

Werk

Label: Article

Jahr: 1957

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0009|log42

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

SUR UNE APPLICATION DES INTÉGRALES SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

par GEORGES KARAPANDJITCH, BEOGRAD

Dans un article antérieurement publié nous avons montré la possibilité d'utiliser les intégrales singulières des équations différentielles [1] pour obtenir les quadratures.

Il s'agissait de l'équation de Clairaut, ainsi que d'une équation plus générale que celle de Clairaut, dont nous allons nous occuper aussi dans cet article. Les interprétations théoriques, d'un autre point de vue sur ce sujet, ont été données par B. Rachaïsky [2] dans un article récent. Tout d'abord nous allons esquisser d'une manière abrégée la méthode dont il s'agit. Partons de l'équation différentielle

$$y = N(x, y'). \quad (1)$$

Comme il est bien connu, le système

$$y = N(x, y'), \quad \frac{\partial N(x, y')}{\partial y'} = 0, \quad (2)$$

définit l'intégrale singulière — si elle existe; par élimination de y' des deux équations on obtient $y = \tau(x)$ qui doit satisfaire l'équation (1).

En cas d'intégrale singulière les quantités x, y, y' ont les mêmes valeurs pour chaque point d'enveloppe ainsi que pour les courbes appartenant à l'intégrale générale. On obtient de la deuxième des équations (2) la relation

$$y' = k(x), \quad (3)$$

d'où par intégration nous avons

$$y = \int k(x) dx + C; \quad (4)$$

d'autre part, en utilisant les relations (1) et (3) il est facile d'établir la relation

$$y = N[x, k(x)]. \quad (5)$$

Cependant, de la relation (4) pour $C=0$, et au moyen de (5) nous pouvons obtenir

$$\int k(x) dx = N[x, k(x)]. \quad (6)$$

La relation (6) nous fournit des quadratures par une voie algébrique: la substitution de y' de l'équation (3) dans l'équation (1) nous donne la quadrature requise.

Remarquons que nous avons appliqué la méthode citée dans le cas de l'équation de Clairaut ainsi que dans un autre travail en manuscrit [3] pour deux équations différentes de celle de Clairaut. Nous utilisons les transformations du contact car elles offrent la possibilité de former un grand nombre d'équations dont nous pouvons obtenir les intégrales générales sans difficulté, d'où nous pouvons démontrer l'existence d'intégrale singulière.

Maintenant, utilisons une équation plus générale que celle de Clairaut dont nous nous sommes occupés antérieurement [1]. Cette équation est de la forme suivante

$$y - \frac{\varphi}{\varphi'} y' = f\left(\frac{y'}{\varphi'}\right), \quad (7)$$

où φ désigne une fonction quelconque de variable x .

Il est facile de vérifier que les deux expressions

$$x_1 = \frac{y'}{\varphi'}, \quad y_1 = y - \frac{\varphi}{\varphi'} y',$$

sont en involution. On obtient l'intégrale générale de l'équation (7) (Lagrange) en posant $x_1 = C$ (c'est-à-dire $y' = C \cdot \varphi$) dans l'équation même, à savoir

$$J(x, y, C) \equiv y - C \varphi - f(c) = 0.$$

C'est ce qui présente l'intégrale générale de l'équation (7).

Pour examiner l'existence de l'intégrale singulière utilisons [4] les conditions nécessaires

$$D \equiv \begin{vmatrix} J_x & J_y \\ J_{xc} & J_{yc} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C\varphi' & 1 \\ \varphi' & 0 \end{vmatrix} = -\varphi' \geq 0, \quad J_{cc} \equiv -f''(c) \geq 0. \quad (8)$$

Les deux conditions étant remplies (sauf pour $\varphi = \text{const}$ et $f = \alpha \cdot C + \beta$) — nous avons l'intégrale singulière.

En différentiant la relation (7) d'après y' nous obtenons

$$-\varphi = f'\left(\frac{y'}{\varphi'}\right), \quad (9)$$

d'où pour les différentes formes de fonction f' on peut obtenir une série d'intégrales d'après la méthode que nous venons d'indiquer. Citons un cas pour illustrer nos assertions. Soit

$$-\varphi = \frac{\left(\frac{y'}{\varphi'}\right)^2 - 1}{2 \frac{y'}{\varphi'}} \equiv f'\left(\frac{y'}{\varphi'}\right),$$

d'où on a (en tenant seulement le signe +)

$$y' = -\varphi\varphi' + \varphi'\sqrt{\varphi^2 + 1}. \quad a)$$

Comme il est

$$f\left(\frac{y'}{\varphi'}\right) = \int f'\left(\frac{y'}{\varphi'}\right) d\left(\frac{y'}{\varphi'}\right) = \int \frac{\left(\frac{y'}{\varphi'}\right)^2 - 1}{2 \frac{y'}{\varphi'}} d\left(\frac{y'}{\varphi'}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{y'}{\varphi'}\right)^2 - \frac{1}{2} \ln \frac{y'}{\varphi'} \quad b)$$

et en utilisant l'équation (7) et les relations a) et b) il est facile d'établir

$$\int \varphi' (-\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) dx = \varphi A + \frac{1}{4} A^2 - \frac{1}{2} \ln A, \quad (10)$$

$$A \equiv -\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}.$$

De cette manière nous avons obtenu une quadrature par une autre voie, utilisant parmi les autres opérations les quadratures tout à fait élémentaires comme celle en b). La méthode exposée est d'un caractère algébrique.

Cependant si on compare les quadratures obtenues avec les résultats d'intégration par parties on obtient un certain nombre d'autres nouvelles quadratures. Pour illustrer cela considérons la quadrature (10) obtenue au moyen de la méthode exposée — à savoir

$$\begin{aligned} \int \varphi' \sqrt{\varphi^2 + 1} dx &= -\frac{\varphi^2}{2} + \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + \\ &+ \frac{1}{4} (-\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1})^2 - \frac{1}{2} \ln (-\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}); \end{aligned}$$

cependant, d'après l'intégration par parties on obtient

$$\int \varphi' \sqrt{\varphi^2 + 1} = \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} - \int \varphi \frac{\varphi \varphi'}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} dx,$$

d'où en comparant les résultats obtenus au moyen des deux méthodes nous avons

$$\int \frac{\varphi^2 \varphi'}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} dx = \frac{\varphi^2}{2} - \frac{1}{4} A^2 + \frac{1}{2} \ln A, \quad (11)$$

$$A \equiv -\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}.$$

Prenant les fonctions diverses pour la fonction dérivée figurant dans la méthode d'intégration par parties — on peut obtenir plusieurs quadratures; par exemple citons encore

$$\int \frac{\varphi'}{\varphi} \cdot \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} dx = \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} \ln \varphi - \int \ln \varphi \frac{2\varphi^2 + 1}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} \varphi' dx,$$

d'où d'une manière analogue il suit par comparaison avec (10) — la quadrature qui se trouve à la seconde partie de la dernière relation.

Soit

$$x_1 = \frac{1}{\psi'(y) y'},$$

une formule des transformations du contact d'où suit, en intégrant cette relation à titre d'une équation différentielle, par la méthode de V. P. Ermakof — la deuxième formule

$$\frac{\psi(y)}{\psi'(y) y'} - x = y_1.$$

Formons une équation différentielle

$$\frac{\psi(y)}{\psi'(y) y'} - x = f \left[\frac{1}{\psi'(y) y'} \right], \quad (12)$$

où f désigne une fonction quelconque. On obtient l'intégrale générale de cette équation d'une manière analogue à celle du cas précédent

$$J(x, y, C) \equiv C \psi - x - f(C) = 0.$$

Les conditions 8) nous donnent

$$D \equiv \begin{vmatrix} J_x & J_y \\ J_{x_c} & J_{y_c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & C \psi'_y(y) \\ 0 & \psi'_y(y) \end{vmatrix} = -\psi'(y) \neq 0, \quad J_{cc} \equiv -f''(c) \geq 0.$$

Ces conditions étant remplies (sauf $\varphi = \text{const}$ et f étant une fonction linéaire) nous démontrons l'existence d'une intégrale singulière. Prenons

la fonction f' de la forme suivante

$$\psi = \frac{\left(\frac{1}{\psi' y'}\right)^2 + 1}{\left(\frac{1}{\psi' y'}\right)^2 - 1} \equiv f'(u), \quad u = \frac{1}{\psi' y'} \quad \text{c)}$$

d'où on a

$$f(u) = \int f'(u) du = \int \frac{u^2 + 1}{u^2 - 1} du = u + \ln \frac{u - 1}{u + 1}.$$

On peut tirer de la formule c)

$$\frac{1}{\psi' y'} = \sqrt{\frac{\psi + 1}{\psi - 1}}. \quad \text{d)}$$

et on a enfin par intégration

$$x = \int \psi' \sqrt{\frac{\psi + 1}{\psi - 1}} dy. \quad \text{e)}$$

En utilisant d) et e) on a au moyen de la relation 12)

$$\int \psi' \sqrt{\frac{\psi + 1}{\psi - 1}} dy = \sqrt{\psi^2 - 1} - \ln \frac{\sqrt{\psi + 1} - \sqrt{\psi - 1}}{\sqrt{\psi + 1} + \sqrt{\psi - 1}}. \quad (13)$$

La relation (13) nous donne une autre quadrature différente de celle que nous avait donnée la relation (10).

La comparaison du résultat de notre méthode avec ceux qui donnent l'intégration par parties nous conduit aux autres quadratures tout à fait analogues à celles du cas précédent.

Enfin citons les plus simples formes de la fonction f , à savoir:

$$\begin{aligned} f' &= \frac{u^2 \pm 1}{2ku}, & f' &= \frac{2uk}{u^2 \pm 1}, & k &= 1, -1, i \\ f' &= \frac{T(u) - 1}{2kT(u)} & T(u) &\equiv \sin^2 u, \cos^2 u, \operatorname{tg}^2 u, & f' &= \frac{1}{u(u \pm 1)} \\ f' &= \alpha u^2 + \beta u + \gamma, & f' &= \alpha + \frac{1}{1 + u^2}, & f' &= \alpha + \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}, \\ f' &= \frac{u \pm 1}{u \mp 1}, & f' &= \frac{u^2 \pm 1}{u^2 \mp 1} \end{aligned}$$

u étant un argument quelconque. Grâce à ces dernières formules de la fonction f il est possible d'obtenir un certain nombre de quadratures. L'usage de chacune dépend de la nature des transformations du contact. Les considérations exposées donnent les expressions d'une série de quadratures. Il est tout naturel de poser la question suivante. Etant donné

une fonction quelconque il s'agit d'appliquer la méthode exposée pour en avoir la quadrature de la fonction donnée.

Il faudrait donc pour cela composer l'équation différentielle correspondante, dont l'intégrale singulière allait donner la quadrature requise.

Ce problème est aisé à résoudre du point de vue théorique car il s'agit du problème de l'inversion des fonctions. Or, du point de vue pratique on peut rencontrer des difficultés purement algébriques. Pour les surmonter on n'aurait qu'à établir une certaine classification des quadratures.

Donnons en un exemple. Prenons l'intégrale

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}} dx.$$

Si nous voulons appliquer la méthode que nous venons d'indiquer — nous avons tout de suite des difficultés. La plus simple équation différentielle que l'on doit utiliser dans ce but — celle de Clairaut n'offre pas la possibilité d'appliquer notre méthode — car l'inversion de la fonction

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1},$$

où on doit exprimer x par y' , présente une difficulté insurmontable.

Cependant si, nous possédons une classification des diverses quadratures il est facile de constater que notre intégrale appartient à la classe que définit la relation (13) pour $\psi = \ln x$.

Malgré des difficultés du caractère algébrique qui peuvent s'introduire — néanmoins la méthode exposée permet d'établir une classification des quadratures de certaines fonctions.

Il est intéressant d'insister sur la méthode en question du point de vue gnoseométhodologique, en profitant de la théorie d'équations différentielles dans un autre domaine d'analyse mathématique.

RÉFÉRENCES

- [1] G. Karapandjitch, *Sur une application des intégrales singulières des équations différentielles ordinaires* — Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de R. P. de Serbie II. 1—2, 1950 Beograd.
- [2] B. Rachajsky, *Principe de l'intégration des équations différentielles ordinaires à l'aide de la différentiation et la théorie des transformations de contact. Applications.* — Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de R. P. de Serbie VIII, 3—4, 1956 Beograd.
- [3] G. Karapandjitch, *Application des transformations du contact sur les équations différentielles* 1956 (en manuscrit).
- [4] Mangoldt—Knopp, *Einführung in die höhere Mathematik* t. II 1948 S. Hirzel Verlag Stuttgart.