots, r_{n2}.$$

Et ainsi de suite. Finalement si on choisit dans (18) les $n - 1$ équations

$$r_\lambda - r_n + 1 = s_{\lambda n}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, n-1,$$

en leur adjoignant l'équation (14) écrite pour r_n, on obtient une équation algébrique de degré n, qui résulte aussi de l'équation pour r_{n-1} par permu; tation des indices $n - 1$ et n. Elle donne pour r_n n valeurs

$$r_{1n}, r_{2n}, \ldots, r_{nn}.$$

Ces équations algébriques de degrés n, au nombre de n, sont *les équations déterminantes* pour $r_1, r_1, \ldots, r_n$ à partir desquelles on peut calculer r_{ik}, i, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Si $s_{\lambda k} = 1$, on a $r_\lambda = r_k$, $\lambda \neq k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, c'est-à-dire que pour chaque valeur définié de λ, on a $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r$ et on tire de (15) une équation déterminante de degré n.

Pour $n = 2$, l'équation

$$r_2 - r_1 + 1 = s_{21}$$

jointe à (16) donne pour r_1 l'équation déterminante

$$\begin{aligned} r_1^2 b_{00}^{(1)} b_{00}^{(2)} - r_1[-(s_{21}-1) b_{00}^{(1)} b_{00}^{(2)} + b_{00}^{(1)} b_{20}^{(2)} + b_{10}^{(1)} b_{00}^{(2)}] - \\ -(s_{21}-1) b_{10}^{(1)} b_{00}^{(2)} + b_{10}^{(1)} b_{20}^{(2)} - b_{20}^{(1)} b_{10}^{(2)} = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

et l'équation

$$r_1 - r_2 + 1 = s_{12}$$

jointe de même à (16) donne pour r_2 l'équation déterminante

$$\begin{aligned} r_2^2 b_{00}^{(1)} b_{00}^{(2)} - r_2[-(s_{12}-1) b_{00}^{(1)} b_{00}^{(2)} + b_{10}^{(1)} b_{00}^{(2)} + b_{00}^{(1)} b_{20}^{(2)}] - \\ -(s_{12}-1) b_{00}^{(1)} b_{20}^{(2)} + b_{10}^{(1)} b_{20}^{(2)} - b_{20}^{(1)} b_{10}^{(2)} = 0. \end{aligned} \tag{19a}$$

Le discriminant de l'équation (19) est

$$D_1 = [(s_{21}-1) b_{00}^{(1)} b_{00}^{(2)} - b_{10}^{(1)} b_{00}^{(2)} + b_{00}^{(1)} b_{20}^{(2)}]^2 + 4 b_{00}^{(1)} b_{00}^{(2)} b_{20}^{(1)} b_{10}^{(2)}$$

et le discriminant de l'équation (19a) s'en déduit par substitution de s_{12} à s_{21}.

Examinons maintenant les termes (14) pour $\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$, $\varrho_2 = 1, 2, 3, \ldots$ et $\sigma_3 = 1, 2, 3, \ldots$

Les coefficients du système différentiel (10) sont des fonctions analytiques et ont donc au moins deux pointe singuliers. D'où σ est au moins égal à 2. En outre on a $q_{\lambda k} = \sigma \cdot m_k + s_{\lambda k} - 2$, où m_k est la plus grande valeur des $s_{\lambda k}$, $\lambda \neq k$ et ainsi $q_{\lambda k}$ 0, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. La plus petite valeur des $q_{\lambda k}$ peut être 1, mais pour $\sigma = 2$, q_k a aussi cette valeur. La grandeur du nombre $q_{\lambda k}$ n'a d'effet que sur le nombre de termes du facteur par lequel sont multipliées les puissance $(x - a_1)^{\sigma_2}$ et $(x - a_1)^{\sigma_3}$, nombre qui est normalement $\sigma_2 + 1$, parfois $\sigma_3 + 1$, mais en tout cas jamais supérieur à $q_{\lambda k} + 1$.

Nous avions supposé provisoviement que les racines des équations déterminantes étaient toutes distinctes. Supposons maintenant que deux quelconques d'entre elles ne diffèrent pas d'un nombre entier, donc que les R_λ sont des nombres com lexes. Alors de l'identité (14) on tire l'équation

$$(20) \qquad \sum_{\sigma_1=0}^{\infty} C_{\sigma_1}(x - a_1)^{\sigma_1} - \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{\sigma_2=0}^{\infty} C_{\sigma_2}^{(s)}(x - a_1)^{\sigma_2} = 0,$$

ou, compte tenu des valeurs C_{σ_1} et $C_{\sigma_2}^{(s)}$ où l'on fait $\sigma_1 = \sigma_2$,

$$\sum_{\sigma_1=0}^{\infty} \sum_{\varkappa_\alpha=0}^{\sigma_1-\beta_\alpha} \sum_{i_\alpha=0}^{\varkappa_\alpha} \left[\prod_{k=1}^{n} A_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), k} - \sum_{s=1}^{n-1} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} B_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), \lambda} \right] (x - a_1)^{\sigma_1} \equiv 0,$$

où dans la seconde sommation on a $\alpha = 1, 2, \ldots, n - 1$,

$$\beta_\alpha = \sum_{j=1}^{n-1} \varkappa_j, \qquad j \neq \alpha,$$

de telle sorte que la sommation relative à $\varkappa_\alpha$ représente $n - 1$ sommations; ensuite dans la 3e sommation on a $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, si bien que la sommation relative à i_α représente n sommations où pour $\alpha = n$ on a

$$\varkappa_n = \sigma_1 - \sum_{j=1}^{n-1} \varkappa_j .$$

Cette identité est vérifiée pour chaque valeur de x, ce qui entraîne

$$(21) \qquad f_\sigma = \sum_{\varkappa_\alpha=0}^{\sigma-\beta_\alpha} \sum_{i_\alpha=0}^{\varkappa_\alpha} \left[\prod_{k=1}^{n} A_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), k} - \sum_{s=1}^{n-1} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} B_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), \lambda} \right] = 0,$$

où on a $\sigma = \sigma_1 = 1, 2, \ldots, \lambda \neq k$.

En faisant dans cette équation $\sigma = \sigma_1 = 0$ on obtient l'équation (15a). Et de (12), on tire

$$\prod_{k=1}^{n} A_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), k} - \sum_{s=1}^{n-1} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} B_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), \lambda} =$$

$$= \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left[(r_k + i_\alpha)\, b_{0, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k)} - b_{k, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k)} \right] - \sum_{s=1}^{n-1} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k)} \right\} \prod_{k=1}^{n} c_k^{(i_\alpha)}.$$

Si maintenant on pose

$$(22)\qquad \prod_{k=1}^{n} [r_k + i_\alpha)\, b^{(k)}_{0,\varkappa_\alpha - i_\alpha} - b^{(k)}_{k,\varkappa_\alpha - i_\alpha}] - \sum_{s=1}^{n-1} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} b^{(k)}_{k,\varkappa_\alpha - i_\alpha} = $$
$$= G^{(i_1, i_2, \ldots, i_n)}_{\varkappa_1 - i_1, \ldots, \varkappa_{n-1} - i_{n-1},\ \sigma - \beta_n - i_n},$$

(21) donne

$$(23)\quad f = \sum_{\varkappa_1=0}^{\sigma-\beta_1} \cdots \sum_{\varkappa_{n-1}=0}^{\sigma-\beta_{n-1}} \sum_{i_1=0}^{\varkappa_1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{\varkappa_{n-1}} \sum_{i_n=0}^{\sigma-\beta_n} G^{(i_1, i_2, \ldots, i_n)}_{\varkappa_1 - i_1, \ldots, \varkappa_{n-1} - i_{n-1}, \sigma - \beta_n - i_n} \prod_{k=1}^{n} c_k^{(i_\alpha)} =$$
$$= G^{(\sigma, 0, \ldots, 0)}_{0, \ldots, 0} c_1^{(\sigma)} c_2^{(0)} \ldots c_{n-1}^{(0)} + G^{(0, \sigma, \ldots, 0)}_{0, \ldots, 0} c_1^{(0)} c_2^{(\sigma)} \ldots c_n^{(0)} + \ldots +$$
$$+ G^{(0, 0, \ldots, \sigma)}_{0, \ldots, 0} c_1^{(0)} c_2^{(0)} \ldots c_{n-1}^{(0)} c_n^{(\sigma)} +$$
$$+ \sum_{\varkappa_1=0}^{\sigma-\beta_1} \cdots \sum_{\varkappa_{n-1}=0}^{\sigma-\beta_{n-1}} \sum_{i_1=0}^{\varkappa_1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{\varkappa_{n-1}} \sum_{i_n=0}^{\sigma-\beta_n} G^{(i_1, i_2, \ldots, i_n)}_{\varkappa_1 - i_1, \ldots, \varkappa_{n-1} - i_{n-1}, \sigma - \beta_n - i_n} c_1^{(i_1)} c_2^{(i_2)} \ldots c_n^{(i_n)} = 0,$$

où on a $i_1, i_2, \ldots, i_n \neq \sigma$, $\sigma = 1, 2, 3, \ldots$

Pour $\sigma = 1$ et 2, cette équation est

$$f_1 = G^{(1, 0, \ldots, 0)}_{0, \ldots, 0} c_1^{(1)} c_2^{(0)} \ldots c_n^{(0)} + G^{(0, 1, 0, \ldots, 0)}_{0, \ldots, 0} c_1^{(0)} c_2^{(1)} \ldots c_n^{(0)} + \ldots +$$
$$+ G^{(0, \ldots, 0, 1)}_{0, \ldots, 0} c_1^{(0)} c_2^{(0)} \ldots c_n^{(1)} + [G^{(0, \ldots, 0)}_{1, 0, \ldots, 0} + G^{(0, \ldots, 0)}_{0, 1, 0, \ldots, 0} + \ldots + G^{(0, \ldots, 0)}_{0, \ldots, 0, 1}] c_1^{(0)} c_2^{(0)} \ldots c_n^{(0)};$$

$$f_2 = G^{(2, 0, \ldots, 0)}_{0, \ldots, 0} c_1^{(2)} c_2^{(0)} \ldots c_n^{(0)} + G^{(0, 2, 0, \ldots, 0)}_{0, \ldots, 0} c_1^{(0)} c_2^{(2)} \ldots c_n^{(0)} + \ldots +$$
$$+ G^{(0, \ldots, 0, 2)}_{0, \ldots, 0} c_1^{(0)} c_2^{(0)} \ldots c_n^{(2)} + G^{(1, 1, 0, \ldots, 0)}_{0, \ldots, 0} c_1^{(1)} c_2^{(1)} c_3^{(0)} \ldots c_n^{(0)} +$$
$$+ G^{(1, 0, 1, \ldots, 0)}_{0, \ldots, 0} c_1^{(1)} c_2^{(0)} c_3^{(1)} \ldots c_n^{(0)} + \ldots + G^{(0, \ldots, 0, 1, 1)}_{0, \ldots, 0} c_1^{(0)} \ldots c_{n-2}^{(0)} c_{n-1}^{(1)} c_n^{(1)} +$$
$$+ [G^{(1, 0, \ldots, 0)}_{1, 0, \ldots, 0} + G^{(1, 0, \ldots, 0)}_{0, 1, \ldots, 0} + \ldots + G^{(1, 0, \ldots, 0)}_{0, \ldots, 0, 1}] c_1^{(1)} c_2^{(0)} \ldots c_n^{(0)} + \ldots +$$
$$+ G^{(0, \ldots, 0, 1)}_{1, 0, \ldots, 0} + G^{(0, \ldots, 0, 1)}_{0, 1, \ldots, 0} + \ldots + G^{(0, \ldots, 0, 1)}_{0, \ldots, 0, 1}] c_1^{(0)} c_2^{(0)} \ldots c_n^{(1)} +$$
$$+ [G^{(0, \ldots, 0)}_{2, 0, \ldots, 0} + G^{(0, \ldots, 0)}_{0, 2, \ldots, 0} + \ldots + G^{(0, \ldots, 0)}_{0, \ldots, 0, 2} + G^{(0, \ldots, 0)}_{1, 1, 0, \ldots, 0} + G^{(0, \ldots, 0)}_{1, 0, 1, \ldots, 0} +$$
$$+ G^{(0, \ldots, 0)}_{0, \ldots, 0, 1, 1}] \cdot c_1^{(0)} c_2^{(0)} \ldots c_n^{(0)}, \text{ etc.}$$

Pour $n = 2$, (23) s'écrit

$$(23a)\qquad f = \sum_{\varkappa_1=0}^{\sigma} \sum_{i_1=0}^{\varkappa_1} \sum_{i_2=0}^{\sigma-\varkappa_1} G^{(i_1, i_2)}_{\varkappa_1 - i_1, \sigma - \varkappa_1 - i_2} c_1^{(i_1)} c_2^{(i_2)} =$$
$$= G^{(\sigma, 0)}_{0, 0} c_1^{(\sigma)} c_2^{(0)} + G^{(0, \sigma)}_{0, 0} c_1^{(0)} c_2^{(\sigma)} + \sum_{\varkappa_1=0}^{\sigma} \sum_{i_1=0}^{\varkappa_1} \sum_{i_2=0}^{\sigma-\varkappa_1} G^{(i_1, i_2)}_{\varkappa_1 - i_1, \sigma - \varkappa_1 - i_2} \cdot c_1^{(i_1)} c_2^{(i_2)},$$
$$i_1, i_3 \neq \sigma.$$

Les r_k, en tant que racines des équations déterminantes de degré n ont en genéral pour chaque valeur de $k (k = 1, 2, \ldots, n)$, n valeurs r_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Si nous les substituons à r_k dans l'équation $f_1 = 0$, nous obtenons n systèmes linéaires de chacun n équations, lesquelles s'écrivent.

$$[f_1]_{r_k = r_{ik}} = f_1^{(i, k)} = 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Nous pouvons en tirér les $c_{ik}^{(1)}$, si toutefois les déterminants des systèmes linéaire ne sont pas nuls.

D'après (22) on a dans ce cas

$$G_{0, \ldots, 0}^{(1, 0, \ldots, 0)} = [(r_{i_1} + 1)\, b_{00}^{(1)} - b_{10}^{(1)}](r_{i_2} b_{00}^{(2)} - b_{20}^{(2)}) \ldots (r_{i_n} b_{00}^{(n)} - b_{n0}^{(n)}) -$$

$$- \sum_{\lambda=1}^{n-1} \prod_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda 0}^{(k)} = G_{0^i, 0, \ldots, 0}^{(1, 0, \ldots, 0)}, \text{ etc.}$$

On en tire que le déterminant d'un système linéaire est de la forme

$$\begin{vmatrix} G_{0^1, 0, \ldots, 0}^{(1, 0, \ldots, 0)}, \ldots, G_{0^1, 0, \ldots, 0}^{(0, 0, \ldots, 0, 1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{0^n, 0, \ldots, 0}^{(1, 0, \ldots, 0)}, \ldots G_{0^n, 0, \ldots, 0}^{(0, 0, \ldots, 0, 1)} \end{vmatrix}.$$

D'après (15), ce déterminant est nul si les racines de l'équation determinante ont pour différence 1. Mais nous avons exclu cette possibilité, donc $c_{ik}^{(1)}$ peut toujours être calculé.

Quand on connaît $c_{ik}^{(1)}$, à l'aide de

$$[f_2]_{r_k = r_{ik}} = 0,$$

on peut calculer $c_{ik}^{(2)}$ si les racines des équations déterminantes n'ont pas 2 pour différence.

Ainsi, à l'aide des systèmes linéaires

$$[f_\sigma]_{r_k = r_{ik}} = 0, \qquad \sigma = 3, 4, \ldots$$

on peut calculer successivement $c_{ik}^{(\sigma)}$, $\sigma = 3,4, \ldots$, si les racines des équations déterminantes ne diffèrent pas de nombres entiers réels σ, ce que nous avons exclu; donc les équations

$$[f_\sigma]_{r_k = r_{ik}} = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

donnent des systèmes linéaires récurrents pour le calcul des coefficients de la solution

$$y_k = (x - a_1)^{r_k} \sum_{\nu_k = 0}^{\infty} c_k^{(\nu_k)} (x - a_1)^{\nu_k}.$$

Mais puisque pour les r_k, nous obtenons des valeurs r_{ik}, donc pour $c_k^{(\nu_k)}$ des valeurs $c_{ik}^{(\nu_k)}$, nous obtenons aussi, ainsi, pour le système différentiel (1) n solutions qui s'écrivent

$$y_{ik} = (x - a_1)^{r_{ik}} \sum_{\nu_k = 0}^{\infty} c_{ik}^{(\nu_k)} (x - a_1)^{\nu_k}$$

et elles forment un système fondamental du système différentiel (1). La solution général du système différentiel (1) est alors

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{n} c_i y_{ik}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

où les c_i sont des constantes arbitraires.

Les y_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, n$, comme il résulte du calcul des $c_{ik}^{(\nu)}$ ont ces mêmes valeurs premières $c_i^{(0)}$ qui ne sont pas nulles.

Cas où des racines des équations déterminantes ont pour différence un nombre entier. Dans ce cas, on a $R_\lambda^{(s)} \leqq 0$, $\sigma_3^{(s)}$ peut toujours être choisi tel que

$$\sigma_3^{(s)} + R_\lambda^{(s)} = \sigma = \sigma_1 = \sigma_2,$$

alors on a

$$\left\{ \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left[c_\sigma - \sum_{s=1}^{n-1} c_\sigma^{(s)} \right] - \sum_{s=1}^{N} \sum_{\sigma_3^{(s)}=0}^{\infty} c_\sigma^{(s)} \right\} (x - a_1)^\sigma \equiv 0.$$

D'où

$$\text{(25)} \qquad f_\sigma = \sum_{\varkappa_\alpha=0}^{\sigma-s_\alpha} \sum_{i_\alpha=0}^{\varkappa_\alpha} \prod_{k=1}^{n} A_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), k} - \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{\varkappa_\alpha=0}^{\sigma-s_\alpha} \sum_{i_\alpha=0}^{\varkappa_\alpha} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} B_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), \lambda} -$$
$$- \sum_{s=1}^{N} \sum_{\varkappa_\alpha=0}^{\sigma - R_\lambda^{(s)} - s_\alpha} \sum_{i_\alpha=0}^{\varkappa_\alpha} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} B_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), \lambda} = 0.$$

Tant que $\sigma \leqq | R_\lambda |$, $| R_\lambda |$ désignant la plus petite valeur de $| R_\lambda^{(s)} |$, on a constamment $\sigma_3^{(s)} = 0$ et (24) est vérifiée: on en tire n systèmes linéaires de chacun n équations, permettant de calculer $c_{ik}^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, | R_\lambda | - 1$, puisque le déterminant de ces systèmes n'est pas nul, car on a $i_\alpha < R_\lambda^{(s)}$.

Mais quand on a $\sigma > | R_\lambda^{\blacksquare} |$, alors les $\sigma_3^{(s)}$ correspondants sont égaux à 1, 2, 3, ... et cela de telle sorte que

$$\sigma_3^{(s)} + R_\lambda^{(s)} = \sigma,$$

Alors on tire de (25)

$$\text{(25a)} \qquad f_\sigma = \sum_{\varkappa_\alpha=0}^{\sigma-s_\alpha} \sum_{i_\alpha=0}^{\varkappa_\alpha} \left[\prod_{k=1}^{n} A_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), k} - \sum_{s=1}^{n-1} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} B_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), \lambda} - \right.$$
$$\left. - \sum_{s=1}^{N} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} B_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), \lambda} \right] = 0.$$

D'après (12), on a

$$\prod_{k=1}^{n} A_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), k} - \sum_{s=1}^{n-1} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} B_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), \lambda} - \sum_{s=1}^{N} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} B_{i_\alpha, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k), \lambda} =$$
$$= \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left[(r_k + i_\alpha) b_{0, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k)} - b_{k, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k)} \right] - \sum_{s=1}^{n-1} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k)} - \right.$$
$$\left. - \sum_{s=1}^{N} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda, \varkappa_\alpha - i_\alpha}^{(k)} \right\} \prod_{k=1}^{n} c_k^{(i_\alpha)}.$$

Posons alors

$$(26) \qquad \prod_{k=1}^{n} [(r_k + i_\alpha) b^{(k)}_{0, \varkappa_\alpha - i_\alpha} - b^{(k)}_{k, \varkappa_\alpha - i_\alpha}] - \sum_{s=1}^{n-1} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} b^{(k)}_{\lambda, \varkappa_\alpha - i_\alpha} -$$
$$- \sum_{s=1}^{N} (s) \prod_{\lambda=1}^{n} b^{(k)}_{\lambda, \varkappa_\alpha - i_\alpha} = G^{(i_1, i_2, \ldots, i_n)}_{\varkappa_1 - i_1, \ldots, \varkappa_{n-1} - i_{n-1}, \sigma - s_n - i_n}.$$

Si nous portons dans l'équation (25a) nous obtenons une équation analogue à (23) et si nous y faisons $r_k = r_{ik}$, nous avons pour $c^{(\nu)}_{ik}$, $\nu = | R_\lambda |, | R_\lambda | + 1, | R_\lambda | + 2, \ldots$ des systèmes linéaires récurrents dont, d'après (15) les éléments des déterminants d'une même ligne ou d'une même colonne ne sont pas tous nuls, même si les racines des équations déterminantes diffèrent entre elles d'un nombre entier réel.

Dans ce cas d'équations déterminantes à racines multiples, le calcul des coefficients $c^{(\nu)}_{ik}$ peut se faire de la même façon que lorsqu'elles diffèrent de nombres entiers réels. Il suffit que considérer zéro comme un entier réel.

(A SUIVRE)

(Reçu le 1 novembre 1955.)

Nutné a postačujúce podmienky, aby diferenciálny systém nemal body neurčitosti

Akad. J. Hronec

V I. časti odvodím niektoré vety o diferenciálnych systémoch; tak v odseku 1 určím koeficienty pomocou fundamentálneho systému; v odseku 2 ukážem, že koeficienty sú invariantné vzhľadom na fundamentálne systémy, v odseku 3, je určený dif. systém determinantom.

V II. časti vyjdeme z fundamentálneho systému nemajúceho body neurčitosti na základe predošlých viet určíme nutný tvar koeficientov dif. systému a dostávame ich vo tvare (9), kde $s_{ii} = 1$, $i = k$ a s_{ik} $(i \neq k)$, sú ľubovoľné. $G_{ik}(x)$ sú racionálne funkcie celistvé najviac stupňa $(\sigma + 1)s_{ik} - 2$, kde σ je počet singulárnych bodov v konečne.

V III. časti ukážeme, že tieto nutné podmienky sú aj postačujúce. Pri tomto dôkaze vyjdeme z normálneho tvaru dif. systému (10) a určíme determinujúci systém (15) a (18). V ďalších vzorcoch sú dané rekurentné vzorce pre určenie koeficientov a riešenia.

Необходимые и достаточные условия, чтобы у дифференциальной системы не были точки неопределённости

Академик Й. Гронец

Резюме

В 1 части вывожу некоторые теоремы о дифференциальных системах, так в 1 определю коэффициенты посредством диференциальной системы.

В 2 покажу, что коэ фициенты инвариантны относительно дифференциальных сыстем. В 3 определена дифференциальная система определителем.

В II исходя из фундаментальной системы, неимущей точек неопределённости, на основании предыдущих теорем определим необходимый вид коэффициентов дифференциальной системы и получим их в виде (9), где $s_{ik} = 1$, $i = k$, и s_{ik} $(i \neq k)$ произвольные. $G_{ik}(x)$ рациональные функции целые, степени максимально $(\sigma+1) \cdot s_{ik} - 2$, где σ представляет число особых точек в конечности.

В III покажем, что эти необходимые условия являются тоже достаточными. В этом доказательстве исходим из нормального вида дифференцинальной системы (10) и определим во первых детерминующую (определяющую) систему (15) и (18). В дальнейших формулах даны рекурентные формулы для определения коэффициентов решения.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. I. MATHEMATICA 1956

K niektorým vzťahom medzi krivosťami krivky v E_n

Doc. Dr. M. HARANT

1. Vo svojom pojednaní [1] O. Borůvka zapodieval sa pri štúdiu parabolických plôch vo štvorrozmernom priestore špeciálnymi krivkami, ktorých všetky krivosti sú konštantné. Tieto krivky nazval nadkružnice. M. Sypták jeho výsledky pre R_{2p} zovšeobecnil a v euklidovskom $(2p + 1)$-rozmernom priestore analogicky študoval krivky a konštantnými krivosťami, ktoré nazval nadzávitnicami [8], [9], [10]. M. Sypták študuje v ďalších pojednaniach [6], [7] špeciálne krivky v úzkom vzťahu k nadkružniciam a nadzávitniciam. V tomto pojednaní odvodíme najskôr dve relácie pre $(n - 1)$-vú a $(n - 2)$-hú krivosť krivky v $\mathbf{E}_n$, ktoré aplikované na krivky vo štvorrozmernom euklidovskom priestore $\mathbf{E}_4$ dávajú jednoduché vzorce pre výpočet krivostí krivky, a to len použitím derivácií polohového vektora $\mathbf{x}$ danej krivky $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$. Tieto relácie upravíme aj pre prípad všeobecného parametra u.

V ďalšej časti definujeme špeciálne krivky v $\mathbf{E}_n$, tzv. spádové nadkrivky, ktoré majú tú charakteristickú vlastnosť, že pomery ich krivostí (po dvoch) sú konštantné. Ďalej majú tú vlastnosť, že ich existencia je viazaná na priestor dimenzie $n = 2p + 1$. Ako špeciálne spádové krivky sú všeobecné nadzávitnice.

2. Uvažujme o n-rozmernom euklidovskom priestore $\mathbf{E}_n$. Nech vektory

$$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n$$

tvoria ortonormálnu bázu, t. j. splňujú vzťahy

$$\mathbf{i}_k \,.\, \mathbf{i}_k = \begin{cases} 0, & ak\ k \neq l \\ 1, & ak\ k = l\,. \end{cases} \tag{1}$$

Krivka v tomto priestore pri s (oblúk), čo parametri, je daná vzťahom

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \tag{2}$$

pričom o zložkách $x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s)$ polohových vektorov bodov krivky činíme predpoklady:

a) Funkcie $x_i(s)$ sú spojité funkcie parametra s v určitom otvorenom intervale, ktoré tam majú prvých n-derivácií.

b) Matica $\| x_1^{\cdot}(s), x_2^{\cdot}(s), \ldots, x_n^{\cdot}(s) \|$ má hodnosť $h = 1$.

Potom každému bodu $P(\mathbf{x})$ krivky $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ je priradený Serretov sprievodný n-hran, ktorého ortonormálnu bázu tvoria vektory

$$\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_{n-1},$$

vektory nultej, prvej, ..., $(n-1)$-vej normály nadkrivky. Nultú normálu $\mathbf{n}_0 \equiv \mathbf{t}$ nazývame aj tangentou krivky. Priestor $T(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_2, \ldots)$ tvorený tangentou a všetkými normálami párnych indexov nazveme dotykovým priestorom, priestor $N(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3, \ldots)$ zasa normálovým priestorom. Obidva priestory sú navzájom totálne kolmé. Pri $n = 2p$ je dimenzia obidvoch p, pri $n = 2p + 1$ je dimenzia dotykového priestoru $p + 1$ a dimenzia normálového priestoru zasa p.

Predpokladajme, že krivka K nie je priamkou, alebo krivkou v priestore o dimenzii $< n$.

Potom ak $k_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, sú po rade prvá, druhá, ..., $(n-1)$-vá krivosť krivky K, pričom $k_i(s)$ sú skalárne, nie nulové funkcie oblúka s krivky, platia tzv. Frenetové relácie.

$$
\begin{array}{rl}
 & \mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{n}_0 \\
 & \mathbf{n}_0^{\cdot} = k_1\mathbf{n}_1 \\
 & \mathbf{n}_1^{\cdot} = -k_1\mathbf{n}_0 + k_2\mathbf{n}_2 \\
 & \mathbf{n}_2^{\cdot} = -k_2\mathbf{n}_1 + k_3\mathbf{n}_3 \\
(3) & \vdots \\
 & \mathbf{n}_{n-2}^{\cdot} = -k_{n-2}\mathbf{n}_{n-3} + k_{n-1}\mathbf{n}_{n-1} \\
 & \mathbf{n}_{n-1}^{\cdot} = -k_{n-1}\mathbf{n}_{n-2}
\end{array}
$$

Frenetové relácie sú základom pre skúmanie vlastností kriviek v okolí daného bodu. Ak sú dané vektory ortonormálnej bázy, vieme ich použitím určiť krivosti. Obrátene, ak sú dané vedľa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ krivosti krivky, vieme určiť postupne vektory $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \ldots \mathbf{n}_{n-2}$ danej krivky. V ďalšom si však všimneme iné vlastnosti kriviek, najmä niektoré vzťahy medzi krivosťami.

3. **Veta 1:** *Nech m je nula alebo celé nezáporné číslo splňujúce podmienku $m \leq n-1$ a k_m krivostí krivky v n-rozmernom euklidovskom priestore, pričom $k_0 = 0$, potom pre i-té derivácie polohového vektora $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ bodu krivky podľa parametra s platia vzťahy*

$$
\begin{array}{rl}
 & \mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{n}_0 \\
 & \mathbf{x}^{\cdot\cdot} = k_1\mathbf{n}_1 \\
 & \vdots \\
(4) & \mathbf{x}^{(i)} = \sum_{m=0}^{i-1} {}^{i}A_m\mathbf{n}_m \quad pre \ 3 \leq i \leq n,
\end{array}
$$

kde

$$
{}^{i}A_m = k_m\,{}^{i-1}A_{m-1} + {}^{i-1}A^{\cdot} - k_{m+1}\,{}^{i+1}A_{m+2}.
$$

Dôkaz vety vykonáme vypočítaním príslušných derivácií $\mathbf{x}^{(i)}$ pri použití Frenetových vzorcov.

Veta 2: *Pre $(n - 1)$-vú krivosť krivky v n-rozmernom euklidovskom priestore platí relácia*

$$k_{n-1} = \frac{[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]}{k_1^{n-1} \,.\, k_2^{n-2}, \ldots, k_{n-2}^2} \tag{5}$$

(kde $k_r \neq 0$, pre $r = 1, 2, \ldots, n - 2$) a symbol $[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ je determinant n-tého stupňa, ktorého riadky sú zložky vektorov i-tých derivácií polohového vektora bodu krivky K.

Dôkaz: Vyčíslime determinant

$$[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}] = [\mathbf{n}_0, k_1\mathbf{n}_1, {}^3A_2\mathbf{n}_2, {}^4A_3\mathbf{n}_3, \ldots \quad \ldots, {}^nA_{n-1}, \mathbf{n}_{n-1}] =$$
$$= k_1 \,.\, {}^3A_2 \,.\, {}^4A_3, \ldots, .\, {}^nA_{n-1} = k_1^{n-1} \,.\, k_2^{n-2}, \ldots, .\, k_{n-2}^2 \,.\, k_{n-1}.$$

Ak uvážime, že $\qquad {}^iA_{i-1} = k_{i-n}\, {}^{i-1}A_{i-2},$

z uvedenej relácie je tvrdenie zrejmé.

Veta 3: *Aby krivka K ležela v $\mathbf{E}_n$ priestore, t. j. nebola priamkou alebo krivkou v priestore nižšej dimenzie,ná to treba stačí, aby*

$$[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}] \neq 0,$$

pričom $k_1, k_2, \ldots, k_{n-2}$ sú krivosti — veličiny rôzne od nuly.

Tvrdenie je dôsledkom predchádzajúcej vety.

Veta 4: *Štvorec vektora*

$$[1, \mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{n-2}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1, & \mathbf{i}_2, \ldots, & \mathbf{i}_n \\ n_{01}, & n_{02} & n_{0n} \\ & & \\ n_{n-2,1}, & n_{n-2,2}, \ldots, & n_{n-2,n} \end{vmatrix} \tag{6}$$

sa rovná jednotke.

Dôkaz: Uvedený vektor je jednotkový vektor normály $\mathbf{n}_{n-1}$ a pre tento platí $(\mathbf{n}_{n-1})^2 = 1$.

Veta 5: *Pre krivosť k_{n-2} platí relácia*

$$k_{n-2}^2 = \frac{[1, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}]^2}{k_1^{2(n-2)} \,.\, k_2^{2(n-3)}, \ldots, .\, k_{n-3}^4}. \tag{7}$$

Dôkaz: Vyčíslením determinantu $[1; \ddot{\mathbf{x}}, \ldots \mathbf{x}^{(n-1)}]$ dostaneme

$$[1, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}] = [1, \mathbf{n}_0, k, \mathbf{n}_1, {}^3A_2\mathbf{n}_2, \ldots, {}^{n-1}A_{n-2}\mathbf{n}_{n-2}] =$$
$$= k_1 \,.\, {}^3A_2, \ldots, {}^{n-1}A_{n-2} \,.\, [1, \mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{n-2}]$$
$$= k_1^{n-2} \,.\, k_2^{n-3}, \ldots, k_{n-3}^2 \,.\, k_{n-2} \,.\, \mathbf{n}_{n-1},$$

z čoho po umocnení a použití vety 4 dostaneme uvedený výsledok.

4. Pre krivku K vo štvorrozmernom euklidovskom priestore $\mathbf{E}_4$ platí:

Veta 6: *Krivosti krivky v $\mathbf{E}_4$ splňujú relácie*

$$\begin{aligned} k_1 &= |\ddot{\mathbf{x}}|, \\ k_2^2 &= \frac{[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}]^2}{|\ddot{\mathbf{x}}|^4}, \\ k_3 &= \frac{|\ddot{\mathbf{x}}|\,[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^{(4)}]}{[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}]^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Dôkaz: Z relácie $\mathbf{n}_0^{\cdot} = k_1\mathbf{n}_1 = \mathbf{x}^{\cdot\cdot}$ vyplýva hneď prvé tvrdenie.

Z vety 5 máme

$$k_2^2 = \frac{[1, \mathbf{x}^{\cdot}, \mathbf{x}^{\cdot\cdot}, \mathbf{x}^{\cdot\cdot\cdot}]^2}{k_1^4}$$

a po dosadení za k_1 z predošlého vzťahu dostávame druhú reláciu.

Použitím vety 2 dostaneme

$$k_3 = \frac{[\mathbf{x}^{\cdot}, \mathbf{x}^{\cdot\cdot}, \mathbf{x}^{\cdot\cdot\cdot}, \mathbf{x}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}]}{k_1^3 \cdot k_2^2}$$

a po dosadení predchádzajúcich výsledkov dokážeme aj platnosť poslednej relácie.

Uvedené výsledky možno vhodne upraviť pre výpočet krivosti kriviek v $\mathbf{E}_4$, ak je jej rovnica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$, keď je u všeobecný parameter. Potom

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \frac{\mathbf{x}'}{s'}, \qquad \text{kde } x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}, \qquad s' = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u},$$

$$\mathbf{x}^{\cdot\cdot} = \frac{\mathbf{x}''}{s'^2} - \frac{\mathbf{x}'s''}{s'^3},$$

$$\mathbf{x}^{\cdot\cdot\cdot} = \frac{\mathbf{x}'''}{s'^3} - \frac{3s''}{s'^4}\mathbf{x}'' + \frac{(3s'' - s's''')}{s'^5}\mathbf{x}',$$

$$\mathbf{x}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{\mathbf{x}''''}{s'^4} - \frac{6s''}{s'^5}\mathbf{x}''' - \dots$$

a pretože

$$[1, \mathbf{x}^{\cdot}, \mathbf{x}^{\cdot\cdot}, \mathbf{x}^{\cdot\cdot\cdot}] = \left[1, \frac{\mathbf{x}'}{s'}, \frac{\mathbf{x}''}{s'^2}, \frac{\mathbf{x}'''}{s'^3}\right] \frac{1}{s'^6}[1, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''],$$

$$[\mathbf{x}^{\cdot}, \mathbf{x}^{\cdot\cdot}, \mathbf{x}^{\cdot\cdot\cdot}, \mathbf{x}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}] = \frac{1}{s'^{10}}[\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''', \mathbf{x}''''],$$

platí:

Veta 7: *Ak je krivka vo 4-rozmernom priestore daná rovnicou $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$, kde je u všeobecný parameter, potom jej krivosti možno vyjadriť vo vzťahoch:*

$$k_1 = \frac{|s'\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'s''|}{s'^3},$$

(8′)

$$k_2^2 = \frac{[1, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''']^2}{|\mathbf{x}''s' - \mathbf{x}'s''|^4},$$

$$k_3 = \frac{|s'\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'s''|\,[\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''', \mathbf{x}'''']}{s'[1, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''']^3}.$$

5. Medzi krivky v $\mathbf{E}_n$, u ktorých medzi krivosťami platia zaujímavé vzťahy, patria *spádove krivky* zavedené.

Def. 1: *Krivky v $\mathbf{E}_n$, ktorých tangenciálne priestory* **T** *zvierajú s pevným nenulovým vektorom* **a** *konštantný uhol* $\left(\mp \frac{k\pi}{2}, 0\right)$, *nazývame spádové krivky.*

Podľa uvedenej definície sú teda aj uhly ω_i vektorov bázy T-priestoru s vektorom a konštantné, rôzne od $\frac{\pi}{2}$ alebo 0. Pre tieto krivky platí:

Veta 8: *Spádové krivky v priestoroch* E_{2p} *nejestvujú. Ak áno, je krivka v priestore nepárnej dimenzie* $< 2p$, *ponorenom do* E_{2p}. *Pre krivosti spádových kriviek v* E_{2p+1} *platí relácie*

$$\frac{k_{i-1}}{k_i} = \frac{\cos \omega_i}{\cos \omega_{i-2}}, \qquad i = 2, 3, \ldots, 2p, \tag{9}$$

t. j. pomer krivostí je konštantný, a teda aj

$$\frac{k_1 \,.\, k_3 \ldots \,.\, k_{2p-1}}{k_2 \,.\, k_4 \ldots \,.\, k_{2p}} = \text{konšt.} \tag{10}$$

Dôkaz: Uvažujme najskôr o priestore párnej dimenzie E_{2p}. Podľa definície spádovej krivky platia vzťahy

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{n}_i = \cos \omega_i, \qquad i = 0, 2, 4, \ldots, 2p - 2. \tag{11}$$

Derivovaním týchto relácií dostaneme

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{n}_i^{\cdot} = 0. \tag{12}$$

Odtiaľ po uvážení Frenetových relácií máme špeciálne pre $i = 0$

$$\mathbf{a} \,.\, k_1 \,.\, \mathbf{n}_1 = 0,$$

ale pretože podľa predpokladu je $k_1 \neq 0$, platí

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{n}_1 = 0, \tag{13}$$

t. j. vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{n}_1$ sú navzájom kolmé. Derivovaním (13) a použitím (3) a (11) dostaneme

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{n}_1^{\cdot} = 0,$$
$$\mathbf{a}(- k_1\mathbf{n}_0 + k_2\mathbf{n}_2) = 0,$$
$$- k_1 \,.\, \cos \omega_0 + k_2 \cos \omega_2 = 0,$$

odkiaľ

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\cos \omega_2}{\cos \omega_0}. \tag{14}$$

Ak $i = 2$, dostaneme zasa zo vzťahu (12)

$$\mathbf{a}(- k_2\mathbf{n}_1 + k_3\mathbf{n}_3) = 0,$$

ale vzhľadom na (13)

$$\mathbf{a}k_3\mathbf{n}_3 = 0$$

a pretože podľa predpokladu je $k_3 \neq 0$, je

$$\mathbf{a}\mathbf{n}_3 = 0, \tag{15}$$

čiže vektor $\mathbf{a}$ je kolmý na vektor $\mathbf{n}_3$.

Derivovaním (15) a použitím (3) a (11) dostávame

$$\frac{k_3}{k_4} = \frac{\cos \omega_4}{\cos \omega_2}. \tag{16}$$

Všeobecne teda platia relácie

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{i+1} = 0, \tag{17}$$

t. j. vektor **a** je kolmý na vektory $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3, \dots, \mathbf{n}_{2p-1}$.

Uvažujme o predposlednej z relácií (17), t. j. o vzťahu

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{2p-3} = 0.$$

Jej derivovaním, použitím (3) a (11), dostaneme

$$\frac{k_{2p-3}}{k_{2p-2}} = \frac{\cos \omega_{2p-2}}{\cos \omega_{2p-4}}. \tag{18}$$

Teraz uvážme poslednú z relácie (17), t. j.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{2p-1} = 0.$$

Jej derivovaním a zasa použitím Frenetových relácií a vzťahu (11) máme

$$- k_{2p-1} \cdot \cos \omega_{2p-2} = 0,$$

čo je len tak možné, ak $k_{2p-1} = 0$, t. j. krivka sa nenachádza v priestore E_{2p}, ale v priestore o jednu dimenziu menšom, teda v E_{2p-1}.

Pristúpme teraz k určeniu vzťahov pre spádové krivky, ak tieto sa nachádzajú v priestore E_{2p+1}. Pre tieto je potom relácia (11) splnená pre $i = 0, 2, 4, \dots, 2p - 2, 2p$. Dostávame zasa výsledky podobné, aké sú vyjadrené vzťahmi (14), (16), 18).

Všimnime si však poslednú z relácií (17)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{2p-1} = 0.$$

Jej derivovaním a použitím (3) a (11) dostávame:

$$\frac{k_{2p-1}}{k_{2p}} = \frac{\cos \omega_{2p}}{\cos \omega_{2p-2}}. \tag{19}$$

Súčasne sme dokázali aj ďalšiu vlastnosť spádových kriviek vyjadrenú 9. vetou.

Veta 9: *Vektor* **a**, *s ktorým* **T**-*priestory zvierajú konštantný uhol, je kolmý na normálové priestory spádovej krivky.*

Dôkaz vyplýva priamo zo vzťahov $\mathbf{a}\mathbf{n}_1 = 0$, $\mathbf{a}\mathbf{n}_3 = 0, \dots, \mathbf{a}\mathbf{n}_{2p-1} = 0$. Uvedená veta v porovnaní s výsledkom M. Sypták a (8), str. 38, ukazuje, že nadzávitnice, ktoré skúmal, sú špeciálne spádové krivky. Vektor **a** je vo smere osi nadzávitníc.

(Dodané do redakcie 1. XI. 1955.)

Literatúra

[1] Borůvka O.: Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques de l'espace euklidien à quatre dimensions. Spisy přír. fak. MU v Brně, No. 146 (1931).

[1a] S týmže názvom Comptes rendus, 193 (1931).

[2] Finsler P.: Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Göttingen 1918 (dis.).

[3] Forsyth A. R.: Geometry of four dimensions I, Cambridge 1930.

[4] Harant M.: Analytická geometria lin. útvarov II (n-rozmerná), Bratislava 1954.

[5] Havlíček K.: O styku kriviek a nadgule v R_n. Časopis pre pěstovaní matemat. a fyz.

[6] Sypták M.: Evolventy nadkružnic v $2n$-rozměrném euklidovském prostoru. Práce Moravské přír. společ., Brno 1947.

[7] Sypták M.: Mocninné spirály v p-rozměrném euklidovském prostoru R_p. Časopis pro pěstování matemat. a fyz., 72 (1947).

[8] Sypták M.: Nadkružnice a nadšraubovice. Spisy přír. fak. MU v Brně, No 313 (1949).

[9], [10] S týmže názvom ako [8]. Comptes rendus 195 (1932) a 198 (1934).

К некоторым отношениям между кривизнами кривой в $\mathbf{E}_n$

Д-р М. Гарант

Резюме

О. Борувка [1] и М. Сиптак [6]—[10] занимались специальными кривыми $\mathbf{E}_n$, характеризованными тем свойством, что их кривизны постоянны. Для $2p$ — размерного пространства они назвали эти гиперкривые „гипeрокружностями", а для $(2p + 1)$-размериого пространства — гипервинтовыми линиями.

Если рассматривать n — мерное пространство $\mathbf{E}_n$, в котором векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n$ составляют ортонормальный базис и гиперкривую уравнения (2), причем для компонентов $x_i(s)$ радиус-векторов точек гиперкривой исполнены соотношения a), b), то каждой точке гиперкривой принадлежат векторы $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{n-1}$, составляющие ортонормальный базис сопровождающего n-гранника.

Если $k_i(s)$, $i = 1,2, \ldots, k$-1 являются скалярными кривизнами, то в этом случае имеют место соотношения френета (3).

Для производных радиус-вектора $\mathbf{x}$ точки гиперкривой имеют место соотношения (4), для $(n-1)$-ой кривизны — соотношение (5), для $(n-2)$-ой кривизны — соотношение (7). Эти результаты, применяемые для гиперкривойь в $\mathbf{E}_4$, дают специальные соотношения (8), если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ является уравнением гиперкривой (где s обозначает дугу), а соотношение (8,) в том случае, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$.

Гиперкривые наибольшего ската, определенные тем, что их касательные пространства $\mathbf{T}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_2, \ldots)$ заключают с ненулевым вектором $\mathbf{a}$ постоянный угол $\left(\neq \frac{\pi k}{2}\right)$, характеризуются тем, что их существование зависит от пространства нечётного размера (нечётной димензии), причём для их кривизней имеют место соотношения (9), или-же (10), и их нормальные пространства $\mathbf{N}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3, \ldots)$ перпендикулярны к вектору $\mathbf{a}$, следовательно параллельны с определённой гиперплоскостью.

К гиперкривым наибольшего ската принадлежат также гиперкривые линии, исследованные М. Сиптаком.

Sur quelques rélations entre les courbures de courbe a E_n

Dr. M. Harant

Résumé

M. O. Borůvka et M. M. Šypták avaient étudié les courbes spéciales caractérisées par les propriétés d'avoir les courbures scalaires constantes. Dans l'espace euklidien a $2p$-dimensions sont appelées hypercirconferences, et dans l'espace a $2p + 1$-dimensions hyperhélices.

Si nous considerons dans l'espace euklidien a n-dimensions, dans lequel les vecteurs $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n$ forment in base orthonormale, une courbe donnée par l'équation (2) — les coordonnées radiusvecteurs satisfaisant les rélations a), b), puis a chaque point de la courbe correspondent les vecteurs $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \ldots \mathbf{n}_{n-1}$. qui forment in base orthonormale de repère de Serret.

Si $k_i(s)$, $i = 1,2, \ldots, n - 1$ signifient les courbures scalaires, puis les rélations de Frenet sont (3).

Pour la dérivation de radiusvecteur $\mathbf{x}$ d'un point d'une courbe sont valables les rélations (4) et pour la courbure scalaire d'ordre (n — 1 la rélation (5) et pour celle (n — 2) la rélation (7).

Ces résultats étant appliqués à une courbe dans $\mathbf{E}_4$ forment les rélations (8) pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ (s signifie l'arc) et (8') pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$ (u signifie un parameter).

Les courbes de pente définies par la proprieté que leurs espaces tangentiales $\mathbf{T}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_2 \ldots)$, forment avec un vecteur fixe $\mathbf{a}$ un angle constante $\left(\mp \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, \ldots\right)$ sont caractérisées qu'elles existent seulement dans l'espace à nombre de inpairs dimensions. Pour leurs courbures scalaires sont remplies les rélations [9], resp. [10]. Et leurs espaces normauc $\mathbf{N}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3, \ldots)$ sont orthogonaux au vecteur $\mathbf{a}$ et pour cela paralles avec une hyperplan fixe. Les hyperhélices forment donc un cas spécial de courbes de pente.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. I. MATHEMATICA 1956

Afinní klasifikace nadkvadrik

Doc. Dr J. SRB

V článku „Autopolárné normální jehlany polárnosti n-rozměrného prostoru" (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 72, str. 49; v dalších citováno A) jsem syntheticky dokázal několik vět o autopolárných normálních jehlanech polárnosti n-rozměrného projektivního prostoru a pomocí nich jsem v něm provedl projektivní klasifikaci těchto polárností a tedy i nadkvadrik tohoto prostoru. V následujícím doplňuji v části I zmíněné věty o autopolárných normálních jehlanech některými větami dalšími a provádím pak klasifikaci nadkvadrik n-rozměrného afinního prostoru tak, že v části II stanovím podmínky kolineárnosti dvou soustav nadroviny a nadkvadriny a v části III, po ztotožnění nadroviny obou soustav s absolutní nadrovinou afinního prostoru, vyjádřím podmínky kolineárnosti obou nadkvadrik pro grupu kolineací s invariantní nadrovinou prvky neabsolutními, pokud jimi nebyly vyjádřeny již v části II.

I.

O autopolárných normálních jehlanech nadkvadriky n-rozměrného projektivního prostoru platí:

1.1. *Společný vrchol dvou autopolárných normálních jehlanů téže nadkvadriky n-rozměrného projektivního prostoru je v obou jehlanech téhož druhu,* t. j. počet hran procházejících společným vrcholem obou jehlanů, na nichž je nadkvadrikou indukován stejný druh involuce harmonických pólů, je v obou jehlanech stejný.

Důkaz. Buďte $J \equiv [A_1, \ldots, A_{n+1}]$, $J' \equiv [A_1, B, \ldots, B_{n+1}]$ autopolárné normální jehlany nadkvadriky V^2_{n-1} n-rozměrného projektivního prostoru S_n. Náleží-li vrchol A_1 prostoru dvojných bodů nadkvadriky, je podle A, II, 3*) věta správná. Nechť tedy A_1 neleží v prostoru dvojných bodů

*) Cit. časopis str. 55, věta 3: Autopolárný normální jehlan polárnosti n-rozměrného prostoru má nejvýše tři různé druhy vrcholů, a to: k $(0 \leqq k \leqq n + 1)$ vrcholů, jimiž prochází $k - 1$ hran s indukovanou eliptickou l) $(0 \leqq l \leqq n + 1)$ hran s indukovanou hyperbolickou a $n - (k + l - 1)$ hran s indukovanou parobolickou involucí harmonických pólů; l vrcholů, jimiž prochází $l - 1$ hran s indukovanou eliptickou, k hran s indukovanou hyperbolickou a $n - (k + l - 1)$ hran s indukovanou parabolickou involucí harmonických pólů a $n - (k + l - 1)$ vrcholů, jimiž prochází $k + l$ hran s indukovanou parabolickou involucí harmonických pólů a $n - (k + l)$ hran, jejichž všechny body jsou singulární.

nadkvadriky V^2_{n-1}; nechť pak platí: $A_i \equiv B_i$ pro $i = 2, \ldots, n$; $A_{n+1} \not\equiv B_{n+1}$. Leží-li vrchol A_{n+1} v k-rozměrném ($0 \leq k \leq n - 1$) prostoru dvojných bodů nadkvadriky V^2_{n-1}, leží v něm i vrchol B_{n+1}, protože tento prostor je vždy určen $k + 1$ vrcholy autopolárního normálního jehlanu; potom je na hraně (A_1, A_{n+1}) jehlanu J i na hraně (A_1, B_{n+1}) jehlanu J' indukována nadkvadrikou parabolická involuce harmonických pólů; protože hrany (A_1, A_i) jehlanu J jsou pro $i = 2, \ldots, n$ totožné s hranami (A_1, B_i) jehlanu J', je A_1 v obou jehlanech téhož druhu. Nechť tedy neleží vrchol A_{n+1}, a proto i vrchol B_{n+1} v prostoru dvojných bodů nadkvadriky V^2_{n-1}; potom jsou nadrovině $(A_1, \ldots, A_n) \equiv (A_1, B_2, \ldots, B_n)$ polárně přidruženy dva body $A_{n+1} \not\equiv B_{n+1}$, tedy nejméně jednorozměrný prostor (A_{n+1}, B_{n+1}) a V^2_{n-1} má alespoň 0-rozměrný prostor dvojných bodů, který protíná přímku (A_{n+1}, B_{n+1}) v bodě O tak, že je $A_{n+1} \not\equiv O \not\equiv B_{n+1}$. Přímky p svazku v rovině $(O, A_1, A_{n+1}) \equiv (O, A_1, B_{n+1})$ s vrcholem v bodě O a přímky p' téhož svazku, ve kterých protne rovinu polárná nadrovina bodu $L \not\equiv O$ přímky p, tvoří dvojice involuce, která protíná hrany (A_1, A_{n+1}) a (A_1, B_{n+1}), jež bodem O neprocházejí, v involuci harmonických pólů, tedy v involuci téhož druhu. Involuční projektivnost dvojic p, p' je vždy určena, protože každému bodu $L \not\equiv O$ přímky p, který tedy nenáleží prostoru dvojných bodů nadkvadriky, koresponduje táž určitá polárná nadrovina svazku s basí $(A_2, \ldots, A_n) \equiv (B_2, \ldots, B_n)$ takovou, že má s rovinou (O, A_1, A_{n+1}) pouze bod O společný. Z téhož důvodu jako v předcházejícím případě je tedy vrchol A_1 téhož druhu v J i J'.

Nechť je nyní $A_i \equiv B_i$ pro $i = 2, \ldots, n - 1$, $A_i \not\equiv B_i$ pro $i = n, n + 1$. Leží-li vrcholy $A_i, B_i, i = n, n + 1$ v prostoru dvojných bodů nadkvadriky V^2_{n-1}, je na hranách (A_1, A_i) jehlanu J i na hranách (A_1, B_i) jehlanu J' pro $i = n$, $n + 1$ indukována parabolická involuce harmonických pólů, pro $i = 2, \ldots, n - 1$ jsou hrany oběma jehlanům společné; je tedy A_1 opět v J i J' téhož druhu. Nechť tedy bod A_{n+1} leží, bod A_n neleží v prostoru dvojných bodů; pak při vhodném označení bod B_{n+1} leží, bod B_n neleží v tomto prostoru; podle dřívějšího výsledku je potom vrchol A_1 téhož druhu v jehlanech $J \equiv [A_1, \ldots, A_{n+1}]$ a $[A_1, \ldots, A_n, B_{n+1}]$, které mají jediný vrchol různý a z téhož důvodu i v jehlanech $[A_1, \ldots, A_n, B_{n+1}]$ a $[A_1, \ldots, A_{n+1}, B_n, B_{n+1}] \equiv [A_1, B_2, \ldots, B_{n+1}] \equiv J'$, tedy i v jehlanech J a J'. Nechť tedy žádný z bodů $A_i, B_i, i = n$, $n + 1$ neleží v prostoru dvojných bodů nadkvadriky V^2_{n-1} a nechť všechny tyto čtyři body leží na téže přímce p; potom je p průsečnice roviny $(A_1, A_n, A_{n+1}) \equiv (A_1, B_n, B_{n+1})$ s polárnou nadrovinou bodu A_1, která tímto bodem neprochází. Podle věty A, I, 1 jsou polárné trojúhelníky A_1, A_n, A_{n+1} a A_1, B_n, B_{n+1} téhož druhu, protože mají společný vrchol; na straně $(A_n, A_{n+1}) \equiv$ $\equiv (B_n, B_{n+1})$ je indukována táž involuce harmonických pólů, je tedy při vhodném označení na stranách (A_1, A_n) a (A_1, B_n) indukována involuce harmonických pólů stejného druhu, právě tak jako na stranách (A_1, A_{n+1}) a (A_1, B_{n+1}), hrany (A_1, A_i) jehlanu J jsou pro $i = 2, \ldots, n - 1$ totožné s hranami (A_1, B) jehlanu J', je tedy A_1 téhož druhu v J i J'.

Nechť je nyní obecně $A_i \not\equiv B_i$, $i = 2, \ldots, n + 1$. Vrchol A_1 neleží podle předpokladu v prostoru dvojných bodů nadkvadriky V^2_{n-1}, neprocházejí jím proto hrany jehlanů J a J' se všemi singulárními body; nechť jím prochází h $(0 \leq h \leq n - 1)$ hran (A_1, A_i), $i = 2, \ldots, h + 1$, jehlanu J s indukovanými parabolickými involucemi harmonických pólů; V^2_{n-1} má pak $(h - 1)$-rozměrný prostor dvojných bodů a na h hranách jehlanu J', při vhodném označení na hranách (A_1, B_i), $i = 2, \ldots, h + 1$, je indukována také parabolická involuce harmonických pólů; $(n - h)$-rozměrný prostor S_{n-h}, určený body A_1, A_i a tedy také body A_1, B_i, $i = h + 2, \ldots, n + 1$, protne V^2_{n-1} v nadkvadrice V^2_{n-h-1} bez singulárních bodů tak, že jehlany $J_1 \equiv [A_1, A_{h+1}, \ldots, A_{n+1}]$ a $J'_1 \equiv [A_1, B_{h+1}, \ldots B_{n+1}]$, jsou její autopolárné normální jehlany a bod A_1 na ní neleží. Polárná nadrovina $(A_{h+1}, \ldots, A_{n+1}) \equiv (B_{h+1}, \ldots, B_{n+1})$ bodu A_1 vzhledem k V^2_{n-h-1} protne tuto nadkvadriku v nadkvadrice V^2_{n-h-2} bez singulárních bodů tak, že jehlany $J_2 \equiv [A_{h+1}, \ldots, A_{n+1}]$ a $J'_2 \equiv [B_{h+1}, \ldots, B_{n+1}]$ jsou její autopolárné normální jehlany. Podle důkazu věty A, I, 3 existuje potom řada $(n - h - 1)^2$ autopolárných normálních jehlanů nadkvadriky V^2_{n-h-2}, jejímž prvým členem je jehlan J_2, posledním jehlan J'_2 taková, že její každé dva sousední členy mají nejvýše dvě dvojice navzájem různých vrcholů a tyto dvojice leží na téže přímce. Podle předcházejícího výsledku, je tedy vrchol A_1 téhož druhu v každých dvou autopolárných jehlanech nadkvadriky V^2_{n-h-1} určených vrcholem A_1 a vrcholy dvou sousedních jehlanů řady, tedy i v jehlanech J_1 a J'_1. Vrcholem A_1 tedy prochází týž počet hran s indukovanou hyperbolickou involucí harmonických pólů v jehlanu J a J' jako v jehlanu J_1 nebo J'_1, týž počet hran s indukovanou eliptickou involucí jako v J_1 nebo J'_1 a h hran s indukovanou parabolickou involucí j. b. d.

2. Druhem bodu vzhledem k nadkvadrice nazveme uspořádanou čtveřici čísel (h, e, p, d), kterou podle věty 1.1 přiřazuje nadkvadrika každému reálnému bodu projektivního prostoru, jemuž náleží, takto: čísla h, e, p, d značí po řadě počet přímkových hran libovolného autopolárného normálního jehlanu nadkvadriky s vrcholem v tomto bodě, na nichž je nadkvadrikou indukována hyperbolická, eliptická, parabolická involuce harmonických pólů a počet hran, jejichž všechny body jsou dvojné body nadkvadriky; regulárním bodům nadkvadriky, které nemohou být vrcholy autopolárného jehlanu, náleží pak druh (0, 0, 0, 0). Potom platí:

2.1. *Druh bodu vzhledem k nadkvadrice je invariantní při regulárních reálných kolineacích projektivního prostoru, jemuž nadkvadrika náleží. Vzhledem k dané nadkvadrice existují nejvýše čtyři různé druhy bodů.*

Důkaz. Druh involuční projektivnosti je invariantní vzhledem k regulárním reálným kolineacím. Tři druhy bodů, které mohou být vrcholy autopolárného normálního jehlanu téže nadkvadriky, jsou určeny větou A, II, 3; body, které nemohou být vrcholy autopolárného jehlanu, mají druh (0, 0, 0, 0).

3. O autopolárných normálních jehlanech, které mají alespoň na jedné přímkové hraně hyperbolickou involuci harmonických pólů, platí:

3.1. *Prochází-li některým vrcholem autopolárného normálního jehlanu nadkvadriky n-rozměrného projektivního prostoru k $(1 \leq k \leq n)$ hran s indukovanou hyperbolickou, l, $(0 \leq l \leq n - 1)$ hran s indukovanou parabolickou a $n - k - 1$ hran s indukovanou eliptickou involucí harmonických pólů, má jehlan pro $l = 0$ a $k = 1/2\,(n + 1)$ všechny vrcholy téhož druhu, pro $l = 0$ a $k \neq 1/2\,(n + 1)$ má jehlan dva druhy vrcholů, z nichž na každé hraně s hyperbolickou involucí harmonických pólů je jeden vrchol jednoho, druhý druhého druhu, pro $l \neq 0$ a $k = 1/2\,(n - l + 1)$ má jehlan dva druhy vrcholů z nichž na každé hraně s indukovanou hyperbolickou involucí harmonických pólů jsou oba vrcholy stejného druhu, určeného vrcholem jehlanu, jímž neprochází žádná hrana se všemi singulárními body, pro $l \neq 0$ a $k \neq 1/2\,(n - l + 1)$ má jehlan všechny tři druhy* *vrcholů, z nichž na každé hraně s indukovanou hyperbolickou involucí harmonických pólů vrcholy obou druhů, určených vrcholy jehlanu, kterými neprochází žádná hrana se všemi singulárními body.*

Důkaz. Na hraně (A_n, A_{n+1}) autopolárného normálního jehlanu $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ nadkvadriky n-rozměrného projektivního prostoru buď indukována hyperbolická involuce harmonických pólů. Na hranách (A_n, A_i) buďte pro $i = 1, \ldots, l$, $(0 \leqq l \leqq n - 1)$ indukovány parabolické, pro $i = l + 1, \ldots, l + k - 1$ hyperbolické a pro $i = l + k, \ldots, n - 1$ eliptické involuce harmonických pólů. Podle A, I 1 jsou polárné trojúhelníky A_{n+1}, A_n, A_i pro $i = 1, \ldots, l$ typu -00, pro $i = l + 1, \ldots, n - 1$ typu $+ - -$, t. j. na hranách (A_{n+1}, A_i) jsou pro $i = 1, \ldots, l$ indukovány parabolické, pro $i = l + 1, \ldots, l + k - 1$ eliptické a pro $i = l + k, \ldots, n - 1$ hyperbolické involuce harmonických pólů. Tedy vrcholem A_n prochází l hran s indukovanou parabolickou, k hran s hyperbolickou a $n - l - k$ s eliptickou, vrcholem A_{n+1} l hran s parabolickou, $k - 1$ hran s eliptickou a $n - l - k + 1$ hran s hyperbolickou involucí harmonických pólů. Vrcholy A_{n+1} a A_n jsou stejného druhu jen v případě, když je $n - l - k = k - 1$, t. j. $k = 1/2\,(n - l + 1)$. Buď $l = 0$; nadkvadrika je nesingulární a podle A, II, 3 má proto její autopolárný jehlan nejvýše dva druhy vrcholů; podle uvedeného počtu hran procházejících vrcholy A_n, A_{n+1}, je pro $k \neq 1/2\,(n + 1)$ vrchol A_n jednoho, vrchol A_{n+1} druhého druhu, pro $k = 1/2\,(n + 1)$ jsou A_n a A_{n+1} stejného druhu; protože v druhém případě může mít jehlan pouze vrcholy toho druhu, jakého jsou vrcholy A_n a A_{n+1}, má v tomto případě všechny vrcholy téhož druhu. Buď $l \neq 0$. Nadkvadrika má alespoň jeden singulární bod; tedy alespoň jeden vrchol každého autopolárného jehlanu leží v prostoru dvojných bodů, v němž neleží body A_n a A_{n+1}, které jsou tedy jiného druhu než tento vrchol; podle A, II, 3 má autopolárný normální jehlan nejvýše tři druhy vrcholů; podle uvedeného počtu hran procházejících body A_n a A_{n+1} jsou pro $k \neq 1/2\,(n - l + 1)$ vrcholy A_{n+1} a A_n různých druhů, má v tomto případě jehlan všechny tři druhy vrcholů. Pro $k = 1/2\,(n - l + 1)$ jsou A_n a A_{n+1} stejného druhu, jehlan však nemůže mít vrcholy dalšího druhu, má tedy vrcholy pouze dvou druhů. Protože vhodnou záměnou označení vrcholů můžeme docílit toho, že A_n a A_{n+1} jsou vrcholy na kterékoliv hraně jehlanu s indukovanou hyperbolickou involucí harmonických pólů, je tím věta dokázána.

4.0 andkvadrikách s prostorem dvojných bodu platí:

4.1. *Všechny body prostoru polárně sdruženého s nadrovinou vzhledem k nadkvadrice n-rozměrného projektivního prostoru, které neleží v prostoru dvojných bodů nadkvadriky, jsou vzhledem k nadkvadrice stejného druhu.*

Důkaz. Buď S_d $(d > 0)$ d-rozměrný prostor polárně sdružený s nadrovinou S_{n-1} vzhledem k nadkvadrice V^2_{n-1}, S_{d-1} prostor dvojných bodů nadkvadriky. Leží-li S_d v S_{n-1}, jsou všechny body, které náleží prostoru S_d, ne však S_{d-1}, regulární body nadkvadriky, tedy druhu $(0, 0, 0, 0)$. Nechť S_d neleží v S_{n-1}; jsou-li potom A, B dva body z S_d, ne však z S_{d-1}, a je-li $J \equiv [A, A_1, \ldots, A_n]$ autopolárný normální jehlan nadkvadriky V^2_{n-1}, je $J' \equiv [B, A_1, \ldots, A_n]$ také její autopolárný normální jehlan, a podle A, I jsou oba jehlany téhož druhu. Podle 1.1 jsou $A_1, \ldots, A_n$ vrcholy téhož druhu v J i J' jsou tedy i vrchol A v J a vrchol B v J' stejného druhu; podle 1.1 jsou tedy A a B stejného druhu vzhledem k nadkvadrice.

II. Kolineárné soustavy nadroviny a nadkvadriky

1. Buďte $({}^iS_{n-1}, {}^iV^2_{n-1})$, $i = 1, 2$, dvě soustavy nadroviny a nadkvadriky téhož nebo dvou různých n-rozměrných projektivních prostorů.

a) Pak jsou možné tyto případy: *α)* neexistuje, *β)* existuje alespoň jeden pól nadroviny ${}^iS_{n-1}$ vzhledem k nadkvadrice ${}^iV^2_{n-1}$ soustavy $i = 1, 2$. Protože kolineace transformuje pól a jeho polárnou nadrovinu v pól a jeho polárnou nadrovinu, nemohou být kolineárné soustavy (i, α) s (i, β) t. j. kolineárné mohou být pouze soustavy 1. (i, α) pro $i = 1, 2$, nebo 2. soustavy (i, β) pro $i = 1, 2$.

b) Pro *a)* 2. pak mohou nastat tyto případy: Nadrovině ${}^iS_{n-1}$ je přidružen *α)* více než jeden, *β)* jediný pól vzhledem k nadkvadrice ${}^iV_{n-1}$ $(i = 1, 2)$ soustavy. Pro jednojednoznačnost nesingulární kolineace nemohou být kolineárné soustavy (i, α) s (i, β) pro $i = 1, 2$, t. j. kolineárné mohou být pouze soustavy 1. (i, α) pro $i = 1, 2$, nebo 2. (i, β) pro $i = 1, 2$.

c) Pro *b)* 1. mohou nastat tyto případy: Všechny póly nadroviny ${}^iS_{n-1}$ vzhledem k nadkvadrice ${}^iV^2_{n-1}$ *α)* padnou, *β)* nepadnou do této nadroviny. Pro *b)* 2. mohou nastat tyto případy: Pól nadroviny ${}^iS_{n-1}$ vzhledem k nadkvadrice ${}^iV^2_{n-1}$ soustavy *γ)* padne, *δ)* nepadne do této nadroviny. Protože kolineace zachovává incidenci, nemohou být kolineárné soustavy (i, α) s (i, β) nebo (i, γ) s (i, ϑ) pro $i = 1, 2$, t. j. kolineárné mohou být pouze soustavy: 1. (i, α) pro $i = 1, 2$, nebo 2. (i, β) pro $i = 1, 2$, nebo 3. (i, γ) pro $i = 1, 2$, nebo 4. (i, δ) pro $i = 1, 2$.

2. Jednotlivé případy soustav, které mohou být podle rozboru 1. kolineárné, budeme v dalším vyšetřovat v tomto pořádku: 1. $(c, 4)$, 2. $(c, 3)$, 3. $(c, 2)$, 4. $(c, 1)$, 5. $(a, 1)$.

2.1. *Podmínka nutná a postačující, aby existovala reálná kolineace, která transformuje soustavu nesingulární nadkvadriky, jejíž pól vzhledem k nadkvadrice v této nadrovině náleží do stejné soustavy dané v témž nebo jiném n-rozměrném projektivním prostoru, je: Póly nadrovin vzhledem k nadkvadrikám svých soustav jsou vzhledem k těmto nadkvadrikám body téhož druhu.*

Důkaz. Podmínka je nutná; reálná kolineace, transformující jednu soustavu v soustavu druhou, transformuje i pól nadroviny vzhledem k nadkvadrice soustavy jedné v pól nadroviny vzhledem k nadkvadrice soustavy druhé a podle 1.2 je druh bodu vzhledem k nadkvadrice invariant této kolineace. Podmínka je i postačující; je-li splněn předpoklad, existuje podle věty I, 1.1 v jedné i druhé soustavě autopolárný normální jehlan, jehož jeden vrchol je pól nadroviny vzhledem k nadkvadrice soustavy takový, že tento vrchol je v obou jehlanech téhož druhu a není bodem nadkvadriky; podle A, II, 5 tedy existuje reálná kolineace, která transformuje jehlan a nadkvadriku jedné soustavy v jehlan a nadkvadriku soustavy druhé.

2.2. *Podmínka nutná a postačující, aby existovala reálná kolineace, která transformuje soustavu nadkvadriky a její určitě reálné tečné nadroviny v soustavu nadkvadriky a její určité reálné tečné nadroviny, danou v témž nebo jiném n-rozměrném projektivním prostoru, je: Obě nadkvadriky jsou kolineárné.*

Důkaz. Podmínka je zřejmě nutná, je však i postačující. Buďte $({}^iS_{n-1}, {}^iV^2_{n-1})$, $i = 1, 2$, obě soustavy, ${}^iS_{n-1}$ reálné tečné nadroviny, ${}^1V^2_{n-1}$ a ${}^2V^2_{n-1}$ kolineárné.

Jsou-li všechny body nadkvadriky ${}^1V^2_{n-1}$ a tedy i ${}^2V^2_{n-1}$ singulární, je podmínka zřejmě postačující. Nechť tedy nejsou všechny body nadkvadriky ${}^1V^2_{n-1}$ proto i ${}^2V^2_{n-1}$ singulární; potom existuje alespoň jeden reálný bod P^i společný nadrovině ${}^iS_{n-1}$ a nadkvadrice ${}^iV^2_{n-1}$, který není dvojným bodem nadkvadriky; existuje pak autopolárný normální jehlan J^i, jehož jedna hrana je libovolná přímka p^i, která prochází bodem P^i a neleží v nadrovině ${}^iS_{n-1}$; podle A, I a I, 2.1 jsou jehlany J^1 a J^2 téhož druhu. Jsou-li A^i, B^i vrcholy jehlanu J^i ležící na přímce p^i, je $A^i \neq P^i \neq B^i$ a involuce harmonických pólů na hraně (A^i, B^i) je hyperbolická; podle I, 3.1 jsou buďpak vrcholy A^1, A^2 nebo vrcholy A^1, B^2 v jehlanech J^1, J^2 téhož druhu a podle A, II, 5 pak existuje reálná kolineace, která transformuje jehlan J^1 v jehlan J^2 a nadkvadriku ${}^1V^2_{n-1}$ v nadkvadriku ${}^2V^2_{n-1}$ transformuje tedy i bod P^1 v bod P^2 a nadrovinu tečnou ${}^1S_{n-1}$ v bodě P^1 v nadrovinu tečnou ${}^2S_{n-1}$ v bode P^2.

2.3. *Podmínka nutná a postačující, aby existovala reálná kolineace transformující soustavu singulární nadkvadriky a nadroviny procházející prostorem dvojných bodů nadkvadriky tak, že prostor s nadrovinou vzhledem k nadkvadrice polárně sdružený do této nadroviny nepadne v stejnou soustavu, danou v témž nebo v jiném n-rozměrném projektivním prostoru, je: Libovolný bod prostoru polárně sdruženého s nadrovinou vzhledem k nadkvadrice, který není bodem nadkvadriky, je v jedné soustavě vzhledem k nadkvadrice téhož druhu, jako libovolný bod prostoru polárně sdruženého s nadrovinou vzhledem k nadkvadrice, který není bodem této nadkvadriky, v soustavě druhé.*

Důkaz. Podmínka je nutná, protože reálná kolineace, transformující jednu soustavu v soustavu druhou, transformuje i prostor s nadrovinou polárně sdružený vzhledem k nadkvadrice v soustavě jedné v prostor polárně sdružený s nadrovinou vzhledem k nadkvadrice v soustavě druhé a podle I, 1.2 je druh bodu invariant této kolineace. Podmínka je i postačující; je-li A bod vyhovující podmínce 2.3 v soustavě jedné, B v soustavě druhé, může být bod A vrcholem autopolárného normálního jehlanu J v soustavě první, B autopolárného normálního jehlanu J' v soustavě druhé; podle I, 1.1 je pak A v J a B v J' téhož druhu. Existuje tedy podle A, II, 5 reálná kolineace, která transformuje J v J', A v B, nadkvadriku soustavy jedné v nadkvadriku soustavy druhé, tedy i prostor určený bodem A a prostorem dvojných bodů nadkvadriky s jeho polárnou nadrovinou soustavy jedné v prostor určený bodem B a prostorem dvojných bodů nadkvadriky s jeho polárnou nadrovinou v soustavě druhé.

2.4. Podmínka nutná a postačující pro kolineárnost soustav (c, 1) rozboru v 1. je vyslovena v 2.2.

2.5. *Podmínka nutná a postačující, aby existovala reálná kolineace transformující soustavu singulární nadkvadriky a nadroviny, která neprochází prostorem dvojných bodů nadkvadriky, v stejnou soustavu danou v témž nebo jiném projektivním n-rozměrném prostoru, je: $(n - 2)$-rozměrné nadkvadriky, v nichž protínají nadroviny nadkvadriky své soustavy jsou kolineárné.*

Důkaz. Podmínka je nutná, protože reálná kolineace, transformující jednu soustavu v soustavu druhou, transformuje i společný útvar nadroviny a nadkvadriky soustavy jedné v společný útvar nadroviny a nadkvadriky soustavy druhé. Podmínka je i postačující; buďte ${}^1V^2_{n-2}$, ${}^2V^2_{n-2}$ nadkvadriky, ve kterých protínají nadroviny nadkvadriky svých soustav. ${}^1V^2_{n-2}$ a ${}^2V^2_{n-2}$ jsou kolineárné, existuje proto podle A, I, 1 a A, II, 5 v libovolném autopolárním normálním jehlanu $J^1 \equiv [A^1_1, \ldots, A^1_n]$ nadkvadriky ${}^1V^2_{n-2}$ a $J^2 \equiv [A^2_1, \ldots, A^2_n]$ nadkvadriky ${}^2V^2_{n-2}$ alespoň jeden vrchol, který neleží v prostoru dvojných bodů své nadkvadriky a je stejného druhu v J^1 i J^2; nechť je to A^1_n, resp. A^2_n. Protože nadrovina soustavy neprochází dvojným prostorem nadkvadriky soustavy, existuje v každé soustavě alespoň jeden bod A^1_{n+1}, A^2_{n+1}, který je dvojným bodem nadkvadriky soustavy a neleží v nadrovině soustavy $(A^1_1, \ldots, A^1_n)$, resp. $(A^2_1, \ldots, A^2_n)$; je tedy $J^1_1 \equiv [A^1_1, \ldots, A^n_1, A^1_{n+1}]$ autopolárný normální jehlan soustavy jedné, $J^2_1 \equiv [A^2_1, \ldots, A^2_n, A^2_{n+1}]$ soustavy druhé. Vrchol A^1_n, A^2_n nenáleží prostoru dvojných bodů nadkvadriky své soustavy, na hranách (A^1_n, A^1_i) jehlanu J^1, tedy i J^1_1 a na hranách (A^2_n, A^2_i) jehlanu J^2, tedy i J^2_1 je pro $i = 1, \ldots, n - 1$ indukována involuce harmonických pólů téhož druhu, na hraně (A^1_n, A^1_{n+1}) a na hraně (A^2_n, A^2_{n+1}) involuce parabolická, je tedy vrchol A^1_n v J^1_1 a A^2_n v J^2_1 téhož druhu a podle A, II, 5 existuje reálná kolineace, která transformuje jednu soustavu v soustavu druhou.

III. Klasifikace nadkvadrik n-rozměrného afinního prostoru

V tomto odstavci předpokládáme afinní n-rozměrný prostor s absolutní nadrovinou ${}^aS_{n-1}$ a nazýváme:

Středem nadkvadriky neabsolutní pól absolutní nadroviny vzhledem k nadkvadrice bez dvojných bodů; o-rozměrnou osou nadkvadriky neabsolutní o-rozměrný prostor ($o \neq 0$) polárně sdružený s absolutní nadrovinou vzhledem k nadkvadrice, jejíž $(o - 1)$-rozměrný prostor dvojných bodů leží v absolutní nadrovině; $(o + 1)$-rozměrným průměrem nadkvadriky libovolný neabsolutní $(o + 1)$-rozměrný prostor, který prochází o-rozměrným prostorem polárně sdruženým s absolutní nadrovinou vzhledem k nadkvadrice, a který leží v absolutní nadrovině.

Tětivou nadkvadriky reálnou (imaginární) přímku, na které nadkvadrika indukuje hyperbolickou (eliptickou) involuci harmonických pólů; průměrem nadkvadriky reálným (imaginárním) tětivu reálnou (imaginární), která prochází středem nadkvadriky nebo protíná její o-rozměrnou osu.

Souhrn $n - o$ reálných a imaginárních průměrů nadkvadriky, které jsou hranami téhož autopolárného normálního jehlanu nadkvadriky procházejícími jedním jeho vrcholem pro $o = 0$ soustavou n sdružených průměrů, pro $o \neq 0$ soustavou $n - o$ průměrů sdružených s o-rozměrnou osou nadkvadriky; souhrn $n - o - 1$ reálných a imaginárních tětiv nadkvadriky, které jsou hranami téhož autopolárného normálního jehlanu nadkvadriky procházejícími jedním vrcholem jehlanu, který leží v $(o + 1)$-rozměrné ose nadkvadriky, soustavou $n - o - 1$ tětiv sdružených s $(o + 1)$-rozměrným průměrem nadkvadriky, leží-li zbývající hrany v průměru.

1. Nadkvadriky středové. Středovou nazveme nadkvadriku, která má střed. Potom platí:

1.1. *Dvě $(n - 1)$-rozměrné nadkvadriky středové jsou afinní tehdy a jenom tehdy, je-li počet reálných průměrů libovolné soustavy n sdružených průměrů nadkvadriky jedné rovný počtu reálných průměrů libovolné soustavy n sdružených průměrů nadkvadriky druhé.*

Důkaz. Podle I, 1.1 jsou středy obou nadkvadrik body téhož druhu vzhledem k nim; absolutní nadrovina je polární nadrovina obou středů vzhledem k jejich nadkvadrikám, která těmito středy neprochází; podle II, 2.1 je tedy splněna nutná a postačující podmínka, aby existovala reálná kolineace s invariantní absolutní nadrovinou, která transformuje jednu nadkvadriku v druhou.

1.2. Počet afinně různých středových nadkvadrik obdržíme podle A, II, 3 a A, II, 3' takto: Autopolárný normální jehlan nesingulární nadkvadriky má nejvýše dva druhy vrcholu. Vrcholem jednoho druhu prochází k $(0 \leqq k \leqq n)$ hran s indukovanou hyperbolickou a $n - k$ hran s indukovanou eliptickou involucí harmonických pólů; vrcholem druhého druhu prochází $n - k + 1$ hran s indukovanou hyperbolickou a $k - 1$ hran s indukovanou eliptickou involucí harmonických pólů. Jehlany s jediným druhem vrcholu tedy obdržíme pouze pro $k = 0$ a při $k \neq 0$ pro $k = n - k + 1$, t. j. pro $k = 1/2\,(n + 1)$. Protože jsou k a n celá kladná čísla, nastane poslední případ pro nadkvadriky prostoru s lichým počtem rozměrů. V n-rozměrném reálném projektivním prostoru je pro sudé n celkem $1/2n + 1$ projektivně různých nesingulárních nadkvadrik, je tedy v tomto případě celkem $2 \times 1/2\,n + 1 = n + 1$ afinně různých nadkvadrik. Pro liché n je celkem $1/2\,(n + 1) + 1$ kolineárně různých nesingulárních nadkvadrik, je tedy v tomto případě celkem $2 \times [1/2\,.\,(n + 1) - 1] + 2 = n + 1$ afinně různých středových nadkvadrik. Dostáváme:

1.2.1. *Počet různých středových nakdvadrik n-rozměrného afinního prostoru je* $n + 1$.

2. Paraboloidy. Paraboloidem nazveme nesingulární nadkvadriku, jejíž tečnou nadrovinou je absolutní nadrovina. Potom platí:

2.1. *Dva paraboloidy n-rozměrného afinního prostoru jsou afinní tehdy a jenom tehdy, je-li v libovolné soustavě $n - 1$ tětiv sdružených s libovolným průměrem paraboloidu jednoho počet reálných tětiv buď rovný počtu reálných tětiv nebo rovný počtu imaginárních tětiv libovolné soustavy $n - 1$ tětiv sdružených s libovolným průměrem paraboloidu druhého.*

Důkaz. Paraboloid má vždy (jednorozměrný) průměr, který je reálný; nechť jsou A, B vrcholy libovolného autopolárného normálního jehlanu J, které leží na tomto průměru a nechť vrcholem A prochází r $(0 \leqq r \leqq n - 1)$ reálných tětiv; je-li $r + 1 \neq 1/2\,(n + 1)$, existují na tomto průměru podle věty I, 3.1 oba nejvýše možné druhy vrcholu v J; podle A, II, 3 pak tedy prochází vrcholem A r tětiv reálných a $n - r - 1$ tětiv imaginárních, vrcholem B $n - r - 1$ tětiv reálných a r tětiv imaginárních; je-li $r + 1 = 1/2\,(n + 1)$, jsou vrcholy A a B téhož druhu v J. Je-li tedy splněna podmínka 2.1, jsou podle A, II, 5 oba paraboloidy kolineární a podle II, 2.2 je tedy splněna podmínka nutná a postačující, aby existovala reálná kolineace s invariantní absolutní nadrovinou, která transformuje jeden paraboloid v paraboloid druhý.

2.2. Počet různých paraboloidů n-rozměrného afinního prostoru zjistíme takto: Počet kolineárně různých nesingulárních nadkvadrik je pro sudé n rovný $1/2\,n + 1$, pro liché n rovný $1/2\,(n + 1) + 1$. Podle A, II, 3 je v každém z těchto počtů právě jedna nadkvadrika (typ $+ \ldots +$), která neindukuje na žádné hraně autopolárného jehlanu hyperbolickou involuci harmonických pólů. Platí tedy:

2.2.1. *Počet různých paraboloidů n-rozměrného afinního prostoru je pro sudé n rovný $1/2\,n$, pro liché n rovný $1/2\,(n + 1)$.*

3. **Válce osové.** Singulární nadkvadriku, jejíž prostor dvojných bodů leží v absolutní nadrovině, nazveme válcem. Má-li válec osu, nazveme ho válcem osovým. Potom platí:

3.1. *Dva osové válce n-rozměrného afinního prostoru jsou afinní tehdy a jenom tehdy, je-li počet reálných průměrů libovolné soustavy $n - o$ průměrů sdružených s o-rozměrnou osou válce jednoho rovný počtu reálných průměrů libovolné soustavy $n - o$ průměrů sdružených s o-rozměrnou osou válce druhého.*

Důkaz. Prochází-li bodem A osy válce r reálných průměrů sdružených s osou, není tento bod bodem válce a v autopolárném jehlanu s vrcholem A a s hranami v průměrech prochází bodem A r hran s hyperbolickou, $n - r - o + 1$ hran s eliptickou a $o - 1$ hran s parabolickou involucí harmonických pólů; podle I, 1.1 je druh bodu vzhledem k válci $(r, n - r - o + 1, o - 1, 0)$; podle I, 4,1 je to druh každého bodu osy, který není bodem válce. Platí-li 3.1, je podle II, 2.3 splněna podmínka nutná a postačující, aby existovala afinita, která transformuje jeden válec ve válec druhý.

3.2. Počet afinně různých $(n - 1)$-rozměrných válců zjistíme takto: Při o-rozměrné ose je podmínka věty 3.1 právě podmínka věty 1.1 pro prostor $(n - o)$-rozměrný. Podle 1.2.1 je tedy pro $o = 1, \ldots, n - 1$ tento počet rovný $n + (n - 1) + \ldots + 2 = 1/2\,(n - 1)(n + 2)$, tedy:

3.2.1. *Počet různých osových válců n-rozměrného afinního prostoru je rovný $1/2\,(n - 1)(n + 2)$.*

4. **Válce parabolické.** Válec, jehož tečnou nadrovinou je nadrovina absolutní, nazveme válcem parabolickým. Potom platí:

4.1. *Dva válce parabolické n-rozměrného afinního prostoru jsou afinní tehdy a jen tehdy, je-li počet reálných tětiv libovolné soustavy $n - o - 1$ tětiv sdružených s libovolným $(o + 1)$-rozměrným průměrem válce jednoho rovný buď počtu reálných nebo počtu imaginárních tětiv libovolné soustavy $n - o - 1$ tětiv sdružených s libovolným $(o + 1)$-rozměrným průměrem válce druhého.*

Důkaz. Je-li bod A, který náleží $(o + 1)$-rozměrnému průměru ne však válci, vrcholem autopolárného jehlanu s hranami v tětivách soustavy sdružených tětiv, prochází jím vedle těchto hran ještě o hran s indukovanou parabolickou a jedna hrana s hyperbolickou involucí harmonických pólů. Důkaz pak je jako důkaz věty 2.1 pro $(n - o)$-rozměrný prostor, ve kterém je počet hran jehlanu J procházejících body A a B zvětšen o o hran s parabolickou involucí harmonických pólů. .

4.2. Počet afinně různých $(n - 1)$-rozměrných válců obdržíme takto: Pro $(o + 1)$-rozměrný průměr $(o = 1, \ldots, n - 2)$, je podmínka 4.1 právě podmínka 2.1 pro prostor $(n - o)$-rozměrný. Je tedy afinně různých válců parabolických pro sudé n: $1/2\,n + 1/2\,(n - 2) + 1/2\,(n - 2) + \ldots + 2 + 2 + 1 = 1/4\,(n - 2)(n + 2)$, pro liché n: $1/2\,(n - 1) + 1/2\,(n - 1) + 1/2\,(n - 3) + 1/2\,(n - 3) = \ldots + 2 + 2 + 1 = 1/4\,(n - 3)\,.\,(n + 3) + 1$, tedy:

4.2.1. *Počet různých parabolických válců n-rozměrného afinního prostoru je pro sudé n rovný $1/4\,(n - 2)(n + 2)$, pro liché n rovný $1/4\,(n - 3)(n + 3) + 1$.*

5. **Kužely.** Kuželem nazveme nadkvadriku singulární, jejíž prostor dvojných bodů neleží v absolutní nadrovině. Protože v případě kuželů není absolutní nadrovina prvkem polárnosti kuželem indukované, musíme rozšířit pojem

autopolárného normálního jehlanu tak, aby tato nadrovina byla prvkem tohoto rozšířeného pojmu.

Nechť má kužel V^2_{n-1} d-rozměrný prostor S_d dvojných bodů; nechť libovolný $(n - d - 1)$-rozměrný prostor S_{n-d-1}, který nemá s S_d společný bod, protne V^n_{2-1} v nadkvadrice V^2_{n-d-2}, která tedy nemá singulárních bodů a nechť je $J_1 \equiv \equiv [A_1, \ldots, A_{n-d}]$ autopolárný normální jehlan nadkvadriky V^2_{n-d-2}. Potom nazveme hranami autopolárného $(n - d)$-hranu kužele V^2_{n-1} $n - d$ prostorů ${}^iS_{d+1} \equiv (S_d, A_i)$, $i = 1, \ldots, n - d$; $(d + 2)$-rozměrné prostory ${}^{i,j}S_{d+2} \equiv \equiv ({}^iS_{d+1}, {}^jS_{d+1})$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n - d$ jeho stěnami a involuční projektivnost svazku $(d + 1)$-rozměrných prostorů, kterými se promítá z S_d involuce harmonických pólů na hraně (A_i, A_j) involucí indukovanou kuželem ve straně ${}^{i,j}S_{d+2}$. Na autopolárný $(n - d)$-hran se dají snadno rozšířit všechny věty, které platí o autopolárném normálním jehlanu nadkvadriky bez singulárních bodů a o druzích vrcholů a bodů.

Nazveme-li stěnu $(n - d)$-hranu reálnou (imaginární), je-li v ní kuželem indukována hyperbolická (eliptická) involuce, systémem sdružených $(d + 2)$-rozměrných stěn, stěny téhož $(n - d)$-hranu, které procházejí jednou jeho hranou, platí:

5.1. *Dva kužely n-rozměrného afinního prostoru jsou afinní tehdy a jen tehdy, je-li počet reálných stěn libovolného systému sdružených $(d + 2)$-rozměrných stěn kužele jednoho buď rovný počtu reálných stěn nebo rovný počtu imaginárních stěn zvětšenému o jednu libovolného systému sdružených $(d + 2)$-rozměrných stěn kužele druhého.*

Důkaz. Kužely buďte ${}^iV^2_{n-1}$, jejich řezy s absolutní nadrovinou ${}^iV^2_{n-2}$, $i = 1, 2$. Systém sdružených $(d + 2)$-rozměrných stěn kužele ${}^iV^2_{n-1}$ je protat absolutní nadrovinou v systému sdružených $(d + 1)$-rozměrných stěn nadkvadriky ${}^iV^2_{n-2}$; libovolný S_{n-d-1} absolutní nadroviny, který nemá s prostorem dvojných bodů žádný společný bod, protne tento systém v autopolárném normálním jehlanu J^i_1 řezu ${}^iS_{n-d-2}$ s ${}^iV^2_{n-2}$; podle A, II, 3 jsou jehlany J^1_1 a J^1_2 téhož druhu; autopolárné normální jehlany nadkvadrik ${}^1V^2_{n-2}$ a ${}^2V^2_{n-2}$, jejichž vrcholy obdržíme, když vrcholy jehlanu J^i_1 doplníme d dalšími vrcholy, které jsou libovolnou skupinou lineárně nezávislých bodů, určujících prostor dvojných bodů této nadkvadriky, jsou tedy opět stejného druhu a nadkvadriky ${}^1V^n_{2-2}$ a ${}^2V^n_{2-2}$ jsou podle A, II, 5 kolineárné; podle II, 2.5 je tedy věta správná.

5.2. Počet afinně různých kuželů zjistíme takto: Tento počet je rovný počtu projektivně různých nesingulárních nadkvadrik prostoru $(n - d - 1)$-rozměrného pro $d = 0, 1, \ldots, n - 2$. Podle A, II, 3 je tedy pro sudé n rovný $1/2\, n + 1 + 1/2\,(n - 2) + 1 + 1/2\,(n - 2) + 1 + \ldots + 1/2 \,.\, 2 + 1 + 1/2 \,.\, 2 + 1 + 1/2 \,.\, 2 + 1 = 1/4\, n\,(n + 4) - 1$, pro liché n rovný $1/2\,(n - 1) + + 1 + 1/2\,(n - 1) + 1 + 1/2\,(n - 3) + 1 + \ldots + 1/2 \,.\, 2 + 1 + 1/2 \,.\, 2 + + 1 = 1/4\,(n - 1)\,(n + 5)$. Tedy:

5.2.1. *Počet různých kuželů n-rozměrného prostoru afinního je pro sudé n rovný $1/4 \,.\, n\,(n + 4) - 1$, pro liché n rovný $1/4\,(n - 1)\,(n + 5)$.*

Tím jsou vyčerpány všechny případy plynoucí z rozboru II, 1; v III, 1.—5. jsou tedy uvedeny všechny afinně různé nadkvadriky n-rozměrného afinního prostoru.

(Dodáno do redakce 1. XI. 1955.)

Аффинная классификация гиперквадрик

доцент Д-р Ян Срб

Резюме

В статье ,,Автополярные симплексы полярности n-размерного пространства" (Чешский журнал: ,,Журнал для культивирования математики и физики", год издания 72, страница 49), я синтетически доказал несколько теорем, касающихся автополярных симплексов полярности n-размерного проективного пространства и посредством них я провел классификацию этих полярностей, следовательно и гиперквадрик этого пространства. В этом труде я дополняю приведенные теоремы некоторыми дальнейшими теоремами и провожу аффинную классификацию гиперквадрик, которую можно резюмировать следующим образом:

Каждой гиперквадрике V^2_{n-1}, n-размерного аффинного пространства соответствует характеристика

$$[a(o + b,\ r,\ i)],$$

причем $o + b + r + i = n$, $r + i > 0$, где a, b, o, r, i могут принимать значения:

$$a = 2, 1;\ b = 1, 0 \text{ для } a = 2;\ b = 1 \text{ для } a = 1;\ o = 0, \ldots, n - 1;\ r,\ i = 0,\ \ldots,\ n,$$

а их геометрическое значение следующее:

Если S^a_{n-1}, абсолютная гиперплоскость дополненного аффинного пространства, то o является размером пространства S_o, полярно сопряженного с S^a_{n-1} относительно V^2_{n-1}, которое не содержится в S^a_{n-1}, (для $o = 0$ So является центром, для $o > 0$ S_o является o-размерной осью); $o + b$ является размером нроизвольного S_{o+1} (($o + 1$)-размерный диаметр) не инцидентного с S^a_{n-1} и проходящего n-размерным пространством полярно сопряженным с S^c_{n+1}, которое принадлежит S^a_{n-1}.

Если $a = 2$, то $r(i)$ представляет число прямолинейных ребер того же самого автополярного симплекса гиперквадрики V^2_{n-1}, на которых нидукована гиперболическая (элиптическая) инволюция гармонических полюсов и которые проходят той же вершиной симплекса; этой вершиной для $o = 0$, $b = 0$ является точка S_o (система n сопряженных диаметров), для $o = 0$, $b = 0$ произвольная точка пространства S_o, которая не принадлежит гиперквадрике V^2_{n-1} (система $n - o$ диаметров сопряженных с S_o (, для $b = 1$ произвольная точка пространства S_{o+1}, которая не принадлежит гиперквадрике V^2_{n-1} (система $n - o - 1$ хорд, сопряженных с S_{o+1}).

Если $a = 1$, то S'_o является пространством двойных точек гиперквадрики V^2_{n-1} которое не содержится в S^a_{n-1}; если V^2_{n-o-2} является сечением гиперквадрики V^2_{n-1} с произвольным S_{n-o-1}, которое не имеет с S'_o общей точки, то $r(i)$ представляет число пространств S_{o+2}, которыми из S'_o проектируются прямолинейные ребра произвольного автополярного симплекса гиперквадрики V^2_{n-o-2},которые проходят той же вершиной симплекса и на которых индукована гиперболическая (элиптическая) инволюция гармонических полюсов (система $n - o - 1$ сопряженных пространств).

Все аффинно разные гиперквадрики, и при том каждую из них только один раз, получим следующим образом:

I. $a = 2$; гиперквадрики не конические;

1. $b = 0$; $o = 0$; гиперквадрики центральные; $r = 0, \ldots, n$ в полном числе $n + 1$;

из них $[2(0 + 0,\ 0,\ n)]$ является гиперквалрикой мнимой, $[2(0 + 0,\ n,\ 0)]$ — элипсоидом, а остальные — гиперболоидами.

2. $b = 1$, $o = 0$; $(n - 1)$ -размерные параболоиды; для четного n
$r = 1, \ldots, 1/2 \cdot n$, в польном числе $1/2 \cdot n$; для нечетного n
$r = 1, \ldots, 1/2\,(n + 1)$, в полном числе $1/2\,(n + 1)$.

3. $b = 0$, $o = 1, \ldots, n - 1$; $(n - 1)$ -размерные осевые цилиндры;
для $r = 0, \ldots, n - o$, в полном числе $1/2\,(n - 1)\,(n + 2)$.

4. $b = 1$, $o = 1, \ldots, n - 2$; $(n - 1)$ -размерные параболические цилиндры;
для $r = 1, \ldots, 1/2\,(n - o + 1)$, если $n - o$ нечетное,
$r = 1, \ldots, 1/2\,(n - o)$, если $n - o$ четное,
в полном числе $1/4\,(n - 2)\,(n + 2)$ для четного n,
а $1/4\,(n - 3)\,(n + 3) + 1$ для нечетного n.

II. $a = 1$; гиперконусы.

1. $b = 1$, $o = 0, \ldots, n - 2$; квадратические гиперконусы; для $r = 0, \ldots, 1/2\,(n - o - 1)$,
если $n - o - 1$ четное, для $r = 0, \ldots, 1/2\,(n - o)$,
если $n - o - 1$ нечетное, в полном числе $1/4 \cdot n(n + 4) - 1$,
если n четное, $1/4\,(n - 1)\,(n + 5)$, если n нечетное.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
TOM. I., FASC. I. MATHEMATICA 1956

Diferenciálna rovnica tretieho rádu tvaru $y''' + 2Ay' + (A' + b)\,y = 0$ so všetkými integrálmi oscilatorickými

Dr. M. GREGUŠ

G. Mammana [1] vyslovil domnienku, že každá lineárna diferenciálna rovnica homogénna tretieho rádu má aspoň jeden integrál bez nulových bodov. G. Ascolli [2] však podal príklad diferenciálnej rovnice tretieho rádu, ktorej každý integrál má aspoň jeden nulový bod. G. Sansonemu [3] sa podarilo skonštruovať diferenciálnu rovnicu tretieho rádu tvaru

$$\text{(A)} \qquad y''' + Qy' + Q'y = 0,$$

ktorej každý integrál má na určitom konečnom intervale vopred stanovený počet nulových bodov.

V práci [4] sú určené podmienky, za ktorých každý integrál diferenciálnej rovnice (A) má v intervale $(-\infty, \infty)$ nekonečne mnoho nulových bodov.

V tejto práci sú určené podmienky na koeficienty diferenciálnej rovnice tvaru

$$\text{(a)} \qquad y''' + 2Ay' + (A' + b)\,y = 0,$$

za ktorých každý jej integrál má nekonečne mnoho nulových bodov v intervale $(-\infty, \infty)$.

I.

Uvažujme o lineárnej diferenciálnej rovnici tretieho rádu tvaru (a), v ktorej $A' = A'(x)$, $b = b(x)$ nech sú spojitými funkciami $x \in (-\infty, \infty)$.

Diferenciálna rovnica adjungovaná k rovnici (a) je tvaru

$$\text{(b)} \qquad y''' + 2Ay' + (A' - b)\,y = 0.$$

Samoadjungovaná diferenciálna rovnica tretieho rádu je tvaru

$$\text{(c)} \qquad y''' + 2Ay' + A'y = 0.$$

Integrály diferenciálnej rovnice (a) spĺňajú tzv. integrálnu identitu (Mammanova identita)

$$yy'' - \frac{1}{2}y'^2 + Ay^2 + \int_a^x by^2\,dt = \text{konšt.}, \tag{1}$$

kde $a \in (-\infty, \infty)$ pevné, $x \in (-\infty, \infty)$ ľubovoľné číslo. Ak namiesto b dosadíme do (1) $-b$, dostaneme integrálnu identitu pre integrály diferenciálnej rovnice (b).

G. Sansone [3] dokázal nasledujúcu tzv. porovnávaciu vetu:

Nech $A'(x)$ a $b(x)$ sú spojitými funkciami $x \in \langle a, b \rangle$. Nech $b(x) \geqq 0$ pre $x \in \langle a, b \rangle$. Nech $y(x)$ je integrálom diferenciálnej rovnice (a), ktorý v čísle a spĺňa podmienku

$$y(a)\,y''(a) - \frac{1}{2}y'^2(a) + A(a)\,y^2(a) \leqq 0. \tag{2}$$

Nech

$$z''' + 2A_1z' + A_1'z = 0 \tag{d}$$

je samoadjungovaná diferenciálna rovnica tretieho rádu, kde $A_1'(x)$ je spojitou funkciou $x \in \langle a, b \rangle$. Nech pre $x \in \langle a, b \rangle$ je $A(x) \geqq A_1(x)$ a nech $z(x)$ je integrálom diferenciálnej rovnice (d), ktorý má v číslach α, β, kde $a \leqq \alpha < < \beta \leqq b$, za sebou nasledujúce dvojnásobné nulové body. Potom $y(x)$ má v (α, β) aspoň jeden nulový bod.

Uvedená veta platí aj v pozmenenom tvare. Namiesto $b(x) \geqq 0$ predpokladajme $b(x) \leqq 0$ pre $x \in \langle a, b \rangle$ a nech $y(x)$ spĺňa podmienku (1) v čísle b. Všetky ostatné predpoklady nech ostanú nezmenené. Za takto pozmenených predpokladov platí aj tvrdenie našej vety.

Dôkaz takto pozmenenej vety je totožný s dôkazom pôvodnej vety, okrem toho, že namiesto a všade v dôkaze treba písať b.

G. Mammana [1] dokázal túto vetu:

Nech $u(x)$, $v(x)$ sú dva nezávislé integrály diferenciálnej rovnice

$$u'' + \frac{1}{2}Au = 0. \tag{e}$$

Potom u^2, v^2, uv tvoria fundamentálny systém diferenciálnej rovnice (c). Z tejto vety vyplýva, že každý jednoduchý nulový bod integrálu u je dvojnásobným nulovým bodom u^2, t. j. integrálu diferenciálnej rovnice (c).

M. Zlámal [5] dokázal nasledujúcu vetu:

Nech v rovnici

$$y''' + p(x)\,y' + q\,(x)\,y = 0 \tag{f}$$

$p'(x)$, $q(x)$ sú spojité funkcie pre $x \geqq$ a. Nech $p(x)$ je nezáporné a nech platí

$$M = \limsup_{x\to\infty} \frac{p(x)}{\sqrt{x}} < \infty, \qquad m = \limsup_{x\to\infty} \sqrt{x}\,q(x) < 0$$

a nech $p'(x) - 2q(x) \geqq 0$.

Ak $y(x)$ je netriviálne riešenie diferenciálnej rovnice (f), potom je buď oscilatorické pre $x \geqq a$, alebo diverguje do $\pm \infty$ rýchlejšie než určitá mocnina x.

Ak vo vete platia uvedené predpoklady pre $x \leqq a$, okrem prípadu, že predpokladáme $m > 0$, namiesto $\sqrt{x}$ píšeme $\sqrt{-x}$ a $p'(x) - 2q(x) \leqq 0$ pre $x \leqq a$, potom ľubovoľný integrál diferenciálnej rovnice (f), $y(x)$ je buď oscilatorický pre $x \leqq a$, alebo diverguje do $\pm\infty$ rýchlejšie než určitá mocnina x.

Dôkaz takto pozmenenej vety je podobný dôkazu pôvodnej vety, preto ho nebudeme uvádzať.

II.

V tomto odseku si dokážeme nasledujúcu vetu:

Veta. *O koeficientoch diferenciálnej rovnice (a) predpokladajme:*

1. Nech $A'(x)$, $b(x)$ sú spojité funkcie $x \in (-\infty, \infty)$.

2. Nech $b(x) \geqq 0$ pre $x > a$, $b(a) = 0$, $b(x) \leqq 0$ pre $x < a$, nech $b(a + x) = -b(a - x)$ a nech $\lim_{x\to\pm\infty} b(x) = \pm \infty$. Nech ďalej $A(x) > \varrho^2$ pre $x \in (-\infty, \infty)$, kde ϱ^2 je konštanta, a nech $A(x)$ je symetrická vzhľadom na priamku $x = a$.

3. Nech $\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{\sqrt{x}} = \limsup_{x\to-\infty} \frac{A(x)}{\sqrt{-x}} < \infty$ a nech $\limsup_{x\to\infty} \sqrt{x}[A'(x) - b(x)] = -\limsup_{x\to-\infty} \sqrt{-x}[A'(x) - b(x)] < 0$.

Potom každý integrál diferenciálnej rovnice (a) má nekonečne mnoho nulových bodov v intervale $(-\infty, \infty)$.

Dôkaz: Kvôli jednoduchosti budeme predpokladať $a = 0$. Nech y_1, y_2, y_3 sú integrálmi diferenciálnej rovnice (a) vlastností:

$$y_1(0) = y_1'(0) = 0, \qquad y_2(0) = y_2''(0) = 0, \qquad y_3'(0) = y_3''(0) = 0.$$

Takto volené integrály tvoria fundamentálny systém diferenciálnej rovnice (a).

Ukážeme, že y_1 osciľuje naľavo i napravo od začiatku. Porovnajme totiž diferenciálnu rovnicu (a) s diferenciálnou rovnicou (c), samoadjungovanou. Nech u je ľubovoľný integrál diferenciálnej rovnice (e). Z predpokladu 2 vyplýva, že u osciľuje v $(-\infty, \infty)$. Z uvedenej vety v ods. I od G. Mammanu vyplýva, že $\bar{y} = u^2$ je integrálom diferenciálnej rovnice (c), so všetkými nulovými bodmi dvojnásobnými. Integrál y_1 spĺňa v čísle 0 podmienku (2), a teda podľa porovnávacej vety od G. Sansoneho medzi každými dvoma nulovými bodmi integrálu $\bar{y}$ leží aspoň jeden nulový bod integrálu y_1.

Všeobecný integrál diferenciálnej rovnice (a) je tvaru

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3.$$

Ukážeme, že y má nekonečne mnoho nulových bodov naľavo alebo napravo od začiatku.

Povedzme, že y nemá žiaden nulový bod v $(-\infty, \infty)$. Ak by totiž mal aspoň jeden, z porovnávacej vety ľahko zistíme, že ich má nekonečne mnoho.

Utvorme si podiel:

$$\left(\frac{y_1}{y}\right)' = \frac{-c_2(y_1y_2' - y_1'y_2) - c_3(y_1y_3' - y_1'y_3)}{y^2}. \tag{3}$$

Označme $w_1 = y_1y_2' - y_1'y_2$, $w_2 = y_1y_3' - y_1'y_3$.

Je známe [1], že w_1, w_2 sú integrálmi diferenciálnej rovnice (b). Ľahko nahliadneme, že $w_1(0) = w_1'(0) = 0$, $w_2(0) = w_2''(0) = 0$.

Z integrálnej identity (1) upravenej pre diferenciálnu rovnicu (b) ľahko zistíme, že w_1 nemá žiaden nulový bod ani naľavo, ani napravo od začiatku. Kvôli jednoduchosti predpokladajme $w_1(x) > 0$ pre $x \neq 0$. Diferenciálna rovnica (b) je tvaru (f). Koeficienty diferenciálnej rovnice (b) spĺňajú predpoklad 3 našej vety, a teda sú splnené predpoklady vety od M. Zlámala, uvedenej v ods. I. Preto $w_1(x)$ diverguje do $+\infty$ pre kladné i záporné x.

Pre $w_2(x)$ sú možné dva prípady:

1. $w_2(x)$ nemá napravo ani naľavo od začiatku nulové body, alebo ich má konečný ten istý počet naľavo i napravo od začiatku.

2. $w_2(x)$ osciľuje naľavo i napravo od začiatku.

Ukážme, že integrál $w_2(x)$ diferenciálnej rovnice (b) má tu vlastnosť, že $w_2(x) = -w_2(-x)$.

Vskutku je

$$(\alpha) \qquad w_2'''(x) + 2A(x)\,w_2'(x) + [A'(x) - b(x)]\,w_2(x) = 0,$$

$$-w_2'''(-x) - 2A(-x)\,w_2'(-x) + [A'(-x) - b(-x)]\,w_2(-x) = 0.$$

Poslednú rovnicu možno písať v tomto tvare:

$$(\beta) \qquad -w_2'''(-x) - 2A(x)\,w_2'(-x) - [A'(x) - b(x)]\,w_2(-x) = 0.$$

Porovnajúc rovnice (α), (β), ak berieme do úvahy skutočnosť, že $w_2(x)$ a $-w_2(-x)$ sú určené tými istými začiatočnými podmienkami, vidíme, že $w_2(x) = -w_2(-x)$.

Pomocou vzťahu (3) teraz ukážeme, že v prípade 1 pre $w_2(x)$ existuje aspoň jeden nulový bod integrálu y diferenciálnej rovnice (a) naľavo alebo napravo od začiatku.

1. Nech $w_2(x)$ nemá nulový bod pre $x \neq 0$, alebo nech ich má konečný, ten istý počet naľavo i napravo od začiatku. Nech $\bar{x}_m$, $\bar{x}_{-m}$ sú posledné nulové body integrálu $w_2(x)$ napravo, resp. naľavo od začiatku. Nech pre $x > \bar{x}_m$ je $w_2(x) > 0$. Potom $w_2(x) < 0$ pre $x < \bar{x}_{-m}$.

Môžu nastať dva prípady:

a) $sgn\, c_2 = sgn\, c_3$.

Ak integrujeme v tomto prípade rovnosť (3) medzi ľubovoľnými dvoma nulovými bodmi $x_r < x_s$, kde $x_r > \bar{x}_m$ integrálu y_1, vznikne spor. Teda integrál y má aspoň jeden nulový bod napravo od začiatku.

b) $sgn\, c_2 \neq sgn\, c_3$.

Ak integrujeme v tomto prípade rovnosť (3) medzi ľubovoľnými dvoma nulovými bodmi integrálu y_1, menšími než $\bar{x}_{-m}$, dostaneme opäť spor. Teda aj v tomto prípade má integrál y aspoň jeden nulový bod naľavo od začiatku.

Z porovnávacej vety ľahko zistíme, že i v prípade a), i v prípade b) ich má nekonečne mnoho napravo, resp. naľavo od začiatku.

2. Nech $w_2(x)$ má naľavo i napravo od začiatku nekonečne mnoho nulových bodov.

Ukážme, že v tomto prípade integrál y osciluje napravo i naľavo od začiatku.

Stačí ukázať, že y osciluje napr. napravo od začiatku, pretože pre x naľavo od začiatku je dôkaz podobný.

Nech teda $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$ sú všetky nulové body integrálu $w_2(x)$ napravo od začiatku. Potom sú možné tieto prípady:

a) $\left| \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} w_2(x)\,dx \right| \leqq \left| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} w_2(x)\,dx \right|$ pre $i = 1, 2, \ldots,$

b) $\left| \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} w_2(x)\,dx \right| \geqq \left| \int\limits_{xi}^{x_{i+1}} w_2(x)\,dx \right|$ pre $i = 1, 2, \ldots$

c) Určitá čiastočná postupnosť z postupnosti $\left\{ \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w_2(x)\,dx \right| \right\}$ je rastúca.

d) Určitá konečná čiastočná postupnosť z postupnosti $\left\{ \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w_2(x)\,dx \right| \right\}$ je rastúca a všetky ostatné členy sú klesajúce.

e) Z postupnosti $\left\{ \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x)\,dx \right| \right\}$ sa dá vybrať viac klesajúcich postupností.

Ukážeme, že nikdy nenastane prípad a) a c). V týchto prípadoch by totiž $\int\limits_0^x b(x) \,.\, w_2^2(x)\,dx$ s rastúcim x vzrastal na všetky medze. Z integrálnej identity pre $w_2(x)$ však vyplýva

$$\frac{1}{2} w_2'^2(x_i) = \frac{1}{2} w_2'^2(0) - \int\limits_0^{x_i} b(x) w_2^2(x)\,dx,$$

čo však je spor pre dosť veľké x_i.

V prípade b) maximá funkcie $\int\limits_0^x w_2(x)\,dx$ klesajú s rastúcim x, pritom $\int\limits_0^x w_1(x)dx$ s rastúcim x rastie nad všetky medze. Ak integrujeme rovnosť (3) v intervale $<0, \bar{x}_k>$, kde $\bar{x}_k$ je dosť veľký nulový bod integrálu y_1 napravo od začiatku, dostaneme opäť spor. Teda i v tomto prípade má $y(x)$ aspoň jeden nulový bod napravo od začiatku.

Podobne by sa dokázal i prípad e).

V prípade d) stačí integrovať rovnosť (3) medzi vhodnými nulovými bodmi integrálu y_1, ktoré sú väčšie než x_r, t. j. posledný nulový bod integrálu $w_2(x)$, pre ktorý je $\left|\int_{x_{r-1}}^{x_r} w_2(x)\,\mathrm{d}x\right|$ posledným členom konečnej rastúcej postupnosti,

z postupnosti $$\left\{\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} w_2(x)\,\mathrm{d}x\right|\right\}.$$

Teda i v tomto prípade zistíme, že $y(x)$ musí mať aspoň jeden nulový bod napravo od začiatku. Použijúc i v tomto prípade Sansoneho porovnávaciu vetu zistíme, že ich má nekonečne mnoho. Tým sme vetu dokázali.

Poznámka. Z dôkazu vety vyplýva, že ak sa dá zostrojiť diferenciálna rovnica tvaru (b), ktorej koeficienty budú spĺňať predpoklady našej vety a ktorej integrál $w_2(x)$ bude oscilovať v celom intervale $(-\infty, \infty)$, potom všetky integrály diferenciálnej rovnice (a) budú oscilovať naľavo i napravo od začiatku.

Literatúra

[1] **Mammana G.**: Decomposizione delle equazioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e aplicazioni relative allo studio delle equazioni differenziali lineari. Math. Zeitschr., 33, 186, 1933.

[2] **Ascolli G.**: Sulla decomposizione degli operatori differenziali lineari e sopra alcune questioni geometriche che vi si connettone. Revista Mathem. y Fisica teorica, Seria A, p. 189, Tucuman 1940.

[3] **Sansone G.**: Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale. Revista, Mathem. y Fisica teorica, Seria A, p. 198, Tucuman 1948.

[4] **Greguš M.**: O niektorých nových vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice $y''' + Qy' + Q'y = 0$. Spisy Přír. fak. MU v Brně 356, s. 1, 1955.

[5] **Zlámal M.**: Asymptotic properties of the solutions of the third order linear differential equations, Spisy Přír. fak. MU v Brně 329, p. 159, 1951.

Дифференциальное уравнение третьего порядка, $y''' + 2Ay' + (A' + b)y = 0$, со всеми интегралами колеблющимися в интервале $(-\infty, \infty)$

Д-р М. Грегуш

Выводы

На основании некоторых резултатов Т. Сансона и М. Зламала разрешена проблема, содержащаяся в сдедующей теореме:

Теорема: О коэффициентах дифференциального уравнения

$$y''' + 2Ay' + (A' + b)\,y + 0 \tag{a}$$

предполагается:

1. Пусть $A'(x)$, $b(x)$ непрерывные функции $x \in (-\infty, \infty)$.

2. Пусть $b(x) \geqq 0$ для $x > a$, $b(a) = 0$ и $b(x) \leqq 0$ для $x < a$ и пусть $b(a + x) = -b(a - x)$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b(x) = \pm\infty$. Пусть далее $A(x) > \varrho^2$ для $x \in (-\infty, \infty)$, где ϱ^2 постоянная и пусть $A(x)$ симметрична относительно к прямой $x = a$.

3. Пусть $\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{A(x)}{\sqrt{x}} = \limsup\limits_{x\to-\infty} \frac{A(x)}{\sqrt{-x}} < \infty$ и $\limsup\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\,[A'(x) - b(x)] = -\limsup\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x}\,[A'(x) - b(x)] < 0$.

Потом каждый интеграл дифференциального уравнения (а) имеет безконечное множество нулевых точек в интервале $(-\infty, \infty)$.

Die Differentialgleichung der dritten Ordnung $y''' + 2Ay' + (A' + b)\,y = 0$, mit allen oszillatorischen Lösungen

Dr. M. Greguš

Zusammenfassung

Mit Hilfe einiger Ergebnisse von G. Sansone und M. Zlamal ist in dieser Arbeit das Problem gelöst, unter welchen Bedingungen sämtliche Lösungen der Differentialgleichung

(a) $$y''' + 2Ay' + (A' + b)\,y = 0$$

im Interval $(-\infty, \infty)$ oszillatorisch sind, oder, unter welchen Bedingungen jede Lösung der Differentialgleichung (a) im Interval $(-\infty, \infty)$ unendlich viele Nullstellen hat.

Folgender Satz enthält dieses Ergebnis:

Satz: Von den Koeffizienten der Differentialgleichung (a) setzen wir voraus:

1. $A'(x)$, $b(x)$ seien stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$.

2. Sei $b(x) \geqq 0$ für $x > a$, $b(a) = 0$ und $b(x) \leqq 0$ für $x < a$ und sei $b(a + x) = -b(a - x)$. Es sei weiter $\lim_{x\to\pm\infty} b(x) = \pm\infty$ und $A(x) > \varrho^2$ für $x \in (-\infty, \infty)$, wo ϱ^2 eine Konstante ist und $A(x)$ sei symmetrisch in Bezug zur Geraden $x = a$.

3. Es sei $\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{\sqrt{x}} = \limsup_{x\to-\infty} \frac{A(x)}{\sqrt{-x}} < \infty$ und $\limsup_{x\to\infty} \sqrt{x}\,[A'(x) - b(x)] = -\limsup_{x\to-\infty} \sqrt{-x}\,[A'(x) - b(x)] < 0$.

Dann hat jede Lösung der Differentialgleichung (a) im Interval $(-\infty, \infty)$ unendlich viele Nullstellen.

Zprávy katedry matematiky University Komenského

Študentská vedecká konferencia. Dňa 10. mája 1956 prebiehala na Prírodovedeckej fakulte UK študentská vedecká konferencia. Na tejto konferencii bola založená Študentská vedecká spoločnosť, ktorá má za cieľ viesť študentov k samostatnej vedeckej práci. Do tejto spoločnosti z matematikov boli zvolení: Jur Bosák, IV. ročník, Jozef Gruska, Viliam Chvál a Miloš Franek, poslucháči III. ročníka. Títo predniesli aj prednášky, a to: Bosák: O zobecnení metódy úplnej indukcie; Gruska: O vytvorujúcich rozkladoch na algebrách; Chvál: O axiomatike na niektorých algebraických systémoch; Franek; O normálnych komplexoch na grupoidoch.

Publikácia. V apríli vyšla kniha od akademika Jura Hronca: Diferenciálne rovnice, I. diel, Obyčajné diferenciálne rovnice. Vydavateľstvo: Slovenská akadémia vied, Bratislava, 1956, 370 veľkých strán. 31,6 hárkov. Cena knihy je 30,80 Kčs. Kniha má tieto čiastky: I. Úvod, II. Diferenciálne rovnice prvého rádu, III. Špeciálne diferenciálne rovnice druhého rádu, IV. Existenčné dôkazy riešenia, V. Diferenciálne rovnice n-ho rádu, VI. Okrajové podmienky diferenciálnej rovnice druhého rádu, VII. Lineárne diferenciálne systémy, VIII. Pohyby o nezávislých volnostiach s kinetickou a potenciálnou energiou, danou kvadratickou formou, IX. Diferenciálne rovnice s premennými koeficientmi, X. Pevné singulárne body nelineárnych diferenciálnych rovníc, XI. Diferenciálne systémy s premennými koeficientmi, XII. Polokonvergentné alebo semikonvergentné rady, XIII. Riešenie diferenciálneho systému v okolí podstatného singulárneho bodu, XIV. Numerické riešenie diferenciálnych rovníc a sústav diferenciálnych rovníc prvého rádu.

Jubileum. Katedra matematiky UK v úzkom kruhu oslávila 17. mája 1956 jubileum 75-tých narodenín svojho vedúceho, akademika Jura Hronca a dala do tlače štyri čísla časopisu k ucteniu tejto pamiatky.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

je fakultný sborník určený k publikáciám vedeckých prác interných a externých učiteľov našej fakulty, interných a externých aspirantov a našich študentov. Absolventi našej fakulty môžu publikovať práce, v ktorých spracovávajú materiál získaný za dobu pobytu na našej fakulte. Redakčná rada má právo z tohto pravidla povoliť výnimky.

Práce profesorov a docentov nepodliehajú recenzii. Práce ostatných učiteľov musia byť doporučené katedrou. Práce študentov musia byť doporučené študentskou vedeckou spoločnosťou a príslušnou katedrou.

Publikovať možno v jazyku slovenskom alebo českom, prípadne v ruskom alebo anglickom, francúzkom alebo nemeckom. Práce podané k publikácii je treba podať písané strojom po jednej strane, ob riadok, tak aby jeden riadok tvorilo 60 úderov a na stránku pripadá 30 riadkov. Rukopis nech je podaný dvojmo, upravený tak, aby bolo čo najmenej chýb a preklepov. Nadmerný počet chýb zdražuje tlač a ide k zaťaženiu autora.

Rukopis upravte tak, že najprv príde názov práce, pod to meno autora s plným titulom. Pracovište, pokiaľ je na našej fakulte, sa neuvádza. Iba tam, kde je viac spolupracovníkov a niektorý z nich je z mimofakultného pracovišťa, sa uvádzajú všetky pracovišťá. Tiež tam, kde práca bola vypracovaná na dvoch pracoviaštiach, je treba uviesť obidve.

Fotografie je treba podať na černom lesklom papiere, uviesť zmenšenie a text pod obrázok. Kresby je treba previesť tušom na priehladnom papiere (pauzák) alebo na rysovacom papiere a taktiež uviesť zmenšenie a text pod obrázok.

Každá práca musí mať rezumé v ruskom a niektorom západnom jazyku. K prácam, publikovaným v cudzom jazyku, nutno pripojiť rezumé v slovenskom (českom) jazyku a v jazyku západnom v prípade publikácie v ruskom jazyku, alebo v ruskom jazyku v prípade publikácie v jazyku západnom. *Nezabudnite u rezumé uviesť vždy názov práce aj meno autora v rovnakom poradí ako vo vlastnej publikácii.* Redakcia podľa možností obstará v prípade potreby preklad rezumé do ruštiny alebo do niektorého zo západných jazykov na úkor autora. Za správnosť prekladu zodpovedá autor.

Autori dostávajú stĺpcové a zlámané korektúry, ktoré nutno do 3 dní vrátiť. Rozsiahlejšie zmeny behom korektúry idú k ťarche autorského honoráru. Každý autor dostane mimo príslušného honoráru i 50 separátov.

R e d a k č n á r a d a.

OBSAH