Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie

LE PROBLÈME DE CAUCHY DANS LE CAS LINÉAIRE ANALYTIQUE

par **JEAN LERAY**, PARIS

Notations. — X est un espace affin; le point x de X a les coordonées $(x_1, \ldots, x_l)$. S est une hypersurface d'équation $s(x)=0$; $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est un opérateur différentiel, linéaire, holomorphe sur X, d'ordre m. Le problème de Cauchy consiste à trouver une fonction $u(x)$ telle que:

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = v(x);$$

$u(x)$ et ses derivées d'ordres $< m$ sont des fonctions holomorphes donées sur S.

Notons ξ une fonction linéaire: $\xi \cdot x = \xi_0 + \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_l x_l$. On nomme solution unitaire $U(\xi, x)$ de a la solution du problème de Cauchy le plus simple:

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(\xi, x) = 1, \quad U(\xi, x) \text{ s'annule } m \text{ fois pour } \xi \cdot x = 0.$$

L'adjoint de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est l'opérateur $a^*\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ où

$$a^*(\xi, x) = a(x, -\xi).$$

Par exemple l'adjoint de $a_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1}$ est l'opérateur $-\frac{\partial}{\partial x_1} a_1$, qui transforme $u(x)$ en $-\frac{\partial}{\partial x_1} [a_1(x) u(x)]$. La solution unitaire de a est notée $U^*(\xi, x)$.

Résultats. — 1) Près de S, la solution du problème de Cauchy peutêtre uniformisée: elle est la projection sur X d'une fonction holomorphe.

2) D'où: quand x est fixé, $U(\xi, x)$, considérée comme fonction de ξ, peut êtreuniformisée.

3) $U(x)$ s'exprime par une intégrale d'ordre $2l$, dépendant de S seulement, portant sur $U^*(\xi, x)$, $v(x)$ et les donées de Cauchy; d'où singularités de $u(x)$: ce sont les caractéristiques tangentes à S et les caractéristiques issues des singularités des données.

4) Si $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est hyperbolique, sa solution élémentaire s'exprime de même par une intégrale d'ordre l, portant sur $U^*(\xi, x)$; elle est holomorphe quand les deux points dont elle dépend ne sont pas sur une même bicaractéristique.

5) Si $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est à coefficients polynomiaux, son transformé de Laplace $A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$ a pour la solution unitaire homogène $U^*(\xi, x)$ à des dérivations $-\frac{\partial}{\partial \xi_0}$ près. D'où, quand $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est linéaire en x et homogène en $\frac{\partial}{\partial x}$, la résolution par quadratures du problème de Cauchy et l'obtention par quadratures de la solution élémentaire de a supposé hyperbolique, une fois determinées les bicaractéristiques de a.

Bibliographie. — Cinq articles à paraître au Bulletin de la Societé mathématique de France. Les résultats 1), 2), 5) ont été annoncés aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences (t. 245, p. 1483 et p. 2146); une partie du résultat 3) également (t. 242, p. 953); les résultats 4) le seront prochainement.