Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957), Beograd
Yougoslavie

SUR L'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR

par MIHAILO ARSENOVIĆ, BEOGRAD

Les équations linéaires avec les coefficients constants

I

Les équations à deux variables indépendantes.

I—1 Considérons l'équation

$$Ar+2Bs+Ct+2Dp+2Eq+Fz+G=0, \qquad A\gtrless 0, \qquad F\gtrless 0. \tag{1}$$

Pour intégrer cet équation, il suffit de trouver encore une équation telle que ces deux équations admettent une intégrale commune; c'est-à-dire elles doivent être en involution. Si nous partons de l'équation $F(t, s)=0$ ou $t+\Phi(s)=0$, il est bien facile démontrer que l'équation cherchée nous pouvons prendre sous la forme

$$t+c_1 s=0, \tag{2}$$

c_1 étant une constante arbitraire.

En effet, en cherchant les dérivées des équations (1) et (2) par rapport à x et y; si nous calculons les valeurs des fonctiens $\partial s/\partial x$ et $\partial s/\partial y$, on voit facilement que l'on a $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)$, et que par conséquent les équations (1) et (2) sont en involution.

On peut écrire l'équation (2) sous la forme $\frac{\partial q}{\partial y}+c_1\frac{\partial q}{\partial x}=0$, et on obtient l'integrale générale

$$z=f(x)+\varphi(x-c_1 y). \tag{3}$$

Les fonctions f et φ nous devons déterminer de façon que la fonction (3) satisfaite l'équation donnée (l'équation (1)). De cette manière nous obtenons l'intégrale complète de l'équation (1) sous la forme

$$z=c_2 e^{\lambda_1(x-c_1 y)}+c_3 e^{\lambda_2(x-c_1 y)}+c_4 e^{\mu_1 x}+c_5 e^{\mu_2 x}-\frac{G}{F}, \tag{4}$$

où $\lambda_{1/2}$ et $\mu_{1/2}$ désignent les solutions respectivement des équations

$$(CC_1^2 - 2BC_1 + A)\,\lambda^2 + 2\,(D - C_1 E)\,\lambda + F = 0, \qquad A\,\mu^2 + 2\,D\,\mu + F = 0. \quad (5)$$

Il est facile de trouver l'intégrale complète aussi dans les cas $F=0$, $D \gtrless 0$ et $F=0$, $D=0$. Il ne reste que l'équation pour laquelle est $A=0$ et $C=0$, c'est-à-dire étudier l'équation de Laplace.

I—2 L'équation de Laplace

$$s + ap + bq + cz + d = 0. \quad (5)$$

Dans ce cas l'équation auxiliaire nous pouvons prendre sous la forme

$$r - c_1^2 t = 0. \quad (7)$$

On trouve facilement l'intégrale de cette équation sous la forme

$$z = f\,(y + c_1\,x) + \varphi\,(y - c_1\,x). \quad (8)$$

En substituant la fonction z et ses dérivées dans l'équation (6) on trouve l'intégrale complète pour l'équation de Laplace sous la forme

$$z = c_2\,e^{\lambda_1 (y + c_1 x)} + c_3\,e^{\lambda_2 (y + c_1 x)} + c_4\,e^{\mu_1 (y - c_1 x)} + c_5\,e^{\mu_2 (y - c_1 x)} - \frac{d}{c}, \quad (9)$$

$\lambda_{1,2}$ et $\mu_{1,2}$ sont déterminées par les équations

$$c_1\,\lambda^2 + (ac_1 + b)\,\lambda + c = 0, \qquad c_1\,\mu^2 + (ac_1 - b)\,\mu - c = 0. \quad (10)$$

II

Les équations à n variables indépendantes.

II – 1 Supposons que l'équation

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{s=1}^{n+1} A_{ks}\,p_{ks} = 0, \quad A_{ks} \equiv A_{sk}; \quad p_{k,\,n+1} \equiv p_k; \quad p_{n+1,\,n+1} \equiv z, \quad (11)$$

pouvait se ramener à l'ensemble des deux équations du premier ordre

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\Theta + \psi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\Theta + \cdots + \psi_{2n-2} \frac{\partial}{\partial x_n}\Theta + \psi_{2n}\,\Theta = 0. \\ &\frac{\partial z}{\partial x_1} + \psi_1 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + \psi_{2n-3} \frac{\partial z}{\partial x_n} + \psi_{2n-1} = \Theta, \end{aligned} \quad (12)$$

on obtient, pour déterminer les valeurs de ψ_i le système

$$\begin{gathered} A_{11}\,(\psi_{2k-1}\,\psi_{2r} + \psi_{2r-1}\,\psi_{2k}) = 2\,A_{k+1,\,r+1} \\ (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n; \quad r = k, k+1, \ldots, \text{n}; \quad \psi_{-1} \equiv 1, \quad \psi_0 \equiv 1) \end{gathered} \quad (13)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes de cette réduction sont données par

$$(A_{\alpha i}, A_{\beta j}, A_{\gamma \nu}) \equiv \begin{vmatrix} A_{\alpha i} & A_{\alpha j} & A_{\alpha \nu} \\ A_{\beta i} & A_{\beta j} & A_{\beta \nu} \\ A_{\gamma i} & A_{\gamma j} & A_{\gamma \nu} \end{vmatrix} = 0, \tag{14}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, i, j, \nu = 1, 2, \ldots, n+1),$$

c'est à-dire tous les mineurs du troisième ordre du déterminant

$$D \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots A_{1,n+1} \\ \cdot & \ldots \cdot \\ \cdot & \ldots \cdot \\ A_{1,n+1} & \ldots A_{n+1,n+1} \end{vmatrix} \tag{15}$$

sont égales à zéro.

Pour démontrer que les conditions (14) sont nécessaires, partons des équations (12). En y éliminant Θ on obtient l'équation de la forme (11), où les coefficients A_{ks} sont déterminés aux relations (13). En les substituant dans le déterminant (15) sa valeur devient

$$D \equiv \frac{A_{11}{}^{n+1}}{2^{n+1}} \begin{vmatrix} 1+1 & 1+1 & \cdots & 1+1 \\ \psi_1+\psi_2 & \psi_1+\psi_2 & \cdots & \psi_1+\psi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{2n-1}+\psi_{2n} & \psi_{2n-1}+\psi_{2n} & \cdots & \psi_{2n-1}+\psi_{2n} \end{vmatrix},$$

d'où il résulte que tous les déterminants du troisième ordre sont égals à zéro.

Pour démontrer que les conditions (14) sont suffisantes, considérons dans le système (13) les équations correspondant aux valeurs $k=\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$, $r=i-1$, $j-1$, $\nu-1$. On obtient neuf équations avec douze variables indépendantes; mais ce système se reduit à six équations à cinq variables indépendantes et ce dernier système nous donne les conditions (14).

Si l'on suppose que les conditions (14) ont lieu, nous pouvons maintenant déterminer les valeurs ψ_i et il ne reste qu'intégrer deux équations du premier ordre de système (12). De cette manière on obtient l'intégrale générale de l'équation (11) sous la forme

$$\begin{aligned} z = {} & e^{\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)} f(x_2 - \psi_2 x_1, \ldots, x_n - \psi_{2n-2} x_1) + \\ & + e^{-\psi_{2n-1} x_1} \varphi(x_2 - \psi_1 x_1, \ldots, x_n - \psi_{2n-3} x_1), \end{aligned} \tag{16}$$

f et φ sont deux fonctions arbitraires de $(n-1)$ arguments, et α est la la fonction définie.

II—2 Considerons l'équation (11) pour laquelle les conditions (14) ne sont pas satisfaites. Dans ce cas cherchons une équation auxiliaire d'une manière analoque à l'équation (2). On voit immédiatement que l'équation cherchée doit satisfaire deux conditions. Elle doit être en involution avec l'équation donnée et doit admettre la forme intégrable, c'est à-dire elle a l'intégrale de la forme (16).

Prenons donc

$$\begin{gathered} z=f(u_2, u_3, \ldots, u_n)+\varphi(v_2, v_3, \ldots, v_n), \\ (u_i=x_i+x_1;\quad v_i=x_i-x_1;\quad i=1,2.\ldots, n). \end{gathered} \tag{17}$$

En substituant cet intégrale dans l'équation (11) nous obtenons, pour déterminer les fonctions f et φ, deux équations du second ordre linéaires avec $(n-1)$ variables indépendantes, de la forme

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_{ks}^{(1)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_s}=0,\qquad \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_{ks}^{(2)}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k\,\partial x_s}=0.$$

Appliquant les considérations analogues à chacune des équations (18) diminuant successivement le nombre des variables, on arrive à l'équation du second ordre à deux variables indépendantes.

III

Les équations du troisième ordre.

La méthode exposée peut s'appliquer pour obtenir l'intégrale complète des équations d'une ordre supérieur. Bornons nous à considé les équations du troisième ordre à deux variables indépendantes

$$\begin{aligned} &A_{111}p_{111}+A_{222}p_{222}+A_{112}p_{112}+A_{122}p_{122}+ \\ &\qquad +A_{11}p_{11}+A_{12}p_{12}+A_{22}p_{22}+A_1p_1+A_2p_2+Az=0. \end{aligned} \tag{19}$$

Pour trouver une intégrale complète de l'equation (19) partons de l'équation

$$z=f(x_2+x_1)+\varphi(x_2-x_1)+\psi(x_1). \tag{20}$$

En substituant z et ses dérivées dans l'équation (19), nous avons l'intégrale cherchée sous la forme

$$z=\sum_{i=1}^{3}c_i e^{(x_2+x_1)\lambda_i}+\sum_{i=4}^{6}c_i e^{(x_2-x_1)\mu_i}+\sum_{v=7}^{9}c_i e^{\rho_i x_1}, \tag{21}$$

où les valeurs λ_i, μ_i et ρ_i sont déterminées par les équations

$$\begin{gathered} (A_{111}+A_{222}+A_{112}+A_{122})\lambda^3+(A_{11}+A_{12}+A_{22})\lambda^2+(A_1+A_2)\lambda+A=0, \\ (A_{222}-A_{111}+A_{112}-A_{122})\mu^3+(A_{11}-A_{12}+A_{22})\mu^2+(A_2-A_1)\mu+A=0, \\ A_{111}\rho^3+A_{11}\rho^2+A_1\rho+A=0. \end{gathered} \tag{22}$$

Remarquons que si l'on prend l'équation du cinquième ordre nous arrivons à l'équation algébrique du cinquième dégré.