Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie Vol. IX, 3–4 (1957) Beograd Yougoslavie

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С. Л. СОБОЛЕВ, МОСКВА – НОВОСИБИРСК

В коротком докладе трудно осветить все вопросы, касающиеся применения функциональных методов в теории уравнений в частных производных. Поэтому я ограничусь лишь некоторыми вопросами, которые мне кажутся, наиболее характерными, не претендуя на полноту.

Об' единяющей идеей для всех методов рассматриваемых ниже исторически служит идея обобщенных решений. В процессе изучения разнообразных задач на отыскание функций, удовлетворяющих некоторым уравнениям в частных производных, оказалось полезным использовать класс функций, не обладающих повсюду непрерывными производными нужного порядка, но являющихся в некотором смысле предельными для настоящих решений уравнений. Такие обобщенные решения ищутся, естественно, в различных функциональных пространствах, иногда полных, а иногда специально пополняемых при помощи введения новых „идеальных элементов".

От индивидуального решения наука перешла к изучению функциональных пространств, операторов в них и тех элементов, которые являются решениями.

Вопрос о том, когда эти обобщенные решения будут решениями в классическом смысле при таком рассмотрении становится отдельным от первого.

Я коснусь в своем докладе следующих четырех методов в теории уравнений в частных производных:

1. Вариационные методы.

2. Методы, связанные с различными понятиями предельного перехода, использующие полноту некоторых функциональных пространств ипонятие компактности.

3. Топологические методы, основанные на геометрических свойствах в целом различных функциональных пространств.

4. Методы, основанные на свойствах двойственных функциональных пространств.

Методы эти тесно связаны между собой. В этом смысле строго разделения их провести нельзя.

§1 Вариационные методы в уравнениях с частными производными

Вариационный метод в теории уравнений в частных производных может быть в основном сведен к двум задачам:

а). Краевая задача для уравнения в частных производных

$$\Phi u = 0 \tag{1}$$

в области Ω при условиях на границе области

$$qu/_{\Gamma} = 0 \tag{2}$$

(Левую часть уравнения (1) и условия (2), т. е. операторы Φ и q мы не считаем однородными) приводится к задаче об отыскании экстремума некоторого функционала

$$extr\ F(u) \tag{3}$$

определенного в соответствующем функциональном пространстве X. Уравнение Эйлера для функционала (3), вытекающее из равенства нулю первой его вариации и есть уравнение (1).

Граничные условия чаще всего изучаются двух видов: 1) Условия закрепления, требующее от решения, равно как и от всех допустимых к сравнению функций, выполнения некоторых неоднородных соотношений на границе. Эти условия суживают пространство, где ищется экстремум. 2) Условия,т. н. свободной вариации, вытекающне требования обращения в нуль граничной части вариации интеграла. Эти условия выделяют функцию, дающую экстремум, от других, которые могут быть допущены до сравнения.

б) Рассматривается задача о нахождении всех решений уравнения

$$Lu_i + \lambda_i u_i = 0 \tag{4}$$

с линейным однородным оператором L при однородных условиях

$$lu/_{\Gamma} = 0$$

вместе с задачей отыскания всех тех λ_i, для которых такое решение существует. Требуется, кроме того, установить ряд свойств, полученных решений: их ортогональность, полноту итд.

Эта вторая задача, следуя Куранту, решается при помощи сведения ее к последовательным задачам на условный экстремум функционала

$$F(u)$$

в пространстве X_i, при условии что другой функционал $P(u)$ сохраняет заданное значение.

Пространства X_i строятся с использованием уже найденных функций $u_1, u_2, \ldots u_{i-1}$. Уравнение (4) будет служить уравнениям Лагранжа для изучаемой задачи. Эти факты общеизвестны и нет надобности рассказывать их подробно. По отношению к вариационному методу мы остановимся лишь на двух новых вопросах.

1. В настоящее время, помимо изучения конкретных задач на экстремумы различных функционалов, рассматривается также общая схема решения вариационных задач и приведения краевых задач к вариационным. Частные задачи будут включаться в эту общую схему. Выясняется обширный класс случаев, в которых задача об отыскании решения некоторого уравнения в частных производных приводится к отысканию такого экстремума. Речь идет обычно об отыскании решения уравнения

$$Au=f \tag{1'}$$

для симметрического положительного $[(Au, u)>0]$ или положительного определенного: $(Au, u)>c(u, u)$ оператора A. Задача эта решается при помощи отыскания минимума функционала:

$$F(u)=(Au, u)-(u, f)-(f, u)$$

примерно в том же плане как и при непосредственном изучении (1'). Мы не будем говорить об этом более детально.

2. Выясняются более глубоко свойства функций, принадлежащих разным функциональным пространствам, возникающим в вариационных задачах.

В частности изучено какие значения эти функции могут и должны принимать на границах области существования. Поясним вначале эту мысль на простом примере задачи Дирихле.

Пусть ищутся решения уравнения

$$-\Delta u=f$$

с условием

$$u|_{\Gamma}=\varphi(Q; \quad Q \in \Gamma. \tag{8}$$

Как известно эта задача может быть исследована и решена при помощи минимизации интеграла

$$D(u)=\int\left[\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2-2uf\right]dx \tag{9}$$

среди функций, удовлетворяющих (8).

Иногда при этом вначале подстановкой $u=v+\varphi$ приводят условия (8) к однородным.

В том и другом случае встает вопрос о том, достигается ли минимум (9) на функциях, удовлетворяющих (8).

Может случиться: или, что ни для одной функции, удовлетворяющей этому условию, интеграл D не принимает конечного значения; или же еще, что нижняя грань интеграла D не достигается и последовательность u_k таких, что

$$\lim_{k \to \infty} D(u_k) = \inf D(u)$$

не имеет предельного элемента u, который удовлетворял бы поставленным условиям.

Это может случиться, если замыкание в соответствующей метрике, определяемой интегралом D, множества функций, удовлетворяющих (8) содержит функции этим условиям не удовлетворяющие.

В частности, замыкание в этой метрике множества финитных функций (функций равных нулю в приграничной полосе) вовсе не будет иметь в пределе равными нулю значения на границе производных любого порядка.

Ответ на вопрос о том, как ведет себя в самом деле на границе предельная в метрике интеграла Дирихле функция для последовательности функций финитных, дается при помощи, так называемых „теорем вложения" функциональных пространств.

Из них же вытекает новое понимание граничных условий. Следует отметить, что, как это будет видно из дальнейшего, приводимые ниже теоремы играют весьма важную роль и в методах, отличных от вариационных.

Назовем пространством $W_p^{(l)}$ ($p > 1$, $l \geqslant 0$ целое) пространство функций φ, заданных в области Ω n-мерного эвклидова пространства R_n, звездной относительно некоторого шара, с границей Γ и с нормой определяемой, например, формулой:

$$\|\varphi\|^p_{W_p^{(l)}} = \int |\varphi|^p \, d\Omega + \int \left[\sum_{|\alpha| = l} (D^\alpha \varphi)^2 \right]^{\frac{p}{2}} d\Omega \tag{10}$$

(обозначения призводных $D^\alpha \varphi$ взяты по Gårding'y).

Пространство $W_p^{(l)}$ не будет полным, если производные понимать в классическом смысле. Его можно сделать полным, рассмотрев, так называемые, обобщенные производные, или слабые производные: функции ψ_α, удовлетворяющие условиям:

$$\int \left(\varphi D^\alpha \omega + (-1)^{|\alpha|} \omega \psi_\alpha\right) d\Omega = 0 \tag{11}$$

с любыми финитными ω.

Положим

$$D^\alpha \varphi = \psi_\alpha \tag{12}$$

Такую $D^\alpha \varphi$ мы будем называть обобщенной производной. Можно доказать, что введенный оператор обобщенной производной для функции из $W_p^{(l)}$ является сильным замыканием оператора обычного дифференцирования в пространстве L_p функций суммируемых с p-ой степенью модуля и с нормой:

$$\|D^\alpha \varphi\|_{L_p}^p = \int |D^\alpha \varphi|^p \, d\Omega. \tag{13}$$

Для существования обобщенной производной, вообще говоря, не требуется непрерывности функции, так как ее значения на множестве точек меры нуль могут не приниматься во внимание. (Норма $W_p^{(l)}$ даваемая формулой (10), как можно легко установить, может быть в ряде случаев заменена другими, иногда, более удобными эквивалентными нормами, но на этом мы останавливаться не будем).

Определение $W_p^{(l)}$ дано таким образом для целых l. Для l дробных существует интересное обобщение С. М. Никольского и его учеников: мы для простоты ограничимся здесь целыми l.

Укажем четыре теоремы: Теоремы вложения:

Теорема I. Всякий элемент $\varphi(Q) \in W_p^{(l)}$ при $lp > n$ есть функция точки Q, непрерывная вплоть до границы (или может быть сделана непрерывной, если изменить ее значение на некотором множестве точек меры нуль). Справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_C \leqslant K \|\varphi\|_{W_p^{(l)}} \tag{14}$$

где K некоторая постоянная. Доказательство этой теоремы мы, по понятным причинам, не будем приводить в кратком докладе.

Назовем оператором вложения оператор, который приводит каждой функции φ из $W_p^{(l)}$ эту же функцию φ рассматриваемую как элемент более широкого пространства C. Это не тождественный оператор, ибо он действует из $W_p^{(l)}$ в C. Неравенство (14) говорит о том, что оператор вложения сохраняет топологию.

Из сходимости φ_k в $W_p^{(l)}$ следует и сходимость в C.

Теорема II. Оператор вложения из $W_p^{(l)}$ в C при $lp > n$ является вполне непрерывным, т. е. приводит в соответствие всякому ограниченному в $W_p^{(l)}$ множеству, множество компактное в C. Справедливо неравенство:

$$\|\varphi(P + \Delta P) - \varphi(P)\|_C \leqslant K \|\varphi\|_{W_p^{(l)}} \eta(\Delta P) \tag{15}$$

где $\eta(\Delta P)$ стремится к нулю при $|\Delta P| \to 0$.

Теорема III. Всякий элемент φ пространства $W_p^{(l)}$ при $lp > n$ имеет определенный смысл на любом достаточно гладком (например, аналитическом) многообразии Σ размерности s, где

$$n - lp < s \leqslant n \tag{16}$$

и является там элементом пространства L_q, где:

$$\frac{s}{q} = \frac{n}{p} - l. \tag{17}$$

Иначе говоря, это значит, что изменив, если понадобится раз навсегда значения φ на множестве точек меры нуль, мы можем ее превратить в такую, для которой не существует особенностей с носителями размерности выше $n - lp$.

Справедливо неравенство

$$\| \varphi \|_{L_q(\Sigma)} \leqslant K \| \varphi \|_{W_p^{(l)}}. \tag{18}$$

Теорема является содержательной и для многообразия размерности n, где она утверждает суммируемость φ с более высокой степенью нежели p.

Применяя теорему к производнным от φ порядка r ниже l, получим их принадлежность к $L_q(\Sigma)$, где

$$\frac{s}{q} = \frac{n}{p} - (l - r). \tag{19}$$

Из (18) следует, что оператор вложения сохраняет топологию: сходимость в $W_p^{(l)}$ влечет за собой сходимость в L_q. Полезно заметить, что если $q^* < q$, то $L_{q^*} \subset L_q$ причем вложение также сохранает топологию.

Таким образом, теорема III устанавливает вложение $W_p^{(l)}$ не только в $L_q(\Sigma)$, но и в $L_{q^*}(\Sigma)$ для всякого $q^* < q$

Теорема IV (Кондрашова):

Оператор вложения $W_p^{(l)}$ в L_{q^*} есть оператор вполне непрерывный, т. е. переводит любое ограниченное множество в компактное. Справедливо неравенство

$$\| \varphi(P + \Delta P) - \varphi(P) \|_{L_{q^*}} \leqslant K \| \varphi \|_{W_p^{(l)}} \eta(\Delta P) \tag{20}$$

где $\eta(\Delta P) \to 0$ при $(\Delta P) \to 0$.
(Как недавно установил В. М. Бабич, оператор вложения из $W_p^{(l)}$ в L_q не является вполне непрерывным).

В применении к вариационным задачам из теорем вложения вытекает ряд следствий.

Уже на примере задачи Дирихле видно, что для всякой функции, имеющей конечный интеграл Дирихле, т. е. принадлежащей $W_2^{(1)}$, имеют смысл ее значения на любых многообразиях измерения s, где $n - 2 < s \leqslant n$, т. е. на многообразиях размерностей n и $n - 1$.

Таким образом, постановка краевой задачи Дирихле оказывается имеющей смысл и, к тому же, имеющий смысл всегда для всех решений из $W_2'^{(1)}$. Эти значения, однако, могут не быть непрерывными функциями точки этого многообразия.

Теоремы III и IV устанавливают и характер стремления функции к своим граничным значениям. Такое стремление, как оказывается, справедливо в метрике L_{q^*}

$$q^* < q \quad ; \quad \frac{n-1}{q} = \frac{n}{2} - 1$$

т. е. при

$$q^* < \frac{2(n-1)}{n-2},$$

если рассматривать значения, принимаемые функцией на близких поверхностях, как элементы того же L_q*. Полная непрерывность оператора вложения устанавливает и тот факт, что в замыкании множества финитных функций φ однородные краевые значения для тех производных, которые участвуют в задаче, в самом деле сохраняются при предельном переходе. Остановимся еще на одном следствии:

Вариационную задачу, а следовательно и уравнение в частных производных, можно рассматривать в областях, граница которых не целиком $n-1$ мерна, а содержит куски других измерений.

Пусть Γ состоит из $\Gamma_{n-1}, \ldots, \Gamma_{n-x}, \ldots, \Gamma_0$.

Изучая функционал $F(u)$ соответствующий нелинейным задачам или задачам с уравнениями высшего порядка, мы подчас можем из существования функционала $F(u)$ заключить о его принадлежности пространствам $W_p^{(l)}$ таким, что $n-lp < n-2$ и оценить норму и в таком $W_p^{(l)}$.

В этих случаях, например, функцию реализующую экстремум можно подчинить еще условиям на Γ_{n-2} итд.

$$u\Big|_{\Gamma_{n-2}} = \varphi_1, \ldots, u\Big|_{\Gamma_{n-s}} = \varphi_{s-1}, \ldots, D^\alpha u\Big|_{\Gamma_{n-l}} = \varphi^{\alpha}_{l-1}$$

задавая, вообще говоря, несколько производных от u на многообразиях низших размерностей. Такие условия сохраняются при предельном переходе от минимизируюшей последовательности к предельны́м функциям. Их существование и компактность соответствующих производных обеспечивается теоремами вложения. Предельная функция для такой минимизирующей последовательности, в самом деле, будет принимать эти предельные значения.

Так, в бигармоническом уравнении $\Delta^2 u = 0$ при $n=3$ можно задать предельные значения неизвестной функций u на двумерных, одномерных и нульмерных частях границы, а градиент u — на двумерных частях.

Напомним, что, например при нахождении решения уравнения Лапласа, хотя мы и могли бы поставить те же условия на минимизирующую последовательность, в предельной функции все условия, лишние по сравнению с обычной задачей Дирихле, пропадут.

Таким образом, развитые методы позволяют установить, что полученные при решении вариационной задачи функции не только дают экстремум интеграла, но и фактически удовлетворяют дифференциальному уравнению Эйлера. Аналогичным способом удается установить и единственность решения уравнения Эйлера при рассматриваемых краевых условиях.

С этой целью доказывается, что всякая функция η, удовлетворяющая фактически всем поставленным краевым условиям с нулевой правой частью, служит слабым пределом для допустимых вариаций и, значит, для нее верно обычное интегральное тождество для вариаций. При этом функция $u+\eta$ оказывается принадлежащей к классу допустимых функций. Из единственности минимума при этом вытекает единственность решения соответствующих уравнений.

Несколько отлично вариационное рассмотрение задач, связанных со свободной вариацией, к числу которых относятся, например, задачи Неймана и третья краевая задача для уравнения Лапласа, т. е. задача нахождения решения уравнения

$$\Delta u = f$$

при условиях:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + nu = \varphi. \qquad (*)$$

Эта задача приводится, как известно, к задаче о минимуме интеграла

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega + 2 \int\limits_{\Gamma} nu^2 \, d\Gamma = F(u)$$

в классе произвольных функций (свободная вариация).

Здесь для функции можно говорить не о сильном, а лишь о слабом удовлетворении условиям (*). Исследования того, когда из такого „обобщенного" удовлетворения (*) следует справедливость этих условий в сильном смысле является дополнительным вопросом, которого мы здесь касаться не будем.

Как мы увидим ниже, такого же рода разница в характере выполнения граничных условий возникает и в ряде других функциональных методов.

Вне нашего обзора остались вопросы теории нелинейных вариационных задач и соответствующих задач о собственных функциях.

§2 Использование предельного перехода в функциональном пространстве

Схему рассмотрений указанного вида проще всего пояснить на теории уравнений в частных производных гиперболического типа. Она одинакова и для задачи Коши и для смешанных задач. Пусть нам дано, например, уравнение

$$Lu = f \tag{23}$$

с начальными условиями:

$$\left\{ u, \frac{\partial u}{\partial t} \right\} \Bigg|_{t=0} = \{u_0, u_1\}$$

и пусть плоскость $t=0$, несущая начальные данные, является пространственной.

Будем рассматривать начальные данные, как элемент некоторого топологического пространства, например:

$$\{u_0, u_1\} \in \{W_2^{(1)} \times L_2\}.$$

При помощи, так называемых энергетических неравенств можно установить, что при некотором ограничении на коэффициенты для любых два раза непрерывно дифференцируемых функций v справедливых оценки:

$$\| v|_{t=T} \|^2_{W_2^{(1)}(\Omega(T),n)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=T} \right\|^2_{L_2(\Omega(T),n)} \leqslant$$

$$\leqslant K \left[\| v|_{t=0} \|^2_{W_2^{(1)}(\Omega(0),n)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} \right\|^2_{L_2(\Omega(0),n)} + \int_0^T \| L v \|^2_{L_2(\Omega(t),n)} dt \right] \tag{26}$$

где $\| \ldots \|_{W_2^{(1)}(\Omega,n)}$ обозначает норму в области Ω n-мерной плоскости $t = \text{const}$ и $\Omega(t)$ - переменная область сечения некоторого об'ема этой плоскостью.

Об'ем должен быть выбран убывающим быстрее, чем со скоростью волн.

Пусть еще нам удалось установить каким-нибудь способом разрешимость задачи Коши при достаточно гладких условиях

$$\{u_0^{(m)}, \quad u_1^{(m)}\} \tag{27}$$

образующих в $W_2^{(1)}(n) \times L_2(n)$ плотное множество и достаточно гладких F.

Из неравенства (26) легко заключить, что норма $\left\| \left\{ u^{(m)}(t), \frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} \right\} \right\|$ решения задачи в той же метрике будет сколь угодно мала при малой норме $u_0^{(m)}, u_1^{(m)}$ и F.

Это позволяет установить, что последовательность функций будет фундаментальной последовательностью при любых t и будет при

$k \to \infty$, в силу полноты пространств $W_2^{(1)}$ и L_2, равномерно сходиться к некоторой непрерывно зависящей от t траектории в пространстве $\{W_2^{(1)}(n) \times L_2(n)\}$. Эта траектория и рассматривается как обобщенное решение задачи. Таким образом, схема решения задачи такова: Методами анализа доказывается существование решения для некоторого множества начальных условий плотного в пространстве Банаха E. Дополнительно устанавливается непрерывная зависимость решения от начальных и краевых условий. При этом из полноты рассматриваемых пространств вытекает необходимость существования решения при любых условиях из E.

Рассуждения подобного характера могут быть перенесены и на уравнения нелинейные.

Рассмотрим, например, задачу Коши для квазилинейного уравнения в частных производных вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \sum_{i,j} A_{ij}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \tag{28}$$

(к такому виду можно привести любое нелинейное уравнение при помощи дифференцирования). Пусть

$$\left\{u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\}\Bigg|_{t=0} = \{\varphi_0, \varphi_1\}. \tag{29}$$

Подставим в коэффициенты этого уравнения и свободный член F вместо u и $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ некоторую заданную функцию v и $\frac{\partial v}{\partial x_k}$. Тогда задача превратится в линейную.

Обозначим через $\tilde{A}_{ij}(x)$, $\tilde{F}(x)$ результат такой подстановки.

Теоремы вложения позволяют оценить норму функции u в пространствах $W_p^{(l)}$, где $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{k-l}{n}$ через норму в пространстве $W_2^{(k)}$.

В силу этого оказывается возможным построить класс сложных функций многих переменных $\Phi\left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ инвариантных по отношению к подстановкам вместо v функций того же класса. Таким классом является класс функций, непрерывно зависящих от v с достаточным количеством производных а по x принадлежащий $W_2^{(k)}$, где $k = \left[\frac{n}{2}\right] + 2$.

В этом классе нормы Φ оцениваются через нормы v. Применяя эти соображения мы получаем серию оценок коэфициентов A_{ij} и F:

$$\| A_{ij} \|_{W_p^{(l)}} \leqslant | \Phi(\| v \|_{W_2^{(k)}}) |$$

в разных нормах через нормы v.

С другой стороны, обычная техника энергетических неравенств в сочетании с теоремами вложения дает возможность оценить нормы решения линейного уравнения через коэффициенты. Получаем систему неравенств

$$\| u \|_{W_2^{(k)}} \leqslant \psi \left(\| A_{ij} \|_{W_p^{(l)}};\ \| u|_{t=0} \|_{W_2^{(1)}};\ \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=} \Big\|_{L_2} \right).$$

Полученные две системы неравенств при помощи, например, метода запаздывающего аргумента, т. е. соотношений

$$v(x, t) = u(x, t - \eta)$$

или метода Шаудера-Лерэя, о котором будет речь идти ниже, позволяют установить существование и единственность решений уравнения (28) в тех же условиях (существование производных до порядка $\left[\frac{n}{2}\right] + 3$ от начальных данных), что и для уравнений линейных. (Разумеется, речь идет о решениях в малом).

§3 Топологические методы, основанные на геометрических свойствах в целом об'ектов функциональных пространств.

Вариационный метод послужил отправным пунктом в выработке точки зрения, при которой левая часть дифференциального уравнения рассматривается как оператор, ставящий в соответствие функции u — элементу некоторого пространства, фукцию $Au = f$ элемент другого (вообще говоря, отличного от первого) пространства.

Вскоре выяснилось, что целый ряд задач приводит к исследованию уравнения, которое, будучи записано в операторной форме, имеет вид:

$$\lambda A f = f. \tag{30}$$

В этом случае естественно рассматривать оператор как определяющий отображение некоторого пространства K в себя. Вопрос о разрешимости (30) сводится к вопросу существования неподвижной точки соответствующего отображения. Когда A — линейный оператор, изучение свойств (30) в зависимости от λ является предметом классической спектральной теории, на чем мы не будем останавливаться. Нас интересует случай $\lambda = 1$.

Чрезвычайно общий критерий разрешимости уравнения

$$A\varphi = \varphi \tag{31}$$

дает т. н. принцип сжатых отображений:

Если A действует в шаре T полного метрического пространства, преобразуя этот шар в себя, причем

$$\| A\varphi_1 - A\varphi_2 \| \leqslant \alpha \| \varphi_1 - \varphi_2 \|, \qquad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

то уравнение (31) имеет единственное решение.

Общеизвестное доказательство этого утверждения не предполагает линейности ни у A, ни у исходного пространства K. Сам принцип служит общей основой метода последовательных приближений.

Родственный, но во многих отношения более богатый критерий разрешимости (30) связан с комбинаторной (мы называем ее так в отличие от чисто метрической) топологией основного пространства K, предполагаемого в этом случае банаховым.

Напомним некоторые определения. Если в единичном шаре T конечно-мерного эвклидова пространства действует оператор A, то на T можно рассмотреть векторное поле: каждой точке $x \in T$ сопоставляется вектор (точка) Ax. Степень отображения

$$Px = \frac{Ax}{\| Ax \|}$$

границы шара S на себя называется вращением векторного поля на S. Если поле на S не содержит нулевых векторов и вращение его $\neq 0$, то поле внутри T имеет неподвижные точки. Для произвольного непрерывного отображения в банаховом пространстве понятие степени отображения пока не определено. Но для отображения вида $E - A$, где A — вполне непрерывный, E — единичный операторы и соответствующего векторного поля можно определить понятие вращения за счет аппроксимации A и образа границы AS конечномерными об'ектами.

Это позволяет сформулировать т. н. принцип Лерэя — Шаудера:

Если A вполне непрерывный оператор, определенный за замкнутом шаре T банахова пространства, $AS \subset T$ и поле $E - A$ не имеет на S нулевых векторов, то внутри T существует, по крайней мере одна, неподвижная точка этого поля.

Сформулированный принцип также не предполагает линейности оператора A. Приведем некоторые примеры его использования, оставив в стороне применение, ставшее классическими, к нелинейным интегральным уравнениям.

Рассмотрим уравнение

$$Au = f \tag{32}$$

в котором A — дифференциальный оператор, с коэффициентами зависящими от неизвестной функции u. Задавшись некоторой функцией v, подставив ее вместо u в коэффициенты A и решив полученное линейное уравнение $A(v)u=f$, можем рассматривать полученное решение как результат применения к v (элементу Банахова пространства) некоторого оператора $B: Bv=u$. Если для преобразования $B-E$ существует неподвижная точка (нулевой вектор), то обеспечено существование решения уравнения (32). Существование неподвижной точки гарантировано, если B непрерывен и отображает некоторое выпуклое множество Банахова пространства в его компактную часть. Таким образом Роте исследовал некоторые нелинейные параболические уравнения.

Намеченные выше топологические методы разработаны пока недостаточно, но перспективы их применения являются, повидимому многообещающими.

§4 Методы, основанные на свойствах двойственных функциональных пространств

Приведем схему использования методов, основанных на фундаментальной идее функционального анализа — идее сопряженных пространств и сопряженных операторов.

Дифференциальный оператор определяется, обычно, на множестве гладких функций, имеющих достаточно непрерывных производных и равных нулю в некотором приграничном слое. С функционалной точки зрения задача нахождения решений уравнений в частных производных состоит в нахождении таких пар функциональных пространств X (в котором расположена область определения оператора L) и Y (в котором лежит область значений L) и такого расширения $\tilde{L}$ оператора L, которое будет иметь ограниченный обратный с областью значений $R_{\tilde{L}}=Y$.

Ниже мы укажем ряд приемов для решения этой задачи, разработанных в литературе и основанных на нескольких простейших идеях.

В приложениях бывает удобно строить расширения оператора L рассматривая его как M^*, т. е. как сопряженный к другому оператору M, или как произведение M^* на какие-либо другие операторы.

Как известно, сопряженный оператор строится в сопряженном функциональном пространстве.

Пусть L действует из X в Y

$$x \in X \quad , \quad Lx = y \in Y$$

и определен на множестве $\Omega_L \subset X$. Область значений $R_L \subset Y$.

Сопряженный оператор будет определен на множестве $\Omega_{L^*} \subset Y^*$ (причем $R_{L^*} \subset X^*$) формулой

$$(Lx, \eta) = (x, \xi) = (x, L^*\eta). \tag{33}$$

Рассматривая заданное пространство X или Y мы получаем сопряженное пространство X^* или Y^* чисто абстрактно.

Однако в приложениях необходима конкретная его реализация, которая может быть, вообще говоря, осуществлена самым различным образом. Если при этом исходить, например, из представления всюду плотного в X множества функционалов в виде интеграла

$$(v, u) = \int v u \, d\Omega, \tag{34}$$

то получится классическое определение сопряженных операторов.

При других определениях результат может оказаться другим.

Поясним сказанное на примере пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ функций из $W_2^{(1)}$ равных нулю на границе Γ области Ω.

По определению нормой будет в этом пространстве

$$\|u\|^2_{W_2^{(1)}} = \int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega. \tag{35}$$

Как мы уже отмечали, сопряженное пространство, построенное абстрактно, вообще говоря, не будет пространством функций или обобщенных функций. Однако возможны его изоформные реализации при помощи различных приемов.

Рассмотрим в качестве примера два из них:

Пример первый:

Рассматриваются всевозможные интегралы вида

$$\{u, v\} = \int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega \tag{36}$$

где v — непрерывно дифференцируемая функция. Функционалам в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ будут отвечать такие скалярные произведения. Мы получаем гильбертово пространство K_1. Общий вид линейного функционала в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ будет (36), где $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$.

Прием второй:

Рассматриваются интегралы

$$(u, v) = \int_\Omega u v \, d\Omega \tag{37}$$

с гладкими функциями v. Любым таким v будут соответствовать функционалы. Замыкая далее в метрике сопряженной к $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ это многообразие функций, мы придем к идеальнным элементам, принадлежащим к некоторому классу обобщенных функций. Назовем это пространство $W_2^{(-1)}$, например, при первом способе изоморфной реализации.

Функциа

$$v_1 = \begin{cases} ln \dfrac{4\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2\right]}{(x-2)^2+y^2}; & x>0 \\ ln \dfrac{4\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2\right]}{(x+2)^2+y^2}; & x<0 \end{cases} \tag{38}$$

будет давать тот же функционал, что обобщения функции

$$v_2 = \delta(x)\left[\frac{8}{y^2+4} - \frac{2}{y^2+\frac{1}{4}}\right] \tag{39}$$

при втором способе реализации.

Назовем оператор, приводящий в соответствие каждому элементу v из одной реализации абстрактного пространства сопряженного к $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ соответствующий элемент из другой его реализации, оператором изоморфной перереализации.

Оператор T_0, превращающий v, соответствующиее первой из указанных выше двух реализаций, в соответствующий элемент второй реализации, в данном случае будет на гладких функциях совпадать с оператором Лапласа.

В самом деле, для таких функций справедливо соотношение:

$$\int\limits_{\Omega} \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} d\,\Omega = \int\limits_{\Omega} u v_2\, d\,\Omega \tag{40}$$

верное для любых функций u из $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$.

Интегрируя по частям выражение слева, получим очевидно

$$\int\limits_{\Omega} u\,(\Delta v_1 - v_2)\, d\Omega = 0.$$

Откуда и следует наше утверждение.

Отсюда между прочим вытекает, что оператор изоморфной перереализации даст решение краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f \tag{42}$$

где f обобщенная функция принадлежащая $W_2^{(-1)}$.

Действительно, пусть требуется найти решения уравнения (42) из $W_2^{(1)}$, обращающееся в нуль на границе Γ области Ω.

Как мы видим, ответ на поставленный вопрос дает оператор изоморфной перереализации: $u = T_0^{-1} f$. (43)

Идея использования различных реализаций введена и систематически развита Вишиком, Гордингом, Лионсом, Браудером и др.

В случае, когда реализация X^* и Y^* уже выбрана, мы получаем постановку краевой задачи теории уравнений в частных производных. Как мы отмечали, часто при этом решение уравнений сводится к отысканию обратного оператора для L^*. При этом важную роль играет вопрос об области значений L^*. Для ограниченного L областью определения сопряженного оператора будет всё Y^*. Пусть множество $V \subset X$ есть прообраз нуля в операторе L, т. е. $Lx=0$ равносильно $x \in V$.

Рассмотрим еще множество $R_{L^*} \subset X^*$. Тогда:

1) Эти множества ортогональны. Из $x \in V$, $\xi \in R_{L^*}$ следует

$$(x, \xi) = 0.$$

Аналогично, если $V^* \subset Y^*$ есть прообраз нуля для L^*, а R_L область значений оператора L, имеем

2) Из $y \in R_L$, $\eta \in V^*$ следует

$$(y, \eta) = 0.$$

Справедливы еще следующие утверждения.

3) Если $(x, \xi) = 0$ для всех $\xi \in R_{L^*}$ и область определения Ω_{L^*} плотна в Y^*, то $x \in V$; иными словами, прообраз нуля для L состоит из тех x из Ω_L, которые ортогональны к области значений R_{L^*}.

4) Если $(y, \eta) = 0$ для всех $y \in R_L$, тогда $\eta \in V^*$. Иными словами прообраз нуля для L^* состоит из тех η, которые ортогональны к области значений R_L.

Вообще говоря, область значений оператора L может и не совпадать с множеством V тех элементов Y, которые ортогональны к V^*: $R_L \subset V$. Вообще говоря, и R_{L^*} область значений L^* не совпадает с множеством V^* всех ортогональных к V элементов: $R_{L^*} \subset V$.

Сопряженный оператор L^* всегда бывает замкнутым и, если для него удается установить неравенство:

$$\| L^* \eta \|_{X^*} \geqslant C \| \eta \|_{Y^*},$$

то область значений L^* будет замкнутым множеством, ибо из сходимости $L^* \eta_k$ будет следовать сходимость η_k.

Если R_{L^*} обладает тем свойством, что ортогональное к нему множество $R_{L^*}^1$ из X пусто, то множество R_{L^*} называется полным. При выполнении обоих этих условий, обеспечивающих замкнутость и полноту R_{L^*} существование ограниченного L^{*-1} обеспечено.

Остановимся на одном важном способе решения краевых задач теории уравнений в частных производных. Иногда можно для оператора L, заданного на плотном множестве Ω_L в пространстве E рассмотреть Lu как элемент пространства E^*, т. е. считать, что $R_L \subset E^*$.

Это позволяет изучить скалярное произведение

$$(Lu, u).$$

Предположим, что оно всегда положительно для неравных нулю u:

$$(L u, u) > 0 \text{ при } u \neq 0. \tag{44}$$

Так будет, например, с оператором Лапласа $Lu = -\Delta u$ ибо

$$(-\Delta u, u) = \int \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \geqslant 0.$$

Отметим, что (44) означает, что прообраз нуля для L всегда есть нуль. Можно принять (Lu, u) за норму некоторого гильбертова пространства H:

$$(L u, u) = \| u \|^2_H = \{u, u\}. \tag{45}$$

Скалярное произведение в этом пространстве будет иметь вид

$$\{u, v\} = \left\{\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2}\right\} - \left\{\frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2}\right\} = \frac{1}{2}[(L u, v) + (Lv, u)].$$

В симметрическом случае

$$(L u, v) = (L v, u) = \{u, v\}.$$

Допустим еще, что замыкание множества Ω_L по норме H лежит в E

$$H \subset E.$$

Каждой функции $v \in H$ однозначно сопоставляется соотношением $v \in E$ она же сама, как элемент пространства E. Обозначим этот оператор вложения через S (Это вложение может быть просто перереализацией).

Построим сопряженный оператор S^*.

По определению сопряженного оператора он будет определен на E^* и область его значений будет лежать в H. Мы будем иметь, полагая $f \in E^*$,

$$(S v, f) = \{v, S^* f\}. \tag{46}$$

Можно установить, что оператор S^* будет представлять собой расширение обратного оператора L^{-1} на пространство E^*. В самом деле, пусть $f = L u$. Тогда

$$(S v, f) = (S v, L u) = \{v, u\} \tag{47}$$

из сопоставления (46), (47) и вытекает что $L^{-1} f = S^* f$ или $u = S^* f$.

Свойства сопряженных операторов доказывают его ограниченность и замкнутость. Тем путем, который только что изложен, были исследованы, наряду с классическими задачами, еще и ряд новых. Заслуга его разработки принадлежит Фридрихсу и Вишику.

Подобным же путем решается задача о минимуме квадратичного функционала (Михлин).

Метод сопраженных операторов совместно с идеей вложения функциональных пространств рассмотренный нами выше, развит и в случаях когда Lu не является симметрическим. При его помощи был получен весьма общего характера результат, касающийся эллиптических задач. Пусть опять метрика в гильбертовом пространстве определяется соотношением:

$$\|u\|^2_H = (L\,u, u) \geqslant 0. \tag{48}$$

Пространство H полагаем лежащим в E

$$H \subset E. \tag{49}$$

Рассмотрим оператор вложения S из H в E и пусть функционал x над $v \in H$ определяется формулой

$$\{x, v\} = (L\,u, S\,v)$$

где $L\,u$ элемент E^*. Таким образом

$$x = S^*\,L\,u.$$

Полагая, что u_1 некоторый элемент H, а $S\,u_1 = u$ мы получим для x выражение

$$x = S^*\,L\,S\,u_1 = \tilde{L}\,u_1,$$

где $\tilde{L} = S^*\,L\,S$.

$\tilde{L}$ — оператор действующий в H со значениями в H.

В симметрическом случае оператор $\tilde{L}$ совпадал с тождественным оператором. Действительно

$$\{\tilde{L}\,u, v\} = (L\,S\,u, S\,v) = \{u, v\}.$$

Теперь, вообще говоря, это будет не так.
Отметим некоторые его свойства. Имеем

$$\{\tilde{L}\,u, u\} = \{S^*\,L\,S\,u, u\} = (L\,S\,u, Su) = \{u, u\}.$$

Отсюда следует, что обратный к $\tilde{L}$ оператор $\tilde{L}^{-1}$ будет однозначным и ограниченным, и сам $\tilde{L}$ допускает замыкание $\tilde{\tilde{L}}$.

Для применений наиболее важным является случай, когда область значений $\tilde{\tilde{L}}$ есть всё пространство H.

$$\Omega_{\tilde{\tilde{L}}} = H. \tag{60}$$

Условие (60) выполнено, например, в случае, если оператор $\tilde{L}$ ограничен в H, ибо тогда он представлен в виде.

$$\tilde{L} = J + \mathcal{K}$$

где J - тождественный оператор, а $\mathcal{K}$ — кососимметрический ограниченный.

Пусть теперь выполнены условия (48), (49) и (60). Тогда уравнение:

$$(h, S\,v) = \{\tilde{\tilde{L}}\,u, v\} \tag{62}$$

получаемое из тождества

$$(Lu, Sv) = \{\bar{\bar{L}} u, v\}$$

всегда имеет решение:

Действительно, преобразуя левую часть (62), получим:

$$(h, Sv) = \{S^* h, v\} = \{\bar{\bar{L}} \bar{\bar{L}}^{-1} S^* h, v\}$$

и, следовательно,

$$u = \bar{\bar{L}} S^* h. \tag{64}$$

Будем называть решение (64) обобщенным решением задачи.

Оператор

$$S^{-1} \bar{\bar{L}} u = h$$

является расширением оператора L. Назовем его L_1. Область значений L_1, заполняет всё E^*. Оператор L_1^{-1} непрерывен. Если E^* — пространство Банаха, то

$$\|u\|_H \leqslant c \|h\|_E.$$

Если пространство E может быть сужено до E_1 так, чтобы оставалось

$$H \subset E_1 \subset E,$$

то, очевидно, оператор L_1^{-1} может быть распространен и на E_1^*.

В общей логической схеме, развернутой нами, влияние граничных условий скрыто в условии (49), состоящем во вложимости H вместе со своей метрикой в пространство E. Условие (49) означает, что сходимость в H влечет автоматически сходимость в E, а вытекающее из этого соотношение $E^* \subset H$ говорит о том, что все граничные условия, обеспечиваемые метрикой H, сохраняются в E^*. В частности, это значит, что обращение в нуль на некоторых многообразиях размерностей $n-1$, $n-2$, ..., гарантированное в H в силу теорем вложения, сохраняется и в E^*. Таким образом, теоремы вложения функциональных пространств дают нам возможность провести исследование первой основной краевой задачи для эллиптических дифференциальных операторов.

Для второй и третьей краевых задач ситуация будет аналогичной.

Помимо новых подходов к решению задач классических в теории эллиптических уравнений функциональными методами позволившими полно и широко разработать теорию этих задач, были добыты и принципиально новые факты. К их числу относятся, например, теория сильно эллиптических систем уравнений Вишика, обобщенная затем Ниренбергом.

Сильно эллиптической в точке x_0 называется система вида:

$$L u = \sum_{|i|,\,|j| \leqslant m} \overline{D}^j A^{ij}(x) D^i u = h$$

$$D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}\,; \quad i_1 + \ldots + i_n = |i|\,; \quad \overline{D}^j = (-1)^{|j|} D^j$$

где $A^{ij}(x)$ матрица порядка N, коэффициенты которой удовлетворяют условию:

$$\Big(\sum_{|i|,\,|j| \leqslant m} A^{ij}(x_0)\, \xi_1^{i_1} \ldots \xi_n^{i_n}\, \xi_1^{j_1} \ldots \xi_n^{j_n}\, \overline{\zeta}, \zeta \Big) > 0$$

для любого вектора $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N) \neq 0$ и любых ξ_i

$$\sum_i \xi_i^2 \neq 0.$$

Для сильно эллиптических систем оператор Lu имеет квадратичную форму положительно определенную на функциях, удовлетворяющих однородным условиям на границе.

При достаточно малых размерах области (или в случае постоянных коэффициентов при любых размерах области)

$$(L u, u) \geqslant K^2 \|u\|_{W_2^{(m)}}.$$

Далее доказательство существования решения первой краевой задачи для сильно эллиптических систем в существенном не отличается от изложенного выше. При области любых размеров, как показали Гординг и Браудер, добавляя постоянный оператор u можно установить, что

$$((L + M)\, u, u) \geqslant c^2 \|u\|^2_{W_2^{(m)}}.$$

В этом случае вместо существования и единственности устанавливается Фредгольмовость рассматриваемой задачи.

Второй результат заслуживающий внимания — это теория задач с уравнением, сохраняющим свой тип лишь в любой внутренней области (не вплоть до границ). Пусть в уравнении

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

коэффициенты a_{ij} удовлетворяют условиям

$$\sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j > x_n^{\alpha} \xi_n^2 \;; \quad c_1^2 x_n^2 \leqslant a_{nn} \leqslant c^2 x_n^2 \;.$$

в области $x_n > 0$. Во всех внутренних точках будем считать уравнение эллиптическим. Будем еще считать $b_n > 0$ для $x_n = 0$. Методом барьеров эти задачи рассматривались ранее Келдышем и Олейник.

При исследовании этих задач теоремы вложения, в том виде, как они были приведены выше, оказываются недостаточными.

Для нормы H_1, определенной формулой

$$\{u,u\} = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + c' u^2 \right) d\Omega$$

уже не всегда можно утверждать, что элементы H_1 будут иметь в замкнутой области необходимые предельные значения.

Вишиком даны соответствующие обобщения теорем вложения, позволившие осуществить до конца ту же указанную выше схему, что и для обычных задач.

Остановимся еще на одном вопросе, связанном с так называемым методом ортогональных проекций.

В классических задачах математической физики, в задаче Дирихле и т. п., ищется решение однородного уравнения с неоднородными граничными условиями.

Например, искомой может быть гармоническая функция u удовлетворяющая граничным условиям.

$$u\big|_{\Gamma} = \varphi(Q), \quad Q \in \Gamma \tag{65}$$

и уравнению

$$-\Delta u = 0. \tag{66}$$

Определим граничные значения для функции u с помощью вспомогательной функции $\varphi(P)$, заданной в $\Omega + \Gamma$. Условие (65) заменим требованием, чтобы новая неизвестная ψ удовлетворяла однородным граничным условиям

$$\psi\big|_{\Gamma} = (u - \varphi)\big|_{\Gamma} = 0. \tag{67}$$

В метрике H_1 со скалярным произведением

$$\{u, v\} = \int\limits_{\Omega} \sum_{i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\Omega$$

функция ψ в силу (67) будет ортогональна к любому решению уравнения Лапласа, т. е. $\{\psi, u\} = 0$, если верны (66) и (67).

Это вытекает из классической формулы интегрирования по частям. Проанализируем это обстоятельство подробнее.

Пусть оператор — Δu действует в пространстве H_1 на многообразии $\Omega_\Delta \subset H_1$, а значения его лежат в пространстве E со скалярным произведением

$$(f, v) = \int f v \, d\Omega; \ \int (\Delta u, v) \, d\Omega = (\Delta u, v).$$

Множество гармонических функций будет служить прообразом нуля в пространстве H_1.

Построим оператор сопряженный с — Δ. По определению

$$(-\Delta u, v) = \{u, -\Delta^* v\} = \{u, \psi\}. \tag{68}$$

Таким сопряженным оператором оказывается оператор, приводящий в соответствие элементу v из F^* элемент из H_1, связанный с v формулой (68).

С другой стороны, для произвольного u и $v \in H_1$ такого, что

$$v\big|_{\Gamma} = 0 \tag{69}$$

имеем $(-\Delta u, v) = \{u, v\}$, откуда видно, что $-\Delta^*$ есть в этом случае просто оператор, приводящий каждой функции v, удовлетворяющей (69), ее самое как элемент H_1. Область определения $-\Delta^*$ при произвольных u будет множеством всех v, удовлетворяющих (54). Следовательно, $-\Delta^*$ будет в этом случае оператором вложения. Таким образом, факт ортогональности в метрике H искомого решения задачи Дирихле к функциям v равным нулю на границе, есть просто конкретное выражение основного свойства сопряженных операторов: ортогоналности прообраза нуля к области значений сопряженного оператора.

Разбивая основное гильбертово пространство H_1 в прямую сумму прообраза нуля I и его ортогонального дополнения, сразу получаем метод решения этой и других подобных задач.

Этот метод был предложен *Weyl*'ем и развит М. И Вишиком в применении к обширному классу эллиптических уравнений.

Разберем теперь приложение рассматриваемых идей к случаю, когда оператор не является эллиптическим. Остановимся на смешанной задаче. Простейшим примером её есть задача решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

при условиях

$$u\,|_s = 0; \qquad \left\{u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\}_{t=0} = \{u_0, u_1\}.$$

Излагаемые построения были предложены Фридрихсом и затем применены Ладыженской к уравнениям 2-го порядка гиперболического и параболического типов. Поясним идею метода Фридрихса на примере указанной смешанной задачи.

Пусть X пространство троек функций, определенных в области $Q = [\Omega \times t]$ и Ω

$$v(x, t); \quad v_0(x); \quad v_1(x)$$

с метрикой

$$\|\chi\|^2_X = \|v\|^2_{L_2(Q)} + \|v_0(x)\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} + \|v_1(x)\|^2_{L_2(\Omega)},$$

$$\chi \in X.$$

В этом пространстве рассмотрим многообразие Ω_1 таких троек, для которых функция $v(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема в

Q и имеют место соотношения $v_0(x)=v(x,0)$, $v_1(x)=\frac{\partial v}{\partial t}(x,0)$ и, кроме того, $v(x,T)=\frac{\partial v}{\partial t}(x, T)=0$, $v|_s=0$.

На этом многообразии определен $\Box v$ как элемент $L_2(Q)=Y$ по формуле $\Box v=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\Delta v$. Построим сопряженный оператор.

Он будет во всяком случае определен на функциях u, дважды непрерывно дифференцируемых и равных нулю на Γ; для таких функ ций, очевидно, получим:

$$(u, \Box v)=\int\limits_Q u\Box v dQ=\int\limits_Q v\Box u dQ+\int\limits_\Omega u\Big|_{t=0} v_1 d\Omega-\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} v_0 d\Omega=(\xi,\chi),$$

$$\xi=\left(\Box u, -\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}, u\Big|_{t=0}\right);\ \chi=(v, v_0, v_1).$$

Оператор $\Box^*$, как мы видели, действует из L_2 в пространство троек функций, причем:

$$\Box u=\left(\Box u, -\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}, \quad u\Big|_{t=0}\right).$$

Покажем, что $\Box^{*-1}$ существует. Это и даст нам решение обобщенной задачи Коши о восстановлении функции u из L_2 по значениям

$$\Box u, \quad u|_{t=0}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}.$$

С этой целью доказываются два свойства оператора $\Box^*$:

1) область значений его в X^* всюду плотна; 2) обратный оператор ограничен. Как было указано ранее, отсюда сразу будет следовать существоване и единственность решения смешанной задачи.

Плотность $R_{\Box^*}$ доказывается применением теоремы единственности Ладыженской.

Теорема. Существует не более одной функции v, которая удовлетворяет тождеству:

$$\int\limits_Q v\Box u\, dQ=\int\limits_Q u f\, dQ+\int\limits_\Omega\left(\varphi_0\frac{\partial u}{\partial t}-\varphi_1 u\right)\Big|_{t=0} d\Omega$$

при любых u из $W_2^{(2)}$ таких, что $u|_{t=T}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=T}$; $u|_s=0$.

Перефразируя эту теорему, получим:

Существует не более одной функции v, которая удовлетворяет тождеству

$$\iint\limits_Q v \square u \, dQ = \iint\limits_Q u f \, dQ - \int\limits_\Omega \left(\varphi_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \varphi_1 u \right)_{t=T} d\Omega$$

при любых u из $W_2^{(2)}$ таких, что $u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \quad u|_s = 0.$

В частности, если $\varphi_0 = \varphi_1 = f = 0$, то такая функция будет тождественным нулем.

Ограниченность оператора обратного к $\square^*$ есть следствие т. н. энергетического неравенства.

Для функций u удовлетворяющих условиям

$$u|_{s=0} = 0; \quad u|_{x=0} = \varphi_0; \quad \left.\frac{\partial u}{dt}\right|_{x=0} = \varphi_1; \quad \square u = F$$

справедливо тривиальное соотношение

$$\int\limits_{t=t_1} \left[\sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega \leqslant \int \left[\sum_i \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \right)^2 + \varphi_1^2 \right] d\Omega + C \int\limits_{0 \leqslant t \leqslant t_1} F^2 \, d\Omega \, dt.$$

Метод установления плотности значений $\square^*$, примененный Фридрихсом и Ладыженской, оказывается распространимым на широкий класс параболических, Шредингеровских и операторных уравнений.

Вишик осуществил метод несколько отличный от метода Ладыженской, ближе примыкающий к изложенному выше в применении к эллиптическим уравнениям.

Для исследования той же задачи о волновом уравнении составляется форма:

$$B(u, v) = \int\limits_Q \left\{ -\frac{\partial u}{dt} \frac{\partial}{\partial t} \left[(T-t) \frac{\partial v}{\partial t} \right] + \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{dx_i} \left[(T-t) \frac{\partial v}{dt} \right] \right\} d\Omega \, dt$$

для v из $D_0 (Q)$ (пространства фуцкций, для которых v и $\frac{\partial v}{\partial t}$ оба принадлежат к $W_2^{(1)}$ и обращаются в нуль при $t=0$). Согласно определению, под обобщенным решением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

при условиях

$$u|_s = 0; \quad \left\{ u, \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_{t=0} = 0$$

мы будем понимать функцию u, для которой при любых v таких как указано выше:

$$B(u,v)=\int_Q f(T-t)\frac{\partial v}{\partial t}\,dQ=(f,v).$$

При помощи формы $B(u,v)$ мы можем построить гильбертово пространство H_1, считая:

$$\|u\|^2_{H_1}=B(u,u)$$

(положительность $B(u,u)$ устанавливается легко).

Пространство H_1 вложимо в $\overset{(0)}{W}{}_2^{(1)}$; более того:

$$B(u,u)=\|u\|^2_{H_1}\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}}.$$

Рассмотрим форму $B(u,v)$ как скалярное произведение в H_2 — гильбертовом пространстве $(n+1)$-мерных векторных функций двух векторов

$$\nabla u \quad \text{и} \quad Dv=\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\left[(T-t)\frac{\partial v}{\partial t}\right];\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(T-t)\frac{\partial v}{\partial t}\right]\right\}.$$

Оператор ∇u действует в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$, а оператор D в $\overset{\circ}{D}(Q)$. Мы получим

$$B(u,v)=(\nabla u, Dv).$$

Вводя оператор, сопряженный к ∇u, можем придать $B(u,v)$ вид:

$$B(u,v)=(u,\nabla^* Dv).$$

Построенный $\nabla^* Dv$ мы подвергнем еще изоморфной перереализации, полагая

$$(u,\nabla^* Dv)=\{u, T_0\nabla^* Dv\},$$

В этом случае оператор $\hat{S}^*=T_0\nabla^* D$ имеет ограниченный обратный, а область его изменения в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ представляет собою плотное множество, что можно установить, доказав с одной стороны теорему единственности:

Теорема:

Из

$$B(u,v)=\{u,\hat{S}^* v\}=0$$

для всех v следует $u=0$; а с другой — воспользовавшись неравенством

$$B(v,v)\geqslant\frac{1}{2}\{v,v\}.$$

Вводя теперь оператор $\hat{S}$, сопряженный с $\hat{S}^*$, получим равенство:

$$\{\hat{S}u, v\} = \left[f, (T-t)\frac{\partial v}{\partial t}\right]. \tag{70}$$

Для получения искомого решения нам остается еще преобразовать правую часть (70).

Имеем

$$\left[f, (T-t)\frac{\partial v}{\partial t}\right] = \left[(T-t)f, \frac{\partial v}{\partial t}\right] = [Gf, \nabla v] = [f_1, \nabla v]$$

где f_1 — вектор с компонентами $0, 0, \ldots, (T-t)f$.

Далее $[f_1, \nabla v] = [\nabla^* f_1, v]$ и, наконец,

$$[f_1, \nabla v] = \{T_0 \nabla^* f_1, v\} = \{F, v\}$$

где T_0 — оператор изоморфный перереализации.

Таким образом

$$\{\hat{S}u, v\} = \{F, v\}.$$

Обратимость оператора $\hat{S}$ вытекающая из свойств сопряженного, дает

$$u = \hat{S}^{-1}F.$$

Методы, изложенные выше, дали возможность разобраться и в ряде новых задач теории уравнений в частных производных.

В частности, удалось разрешить смешанные задачи для уравнений типа

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial u}{\partial t} + cu = f,$$

где A, B и C — дифференциальные операторы над u (не зависящие от t). Первая частная задача такого рода была рассмотрена автором настоящего доклада в 1951 году, дальнейшие результаты получен Вишиком и Ладыженской.

Мы видели выше какую большую роль в решении краевых задач сыграли энергетические неравенства.

Общее рассмотрение таких неравенств выходит за рамки настоящего доклада. Некоторые замечания будут сделаны ниже.

Далее мы хотели бы остановиться на бурно развивающейся за последние годы теории обобщенных функций, опять таки основанной на идее использования двойственных пространств.

Автором настоящего доклада в 1934—35 г. г. на основе теории сопряженных операторов была построена теория обобщенных функций в применении к обращению гиперболических уравнений (к решению задачи Коши).

Обобщенные функции были построены как пополнение множества гладких функций в классической формуле для линейного функционала

$$(\rho,\nu)=\int\rho\nu dx.$$

Это дает возможность реализации линейных функционалов $Y^{(m)*}$ над пространством $Y^{(m)}$ финитных m — раз, дифференцируемых функций. Об'единение получаемых $Y^{(m)}$ по m от 0 до ∞ было тем основным функциональным пространством, в котором строились дифференциальные операторы и решалась задача Коши.

В 1950 году, пользуясь приблизительно тем же аппаратом, Лоран Шварц написал свою книгу „Теория распределений". Существенно новой явилась развитая им теория интегралов Фурье для обобщенных функций.

Мною в 1934-35 году пространство $Y^{(m)*}$ исследовалось лишь в слабой метрике. Аппаратом для решения задач были явные представления решения задачи Коши для уравнений 2-го порядка. Л. Гордингу удалось построить теорию этой задачи для гиперболических уравнений высших порядков, не пользуясь явным видом решения и опирясь лишь на энергетические неравенства, полученные впервые И. Г. Петровским и выведенные позднее Д. Лерэем новым изящным методом. *P. Lax* в 1954 году для задачи Коши для уравнения 2-го порядка и вслед за этим Л. Гординг для уравнений m — го порядка получают обращение гиперболического оператора в пространствах обобщенных функций с сильной метрикой.

Метод Лакса-Гординга основывается на установлении обобщенного энергетического неравенства:

$$\|Lu\|_Y \geqslant C\|u\|_X. \tag{71}$$

Здесь пространством Y служит некоторое пространство функционалов.

Аппаратом для получения этого неравенства служит то же интегральное тождество, которое дает обычные энергетические неравенства.

Не останавливаясь на подробностях вывода, укажем лишь, что наличие неравенства (71) позволяет установить однозначность обратного оператора, что, в сочетании с теоремой о плотности значений, дает возможность получить решение задачи.

Функциональные методы позволили получить, как мы уже видели, ряд обобщений понятия решения уравнений в частных производных, связанных с новыми постановками краевых задач.

Наиболее широкая постановка задачи Коши для гиперболических уравнений в обобщенных функциях принадлежит автору доклада и относится к 1934 году. Для общих краевых и смешанных задач аналогичные постановки и решения даны автором и Вишиком в 1956 г.

Напомним некоторые результаты теории обобщенных функций.

Обобщенные функции есть пополнение второй указанной выше реализации функционалов над пространствами $Y^{(m)}$ или $\tilde{W}_p^{(m)}$ финитных (отличных от нуля в конечной области) функций, допускающих производные до порядка m непрерывные или суммируемые со степенью p.

Множество функционалов

$$(l, u) = \int\limits_{\Omega} l(x)\, u(x)\, d\Omega$$

с функциями $l(x)$, замыкается по метрике $Y^{(m)*}$ или $\tilde{W}_p^{(m)}$. Каждому отдельному элементу соответствует обобщенная функция.

Обобщенные функции неограниченно дифференцируемы. Говорят, что обобщенная функция φ обращается в нуль в некоторой области Ω_1, если $(\varphi, f) = 0$ для всех функций f отличных от нуля только в Ω_1. Носителем обобщенной функции φ называется область вне которой φ обращается в нуль.

Дифференциальный оператор L над обобщенной функцией определяется как формально сопряженный к некоторому оператору M над пространством $Y^{(m)}$ или $\tilde{W}_p^{(m)}$.

Рассмотрим задачу Коши, т. е. задачу нахождения решения гиперболического уравнения

$$L u = \rho$$

при условиях $\quad u \Big|_{t=0} = u_0; \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1,$

где ρ пока произвольная функция. Будем расматривать функцию

$$\bar{u} = \begin{cases} u & t > 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

как элемент пространства обобщенных функций.

Вычисляя формально $L\bar{u}$ по формуле $(L\bar{u}, v) = (\bar{u}, Mv)$ можем преобразовать правую часть к виду

$$\int\limits_{t>0} \rho v dx dt + \int\limits_{t=0} \left(u_0 \frac{\partial v}{\partial x} - u_1 v \right) dx.$$

Таким образом, справа оказывается известная обобщенная функция

$$\bar{\rho} + \delta(t)\, u_0 + \delta'(t)\, u_1.$$

Иными словами

$$L\bar{u} = \bar{\rho} + \delta(t)\, u_0 - \delta'(t)\, u_1 = \rho_1,$$

Задача Коши свелась таким образом к нахождению значенния обратного оператора:

$$L^{-1}\rho_1.$$

Этот обратный оператор строится, разумеется, как сопряженнй к M^{-1} на соответствующем подпространстве.

Покажем каким образом можно ставить и решать более общие краевые и смешанные задачи на примере третьей краевой задачи для уравнения Лапласа. Этот пример и был опубликован в печати, в ДАН. В области Ω с достаточно гладкой границей изучается уравнение:

$$\Delta u = f$$

с условиями

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n} + h\,u\right|_s = \varphi\,.$$

Вводим функции

$$\bar{u} = \begin{cases} u & \text{в } \Omega \\ 0 & \text{вне } \Omega \end{cases}; \qquad \bar{f} = \begin{cases} f & \text{в } \Omega \\ 0 & \text{вне } \Omega \end{cases}.$$

Вычисляя опять Δu через сопряженный, получим

$$(\Delta\bar{u}, v) = (\bar{u}, \Delta v) = \int\limits_{\Gamma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h\,u\right)v - u\left(\frac{\partial v}{\partial n} + h\,v\right)\right]d\Gamma + \int\limits_{\Omega} f v\, d\Omega.$$

Как видно, отсюда вычислить $\Delta\bar{u}$ в этом случае невозможно. Однако значения, принимаемые $\Delta\bar{u}$ на множестве таких v для которых

$$\left.\left(\frac{\partial v}{\partial n} + h\,v\right)\right|_{\Gamma} = 0$$

можно. На линейном многообразии E_1 таких функций

$$(\Delta\bar{u}, v) = \int\limits_{\Omega} f v\, d\Omega + \delta(\Gamma)\varphi.$$

Иными словами, на этом многобразии

$$\Delta\bar{u} = \bar{f} + \delta(\Gamma)\,\varphi.$$

Нетрудно видеть, что задача обращения оператора Лапласа на

$$Y^{(m)*}$$

вообще говоря, неразрешима, т. к. оператор Δ имеет неравный нулю прообраз нуля.

Будем рассматривать оператор Δ на множестве E_1, рассматриваемом как сужение пространства $Y^{(m)}$. Поскольку мы не меняем топологию $Y^{(m)}$, то множество функционалов над E_1 будет просто множеством классов функционалов над $Y^{(m)}$ принимающих на E_1 одно и то же значение. На E_1 прообраз нуля для Δu будет нулем, что и дает возможность найти определенное решение задачи обращения.

Изучим вначале оператор Δ^{-1}. Допустим, что в области Ω мы умеем обращать этот оператор на функционалах из E_1 при помощи функции Грина или каким угодно другим путем. Введем в рассмотрение оператор приведения R в $Y^{(m)}$, приводящий в соответствие любой функции $\varphi \in Y^{(m)}$ элемент $\tilde{\varphi} \in C^{(m)}$, принимающий во всех точках Ω те же значения, что и φ.

Областью значений этого оператора может быть либо все $C^{(m)}(\Omega)$, либо не все $C^{(m)}(\Omega)$.

В первом случае сопряженный оператор R^* не имеет прообраза нуля и приводит однозначно любому элементу $\rho \in C^{(m)*}$ соответствующий элемент $R^*_\rho \in Y^{(m)*}$. Областью его значений, как легко видеть, будет множество тех ρ для которых Ω является носителем. R^{*-1} будет существовать и будет определен на всех таких ρ. Решение нашей задачи дается при этом формулой

$$u = R^* \Delta^{-1} R^{*-1} \rho. \tag{72}$$

Формула (72) имеет место в предположении, что нам известна непрерыность Δ^{-1} в некоторых пространствах, которая может быть установлена любых способом.

Изложенный метод может без всякого труда быть перенесен на совершено произвольные краевые задачи. Он позволяет строить обобщенные решения в самой широкой постановке, исходя из некоторых хорошо изученных классических задач.

Хочется указать еще на интересный вопрос о краевых задачах дая уравнений не принадлежащих ни к какому классическому типу, для которых корректно поставленных краевых задач до сих пор не было известно.

Хёрмандер в своей диссертации методами функционального анализа установил существование корректных краевых задач для любых уравнений с постоянными коэффициентами в фиксированной области.

Подробно остановиться на этой работе я не имею времени.

На этом разрешите закончить.