Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie

О ЧИСЛЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, У КОТОРОГО ПРАВАЯ ЧАСТЬ ЕСТЬ ОТНОШЕНИЕ ДВУХ МНОГОЧЛЕНОВ

И. ПЕТРОВСКИЙ, МОСКВА

Меня интересовала оценка сверху числа предельных циклов уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{1}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — многочлены n-ой степени с действительными коэффициентами.

Когда ставится задача об отыскании верхней грани числа действительных корней многочлена или числа действительных кусков, из которых может состоять плоская алгебраическая кривая n-го порядка, как хорошо известно, очень полезно бывает перейти в комплексную область. Я попытался перенести этот метод и для оценки числа предельных циклов уравнения (1).

Под комплексным решением $y=\varphi(x)$ уравнения (1) мы будем понимать полную аналитическую функцию (аналитическое продолжение по Вейерштрассу элемента решения). Если положить

$$x=x^*+i\,x^{**} \quad \text{и} \quad y=y^*+i\,y^{**},$$

где x^* и x^{**}, y^* и y^{**} — действительны, то каждому такому решению будет соответствовать некоторая двумерная поверхность Φ в четырёхмерном пространстве $(x^*,\ x^{**},\ y^*,\ y^{**})$. Кроме обыкновенных точек мы будем причислять к Φ полюсы и точки ветвления конечного порядка функции $\varphi(x)$. Но мы не будем причислять к Φ особые точки уравнения (1), где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ обращаются в 0. Мы будем предполагать, что рассматриваемые действительные замкнутые интегральные линии не проходят через особые точки уравнения (1).

Каждая действительная замкнутая интегральная линия уравнения (1), в частности предельный цикл, есть замкнутая одномерная линия (топологическая окружность), лежащая на одном из таких комплексных решений. Такую замкнутую одномерную линию мы будем называть циклом.

Комплексное двумерное пространство (x, y) мы будем считать проективным.

Мы исключим из рассмотрения некоторые особые уравнения, количество которых мало по сравнению со всеми уравнениями (1). Если изображать уравнения точками в пространстве K коэффициентов многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, то эти исключения составят множество M, которое не разбивает пространства K. Я буду говорить, что мы будем рассматривать *почти все* уравнения (1) или *общее* уравнение такого вида. В исключительное множество M попадут в частности все те уравнения, которые имеют бесконечно много замкнутых действительных интегральных линий. В начале рассмотрения нам придётся включить в это множество и ещё некоторые другие уравнения, но потом оказывается возможным распространить нашу оценку числа действительных предельных циклов на всякое уравнение (1) с действительными коэффициентами, имеющее лишь конечное число замкнутых решений.

Лемма I. У общего действительного уравнения (1) предельный цикл является циклом негомологичным нулю на соответствующей комплексной интегральной кривой Φ.

Доказательство. Мы говорим, что цикл C гомологичен нулю на двумерной поверхности Φ, если на этом цикле можно натянуть плёнку Π, состоящую только из внутренних точек Φ. Так как коэффициенты уравнения (1) мы предполагаем сейчас действительными, то точки комплексно-сопряжённые с точками Π также принадлежат Φ. Они образуют новую плёнку $\overline{\Pi}$, которая также натянута на C. Плёнки Π и $\overline{\Pi}$ вместе образуют, очевидно, всю поверхность Φ. Значит, вся поверхность Φ состоит только из обыкновенных точек кривой $y=\varphi(x)$, её полюсов и точек ветвления конечного порядка. Отсюда следует, что функция $y=\varphi(x)$ — алгебраическая. Но нетрудно показать, что уравнения вида (1), имеющие алгебраические решения, в пространстве K образуют множество (комплексной) размерности, чем K. И потому это множество не разбивает K и мы отнесём его к M.

Аналогично доказывается следующая

Лемма II. У общего действительного уравнения (1) два действительных предельных цикла, лежащие на одной и той же комплексной интегральной кривой, негомологичны между собою.

Оказывается, что каждое дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечно много комплексных решений, на которых имеются циклы негомологичные нулю. Но те циклы, которные гомологичны действительным предельным циклам уравнения (1) с действительными коэффициентами, обладают следующим замечательным свойством.

Рассмотрим проекцию цикла C, лежащего на комплексной интегральной кривой Φ, на какую-нибудь комплексную прямую l. Эта проекция образует на двумерной действительной плоскости, состоящей из точек l, некоторую замкнутую, вообще говоря, самопересекающуюся кривую S. Пусть p^* — есть число точек самопересечения этой проекции. Обозначим через p — минимум чисел p^* для класса гомологичных между собою циклов C. Можно показать, что p не зависит от выбора l и что у действительного уравнения (1) для циклов, гомологичных действительному предельному циклу, лежащих на соответствующей комплексной интегральной кривой Φ, всегда $p=0$. Мы будем говорить, что цикл C принадлежит к классу C_0. Значит, действительные предельные циклы принадлежат к классу C_0.

Московский математик Евгений Михайлович Ландис доказал следующее замечательное утверждение, которое является фундаментальным для излагаемого метода и которое я долго, но безуспешно пытался доказать.

Лемма III. Числа циклов C_p, имеющихся у всех решений уравнения (1), одинаковы почти для всех таких уравнений.

В частности, числа циклов C_0, соответствующих действительным предельным циклам, одинаковы почти у всех таких уравнений. Отсюда следует, что достаточно определить число циклов C_0 у решений одного такого уравнения общего вида и мы получим оценку для числа действительных предельных циклов и почти всех уравнений (1). К сожалению, этого нельзя сделать, рассматривая непосредственно одно какое-нибудь из общих уравнений (1). Это происходит потому, что топологическая структура общего комплексного решения общего уравнения (1) гораздо сложнее, чем топологическая структура решений, представляемых простейшими функциями, как это бывает, когда уравнение интегрируется.

Но я решил эту задачу для случая $n=2$ следующим образом. Я рассмотрел уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(y-1)}{x(x-1)}, \tag{2}$$

которое, конечно, является особым, принадлежащим множеству M, которое мы пока исключали из рассмотрения. Общее решение этого уравнения даётся формулой

$$y = \frac{c(x-1)}{x-c}. \tag{3}$$

На каждом из этих решений имеется бесконечно много циклов негомологичных нулю, если точки

$$x=0,\ y=0; \qquad x=0,\ y=1; \qquad x=1,\ y=0; \qquad x=1,\ y=1,$$

не считать принадлежащими комплексным линиям (3), так как эти точки являются особыми для уравнения (2). Точно также мы не будем считать принадлежним комплексным линиям (3) бесконечно удаленые особые точки уравнения (2).

Можно показать, что у всякого близкого к (2) уравнения вида (1), в том числе у неособого уравнения, может существовать комплексное решение имеющее цикл класса C_0, только в том случае, если этот цикл близок к некоторому циклу l класса C_0 на соответствующей кривой (3). Отсюда получается следующий метод определения числа циклов C_0 у общего комплексного уравнения (1) и тем самым для оценки числа предельных циклов у действительного уравнения такого вида.

Рассмотрим замкнутую кривую l класса C_0 на каком-нибудь комплексном решении (3). Проварьируем уравнение (2), то-есть, рассмотрим уравнения, близкие к нему. Тогда получим

$$\frac{d\delta y}{dx} = -\left[\frac{y(y-1)}{x(x-1)}\right]'_y \delta y + \frac{M_1(x,y)\cdot x\cdot(x-1)+M_2(x,y)\cdot y\cdot(y-1)}{x^2(x-1)^2} \tag{4}$$

где $\delta y(x)$ — вариация $y(x)$, а $M_1(x,y)$ и $M_2(x,y)$ — произвольные многочлены второй степени.

Пусть S есть проекция цикла l на комплексную плоскость x-ов, не имеющая самопересечений. Тогда этому циклу будет соответствовать цикл класса C_0 для близких к (2) уравнений вида (1), в том, и только в том случае, если приращение $\delta y(x)$ при обходе контура S будет равен 0. Для этого необходимо, как легко видеть, выписывая формулу для решения линейного уравнения первого порядка (4) относительно $\delta y(x)$, чтобы было

$$\int\limits_S \frac{(x-C)^2}{x(x-1)}\,\frac{x(x-1)M_1(x,y)+y(y-1)M_2(x,y)}{x^2(x-1)^2}\,dx=0\,. \tag{5}$$

Отсюда следует, что для того, чтобы оценить сверху число циклов класса C_0 у общего уравнения (1), нам надо рассмотреть замкнутые кривые S, охватывающие различные комбинации точек 0, 1, C и ∞ на плоскости x-ов и найти число значений C, при которых для каждой из этих кривых, выполняется равенство (5). Этот подсчёт легко производится, учитывая, что вычеты подинтегральной функции (5) суть рациональные функции относительно C. Производя этот подсчёт и учитывая также решения уравнений (2), не вошедшие в общее решение (3), мы находим, что всего на решениях уравнения (2) может быть 14 кривых, служащих пределами циклов класса C_0 для уравнений общего вида (1). Но через каждую особую точку уравнения (1) за исключением множества уравнений, имеющих размерность на одну (комплексную) единицу меньше, чем у множества всех уравнений (1) проходит 2 особых решения, для которых эта точка является обыкновенной. На каждом таком решении в окрестности особой точки лежит цикл, гомологичный нулю, но охватывающий эту точку. Уравнение (1) имеет 7 особых точек: 4 конечных и 3 бесконечно-удалённых. Одно из особых решений, проходящих через каждую бесконечно-удалённую особую точку, есть бесконечно удалённая прямая. Замкнутые линии на решениях уравнений (2), предельные для этих циклов, не лежащие на бесконечно удалённой прямой и охватывающие особые точки, также окажутся в числе найденных нами 14. Следовательно, из этого числа 14 надо исключить 11 замкнутых кривых, соответствующих циклам гомологичным нулю. Получим, что число циклов негомологичных нулю и друг другу, не больше 3.

С другой стороны, горьковский математик П. П. Баутин, нашёл уравнение вида (1) с тремя предельными циклами. Таким образом наша оценка для случая, когда $Q(x, y)$ и $P(x, y)$ многочлены второй степени, является точной.

Во всех предыдущих рассуждениях, мы принимали, что уравнение (1) есть общее уравнение. Но, предельным переходом от этого ограничения можно избавиться. Важно только, что это уравнение имело конечно число замкнутых действительных интегральных линий.

Методы, которыми мы оценивали число циклов класса C_0, у уравнения (1), применимы и для оценки количества циклов любого класса C_p у таких уравнений.

Следует особо отметить циклы, соответствующих таким линиям S на плоскости x-ов, у которых сумма обходов вокруг каждой из точек $0, I, C$, равна 0. Таким линиям S соответствует некоторый негомологичный нулю цикл на *каждом* решении у почти всех уравнений (1). Таким образом таких циклов у каждого такого уравнения имеет континуум.

Методы, которыми мы пользовались для оценки числа предельных циклов у действительного уравнения (1), когда степени многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ равны 2, мы с Ё. М. Ландисом применили и к общему случаю, когда многочлены $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в правой части уравнения имеют любую степень. Мы изучили таким образом топологическую структуру решений *почти у всех* уравнений, типа (1), то-есть – за исключением множества уравнений, которых коэффициенты многочленов

$P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в пространстве всех коэффициентов этих многочленов образуют множество низшей размерности.

Мы получили таким образом следующие оценки числа d действительных предельных циклов у таких уравнений

$$d \leqslant \frac{9n^3 + n^2 - 6n + 6}{2}, \quad \text{при нечётном } n \text{ и}$$

$$d \leqslant \frac{9n^3 - 4n^2 - 27n + 14}{2}, \quad \text{при чётном } n.$$

В отличие от случая $n=2$, эти оценки, повидимому, неточны. Пока имеются примеры уравнений вида (1), у которых число предельных циклов порядка n^2.

Трудности при изучении уравнения (1), когда $n > 2$, состояли в следующем.

Возьмём какое-нибудь семейство комплексных алгебраических кривых:

$$M(x, y) + c\,N(x, y) = 0 \tag{6}$$

где c — постоянный комплексный параметр. Это семейство аналогично семейству (3). Возьмём какой-нибудь цикл C на одной из кривых семейства (6) и будем его непрерывно деформировать, когда точка x описывает замкнутую линию на комплексной плоскости. Как известно, благодаря известным работам Соломона Александровича Лефшеца, цикл C при этом обходе не перейдёт, вообще говоря, в цикл гомологичный переходному. Соответственно этому при $n > 2$ интегралы аналогичные интегралу (5) не будут уже рациональными функциями c. Поэтому нам пришлось вместо простого семейства (3) исходить и из более сложного семейства (6), когда общая линия этого семейства имеет особенности.