

Werk

Label: Article

Jahr: 1957

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0009|log40

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

LES PROBLÈMES ACTUELS DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

par F. G. TRICOMI, TURIN

1. Orientation

Le programme de ce „colloque“ donne déjà quelques indications sur les problèmes actuels dans la théorie des équations différentielles ordinaires: par exemple on y trouve des conférences sur des questions de stabilité et sur des questions asymptotiques qui sont des problèmes tout à fait à l'ordre du jour.

Mon rapport n'aura aucun caractère exhaustif, mais je cite seulement une suite d'exemples, car je n'ai fait aucune analyse systématique de l'énorme littérature du sujet dans ces dernières années, mais seulement des recherches. On pourrait même dire, en empruntant le mot de la science minéralogique, que je n'ai fait rien d'autre qu'une prospection du territoire récent de la théorie des équations différentielles ordinaires.

Toutefois je ne crois pas me tromper en disant que la grande majorité des centaines de travaux qu'on publie annuellement sur les équations différentielles ordinaires, traite l'étude qualitative — soit asymptotique soit non — des solutions de nos équations. Une minorité concerne des problèmes d'autre genre comme, par exemple, les suivants:

1) Les recherches de M. H. L. Turrittin[1] sur les équations linéaires avec des points singuliers irréguliers, qui, dans certains cas permettent de remplacer les représentations asymptotiques classiques des solutions avec des séries convergentes dans le sens ordinaire du mot.

2) Les contributions appréciables de M. D. S. Mitrinovitch[2] tendant au perfectionnement du traité bien connu de Kamke qui énumère plus de 1500 équations spéciales importantes.

3) Les recherches de M. H. T. Davis[3] sur deux des six équations algébriques du second ordre avec points critiques fixes qui — contrairement aux autres quarante équations et plus du catalogue célèbre de Painlevé — ne sont pas intégrables au moyen des fonctions classiques.

À côté de la prédominance des questions qualitatives, on remarque une prédominance des équations non-linéaires sur les linéaires. Ça ne veut pas toutefois dire que l'étude des équations et des systèmes linéaires soit épuisée ou presque épuisée et nous allons le voir tout de suite mais seulement que l'étude de quelques classes d'équations non-linéaires a été imposée par les applications, malgré la préférence bien compréhensible des mathématiciens pour les problèmes linéaires. En effet il y a des questions capitales sur les systèmes oscillants (mécaniques ou électriques) et sur les servo-mécanismes – c'est-à-dire sur l'automatisation – qui conduisent à des équations non-linéaires, qu'on ne peut pas linéariser sans les dénaturer.

Une confirmation de cette prédominance actuelle des équations non-linéaires est fournie par le fait que lorsque, récemment, mon ami G. Sansone a voulu compléter son traité encyclopédique bien connu sur les équations différentielles ordinaires par un livre concernant plus spécifiquement les équations non linéaires, il a dû écrire (en collaboration avec le Prof. R. Conti) un volume de 641 [4] pages entières qui est maintenant devenu un guide indispensable dans le labyrinthe des travaux récents sur ce sujet.

Mais, avant de revenir sur cela, disons quelques mots sur les questions actuellement plus vives dans le champ des équations linéaires.

2. Équations linéaires

Comme je viens de le dire, le champ des équations et des systèmes linéaires est loin d'être épuisé. En effet, on rencontre bien des travaux sur l'équation linéaire la plus simple possible après celles qui sont intégrables par quadratures, c'est-à-dire sur l'équation du second ordre:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A(x)y = 0. \quad (1)$$

Il s'agit quelque fois d'amélioration des conditions afin que les solutions aient un caractère oscillant ou non-oscillant, comme dans une partie des recherches récentes de Ph. Hartman et A. Wintner [5] et de R. V. Petropavlovskaya [6]; ou de l'étude, assez difficile, du comportement asymptotique des solutions non-oscillatoires sans hypothèses minimales sur le coefficient $A(x)$, comme dans certaines des dernières recherches de mon regretté collègue G. Ascoli [7]; ou encore d'améliorations de la limite inférieure, donnée initialement par De La Vallée-Poussin, de la distance de deux zéros consécutifs d'une solution oscillante [8].

Toutefois les recherches actuellement prédominantes ne sont pas celles de ce genre, mais plutôt, d'un côté, l'étude des systèmes d'un

nombre quelconque d'équations au moyen de la notation matricielle et, d'autre part, l'étude des points de transition dans les représentations asymptotiques.

En me limitant à dire ici quelque chose de la deuxième question seulement, je remarquerai que, dans les conditions les plus simples possibles, elle prend naissance lorsque le coefficient A de l'équation (1) a la forme

$$A(x) = q(x) + \lambda r(x) \quad (2)$$

λ étant un paramètre „très grand“ et $r(x)$ une fonction changeant de signe dans l'intervalle considéré.

Puisque le signe de $r(x)$ – et conséquemment de $A(x)$ – a une importance décisive pour le caractère (oscillatoire ou non-oscillatoire) des solutions de (1) pour $\lambda \rightarrow \infty$, on appelle (en ce cas) points de transition les zéros (avec changement de signe) de la fonction $r(x)$.

Jusqu'à une époque récente, les mathématiciens ont évité ces points gênants, mais depuis une trentaine d'années, des applications ont obligé à les envisager, et maintenant leur étude est assez avancée, au moins dans les cas des équations du second ordre. Dans le rapport récent de mon ami A. Erdélyi au Congrès International d'Amsterdam de 1954 [9] on donne une bonne orientation générale sur la question, et la bibliographie commentée du même Auteur [10] est un guide précieux dans la littérature, déjà assez ample, du sujet.

Toutefois, je me permets d'appeler l'attention aussi sur un petit mémoire de moi sur ce sujet [11] car je crois que la méthode de Fubini [12] que j'ai employée dans ce travail, n'est pas seulement un outil pour traiter la question, mais l'outil le plus naturel dans ce but.

En supposant que le point de transition considéré (pour simplifier: l'origine) soit simple, on montre que l'équation (1) peut se ramener à la forme

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + [\lambda - Q(x)] z = 0 \quad (3)$$

et successivement, en posant

$$x = (3\lambda)^{-\frac{1}{3}} t,$$

à l'autre

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{3} tz = \lambda^{-\frac{2}{3}} Q^*(t) z, \quad (4)$$

Q et Q^* étant deux fonctions régulières dans l'entourage du point de transition $x = t = 0$.

L'équation (4) — dont le premier membre, égal à zéro, donne l'équation différentielle des deux fonctions d'Airy $A_1(t)$ et $A_2(t)$ — est vraiment idéale pour l'application de la méthode de Fubini, qui, sans aucun calcul, montre que l'équation (3) a deux solutions linéairement indépendantes $Z_1(x)$ et $Z_2(x)$ données des représentations asymptotiques

$$Z_h(x) = A_h[(3\lambda)^{\frac{1}{3}}x] + O(\lambda^{-\frac{2}{3}})$$

qu'on pourrait améliorer sans trop de peine, comme il est montré dans mon travail cité plus haut.

Parmi les nombreux travaux tout récents sur ce sujet, je me borne à rappeler ici un mémoire de R. W. Mckelvey [13] sur les points de transition multiples et un de R. Langer [14] sur les équations linéaires du troisième ordre.

3. Équation de van der Pol et ses généralisations

Dans l'énorme littérature sur les questions des équations différentielles non-linéaires, une partie importante concerne l'équation de van der Pol (an 1926).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (5)$$

et ses généralisations successives, comme l'équation de Liénard (an 1928)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega f(x)\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (6)$$

l'équation de Liénard généralisée

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \quad (7)$$

etc, où les fonctions — coefficients $f(x)$ et $g(x)$ satisfont à des conditions que nous n'allons pas rappeler ici.

Plus récemment, toujours sous la pression des applications, on a commencé à étudier aussi les équations correspondantes non homogènes surtout lorsque la „fonction perturbatrice“ au second membre est une fonction périodique du temps t .

Dans l'étude de ces équations — qui dominent beaucoup de phénomènes vibratoires dans les systèmes avec un seul degré de liberté — ce qui intéresse avant tout, c'est l'existence ou la non-existence de solutions périodiques, soit lorsque ces solutions sont désirées (systèmes oscillants) soit lorsque elles ne sont pas désirées (p. ex. mécanismes avec auto-régulation).

Dans la recherche de ces solutions périodiques on peut quelquefois se servir d'une méthode développée par Henri Poincaré à l'usage de la mécanique céleste, mais plus souvent on est réduit à discuter si un système autonome de deux équations différentielles du premier ordre, c'est à dire un système de la forme

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (8)$$

admet ou non des caractéristiques (c'est-à-dire des courbes intégrales) fermées.

L'étude qualitative des caractéristiques d'un système autonome est un problème des plus classiques et je dois y revenir d'ici à peu. Il a donné lieu à des recherches célèbres de H. Poincaré, J. Bendixson et autres, qui – d'une certaine manière – marquent le passage de la théorie ancienne des équations différentielles à la théorie moderne, dans laquelle il n'y est plus question d'intégration „explicite“ de l'équation, mais de la discussion qualitative des solutions et des méthodes pour leur évaluation numérique.

Toutefois, tandis que ces études sont assez avancées en ce qui concerne l'étude locale du champ vectoriel (ou du champ de direction) attaché à l'équation, elles sont moins avancées en ce qui concerne les propriétés globales du champ, telles que l'existence d'une caractéristique fermée qui, habituellement, est un cycle limite de l'équation, à savoir la limite d'une infinité d'autres courbes intégrales.

Le problème de la recherche de ces cycles-limites pour un système de la forme (8) ou plus généraux est un des problèmes les plus actuels dans la théorie des équations différentielles ordinaires, et le livre cité de Sansone—Conti est un guide précieux dans la forêt des publications y relatives. On connaît une multitude de conditions soit nécessaires soit suffisantes pour l'existence de ces cycles limites mais, à l'état actuel des choses, un système du type (8) étant donné, il reste assez difficile de décider s'il y a ou non des cycles-limites et combien. Par exemple, ce n'est qu'en 1955 qu'un travail très intéressant de I. G. Petrovski et E. M. Landis [15] a montré que — $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ étant deux polynômes de deuxième degré — le nombre maximum (effectivement atteint) des cycles — limites du système (8) est trois.

Les difficultés sont encore plus considérables dans l'étude des oscillations forcées, c'est à dire dans le cas d'équations avec de seconds membres périodiques. En effet, — à part le fait que pareillement au cas linéaire, on peut avoir résonance ou non-résonance — il y a ici la difficulté que les oscillations „de régime“ du système n'ont pas nécessairement la même fréquence ν de la fonction perturbatrice, mais on peut aussi avoir les

oscillations „superharmoniques“ avec des fréquences multiples de ν . Sur ce sujet sont particulièrement importantes les recherches de M. L. Cartwright et J. E. Littlewood, sur lesquelles vient de paraître un gros mémoire dans les *Acta Mathematica* [16].

4. Points singuliers des systèmes autonomes

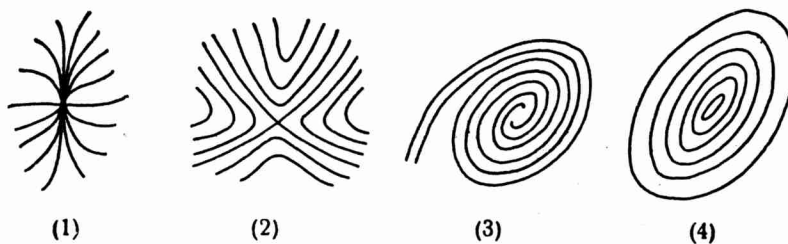
En passant sous silence d'autres questions importantes — par exemple les questions de stabilité dont a parlé M. Denjoy — je vais m'arrêter un moment sur la discussion des points singuliers isolés du champ vectoriel attaché à un système autonome du type (8), en faisant l'hypothèse habituelle que, dans le voisinage d'un de ces points — disons de l'origine O — le système peut s'écrire

$$\frac{dx}{dt} = Ax + By + f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Cx + Dy + g(x, y), \quad (9)$$

où A, B, C, D sont quatre constantes non toutes nulles à la fois et f et g deux fonctions d'ordre de grandeur plus petite que les premiers termes, c'est-à-dire telles que

$$f(x, y) = o(r), \quad g(x, y) = o(r); \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (10)$$

Comme il est généralement connu, le problème de la discussion des caractéristiques du système dans les environs de O est assez élémentaire si le déterminant $\Delta = AD - BC$ n'est pas zéro. Précisément — abstraction faite d'une difficulté relative à la distinction du cas du foyer de celui du centre — on sait qu'il n'y a que quatre configurations possibles des caractéristiques: 1) noeud, 2) col, 3) foyer, 4) centre (voir les croquis correspondants) qu'on peut distinguer les unes des autres en ayant égard au signe du déterminant Δ et du discriminant $(A - D)^2 + 4BC$.



Tout différent c'est le cas $\Delta = 0$, dans lequel ce que l'on savait jusqu'à ce dernier temps n'était pas beaucoup, bien que certaines méthodes de Bendixson, Frommer et d'autres fussent applicables même dans ce cas. On peut presque dire que l'on savait seulement que, à côté des quatre configu-

rations classiques précédentes, des configurations des caractéristiques tout à fait différentes étaient aussi possibles.

Quelques travaux importantes qui viennent de paraître apportent beaucoup de clarté sur la question.

Le principal de ces travaux est un travail de 1955 de K. A. Keil [17], auquel les Math. Reviews ne donnent que sept lignes mais qui est largement condensé dans le cité livre de Sansone-Conti. Dans ce travail on montre que, dans le cas considéré, le système peut être ramené à l'une ou à l'autre des deux systèmes canoniques:

$$(11^A) \quad \frac{dx}{dt} = x + f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g_1(x, y);$$

$$(11^B) \quad \frac{dx}{dt} = y + f_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g_2(x, y)$$

suivant que $A + D \neq 0$ ou $A + D = 0$, où les fonctions $f_1, \dots, g_2$ satisfont à des conditions analogues à (10).

La discussion du système (11^A) est la plus facile et on trouve que si l'origine n'est pas un col ou un noeud, elle peut être un noeud — col, c'est à dire un point singulier ayant le caractère de deux comme le montre le croquis (5) à côté.

La discussion du système (11^B) est un peu plus difficile et les résultats de Keil sont moins complets, dans ce sens que l'A. ne donne pas, en tout cas, des conditions a priori permettant de dire laquelle des différentes configurations possibles se vérifie dans un cas donné. En plus, pour pouvoir étudier des possibilités autres que les suivantes, il convient de renforcer les conditions (10) en supposant, par exemple, que les fonctions du genre de f et g soient douées de dérivées des deux premiers ordres continues.



Dans ces conditions on trouve que l'origine, si ce n'est pas un foyer ou un centre, peut donner lieu à deux configurations nouvelles que j'appellerai respectivement promontoire (promontorio, Bergvorsprung) et col mince (colle stretto, schmale Sattel) ou à deux configurations composées: noeud-promontoire et noeud-col mince.

Dans la configuration du promontoire (dont j'ai déjà parlé dans mon livre de 1953, en y donnant un exemple très élémentaire) il y a une caractéristique et une seule qui lie l'origine avec un point de rebrous-

sement, pendant que les autres ont une allure comparable à celle des courbes de niveau d'une carte topographique dans les environs justement d'un promontoire (voir le croquis 6 à côté).

La configuration des caractéristiques dans un col mince ne diffère pas complètement de celle bien connue du col, mais les deux séparatrices sont tangentes entre elles. Elle rappelle (croquis 7) l'allure des courbes de niveau dans les environs d'un col reliant deux larges vallées à travers une mince crête de montagne.



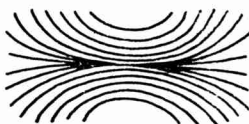
(6)



(7)



(8)



(9)

Enfin, les deux configurations composées donnent lieu à des figures du genre des croquis (8) et (9) à côté.

Comme on le voit, il y a neuf configurations de caractéristiques essentiellement différentes, tandis que dans un travail de A. F. Andreev [18] presque simultané à celui de Keil — que je connais seulement à travers une analyse (de M. S. Lefschetz) dans les Math Reviews — on parle de huit configurations. Probablement

M. Andreev devait trouver le cas (5) du noeud-col, parce qu'il considère seulement (11^B) comme forme canonique du système en discussion. Pour décider la question il faudrait étudier attentivement le travail original, ce que je n'ai pas pu faire pour beaucoup de raisons, dont la première est que je ne comprends pas le russe.

J'aime enfin à signaler un travail de R. M. Minc [19] sur l'allure des caractéristiques du système des trois équations

$$\dot{x} = P(x, y, z), \quad \dot{y} = Q(x, y, z), \quad \dot{z} = R(x, y, z)$$

où le point désigne la dérivation par rapport à t et P, Q, R sont trois polynômes des fonctions inconnues x, y, z . Il s'agit donc, essentiellement, de la discussion des courbes intégrales d'une équation du second ordre: un sujet sur lequel il n'y a pas beaucoup d'études.

5. Proposition d'un ouvrage international sur les équations différentielles

Je me permets de conclure ce rapport — qui n'a aucune prétention d'être complet — sur les problèmes actuels de la théorie des équations différentielles ordinaires, en exposant quelques réflexions que j'ai eu

l'occasion de faire pendant sa préparation, en passant en revue (avec l'aide essentielle des Math. Reviews) les centaines de travaux sur le sujet publiés dans ces derniers temps.

La première de ces réflexions c'est que ces travaux ainsi que ceux sur les équations aux dérivées partielles, l'analyse fonctionnelle etc – sont si nombreux, qu'on peut légitimement se demander: À quoi bon les publier, si bien peu de personnes peuvent jamais les lire? En effet, un bon mathématicien, connaissant les cinq ou six langues modernes importantes qui voudrait suivre personnellement (c'est à dire ne pas se servir seulement des résumés dans les Math. Reviews ou le Zentralblatt, quelquefois misleading) la littérature d'un de ces sujets devrait y consacrer presque toute sa journée de travail; avec le résultat de ne plus pouvoir, faute de temps, développer les connaissances si péniblement acquises!

On peut donc répéter, comme mon collègue G. Loria[20] le disait déjà en 1928: Quo vadimus? Où allons nous?

Mon impression est que nous nous trouvons dans une situation semblable à celle d'il n'y a presque deux siècles, lorsque on a dû se convaincre que le système ancien de communication des découvertes scientifiques au moyen de lettres privées entre savants ne marchait plus. Dès lors on a commencé à publier dans les journaux scientifiques et dans les comptes rendus des académies. Maintenant il faut créer quelque chose de nouveaux, sans continuer à faire semblant de croire qu'on lira ce que presque personne n'aura eu le temps de lire!

L'expérience nous apprend que les difficultés dont je parlais disparaissent – ou s'atténuent grandement – lorsque on a la chance de rencontrer dans le domaine qui intéresse, un ouvrage encyclopédique récent (et bien fait) du genre du livre de Sansone et Conti sur les équations non-linéaires dont j'ai parlé au commencement.

Pourquoi ne pas tâcher que cela soit la règle au lieu d'être l'exception?

Dans ce but, il serait nécessaire que l'Union Mathém. Internationale ou l'Unesco ou quelque autre organisation semblable nommât de petits comités d'experts de tous pays, chargés de publier un après l'autre, une dizaine d'ouvrages du genre indiqué, et de les maintenir à jour par des éditions successives, disons, tous les cinq ans. De cette manière avec la publication d'une couple de volumes chaque année (qu'on n'aura aucune difficulté à colloquer) la nécessité de consulter les travaux originaux se réduira, au pire des cas, à quatre ou cinq années, sauf des cas spéciaux (études historiques, par exemple).

On peut ajouter qu'avec une organisation semblable se réduiront grandement les inconvénients toujours croissants mais déjà sensibles de l'habitude (j'oserais dire de la mauvaise habitude) moderne de ces publi-

cations scientifiques demi-clandestines, ayant forme de „reports“ etc cyclo styles, si répandus maintenant surtout dans les Etats Unis. Il suffirait, en effet, de ces „reports“ qui seraient régulièrement envoyés au comité compétent qui – le cas échéant – les utilisera pour la prochaine édition de l'ouvrage dont il est chargé.

Je ne sais pas s'il était possible d'organiser quelque chose de semblable à ce que je propose, mais il faudra bien faire quelque chose si nous ne voulons pas étouffer dans une mer de papier. Faute de mieux, il ne restera qu'à recommander une espèce de birth controll, même pour les publications de mathématiques.

LITTÉRATURE

- [1] Acta Math. 93, 27—66 (1955); Confér. Semln. Matem. Bari, № 17 (1956).
- [2] La première note dans les Jahresb. d. Deutschen Math. Ver. 58, 58—60 (1956). Pour les suivantes on peut voir les Math. Reviews.
- [3] OOR Project № 956 (72 pp) Northwestern Univ., Evanston, Ill. 1955. Il vient de paraître un livre de Davis et d'autres auteurs intitulé „Studies in Differential Equations“ (Northwestern Univ. Press, Evanston 1956) contenant un article de Davis sur le sujet.
- [4] G. Sansone—R. Conti: Equazioni differenziali non lineari. Monogr. Mathem. C. N. R. № 3 — Roma, Ed. Cremonese, 1956.
- [5] American J. of Math. 77, 45—86 (1955).
- [6] Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.) 105, 29—31 (1955).
- [7] Boll. Unione Mat. Ital. (3) 8, 115—123 (1953); Riv. Matem. Univ. Parme, 4, 11—29 (1953).
- [8] Ph. Hartman—A. Wintner, Quart. Applied Math. 13, 330—2 (1955); C. Foiss—G. Gussi—V. Poenaru, Bul. Mat. Fiz. Acad. Romine, 7, 699—721 (1955).
- [9] Proced. Intern. Congress, III, 92—101 (1956).
- [10] California Inst. of Technology, Depth. of Math. Tech. Rep. № 22, 22 pp (Pasadena Calif 1955).
- [11] Rend. Acc. Lincei (8) 17, 137—141 (1954).
- [12] Cette méthode est une généralisation de la méthode bien connue de Liouville—Steklov—Langer, fondée, comme cette dernière, sur la traduction du problème en une équation intégrale de Volterra.
- [13] Trans. Amer. Math. Soc. 79, 103—123 (1955).
- [14] Trans. Amer. Soc. 80, 93—123 (1955).
- [15] Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.) 102, 29—32 (1955).
- [16] J. E. Littlewood, Acta Math. 97, 267—308 (1957).
- [17] Jahresber. Deutsche Math. Ver. 57, 111—132 (1955).
- [18] Vestnik Leningrad, 10, № 8, 43—65 (1955).
- [19] Dans le volume en mémoire de A. A. Andronov (Moscow, 1955) pp. 499—534.
- [20] Atti Congr. Intern. Matem., Bologna 1928—6, 421—26 (1932).