Bulletin de la So iété des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie

UN MODE DE DÉTERMINATION DES INTÉGRALES PREMIÈRES QUALITATIVES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

par D. MARKOVITCH, BEOGRAD

I. *Introduction.* Plusieurs fois j'ai employé dans les diverses branches d'analyse mathématique comme l'instrument méthodique la propriété connue de la moyenne arithmétique (dans la suite m. a.)

$$(1)\qquad m \leqslant \frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu} \leqslant M, \quad M = \underset{1\leqslant\nu\leqslant n}{\mathrm{Max}}\{a_\nu\}, \quad m = \mathrm{Min}\{a_\nu\},$$

a_ν étant les quantités réelles, b_ν non negatives. Il faut remarquer que M, respectivement m, ne dependent que des a_ν.

Dans ce travail je vais donner une esquisse de l'application de la propriété mentionée de la m. a. aux équations différentielles ordinaires dont les éléments x, y, y', y'', ... sont toujours réels. Autrement dit, notre but est, d'indiquer à quelques formes (types) des équations différentielles ordinaires assez fréquentes qu'on peut simplifier par la méthode de la m. a. La simplification consiste en réduction d'une équation differentielle

$$(2)\qquad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

à une autre plus simple

$$(3)\qquad f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m)}),$$

mais encadrée par deux fonctions $M(x)$ et $m(x)$.

Au point de vue de l'application de la méthode, on distinguera deux cas:

1° l'application directe, et

2° l'application indirecte.

II. *L'application directe.* Pour simplifier l'exposition de la méthode, considérons d'abord une équation du premier ordre dont la forme peut être exprimée par exemple par

$$f(x, y, y') = \frac{u_0 + u_1 \varphi(y, y')}{v_0 + v_1 \varphi(y, y')}. \tag{4}$$

Les fonctions u_ν, v_ν $(\nu = 0,1)$ sont réelles et continues, v_ν encore positives dans (a, b), et $\varphi(y, y')$ non négative pour toutes les valeurs réelles de y, y'. Alors l'application directe donne

$$m(x) \leqslant f(x, y, y') \leqslant M(x), \tag{5}$$

où

$$M(x) = \mathrm{Max}\left\{\frac{u_0}{v_0}, \frac{u_1}{v_1}\right\}, \quad m(x) = \mathrm{Min}\left\{\frac{u_0}{v_0}, \frac{u_1}{v_1}\right\}. \tag{6}$$

La réduction (5), indépedante de φ, est commune pour une famille des équations de la forme (4) lorsque la fonction $\varphi(y, y')$ est soumise aux restrictions enoncées.

Remarquons que $M(x)$ est *max* si pour une valeur $x_0 \in (a, b)$ est

$$M(x_0) > m(x_0),$$

c'est à dire $m(x)$ est *min*. Si cette inégalite est valable pour tout $x \in (a, b)$, alors on n'echange pas le rôle de *max* resp. *min* entre les fonction $M(x)$ et $m(x)$. Mais en général ce rôle *max* et *min* peut s'echanger plusieurs fois dans (a, b) ce que dépend des zéros réels de l'equation

$$M(x) - m(x) = 0.$$

Quelques exemples montrent que les équations différentielles assez compliquées peuvent être réduites aux équations connues et simples d'où il est beaucoup plus facile de déduire quelques conclusions pour les solutions particulières que de l'équation donnée.

Ainsi par ex. l'équation

$$y' = \frac{u_0 + u_1 y^{2k}}{v_0 + v_1 y^{2k}}, \tag{7}$$

se réduit aux équations différentielles comparatives très simples

$$y' = M(x) \qquad \text{et} \qquad y' = m(x),$$

indépendantes de k entier.

De même l'équation

$$y' + y a(x) = \frac{u_0 + u_1 e^{\lambda y}}{v_0 + v_1 e^{\lambda y}}, \tag{8}$$

où λ est réel, se réduit aux équations différentielles comparatives linéaires

$$y' + ya(x) = h(x),$$

$h(x)$ etant tantôt *max* tantôt *min* au sens qui est déjà expliqué.

Il est intéressant de citer l'exemple suivant

$$y = \frac{u_0 + u_1 y'^{2k}}{v_0 + v_1 y'^{2k}}, \quad k \text{ entier} \tag{9}$$

d'où il suit

$$m(x) \leqslant y \leqslant M(x),$$

pour toutes les valeurs de y'. Les propriétés de l'intégrale y suivent immédiatement sans aucune intégration.

Concrétement l'équation

$$y = \frac{\sin x + y'^2}{1 + y'^2} \tag{10}$$

donne

$$\sin x \leqslant y \leqslant 1.$$

D'où la conclusion: *si les intégrales de l'équation* (10) *possédent les zéros réels, ils peuvent se trouver seulement dans les intervalles* $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ *où k est entier.*

Les exemples (7), (8), (9) et (10) indiquent le rôle que joue la forme commune des équations quelques fois tout à fait différentes.

Le raisonnement analogue au precédent peut être appliqué à une équation plus générale

$$f(x, y, y') = \frac{\sum_{\nu=0}^{m} u_\nu \varphi_\nu}{\sum_{\nu=0}^{m} v_\nu \varphi_\nu}, \tag{11}$$

où les fonctions u_ν, v_ν et $\varphi_\nu(y, y')$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ remplissent les mêmes conditions comme dans l'équ. (4). Alors il suit

$$\operatorname{Min}_{0 \leqslant \nu \leqslant m} \left\{ \frac{u_\nu}{v_\nu} \right\} \leqslant f(x, y, y') \leqslant \operatorname{Max} \left\{ \frac{u_\nu}{v_\nu} \right\}. \tag{12}$$

Donc, les équations comparatives sont indépendantes de φ_ν.

III. *L'application indirecte.* On a vu que les cas et les exemples que nous avons traité, exigent que l'équation donnée doit avoir, ou bien doit être ramenée, à une *forme fractionaire.* Mais si cette forme n'existe pas, elle peut dans un grand nombre de cas être effectuée. L'équation considérée peut *être comparé* par un *élément comparatif* convenablement choisi. Sans nuir la généralite du raisonement on peut considérer d'abord l'équation simple

$$y' = u_0 + u_1 y^2, \tag{13}$$

où u_ν ($\nu = 0, 1$) sont les fonctions continues dans un intervalle (a,b). Constituons maintenant *l'élément comparatif* au moyen de l'expression

(14) $$v_0 + v_1 y^2 > 0$$

dont les fonctions v_ν ($\nu = 0, 1$) sont arbitraires mais positives dans (a,b). Alors l'équ. (13) *comparée* par (14) donne

$$\frac{y'}{v_0 + v_1 y^2} = \frac{u_0 + u_1 y^2}{v_0 + v_1 y^2},$$

d'où il suit

$$(v_0 + v_1 y^2) \cdot m(x) \leqslant y' \leqslant (v_0 + v_1 y^2) M(x),$$

$M(x)$ et $m(x)$ étant définies comme auparavant.

Il est vrai que la méthode conduit aux équations comparatives de même forme que l'équation donnée, mais le choix des fonctions arbitraires v_ν peut, dans beaucoup de cas, faire que les équations comparatives s'achèvent ou par quadrature ou bien se reduisent aux équations connues. Le cas le plus simple est celui ou les fonctions v_ν se reduisent a $c_\nu > 0$ (c_ν constantes arbitraires) Remarquons que les cas plus généraux

$$y' = \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu y^{2\nu} \quad \text{ou} \quad y' = \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu y^\nu$$

ne font pas les difficultés à la méthode, sauf la restriction $y > 0$ dans le second cas.

Citons quelques détails concernant le choix de *l'élément comparatif.* L'équation de Riccati (10) peut être par ex. comparée par $1 + y^2$. Or, de l'équation (10) il suit

$$\text{Min}\{u_0, u_1\} \leqslant \frac{y'}{1 + y^2} \leqslant \text{Max}\{u_0, u_1\}.$$

De même l'équation

$$y' = u_0 + u_1 y^2 + u_2 y^4 + \cdot \cdot \cdot + u_m y^{2m}$$

peut être comparée par

$$(1 + y^2)^m.$$

Donc

$$m(x) \leqslant \frac{y'}{(1 + y^2)^m} \leqslant M(x)$$

où

$$M(x) = \underset{0 \leqslant \nu \leqslant m}{\text{Max}} \left\{ \frac{u_\nu}{\binom{m}{\nu}} \right\}, \quad m(x) = \text{Min} \left\{ \frac{u_\nu}{\binom{m}{\nu}} \right\}.$$

L'exemple

$$y'^2 + yy' f_1(x) + y^2 f_2(x) = f_3(x)$$

montre que pour $y > 0$, $y' > 0$, elle peut être comparée par

$$(y' + yg(x))^2,$$

où $g(x)$ est une fonction arbitraire positive dans un intervalle (a, b). Alors on réduit l'équation donnée aux équations comparatives

$$m(x) \leqslant \frac{f_3(x)}{(y' + yg(x))^2} \leqslant M(x)$$

où

$$M(x) = \text{Max}\left\{1, \frac{f_1(x)}{2g(x)}, \frac{f_2(x)}{g^2(x)}\right\}, \quad m(x) = \text{Min}\left\{1, \frac{f_1(x)}{2g(x)}, \frac{f_2(x)}{g^2(x)}\right\}.$$

Les équations comparatives sont dans ce cas les équations linéaires.

Les procédés et les remarques que nous avons exposé en appliquant la méthode aux divers cas des équations différentielles du premier ordre sont applicables aussi et aux équations d'ordre superieur. L'exemple classique montre que l'équ. diff.

$$\frac{y''}{y} = R(x), \qquad R(x) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu \Big/ \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu x^\nu$$

se réduit pour $c_\nu > 0$, $x > 0$ aux équations

$$\lambda_1 \leqslant \frac{y''}{y} \leqslant \lambda_2, \qquad \lambda_1 = \underset{0 \leqslant \nu \leqslant m}{\text{Min}}\left\{\frac{a_\nu}{c_\nu}\right\}, \qquad \lambda_2 = \text{Max}\left\{\frac{a_\nu}{c_\nu}\right\},$$

linéaires à coefficients constants.

La restrictions $x > 0$ peut être diminuée, par la représentation de

$$R(x) = \sum_{\nu=0}^{m} a'_\nu (x+a)^\nu \Big/ \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu' (x+a)^\nu .$$

La méthode sera valable alors pour $c_\nu' > 0$ et $x > -a$, où a désigne un nombre arbitraire réel et positif.

IV. Dans cet article j'ai seulement le but d'indiquer un mode de simplification dans le domaine des équations differentielles ordinaires sans aller dans les détails de perfectionnement technique de la méthode. De même, j'ai laissé à coté maintenant aussi et l'analyse des intégrales particulières des équations données, c'est-à-direles recherches détaillés des propriétés des intégrales particulières, en considérant que cette question doit être étudiée séparément.

Ce travail unit méthodiquement le mode de determination des *intégrales premières qualitatives* d'une équation différentielle, d'après la définition suivante de M. Petrovitch [1]:

Dans un grand nombre de cas il existe pour une même équation

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

une telle expression

$$f\,(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)})$$

qui varie seulement dans un intervalle lorsque on y remplace une intégrale de l'équ. donnée. On exprime cela par

$$f=\lambda$$

avec

$$\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2.$$

La forme (1), c'est-à-dire la forme de la m. a., dont les propriétés nous avons employées comme un instrument méthodique, n'est pas la forme unique, mais je la trouve la plus simple et la plus fréquente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Petrovitch M.; *Calcul avec les intervalles numériques*, Beograd 1932, pp 163—164 (en serbe).