Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie

PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par T. PEYOVITCH, BEOGRAD

Le but de cet article est d'exposer quelques propriétés asymptotiques du système (1) en utilisant la méthode des approximations successives de Picard, qui donne les résultats les plus efficaces.

Soit donné, pour abgréger l'écriture, un système de deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}\, y + a_{12}\, z + f_1(x) + F_1(x, y, z), \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = a_{21}\, y + a_{22}\, z + f_2(x) + F_2(x, y, z), \end{cases}$$

où a_{ik} sont des constantes, $f_i(x)$ et $F_i(x, y, z)$ des fonctions définies et continues pour $|y| < A, |z| < A$ et pour la variable réelle $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant aux conditions

$$(2) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f_i(x) = b_i, \quad F_i(x, 0, 0) = 0, \\[2ex] |F_i(x, y, z) - F_i(x, \bar{y}, \bar{z})| \leqslant L\, [|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|], \end{cases}$$

A et L étant des nombres positifs et fixés et b_i des constantes finies et déterminées.

Le système (1), par la transformation linéaire à coefficients constants

$$(3) \qquad \begin{cases} u = \alpha_{11}\, y + \alpha_{12}\, z \\ v = \alpha_{21}\, y + \alpha_{22}\, z \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} y &= \beta_{11}\, u + \beta_{12}\, v, \\ z &= \beta_{21}\, u + \beta_{22}\, v, \end{aligned}$$

dont les déterminants $|\alpha_{ik}| \neq 0, |\beta_{ik}| \neq 0$, peut être ramené à une forme canonique dépandant de la nature de l'équation caractéristique

$$(4) \qquad D(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{vmatrix} = 0.$$

A la racine double ($r_1 = r_2$) correspond en général le système d'équations de la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = r_1 u + \varphi_1(x) + \Phi_1(x, u, v), \\[2ex] \dfrac{dv}{dx} = r_1 v + u + \varphi_2(x) + \Phi_2(x, u, v) \end{cases}$$

avec

$$\varphi_i(x) = \alpha_{i1} f_1(x) + \alpha_{i2} f_2(x)$$

$$\Phi_i(x, u, v) = \alpha_{i1} F_1(x, \beta_{11} u + \beta_{12} v, \beta_{21} u + \beta_{22} v) +$$

$$+ \alpha_{i2} F_2(x, \beta_{11} u + \beta_{12} v, \beta_{21} u + \beta_{22} v).$$

Il est évident que les fonctions $\varphi_i(x)$ et $\Phi_i(x, u, v)$ sont, d'aprés (2) et (3), définies et continues pour $|u| < B$, $|v| < B$ et pour la variable réelle $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant au conditions

$$(6)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} \varphi_i(x) = d_i, \qquad \Phi_i(x, 0, 0) = 0, \\[2ex] \Phi_i(x, u, v) - \Phi_i(x, \bar{u}, \bar{v}) \leqslant K[|u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|], \end{cases}$$

B et K étant des nombres positifs ef fixés et d_i des constantes finies et déterminées.

Cherchons les solutions des équations (5) par la méthode des approximations successives.

Sait, pour $x \geqslant x_0 > 0$, u_0 et v_0 un système de solutions asymptotiques bornées des équations[1])

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{du_0}{dx} = r_1 u_0 + \varphi_1(x), \\[2ex] \dfrac{dv_0}{dx} = r_1 v_0 + u_0 + \varphi_2(x), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(8)\qquad |u_0(x)| \leqslant M, \ |v_0(x)| \leqslant M \text{ pour } x \geqslant x_0 > 0,$$

auquel correspond, d'après (3), un système de solutions asymptotiques bornées y_0 et z_0 des équations

$$\frac{dy_0}{dx} = a_{11} y_0 + a_{12} z_0 + f_1(x),$$

$$\frac{dz_0}{dx} = a_{21} y_0 + a_{22} z_0 + f_2(x).$$

---

[1]) C'est-à-dire les solutions, pour $x \geqslant x_0 > 0$, qui tendent vers des limites finies et déterminées, lorsque x augmente indéfiniment.

En partant des solutions u_0 et v_0 de système (7), on peut déterminer deux suites de fonctions

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots,$$

comme les solutions des équations

$$\tag{9} \begin{cases} \dfrac{du_n}{dx} = r_1 u_n + \varphi_1(x) + \Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1}), \\ \dfrac{dv_n}{dx} = r_1 v_n + u_n + \varphi_2(x) + \Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1}). \end{cases}$$

Les équations intégrales correspondant aux équations ci-dessus sont

$$u_n = e^{r_1 x}\left(\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\varphi_1(x)\,dx + C_1\right) + e^{r_1 x}\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx,$$

$$v_n = e^{r_1 x}\left(\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\varphi_2(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x} u_n\,dx + C_2\right) +$$

$$+ e^{r_1 x}\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx,$$

ou

$$u_n = e^{r_1 x}\left(\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\varphi_1(x)\,dx + C_1\right) + e^{r_1 x}\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx,$$

$$v_n = e^{r_1 x}\left\{\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\varphi_2(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} dx\left[\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\varphi_1(x)\,dx + C_1\right] + C_2\right\} +$$

$$+ e^{r_1 x}\left[\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx + \int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx\right].$$

Nous allons distinguer plusieurs cas:

1°. r_1 *est un nombre réel négatif ou complexe à partie réelle négative* $\rho < 0$.

Dans ce car on aura, d'après (7),

$$(10)\qquad \begin{cases} u_n = u_0 + e^{r_1 x}\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\,\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx, \\ v_n = v_0 + e^{r_1 x}\Bigg[\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\,\Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx + \\ \quad + \displaystyle\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\,\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx\Bigg]. \end{cases}$$

Pour $n=1$ les équations ci-dessus, d'après (6), donnent

$$|u_1 - u_0| \leqslant Ke^{\rho x}\int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}[|u_0| + |v_0|]\,dx,$$

$$|v_1 - v_0| \leqslant Ke^{\rho x}\left\{\int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}[|u_0| + |v_0|]\,dx + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}[|u_0| + |v_0|]\,dx\right\}$$

ou, d'après (8),

$$(11)\qquad \begin{cases} |u_1 - u_0| \leqslant 2KM\dfrac{1}{|\rho|} \leqslant 2KM\left(\dfrac{1}{|\rho|} + \dfrac{1}{|\rho|^2}\right), \\ |v_1 - v_0| \leqslant 2KM\left(\dfrac{1}{|\rho|} + \dfrac{1}{|\rho|^2}\right). \end{cases}$$

Pour $n=2$ les équations (10), d'après (6), donnent

$$|u_2 - u_1| \leqslant Ke^{\rho x}\int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}[|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|]\,dx,$$

$$|v_2 - v_1| \leqslant Ke^{\rho x}\left\{\int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}[|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|]\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}[|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|]\,dx\right\}$$

ou, d'après (11),

$$|u_2-u_1| \leqslant (2K)^2 M\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)\frac{1}{|\rho|} \leqslant (2K)^2 M\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)^2,$$

$$|v_2-v_1| \leqslant (2K)^2 M\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right) \leqslant (2K)^2 M\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)^2.$$

Continuant ainsi de suite, on obtiendra

$$|u_n-u_{n-1}| \leqslant (2K)^n M\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)^n.$$

$$|v_n-v_{n-1}| \leqslant (2K)^n M\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)^n.$$

Si l'on a

$$(12) \qquad 2K\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right) < 1, \qquad M\frac{1}{1-2K\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)} \leqslant B,$$

les séries

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n-1}), \\ v = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(v_n - v_{n-1}) \end{cases}$$

convergent uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$ et représentent les solutions des équations (5).

A. *Les équations* (1) *admettent, d'après* (3), *pour* $x \geqslant x_0 > 0$, *un système de solutions asymptotiques bornées dépendant de deux paramètres arbitraires (constantes d'intégrations), sous les conditions* (2) *et* (12).

2°. r_1 *est un nombre réel positif ou complexe à partie réelle positive* $\rho > 0$.

Dans ce cas les équations (10) deviennent

$$(13) \qquad \begin{cases} u_n = u_0 - e^{r_1 x}\int_x^{\infty} e^{-r_1 x}\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx. \\ v_n = v_0 - e^{r_1 x}\left[\int_x^{\infty} e^{-r_1 x}\Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx - \right. \\ \left. - \int_x^{\infty} dx \int_x^{\infty} e^{-r_1 x}\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx\right] \end{cases}$$

avec

$$u_0 = e^{r_1 x} \int_{\infty}^{x} e^{-r_1 x} \varphi_2(x)\, dx,$$

$$v_0 = e^{r_1 x} \left[\int_{\infty}^{x} e^{-r_1 x} \varphi_2(x)\, dx + \int_{\infty}^{x} dx \int_{\infty}^{x} e^{-r_1 x} \varphi_1(x)\, dx \right].$$

Pour $n=1$ les équations (13), d'après (6), donnent

$$| u_1 - u_0 | \leqslant K e^{\rho x} \int_{x}^{\infty} e^{-\rho x} [\, | u_0 | + | v_0 | \,]\, dx,$$

$$| v_1 - v_0 | \leqslant K e^{\rho x} \left\{ \int_{x}^{\infty} e^{-\rho x} [\, |u_0| + | v_0 | \,]\, dx + \int_{x} dx \int_{x} e^{-\rho x} [\, | u_0 | + | v_0 | \,]\, dx \right\}$$

ou, d'après (8),

$$(14) \qquad \begin{cases} | u_1 - u_0 | \leqslant 2KM \dfrac{1}{\rho} \leqslant 2KM \left(\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{\rho^2} \right), \\[2ex] | v_1 - v_0 | \leqslant 2KM \left(\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{\rho^2} \right). \end{cases}$$

Pour $n=2$ les équations (13), d'après (6), donnent

$$| u_2 - u_1 | \leqslant K e^{\rho x} \int_{x}^{\infty} e^{-\rho x} [\, | u_1 - u_0 | + | v_1 - v_0 | \,]\, dx,$$

$$| v_2 - v_1 | \leqslant K e^{\rho x} \left\{ \int_{x}^{\infty} e^{-\rho x} [\, | u_1 - u_0 | + | v_1 - v_0 | \,]\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x}^{\infty} dx \int_{x}^{\infty} e^{-\rho x} [\, | u_1 - u_0 | + | v_1 - v_0 | \,]\, dx \right\}$$

ou, d'après (14),

$$| u_2 - u_1 | \leqslant (2K)^2 M \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{1}{\rho} \leqslant (2K)^2 M \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right)^2,$$

$$| v_2 - v_1 | \leqslant (2K)^2 M \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right)^2.$$

Continuant ainsi de suite, on obtiendra

$$| u_n - u_{n-1} | \leqslant (2K)^n M \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right)^n ,$$

$$| v_n - v_{n-1} | \leqslant (2K)^n M \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right)^n .$$

Par conséquent, les séries (α) convergent uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$ sous la conditions (12) et représentent les solutions des équations (5).

B. *Les équations* (1) *admettent, d'après* (3), *pour* $x \geqslant x_0 > 0$, *un système de solutions asymptotiques bornées, sous les conditions* (2) *et* (12).

3°. r_1 *est nombre imaginaire* $r_1 = \theta i$ *ou égale à zéro* ($\theta = 0$).

Dans ce cas les équations (13) deviennent

$$(15) \quad \begin{cases} u_n = u_0 - e^{\theta i x} \int\limits_x^{\infty} e^{-\theta i x} \Phi_1 (x, u_{n-1}, v_{n-1})\, dx , \\ v_n = v_0 - e^{\theta i x} \Bigg[\int\limits_x^{\infty} e^{-\theta i x} \Phi_2 (x, u_{n-1}, v_{n-1})\, dx - \\ \quad - \int\limits_x^{\infty} dx \int\limits_x^{\infty} e^{-\theta i x} \Phi_1 (x, u_{n-1}, v_{n-1})\, dx \Bigg] , \end{cases}$$

avec

$$u_0 = e^{\theta i x} \int\limits_{\infty}^{x} e^{-\theta i x} \varphi_1 (x)\, dx ,$$

$$v_0 = e^{\theta i x} \left[\int\limits_{\infty}^{x} e^{-\theta i x} \varphi_2 (x)\, dx + \int\limits_{\infty}^{x} dx \int\limits_{\infty}^{x} e^{-\theta i x} \varphi_1 (x)\, dx \right] .$$

Pour $n = 1$ les équations, d'après (6), donnent

$$| u_1 - u_0 | \leqslant K \int\limits_x^{\infty} [| u_0 | + | v_0 |]\, dx = K \varepsilon_1^{(1)} (x) ,$$

$$| v_1 - v_0 | \leqslant K \left\{ \int\limits_x^{\infty} [| u_0 | + | v_0 |]\, dx + \int\limits_x^{\infty} dx \int\limits_x^{\infty} [| u_0 | + | v_0 |]\, dx \right\} = K \varepsilon_2^{(1)} (x)$$

avec

$$\varepsilon_1^{(1)}(x) \to 0, \qquad \varepsilon_2^{(1)}(x) \to 0 \qquad \text{pour } x \to \infty,$$

sous la conditions

$$\int_x^\infty dx \int_x^\infty [\,|u_0| + |v_0|\,]\, dx = o\,(1) \qquad \text{pour } x \to \infty.$$

Soit $\varepsilon^{(1)}(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_1^{(1)}(x) \leqslant \varepsilon^{(1)}(x), \qquad \varepsilon_2^{(1)}(x) \leqslant \varepsilon^{(1)}(x) \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0,$$

avec $\varepsilon^{(1)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$, on aura

(16) $\quad |u_1 - u_0| \leqslant K\,\varepsilon^{(1)}(x), \quad |v_1 - v_0| \leqslant K\,\varepsilon^{(1)}(x), \quad$ pour $x \geqslant x_0 > 0.$

Pour $n=2$ les équations (15), d'après (6), donnent

$$|u_2 - u_1| \leqslant K \int_x^\infty [\,|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|\,]\, dx,$$

$$|v_2 - v_1| \leqslant K \left\{ \int_x^\infty [\,|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|\,]\, dx + \int_x^\infty dx \int_x^\infty [\,|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|\,]\, dx \right\}$$

ou, d'après (16),

$$|u_2 - u_1| \leqslant 2K^2 \varepsilon_1^{(2)}(x), \quad |v_2 - v_1| \leqslant 2K^2 \varepsilon_2^{(2)}(x)$$

avec

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon_1^{(2)}(x) = \lim_{x\to\infty} \int_x^\infty \varepsilon^{(1)}(x)\, dx = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon_2^{(2)}(x) = \lim_{x\to\infty} \left[\int_x^\infty \varepsilon^{(1)}(x)\, dx + \int_x^\infty dx \int_x^\infty \varepsilon^{(1)}(x)\, dx \right] = 0,$$

sous la condition

$$\int_x^\infty dx \int_x^\infty \varepsilon^{(1)}(x)\, dx = o\,(1) \qquad \text{pour } x \to \infty.$$

Soit $\varepsilon^{(2)}(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_1^{(2)}(x) \leqslant \varepsilon^{(2)}(x), \qquad \varepsilon_2^{(2)}(x) \leqslant \varepsilon^{(2)}(x) \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0,$$

avec $\varepsilon^{(2)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$, on aura

$$|u_2 - u_1| \leqslant 2K^2 \varepsilon^{(2)}(x), \qquad |v_2 - v_1| \leqslant 2K^2 \varepsilon^{(2)}(x) \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0.$$

Continuant ainsi de suite, on obtiendra

$$|u_n - u_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}(2K)^n \varepsilon^{(n)}(x), \qquad |v_n - v_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}(2K)^n \varepsilon^{(n)}(x),$$

où $\varepsilon^{(n)}(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ est une suite de fonctions positives et continues, pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant à la relation $\varepsilon^{(n)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$ sous la condition

$$(17) \qquad \int_x^\infty dx \int_x^\infty \varepsilon^{(n-1)}(x)\, dx = o(1) \qquad \text{pour } x \to \infty, \ (n = 1, 2, \ldots)$$

et qui doit converger uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$.

La suite de fonctions $\varepsilon^{(n)}(x)$, à cause de la relation $\varepsilon^{(n)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$ est bornées pour $x \geqslant x_0 > 0$, c'est-à-dire

$$\varepsilon^{(n)}(x) \leqslant M \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si l'on a

$$(18) \qquad 2K < 1, \qquad M\frac{1-K}{1-2K} \leqslant B,$$

les séries (α) convergent uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$ et représentent les solutions des équations (5), sous la condition (17) et si la suite de fonctions $\varepsilon^{(n)}(x)$ converge uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$.

C. *Les équations* (1) *admettent, d'après* (3), *pour* $x \geqslant x_0 > 0$, *un système de solutions asymptotiques bornées, sous les conditions* (2), (17), (18) *et si la suite de fonctions* $\varepsilon^{(n)}(x)$ *converge uniformément pour* $x \geqslant x_0 > 0$.

4°. r_1 *est un nombre réel négatif ou complexe à partie réelle négative* $\rho_1 < 0$ (1°.), r_2 *est un nombre réel positif ou complexe à partie réelle positive* $\rho_2 > 0$ (2°.).

Dans ce cas les équations (5) et (9) deviennent

$$(5') \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = r_1 u + \varphi_1(x) + \Phi_1(x, u, v), \\[2ex] \dfrac{dv}{dx} = r_2 v + \varphi_2(x) + \Phi_2(x, u, v); \end{cases}$$

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du_n}{dx} = r_1 u_n + \varphi_1(x) + \Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1}), \\[2ex] \dfrac{dv_n}{dx} = r_2 v_n + \varphi_2(x) + \Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1}), \end{cases}$$

d'où l'on a

$$\text{(19')} \qquad \begin{cases} u_n = u_0 + e^{r_1 x} \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x} \Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\, dx, \\[2ex] v_n = v_0 - e^{r_2 x} \displaystyle\int_{x}^{\infty} e^{-r_2 x} \Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1})\, dx \end{cases}$$

avec

$$u_0 = e^{r_1 x}\left(\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x} \varphi_1(x)\, dx + C_1\right),$$

$$v_0 = e^{r_2 x} \int_{\infty}^{x} e^{-r_2 x} \varphi_2(x)\, dx.$$

Pour $n=1$ les équations (19), d'après (6), donnent

$$|u_1 - u_0| \leqslant K e^{\rho_1 x} \int_{x_0}^{x} e^{-\rho_1 x} [|u_0| + |v_0|]\, dx,$$

$$|v_1 - v_0| \leqslant K e^{\rho_2 x} \int_{x}^{\infty} e^{-\rho_2 x} [|u_0| + |v_0|]\, dx$$

ou, d'après (8),

$$|u_1 - u_0| \leqslant M \frac{2K}{|\rho_1|}, \qquad |v_1 - v_0| \leqslant M \frac{2K}{|\rho_2|}$$

ou

$$\text{(20)} \qquad |u_1 - u_0| \leqslant M \frac{2K}{|\rho_1|}, \qquad |v_1 - v_0| \leqslant M \frac{2K}{|\rho_1|},$$

sous la condition, par exemple, $\dfrac{1}{|\rho_2|} \leqslant \dfrac{1}{|\rho_1|}$.

Pour $n=2$ les équations (19), d'après (6), donnent

$$|u_2-u_1| \leqslant K e^{\rho_1 x} \int_x^x e^{-\rho_1 x} [|u_1-u_0|+|v_1-v_0|]\, dx\,,$$

$$|v_2-v_1| \leqslant K e^{\rho_2 x} \int_x^\infty e^{-\rho_2 x} [|u_1-u_0|+|v_1-v_0|\, dx$$

ou, d'après (20),

$$|u_2-u_1| \leqslant M \frac{(2K)^2}{|\rho_1|^2}, \qquad |v_2-v_1| \leqslant M \frac{(2K)^2}{|\rho_1 \rho_2|} \leqslant M \frac{(2K)^2}{|\rho_1|^2}.$$

Continuant ainsi de suite, on obtiendra

$$|u_n-u_{n-1}| \leqslant M \frac{(2K)^n}{|\rho_1|^n}, \qquad |v_n-v_{n-1}| \leqslant M \frac{(2K)^n}{|\rho_1|^n}.$$

Si l'on a

(21) $$\frac{2K}{|\rho_1|} < 1$$

les sèries (α) convergent uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$ et représentent les solutions des équations (5′).

D. *Les équations* (1) *admettent, d'après* (3), *pour* $x \geqslant x_0 > 0$, *un système de solutions asymptotiques bornées dépendant d'un paramètre arbitraire (constante d'intégration), sous les conditions* (2) *et* (21).

5°. r_1 *est nombre réel négatif ou complexe à partie réelle négative* $\rho_1 < 0$ (1°.), r_2 *est nombre imaginaire ou zéro* ($\theta_2 = 0$) (3°).

Dans ce cas l'équations (19′) deviennent

(22) $$\begin{cases} u_n = u_0 + e^{r_1 x} \displaystyle\int_{x_0}^x e^{-r_1 x} \Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\, dx\,, \\ v_n = v_0 - e^{\theta_2 i x} \displaystyle\int_x e^{-\theta_2 i x} \Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1})\, dx \end{cases}$$

avec

$$u_0 = e^{r_1 x}\left(\int_{x_0}^x e^{-r_1 x} \varphi_1(x)\, dx + C_1\right),$$

$$v_0 = e^{\theta_2 i x} \int_\infty^x e^{-\theta_2 i x} \varphi_2(x)\, dx\,.$$

Pour $n=1$ les équations (22), d'après (6), donnent

$$|u_1-u_0| \leqslant K e^{\rho_1 x} \int_{x_0}^{x} e^{-\rho_1 x} [|u_0|+|v_0|]\, dx = K \varepsilon_1^{(1)}(x),$$

$$|v_1-v_0| \leqslant K \int_{x}^{\infty} [|u_0|+|v_0|]\, dx = K \varepsilon_2^{(1)}(x),$$

avec $\varepsilon_1^{(1)}(x) \to 0$, $\varepsilon_2^{(1)}(x) \to 0$, sous les conditions

(23) $\qquad u_0(x) \to 0, \qquad v_0(x) \to 0 \qquad$ pour $x \to \infty$,

(24) $\qquad \int_{x}^{\infty} [|u_0|+|v_0|]\, dx = o(1) \qquad$ pour $x \to \infty$.

Soit $\varepsilon^{(1)}(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_1^{(1)}(x) \leqslant \varepsilon^{(1)}(x), \qquad \varepsilon_2^{(2)}(x) \leqslant \varepsilon^{(1)}(x) \qquad \text{pour } x \geqslant x > 0$$

avec $\varepsilon^{(1)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$, on aura

(25) $\qquad |u_1-u_0| \leqslant K \varepsilon^{(1)}(x), \qquad |v_1-v_0| \leqslant K \varepsilon^{(1)}(x).$

Pour $n=2$, les équations (22), d'après (6), donnent

$$|u_2-u_1| \leqslant K e^{\rho_1 x} \int_{x_0}^{x} e^{-\rho_1 x} [|u_1-u_0|+|v_1-v_0|]\, dx,$$

$$|v_2-v_1| \leqslant K \int_{x}^{\infty} [|u_1-u_0|+|v_1-v_0|]\, dx$$

ou, d'après (25),

$$|u_2-u_1| \leqslant 2K^2 e^{\rho_1 x} \int_{x_0}^{x} e^{-\rho_1 x} \varepsilon^{(1)}(x)\, dx = 2K^2 \varepsilon_1^{(2)}(x)$$

$$|v_2-v_1| \leqslant 2K^2 \int_{x}^{\infty} \varepsilon^{(1)}(x)\, dx = 2K^2 \varepsilon_2^{(2)}(x),$$

avec $\varepsilon_1^{(2)}(x) \to 0$, $\varepsilon_2^{(2)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$, sous la condition

$$\int_{x}^{\infty} \varepsilon^{(1)}(x)\, dx = o(1) \qquad \text{pour } x \to \infty.$$

Soit $\varepsilon^{(2)}(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_1^{(2)}(x) \leqslant \varepsilon^{(2)}(x), \quad \varepsilon_2^{(2)}(x) \leqslant \varepsilon^{(2)}(x) \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0,$$

avec $\varepsilon^{(2)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$, on aura

$$|u_2 - u_1| \leqslant 2K^2 \varepsilon^{(2)}(x), \qquad |v_2 - v_1| \leqslant 2K^2 \varepsilon^{(2)}(x).$$

Continuant ainsi de suite, on obtiendra

$$|u_n - u_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}(2K)^n \varepsilon^{(n)}(x), \qquad |v_n - v_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}(2K)^n \varepsilon^{(n)}(x),$$

où $\varepsilon^{(n)}(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ est une suite de fonctions positives et continues pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant à la relation $\varepsilon^{(n)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$, sous la condition

$$(26) \qquad \int_x^\infty \varepsilon^{(n-1)}(x)\, dx = o(1) \qquad \text{pour } x \to \infty, \ (n = 1, 2, \ldots)$$

et doit converger uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$.

La suite de fonctions $\varepsilon^{(n)}(x)$, à cause de la relation $\varepsilon^{(n)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$ et bornée pour $x \geqslant x_0 > 0$, c'est-à-dire

$$\varepsilon^{(n)}(x) \leqslant M \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0, \ (n = 1, 2, \ldots),$$

Les séries (α) d'après (18), convergent uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$ et représentent les solutions des équations (5′), sous les conditions (23) et (26) et si la suite de fonctions $\varepsilon^{(n)}(x)$ convergent uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$.

E. *Les équations* (1) *admettent, d'après* (3), *pour* $x \geqslant x_0 > 0$ *un système de solutions asymptotiques bornées dependant d'un paramètre (constante d'intégration), sous les conditions* (2), (18), (23) *et* (26) *et si la suite de fonctions* $\varepsilon^{(n)}(x)$ *converge uniformèment pour* $x \geqslant x_0 > 0$.

Remarque. — Si l'on remplace les conditions (2) par les conditions

$$(2') \qquad \begin{cases} \lim_{x \to \infty} f_i(x) = b_i, \ F_i(x, 0, 0), \\ F_i(x, y, z) - F_i(x, \bar{y}, \bar{z}) \leqslant \lambda(x)\,[\,|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|\,], \end{cases}$$

où $\lambda(x)$ est fonction définie, positive et continue pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant à la condition $\lim_{x \to \infty}(x) = 0$ ou bornée les démonstrations des théorèmes précédents peuvent être un peu modifiées*). Dans ce cas les condi tions (6) deviennent

$$(6') \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \varphi_i(x) = d_i, \quad \Phi_i(x, 0, 0) = 0 \\ | F_i(x, u, v) - \Phi_i(x, \bar{u}, \bar{v}) | = K\lambda(x)[|u-\bar{u}| + |v-\bar{v}|]. \end{cases}$$

Considérons, par exemple le 3° cas. Dans ce cas les équations (15), pour $n=1$, d'après (6'), donnent

$$(26) \begin{cases} |u_1 - u_0| \leqslant K\int\limits_x^\infty \lambda(x)[|u_0| + |v_0|]\,dx = M\,2\,K\int\limits_x^\infty \lambda(x)\,dx = M\varepsilon_1(x), \\ |v_1 - v_0| \leqslant K\left\{\int\limits_x^\infty \lambda(x)[|u_0| + |v_0|]\,dx + \int\limits_x^\infty dx\int\limits_x^\infty \lambda(x)\,dx\,[|u_0| + |v_0|]\,dx\right\} \leqslant \\ \qquad \leqslant M\,2\,K\left\{\int\limits_x^\infty \lambda(x)\,dx + \int\limits_x^\infty dx\int\limits_x^\infty \lambda(x)\,dx\right\} = M\varepsilon_2(x), \end{cases}$$

avec $\varepsilon_1(x)\to 0$, $\varepsilon_2(x)\to 0$ pour $x\to\infty$, sous la condition

$$(17') \qquad \int\limits_x^\infty dx\int\limits_x^\infty \lambda(x)\,dx = o(1) \qquad \text{pour } x\to\infty.$$

Soit $\varepsilon(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqslant x_0 > 0$ satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_1(x) \leqslant \varepsilon(x), \qquad \varepsilon_2(x) \leqslant \varepsilon(x)^{**)}, \qquad \varepsilon(x)\to 0 \qquad \text{pour } x\to\infty,$$

les inégalités (26) deviennent

$$(27) \qquad \begin{cases} |u_1 - u_0| \leqslant M\varepsilon(x) \leqslant M\varepsilon, \\ |v_1 - v_0| \leqslant M\varepsilon(x) \leqslant M\varepsilon, \end{cases}$$

avec

$$\varepsilon = Max\,\varepsilon(x) \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0,$$

---

*) Dans ce cas on peut obtenir les théorèmes analogues aux théorèmes des équations linéaires [1].

**) Pour la fonction $\varepsilon(x)$ peut être prise la fonction $\varepsilon_2(x)$.

Pour $m=2$ les équations (15), d'après (6′), donnent

$$|u_2-u_1| \leqslant K \int_x^\infty \lambda(x)\,[|u_1-u_0|+|v_1-v_0|]\,dx,$$

$$|v_2-v_1| \leqslant K \left\{ \int_x^\infty \lambda(x)\,[|u_1-u_0|+|v_1-v_0|]\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_x^\infty dx \int_x^\infty \lambda(x)\,[|u_1-u_0|+|v_1-v_0|]\,dx \right\}$$

ou, d'après (27),

$$|u_2-u_1| \leqslant M\varepsilon\, 2K \int_x^\infty \lambda(x)\,dx = M\varepsilon\varepsilon_1(x) \leqslant M\varepsilon\varepsilon(x) \leqslant M\varepsilon^2,$$

$$|v_2-v_1| \leqslant M\varepsilon\, 2K \left\{ \int_x^\infty \lambda(x)\,dx + \int_x^\infty dx \int_x^\infty \lambda(x)\,dx \right\} =$$

$$= M\varepsilon\varepsilon_2(x) \leqslant M\varepsilon\varepsilon(x) \leqslant M\varepsilon^2.$$

Continuant ainsi de suite, ou aura

$$|u_n-u_{n-1}| \leqslant M\varepsilon^{n-1}\varepsilon_1(x) \leqslant M\varepsilon^{n-1}\varepsilon(x) \leqslant M\varepsilon^n,$$

$$|v_n-v_{n-1}| \leqslant M\varepsilon^{n-1}\varepsilon_2(x) \leqslant M\varepsilon^{n-1}\varepsilon(x) \leqslant M\varepsilon^n.$$

Si l'on choisit x_0 assez grand pour que l'on ait

(28) $$\varepsilon = Max\, \varepsilon(x) \leqslant 1 \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0,$$

les séries (α) convergenant uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$ et représentent les solutions des équations (5) sous la condition (17′) et le théorème C alors devient

C′. Les équations (1) *admettent, d'après* (3) *pour* $x \geqslant x_0 > 0$, *un système de solutions asymptotiques bornées, sous le condition* (2′), (17′) *et* (28).

Il est facile à voir que le système

$$\frac{dx}{dy} = p_{11}(x)\,y + p_{12}(x)\,z + f_1(x) + F_1(x, y, z)\,,$$

$$\frac{dz}{dx} = p_{21}(x)\,y + p_{22}(x)\,z + f_2(x) + F_2(x, y, z)\,.$$

où $p_{ik}(x)$ sont des fonctions continues, pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant aux conditions $\lim\limits_{x\to\infty} p_{ik}(x) = a_{ik}$, admet les mêmes propriétés que le système (1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Peyovitch, *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles* (Société des mathematiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, édition spéciale, 1952, Beograd).

[2] K. Tatarkiewicz*), a) *Propriétés asymptotiques des systèmes d'équations différentielles ordinaires presque linéaires* (Annales Universitaties Mariae Curie-Sklodowska, vol. VII, 2, 1954, section A, Lublin-Palonia).

b) *Quelques exemples de l'allure asymptotique de solutions d'équations différentielles* (Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, vol. VII, 9, 1954, section A, Lublin-Polonia).

*) Où il se trouve presque toute la littérature concernant cette question.