

## Werk

**Label:** Article

**Jahr:** 1958

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321\\_0010|log31](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0010|log31)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **ХИПЕРБОЛИЧНИ ЦИЛИНДАР У ПОЉУ ЛИНИСКИХ ИЗВОРА ЕЛЕКТРИЧНЕ СТРУЈЕ**

**РАНКО С. МУЖИЈЕВИЋ, БЕОГРАД**

Хиперболични цилиндар спада свакако међу најједноставније површине којима се може апроксимирати једна врло дугачка (теориски бесконачно дугачка) и симетрична антиклинала, ако се она уз то још протеже на врло велику дубину (теориски такође на бесконачно велику дубину). Случај се у погледу постављања једначине цилиндра упрошћава, ако је оса антиклинале паралелна хоризонталној земљиној површини, а раван симетрије антиклинале управна на такву земљину површину. Антиклинала са означеним особинама спада онда у т. зв. „дводимензионалне“ случајеве. Хиперболични цилиндар је специјално погодан за апроксимацију широких, благо засвођених антиклинала, пошто се у том случају умањује ефекат његовог протежања у бесконачност у правцу вертикално на доле, нарочито у области непосредно изнад темена антиклинале.

Хиперболични цилиндар за апроксимацију антиклинале при интерпретацији резултата геоелектричних испитивања, према нашем познавању ствари, користио је само А. П. Краев [2] и то у случају телурских испитивања.<sup>1)</sup> Зато је у овом раду дат један прилог интерпретацији хиперболичног цилиндра — идеалног проводника и идеалног изолатора — када се он налази у пољу два бесконачно дугачка линиска извора, паралелна оси цилиндра и постављена на коначном међусобном растојању на хоризонталној земљиној површини. При томе су искључиво коришћене широке могућности које у таквим случајевима пружа примена теорије функција комплексне променљиве при т. зв. конформном пресликавању. Као што је познато, та метода омогућава да се од случаја за који је проблем расподеле потенцијала већ решен, пређе на случај за који проблем треба решити: довољно

---

<sup>1)</sup> За овај случај много адекватнију апроксимацију антиклинале су дали G. Kunetz и J. Chastanet de Géry [3].

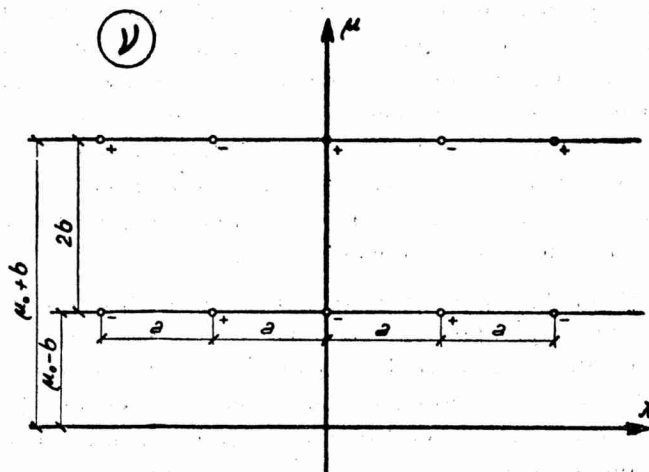
је само наћи аналитичку функцију, која ће домен<sup>2)</sup> за који је решење лако наћи, трансформисати у дати домен за који се решење тражи

### 1. Хиперболични цилиндар — идеалан проводник

Да би се добио закон расподеле потенцијала у овом случају, треба поћи од израза за комплексни потенцијал бесконачно много међусобно паралелних линеарних извора, распоређених наизменично према њиховом знаку на једнаком међусобном растојању у две паралелне равни, чији је пресек са равни комплексне поменљиве  $v$  приказан на сл. 1.

Комплексни потенцијал за овај случај дат је изразом

$$W = U + iV = k \log \left\{ \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a} [(v - i\mu_0) - ib]}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a} [(v - i\mu_0) + ib]} \right\}. \quad (1.1)$$



Сл. 1. Положај извора у првобитној равни  
Fig. 1. Disposition des sources dans le plan primitif

Очигледно је да су линије нултог потенцијала у равни  $v$  — праве паралелне имагираној оси, дефинисане са

$$\lambda = \pm \frac{a}{2} (2n + 1),$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Пошто у случају који треба решити, хиперболични цилиндар претставља површину идеалног проводника, то ће он бити уједно и једна од еквипотен-

цијалних површина. Ако се усвоји да то буде површина нултог потенцијала, онда његов нормални пресек, тј. хипербола, треба да одговара правој као линији нултог потенцијала у првобитној равни. Та чињеница намеће, према томе, избор такве функције  $z = f(v)$  која праве

<sup>2)</sup> Овде се може говорити о домену у равни, јер је у „дводимензионалном“ случају облик структуре потпуно дефинисан њеним нормалним пресеком, који онда претставља посматрани домен.

$\lambda = \pm \frac{a}{2} (2n+1)$  трансформише у хиперболе. Као што је познато, ту особину има функција

$$z = x + iy = -ic \sin v. \quad (1.2)$$

$c^2 = h^2 + k^2$  — линеарна ексцентричност;  $h, k$  — полуосе хиперболе — директрисе датог хиперболичног цилиндра.

Као што сл. 2 показује, појас ширине  $2l = \pi$  у равни  $v$  пресликава се функцијом (1.2) на целу раван  $z$ ; кореспонденција између појединих делова тога појаса и равни  $z$  означена је на слици.

Изрази (1.1) и (1.2) дефинишу већ имплицитно решење постављеног проблема. Наиме, инверзијом функције дате са (1.1) добија се

$$v = \frac{a}{\pi} \arcsin \left( \frac{1 + e^{W/k}}{1 - e^{W/k}} \sin \frac{i\pi b}{a} \right) + i\eta_0. \quad (1.3)$$

Заменом вредности  $v$  дате са (1.3) у (1.2) добија се  $z = f(W)$ ; функција инверсна овој тј.  $W = \Phi(z)$  претставља комплексни потенцијал за случај присуства идеално проводног хиперболичног цилиндра са обе стране на нултом потенцијалу у пуном простору; њен реални део је стварни потенцијал  $U = U(x, y)$  такође у пуном простору. Да би се добио потенцијал за дати случај тј. на површини терена, потребно је склонити део изнад хоризонталне равни кроз реалну осу и заменити га ваздухом. Да се то постигне довољно је израз за потенцијал у пуном простору помножити са 2, пошто је реална оса, сада пресек површине терена са равни управном на осу цилиндра, једна од струјних линија.

Да би се добијање функције  $W = \Phi(z)$  и њено растављање на реални и имагинарни део лакше извело, неопходно је у равни  $Z$ -увести елиптичне координате помоћу функције

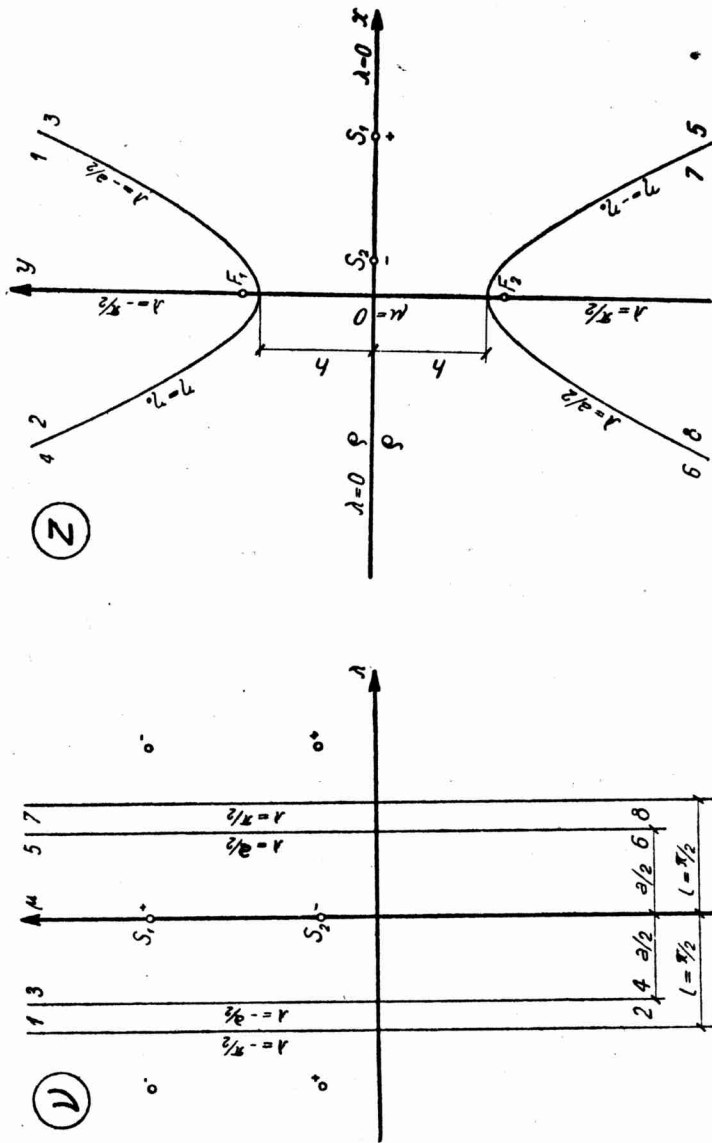
$$z = c \sin \operatorname{hup} \zeta; \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (1.4)$$

која доводи до формула трансформације

$$x = c \sin \operatorname{hup} \xi \cos \eta; \quad y = c \cos \operatorname{hup} \xi \sin \eta. \quad (1.5)$$

Према томе, пошто су у новом координатном систему координатне линије елипсе ( $\xi = \text{const}$ ) и хиперболе ( $\eta = \text{const}$ ), дата хипербола — директриса датог цилиндра — ће бити једна од координатних линија, дефинисана са

$$\eta = \eta_0 = \arcsin \frac{h}{k}. \quad (1.6)$$



Сл. 2. Кореспонденција између правбитне ( $\nu$ ) и трансформисане ( $z$ ) равни  
 Fig. 2. Correspondance entre le plan primitif ( $\nu$ ) et le plan transformé ( $z$ )

Тиме је уједно одређена и вредност параметра ( $a$ )

$$a = -2\eta_0$$

$$|\eta| \leq \frac{\pi}{2}; \quad |a| \leq \pi. \quad (1.7)$$

Остала два параметра који такође прецизирају положај извора у првобитној равни ( $b, \mu_0$ ) лако је одредити, ако је познат положај извора у равни хиперболе; на пр. помоћу елиптичних координата извора:

$$b = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}; \quad \mu_0 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}. \quad (1.8)$$

Према томе, замењујући (1.3) у (1.2) и користећи (1.4), добија се израз за комплексни потенцијал у равни хиперболе.

$$W = k \log \left\{ \operatorname{tg} \operatorname{hyp} \frac{\pi}{4\eta_0} [\zeta - (\mu_0 + b)] \operatorname{cotg} \operatorname{hyp} \frac{\pi}{4\eta_0} [\zeta - (\mu_0 - b)] \right\}, \quad (1.9)$$

Реални део ове комплексне функције изгледа

$$U = \frac{K}{2} \log \left\{ \frac{\left[ \operatorname{tg}^2 \frac{\pi\eta}{4\eta_0} + \operatorname{tg} \operatorname{hyp}^2 \frac{\pi}{4\eta_0} (\xi - \mu_0 - b) \right]}{\left[ \operatorname{tg}^2 \frac{\pi\eta}{4\eta_0} + \operatorname{tg} \operatorname{hyp}^2 \frac{\pi}{4\eta_0} (\xi - \mu_0 + b) \right]} \frac{\left[ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi\eta}{4\eta_0} \operatorname{tg} \operatorname{hyp}^2 \frac{\pi}{4\eta_0} (\xi - \mu_0 + b) \right]}{\left[ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi\eta}{4\eta_0} \operatorname{tg} \operatorname{hyp}^2 \frac{\pi}{4\eta_0} (\xi - \mu_0 - b) \right]} \right\} \quad (1.10)$$

и претставља тражени потенцијал за случај када је хомогеност пуног простора нарушена присуством хиперболичког цилиндра на нултом потенцијалу чији је специфични отпор раван нули, чија директриса има линеарну ексцентричност ( $c$ ) и код кога се темена његове две гране налазе на растојању  $2h$ .

Специјално важан, јер је у пракси и једино могућ, јесте случај када се тачка посматрања налази на земљиној површини. Да се добије потенцијал у овом случају треба у (1.10) ставити  $\eta=0$  и тај израз помножити са 2; резултат је следећи:

$$U = 2k \log \left[ \frac{\operatorname{tg} \operatorname{hyp} \frac{4}{4\eta_0} (\xi - \xi_1)}{\operatorname{tg} \operatorname{hyp} \frac{\pi}{4\eta_0} (\xi - \xi_2)} \right]. \quad (1.11)$$

Вредност мултипликативне константе је

$$k = \frac{J\rho}{4\pi} \quad (1.12)$$

где је:

$\rho$  — Специфични отпор средине у којој се цилиндар налази;

$J$  — Јачина струје који емитују извори.

Израз (1.11) написан у правоуглим координатама гласи

$$U = 2K \log \left\{ \frac{[(x + \sqrt{x^2 + c^2})^{\frac{\pi}{2\eta_0}} - (x_1 + \sqrt{x_1^2 + c^2})^{\frac{\pi}{2\eta_0}}]}{[(x + \sqrt{x^2 + c^2})^{\frac{\pi}{2\eta_0}} + (x_1 + \sqrt{x_1^2 + c^2})^{\frac{\pi}{2\eta_0}}]} \cdot \frac{[(x + \sqrt{x^2 + c^2})^{\frac{\pi}{2\eta_0}} + (x_2 + \sqrt{x_2^2 + c^2})^{\frac{\pi}{2\eta_0}}]}{[(x + \sqrt{x^2 + c^2})^{\frac{\pi}{2\eta_0}} - (x_2 + \sqrt{x_2^2 + c^2})^{\frac{\pi}{2\eta_0}}]} \right\}, \quad (1.13)$$

## 2. Хиперболични цилиндар — идеалан изолатор

За решење овог случаја довољно је поћи од комплексног потенцијала два линиска извора чији пресеци са равни комплексне променљиве  $v$  се налазе у тачкама  $v_1$  и  $v_2$  на реалној оси. Као што је познато, комплексни потенцијал је тада дат изразом

$$W = U + iV = k \log \left( \frac{v - v_1}{v - v_2} \right). \quad (2.1)$$

Трансформација, пак равни  $v$  у раван  $z$  која као нормалан пресек датог хиперболичног цилиндра садржи хиперболе — директрисе, мора се овде извршити у две етапе.

Функција

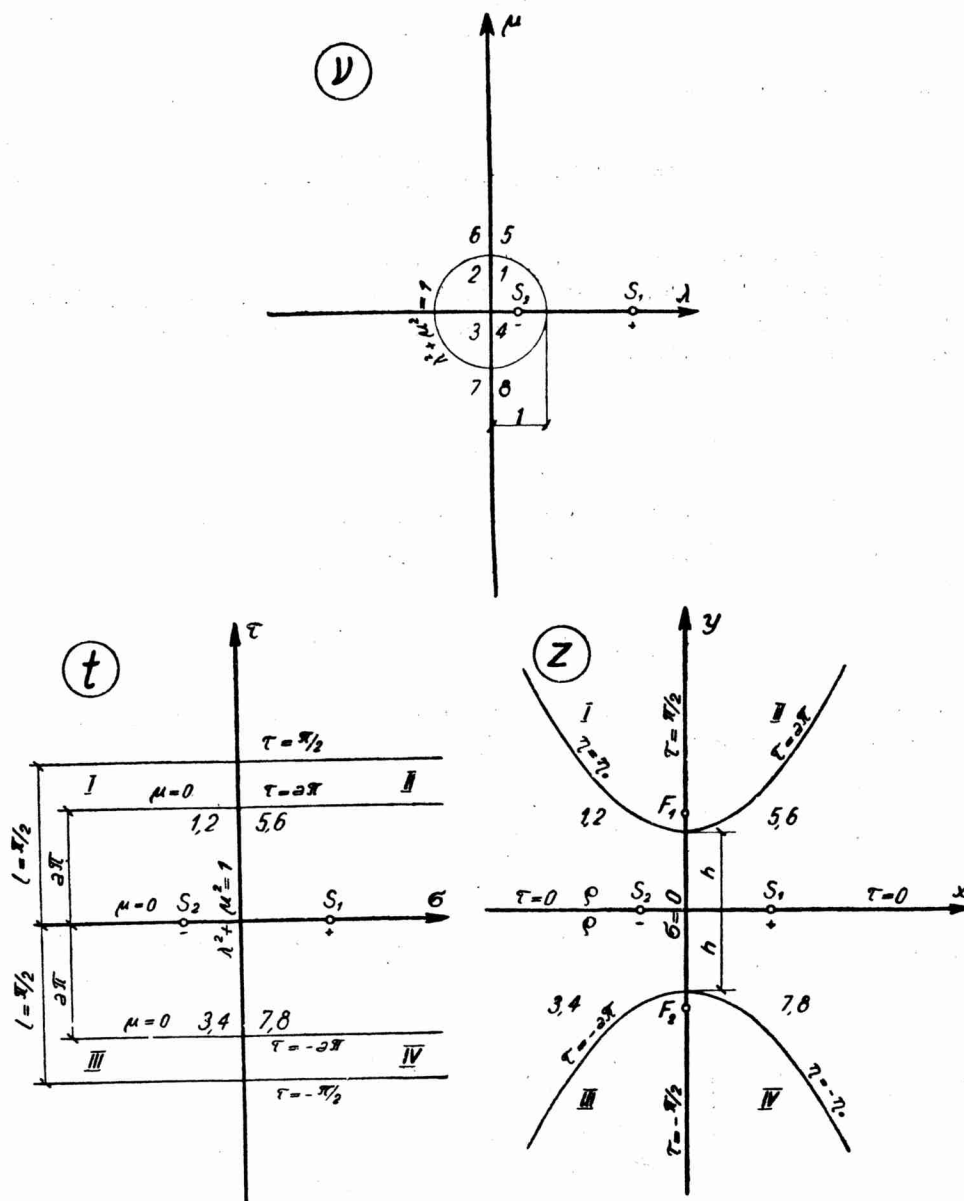
$$t = \sigma + i\tau = a \log v, \quad (2.2)$$

трансформише прво раван  $v$  у појас ширине  $2\pi a$ . Тиме се постиже да струјне линије теже да тангирају праве  $\pm \pi a$ , односно да се те праве понашају као границе једне средине бескрајно великог специфичног отпора. Остаје онда само да се те праве савију у хиперболу, а то је исти проблем који се постављао и у § 1. Према томе, функција

$$z = x + iy = c \sinh t \quad (2.3)$$

( $c$  — исто значење као и раније) ће преликати праве  $\pm \pi a$  на две гране једне хиперболе, и уопште појас ширине  $2l = \pi$  на целу раван

z. Кореспонденција између појединих делова помоћне равни ( $t$ ) и равни ( $z$ ) приказана је на сл. 3.



Сл. 3. Трансформација првобитне  $v$ -равни у раван хиперболе  $z$   
 Fig. 3. Transformation du plan primitif  $v$  dans le plan de l'hyperbole  $z$

Дакле, тражена трансформација може да се напише у облику  

$$z = c \sin \text{hyp} (\log v^a). \quad (2.4)$$



С друге стране инверзијом (2.1) се добија

$$v = \frac{v_2 e^{W/\kappa} - v_1}{e^{W/\kappa} - 1}; \quad (2.5)$$

замена (2.5) у (2.4) даје

$$z = c \operatorname{sin\,hyp} \left[ \log \left( \frac{v_2 e^{W/\kappa} - v_1}{e^{W/\kappa} - 1} \right)^a \right]. \quad (2.6)$$

И овога пута је нужно извршити прелаз на елиптичне координате; формуле трансформације су дате са (1.4), односно (1.5). Према томе, параметар  $\eta_0$  ће и овде бити дат са (1.6), док се вредност параметра ( $a$ ) одређује помоћу

$$a = \frac{\eta_0}{\pi}, \quad (2.7)$$

и с обзиром на интервал у коме варира  $\eta_0$  биће  $a \leq 1/2$ .

Ако је положај извора у равни хиперболе дат њиховом елиптичном координатом ( $\xi$ ) биће

$$v_1 = e^{\xi_1/a}; \quad v_2 = e^{\xi_2/a}. \quad (2.8)$$

Значи, имајући у виду (2.6), (2.7) и (2.8), може се писати израз за комплексни потенцијал у облику:

$$W = k \log \left( \frac{e^{\pi \xi_1/\eta_0} - e^{\pi \xi/\eta_0}}{e^{\pi \xi_2/\eta_0} - e^{\pi \xi/\eta_0}} \right). \quad (2.9)$$

После извесних прегруписавања и трансформисања израза (2.9) добија се коначно:

$$W = k \log \left[ e^{\frac{\pi(\xi_1 - \xi_2)}{\eta_0}} \sqrt{\frac{\cos \operatorname{hyp} \frac{\pi}{\eta_0} (\xi - \xi_1) - \cos \frac{\pi \cdot \eta}{\eta_0}}{\cos \operatorname{hyp} \frac{\pi}{\eta_0} (\xi - \xi_2) - \cos \frac{\pi \cdot \eta}{\eta_0}}} + \right. \\ \left. + ik \operatorname{arc\,tg} \left[ \frac{\sin \operatorname{hyp} \frac{\pi}{2\eta_0} (\xi_1 - \xi_2) \sin \frac{\pi \eta}{\eta_0}}{\cos \operatorname{hyp} \frac{\pi}{2\eta_0} (2\xi - \xi_1 - \xi_2) - \cos \operatorname{hyp} \frac{\pi}{2\eta_0} (\xi_1 - \xi_2) \cos \frac{\pi \cdot \eta}{\eta_0}} \right] \right]. \quad (2.10)$$

Реални и имагинарни део комплексног потенцијала (2.10) су већ раздвојени, те се одмах може писати израз за потенцијал за пуни простор

$$U = \frac{k}{2} \left\{ \frac{\pi}{\eta_0} (\xi_1 - \xi_2) + \log \left[ \frac{\cos \operatorname{hyp} \frac{\pi}{\eta_0} (\xi - \xi_1) - \cos \frac{\pi}{\eta_0} \cdot \eta}{\cos \operatorname{hyp} \frac{\pi}{\eta_0} (\xi - \xi_2) - \cos \frac{\pi}{\eta_0} \cdot \eta} \right] \right\}. \quad (2.11)$$

На површини земље, тј. за  $\eta=0$  и помножено са 2 (2.11) прелази у

$$U = k \left\{ \frac{\pi}{\eta_0} (\xi_1 - \xi_2) + 2 \log \left[ \frac{\sin \operatorname{hyp} \frac{\pi}{2\eta_0} (\xi - \xi_1)}{\sin \operatorname{hyp} \frac{\pi}{2\eta_0} (\xi - \xi_2)} \right] \right\}. \quad (2.12)$$

Коефицијент ( $k$ ) је и овде дат са (1.12).

Најзад, израз (2.12) у правоуглим координатама гласи

$$U = 2k \log \left[ \frac{(x + \sqrt{x^2 + c^2})^{\pi/\eta_0} - (x_1 + \sqrt{x_1^2 + c^2})^{\pi/\eta_0}}{(x + \sqrt{x^2 + c^2})^{\pi/\eta_0} - (x_2 + \sqrt{x_2^2 + c^2})^{\pi/\eta_0}} \right]. \quad (2.13)$$

Аутор се посебно обавезним да се на овом месту захвали професору Г. Émile-у Durand-у, Декану Faculté des Sciences у Тулузи за више веома драгоцених сугестија које су му учињене приликом израде овог рада.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Durand, E., *Electrostatique et magnéto-statique*, 1953, Paris, Masson et Cie.
- [2] Краев, А. П., *Основи геоелектрики I*, 1951, Москва — Ленинград, Государ. издат. техн.-теоритическој литератури.
- [3] Kunez, G., Chastanet de Géry, J., *Exemples d'application de la représentation conforme à l'interprétation du champ tellurique*, Communication présentée à la 3<sup>e</sup> réunion de l'E. A. E. G., Hanovre, décembre 1952.