Lohr

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES MATHÉMATICIENS
ET PHYSICIENS DE LA R. P. DE SERBIE
YOUGOSLAVIE

ВЕСНИК

ДРУШТВА
МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА
НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

IX

3–4

БЕОГРАД, 1957

САДРЖАЈ

Страна

A. Denjoy: Solutions stables des équations différentielles du premier ordre 139

T. Peyovitch: Propriétés asymptotiques d'un système d'équations différentielles 145

И. Петровский: О числе предельных циклов обыкновенного дифференциального уравнения, которого правая часть есть отношение двух многочленов 161

V. Glaser, B. Jakšić, I. Supek: Le principe variationnel et équation différentielle de conductibilité des métaux aux témperatures basses . 167

F. Tricomi: Les problémes actuels dans la théorie des équations différentielles ordinaires 169

D. Markovitch: Un mode de détermination des intégrales premières qualitatives des équations différentielles ordinaires . 179

G. Karapandjitch: Sur une application des intégrales singulières des équations différentielles ordinaires 185

J. Leray: Le problème de Cauchy dans le cas linéaire analytique 191

M. Arsenović: Sur l'intégration d'équations aux dérivées partielles du second ordre et d'ordre supérieur 193

N. Saltykow: Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre 197

С. Л. Соболев: Функциональные методы в теории уравнений в частных производных 215

B. Rachajsky: Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes réductibles à ceux de Charpit 245

M. Bertolino: Procédés de l'encadrement des solutions des équations différentielles 261

L. Collatz: Anwendungen funktionalanalytischer Methoden zur numerischen Berechnung der Lösungen von Differentialgleichungen 269

C. Orloff: Application des spectres mathématiques á la résolution des équations différentielles ordinaires . . . 283

Извештај о раду Друштва 295

Састанци Друштва 299

Errata 302

Садржај — Tables des matières 303

Весник Друштва математичара и физичара НРС издаје Друштво математичара и физичара НРС у два двоброја годишње. Годишња претплата износи 400.— дин. коју треба слати на чековни рачун бр. 101-707-3-119 Друштву математичара и физичара НРС у Београду са назнаком на полеђини чека да се претплата шаље за „Весник Друштва математичара и физичара НРС“.

Главни уредник: Драгољуб Марковић, Београд ул. Косте Јовановића 67.

Секретар: Златко Мамузић, Београд, ул. Зечевићева 7.

Радове и сву преписку у вези с часописом „Весник“ слати на адресу: Уређивачки одбор Весника Друштва математичара и физичара НРС, Београд, пошт. фах 791.

Штампа Графичко предузеће „Академија“. Београд, Космајска ул. 28, Телефон 24-701

COLLOQUE SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES
tenu de 16 à 21 décembre 1957
à BEOGRAD
organisé par l'Union des Sociétés des Mathématiciens et Physiciens
de YOUGOSLAVIE

INTRODUCTION

La Comission de l'organisation des recherches scientifiques et relations avec l'étranger de l'Union des Sociétés des Mathématiciens et Physiciens de Yougoslavie a organisé le Colloque sur la théorie des équations différentielles à Beograd, de 16 à 21 décembre 1957.

Les travaux du Colloque ont été inaugurés, dans les auditoires de l'Université de Beograd, par les discours de M. G. Kurepa, président de l'Union des Sociétés, de M. S. Grozdanić, doyen de la Faculté des Sciences, au nom de Recteur de l'Université à Beograd, de M. S. Stanković, président du Conseil des Académies Yougoslaves et de M. N. Saltykow, président de la Comission de l'organisation du Colloque.

La liste des participants au Colloque et les titres de leurs communications:

A. Denjoy, Membre de l'Institut de France: Solutions stables des équations différentielles ordinaires;

T. Peyovitch, Professeur à l'Université de Beograd: Sur les propriétés asymptotiques des équations presque linéaires à coéfficients presque constants;

I. G. Petrowsky, Recteur de l'Université de Moscou, Membre de l'Academie de l'U.R.S.S.: Sur le nombre des cycles limites de l'équation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ étant des polynômes (Communiqué par S. L. Soboleff);

V. Glaser, B. Jakchitch, I. Soupek, professeurs à l'Université de Zagreb: Principe variationnel et équations différentielles de conductibilité des metaux à températures basses;

F. Tricomi, Directeur de l'Institut d'Analyse Mathématique à l'Université de Turin, Membre de l'Academie de Lincei: Les problèmes actuels dans la théorie des équations différentielles ordinaires;

D. Markovitch, Professeur à l'Université de Beograd: Sur les propriétés communes des solutions d'équations différentielles du 1-er ordre;

G. Karapandjitch, Professeur à l'Université de Beograd: Sur les intégrales singulières des équations différentielles ordinaires;

J. Leray, Professeur au College de France, Membre de l'Institut de France: Le problème de Cauchy dans le cas linéaire analytique;

M. Arsenovitch, Assistant à l'Université de Beograd: Sur l'intégration d'équations aux dérivées partielles du second ordre et d'ordre superieure;

N. Saltykow, Membre de l'Academie Serbe des Sciences: Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre;

S. L. Soboleff, Professeur à l'Université de Moscou, Membre de l'Academie de l'U. R. S. S.: Les méthodes de l'analyse fonctionelle dans la théorie des équations aux dérivées partielles;

B. Rachajsky, Docent à l'Université de Beograd: Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à plusiers variables indépendantes reductibles à celles de Charpit;

M. Bertolino, Assistant à l'Université de Beograd: Procédés de l'encadrement des solutions des équations différentielles;

L. Collatz, Professeur à l'Université de Hambourg, Directeur de l'Institut Mathématique: Applications des méthodes de l'analyse fonctionelle à la resolution numérique des équations différentielles;

K. Orloff, Professeur à l'Université de Beograd: Applications pratiques des spectres mathématiques à la solution des équations différentielles ordinaires.

Le but de ces conférences était de présenter les sujets des recherches dans les domaines différents des équations différentielles. Les problèmes importants des équations différentielles ordinaires ont été traités dans les rapports sur les questions de stabilité des solutions, sur les propriétés asymptotiques des solutions, sur les problèmes topologiques d'encadrements des solutions, sur les propriétés différentes des solutions et leurs rapports mutuels, sur la théorie générale d'équations différentielles ordinaires d'ordre superieur au premier et sur les questions pratiques d'intégration. La théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre a été présentée par l'exposé des méthodes modernes de leur intégration.

Dans la théorie des équations aux derivées partielles d'ordre superieur ont été étudiés les problèmes de leur intégration en termes finis, les problèmes de la Physique mathématique, les rapports entre les propriétés des équations des différents ordres, les théories analytiques et topologiques des solutions, les méthodes et les idées de l'analyse fonctionelle et leur application au calcul numérique.

Les questions soulevées par les rapports présentés ont été vivement discutées concernant l'organisation des travaux scientifiques dans le domaine mathématique, pour assurer leurs développements et progrès.

Toutes les conférences ont été suivies de la part des nombreux représentants des Sociétés des mathématiciens et physiciens de l'Union, des membres de corps enseignant des Universités et d'autres hautes écoles de la République de Yougoslavie, ainsi que d'étudiants avancés dans les sciences mathématiques et physiques.

Les travaux du Colloque ont été terminés par un banquet offert de la part des membres de l'Union des Sociétés des mathématiciens et physiciens de Yougoslavie.

N. S.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie

SOLUTIONS STABLES DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

par ARNAUD DENJOY, PARIS

Il s'agit d'une équation

$$d\theta/d\Phi = A\,(\Phi, \theta) \tag{1}$$

la function $A\,(\Phi, \theta)$ étant continue periodique, de periode 2π en θ et Φ, telle de plus que, par tout point (Φ_0, θ_0) il passe une intégrale et une seule. Par exemple, A satisfait en θ à une condition de Lipschitz. Ou plus précisement $\partial A/\partial\theta$ existe et est continue. L'integrale est

$$\theta\,(\Phi) = \theta\,(\Phi,\ \Phi_0, \theta_0). \tag{2}$$

Le point (Φ, θ) peut etre figuré dans un plan divisé en carrés de coté 2π. A deux points $N\,(\Phi, \theta)$, $N'\,(\Phi', \theta')$ congruents mod. $(2\pi, 2\pi)$ correspond la même valeur de A.

Cette équation, étudiée par Poincaré, lui fournit la notion et le premier exemple du principe ergodique: $(\theta-\theta_0)/(\Phi-\Phi_0)$ tend vers une limite α quand Φ croit indéfiniment, par valeurs positives ou négatives.

Plus precisément, ici $|\,\theta-\theta_0-\alpha\,(\Phi-\Phi_0)\,|$ est borné indépendamment de Φ_0, θ_0, Φ.

On peut également représenter le couple Φ, θ et tous les couples congruents, par un point unique M sur un tore de révolution non traversé par son axe de rotation, les Φ constants définissant les demi-méridiens, les θ constants les parallèles. Alors, Φ parcourant tout le champ du continu, le point $M\,(\Phi, \theta)$ coupe une infinité de fois le cercle méridien $\Phi = \Phi_0$, soit C, choisi une fois pour toutes. Dès lors nous désignons les points M de C par le seul arc θ; $M = M\,(\theta)$. A $M_0 = M\,(\theta_0)$ correspond le n-ème point de rencontre de la trajectoire de M avec C : $M_n = M\,(\theta_n)$, θ_n étant $\theta\,(\Phi_0 + 2\,n\,\pi,\ \Phi_0,\ \theta_0)$.

On trouve

$$-\beta_n \leqslant \theta_n - \theta_0 - 2\,n\,\pi\alpha \leqslant \gamma_n, \tag{3}$$

avec $0 \leqslant \beta_n$, $0 \leqslant \gamma_n$, $\beta_n + \gamma_n < 2\pi$.

$\theta_n - \theta_0$, quand θ varie de 0 à 2π, prend au moins deux fois la valeur $2\,n\,\pi\alpha$.

Si α est rationnel, certaines trajectoires sont des cycles fermés, et réciproquement.

Si α est irrationnel, les trajectoires tournent indéfiniment autour de l'axe du tore sans jamais se fermer. La réciproque est évidente.

Dans ce second cas, Poincaré a établi ce fait: l'ordre des trois points M_p, M_q, M_r sur le cercle C est le même que l'ordre des trois extrémités d'arcs $2p\pi\alpha$, $2q\pi\alpha$, $2r\pi\alpha$ sur le cercle trigonométrique Γ. Et cela indépendamment de θ_0.

D'autre part, l'ensemble d'accumulation des M_n pour n indéfiniment grand, soit positiv, soit négativ, est indépendant de M_0. C'est un ensemble parfait J. Ou bien J est identique à C et les points M_n sont partout denses sur C; toute trajectoire passe une infinité de fois au voisinage de tout point du tore. Ou bien J est parfait totalement discontinu.

On dit qu'une trajectoire est stable si elle passe une infinité de fois dans tout voisinage de chacun de ses points.

Dans le cas de α rationnel, si toutes les trajectoires ne sont pas des cycles (cas extrême de stabilité) toute trajectoire non cyclique tend vers un cycle, et elle est non stable.

Si α est irrationnel, et J discontinu, seules les trajectoires passant par les points de J sont stables. Les autres sont instables. Dans quelles conditions ce second cas est-il impossible?

En supposant simplement la continuité de $A(\theta, \Phi)$ et la détermination unique de la trajectoire passant par un point quelconque du tore, on forme aisément une équation différentielle pour laquelle l'instabilité est réalisée avec un ensemble J indifféremment donné.

Avec la condition de continuité de $\partial A/\partial\theta$ on peut encore réaliser l'instabilité. Mais alors l'ensemble J est soumis à des restrictions très précises. En poussant un peu plus loin on aboutit à l'impossibilité des solutions instables.

D'après $\theta_1 = \theta_1(\theta_0) = \theta(\Phi_0 + 2\pi, \Phi_0, \theta_0)$, on trouve

$$d\theta_1/d\theta_0 = e^{\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{\partial A}{\partial\theta}(\Phi,\theta)\,d\Phi}$$

où, dans l'intégrale θ est remplacé par $\theta(\Phi, \Phi_0, \theta_0)$; Φ_0 étant fixe. Si $\partial A/\partial\theta$ est continue, $d\theta_1/d\theta_0 = e^{h(\theta_0)}$, $h(\theta_0)$ étant continue en θ_0. En conséquence

$$(4) \qquad d\theta_n/d\theta_0 = e^{h(\theta_0)+h(\theta_1)+\cdots+h(\theta_{n-1})} \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1.$$

Supposons réalisable le cas instable. Soit i_0 un intervalle contigu à J. Ses transformés $i_n = \theta_n(i_0)$ sont contigus à J, tous distincts et rangés sur C dans l'ordre des points $2\,n\,\pi\alpha$ sur Γ. Or

$$i_1 = \int_{i_0} \frac{d\theta_1}{d\theta_0}\, d\theta_0 = i_0\, e^{h(\eta_0)};$$

η_0 étant un point de l'intervalle i_0. Donc pour $n \geqslant 1$

$$i_n = i_0\, e^{h(\eta_0)+h(\eta_1)+\cdots+h(\eta_{n-1})},$$

$$i_0 = i_{-n}\, e^{h(\eta_{-n})+h(\eta_{-n+1})+\cdots+h(\eta_{-1})},$$

la seconde formule se déduisant de la première en prenant pour intervalle originel i_{-n} au lieu de i_0.

m étant un entier positif, sur le cercle Γ plaçons les point: $\mu_0, \mu_1, \ldots$ $\ldots \mu_m$ d'arguments $\omega_k = 2\,k\,\pi\alpha$. Ces points divisent Γ en arcs dont la longueur possède un minimum réalisé par un couple μ_k, μ_{k+r} avec $0 \leqslant k < k + r \leqslant m$; $2\,r\,\pi\alpha = 2\,p\,\pi + \delta$ et $|\delta| \leqslant \frac{\pi}{m}$; $|\delta|$ est la longueur de l'arc $\mu_k\,\mu_{k+r}$; mais si $k > 0$, cette longueur est aussi celle de $\mu_{k-1}\,\mu_{k-1+r}$ et de $\mu_0\,\mu_r$. Donc ce dernier arc est inférieur en longueur à tous les arcs séparés par les points μ_k pour $0 \leqslant k \leqslant r-1$. Donc, tous les arcs $\mu_k\,\mu_{k+r}$ pour ces diverses valeurs de k seront disjoints. Les points μ_{k+r} s'intercaleront entre les points μ_k de manière que les points des deux collections alternent sur Γ.

Il en est de même quel que soit l'entier p, avec les collections μ_k, μ_{k+r} si $p \leqslant k \leqslant p+r-1$, se déduisant des précédentes $(p=0)$ par la rotation $2\,p\,\pi\alpha$ de Γ. Faisons $p = -r$. Les collections

$$\mu_{-r}, \mu_{-r+1}, \ldots\ldots \mu_{-1},$$
$$\mu_0, \quad \mu_1, \ldots\ldots\ldots \mu_{r-1}$$

alternent sur Γ. Il en est de même des collections de points η_k, η_{k+r} pour $-r \leqslant k \leqslant -1$. On en conclut d'après

$$i_0/i_{-r} = e^{\sum_{-r}^{-1} h(\eta_k)}, \qquad i_r/i_0 = e^{\sum_0^{r-1} h(\eta_k)}$$

$$\frac{i_r\, i_{-r}}{i_0^2} = e^{\sum_0^{r-1} [h(\eta_k) - h(\eta_{k-r})]}.$$

Supposons la variation totale de $h(\theta_0)$ finie. Soit V sa valeur:

$$e^{-V} < \frac{i_r\, i_{-r}}{i_0^2} < e^{V}.$$

La première inégalité conduit à une absurdité, i_r et i_{-r} tendant vers zéro quand r croit.

Les nombres r sont, on le voit immédiatement les dénominateurs des réduites P_m/Q_m du développement de α en fraction continue. Il n'est pas étonnant que ces nombres aient un rôle à jouer. α en est extrêmement voisin. Or si α était rationnel, les cycles apparaîtraient.

Nous écrivons:

$$\alpha = (a_0, a_1, \ldots a_n \ldots) + 1/(a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$$

a_0 étant entier quelconque, a_i entier $\geqslant 1$ pour $i \geqslant 1$. La réduite

$$(a_0, a_1, \ldots a_m) = P_m/Q_m \text{ est donnée par } P_m = a_m P_{m-1} + P_{m-2},$$

$$Q_m = a_m Q_{m-1} + Q_{m-2}, \text{ et } P_{-1} = 1, \; Q_{-1} = 0; \; P_0 = a_0, \; Q_0 = 1;$$

$$\alpha = (\alpha_m P_{m-1} + P_{m-2})/(\alpha_m Q_{m-1} + Q_{m-2}) \text{ si } \alpha_m = (a_m, a_{m-1}, \ldots);$$

$$\alpha - \frac{P_m}{Q_m} = (-1)^{m-1} \delta_m/Q_{m+1} \text{ avec } 0 < \delta_m < 1.$$

P_m et Q_m étant premiers entre eux, la partie fractionnaire de kP_m/Q_m prend pour $0 \leqslant k \leqslant Q_m - 1$, une fois et une seule toutes les valeurs p/Q_m, pour $0 \leqslant p \leqslant Q_m - 1$.

Donc

$$k\alpha \equiv p/Q_m + (-1)^{m-1} \delta'_k/Q_{m-1} \qquad \text{(mod. 1)}$$

et $0 < \delta'_k < 1$.

Les points $2k\pi\alpha$ sont répartis à raison d'un et d'un seul sur chacun des arcs $\sigma_p\,[2p\pi/Q_m,\; 2(p+1)\pi/Q_m]$ (m impair, et σ_{p-1} pour m pair) pour $0 \leqslant p \leqslant Q_m - 1$.

Transformons C en Γ de façon que si θ correspond à ω, $\theta_1(\alpha)$ correspond à $\omega + 2\pi\alpha$. Il suffit de réaliser la correspondance $(\theta_k, 2k\pi\alpha)$ pour une suite de points $\theta_k(\theta_0)$, θ_0 étant choisi indifféremment, et de compléter par continuité. Si J est totalement discontinu, aux points de seconde espèce de J correspond un point propre ω. Un même point ω' correspond à tout un segment contigu à J. En prenant θ_0 sur i_0, les points $2k\pi\alpha$ correspondent à i_k et particulièrement à η_k.

$h(\theta)$ continu en θ deviendra une fonction $g(\omega)$ discontinue aux seuls points dénombrables correspondant aux contigus à J; $g(\omega)$ est intégrable [au sens de Riemann].

$\dfrac{Q_m}{2\pi}\displaystyle\int_{\sigma_p} g(\omega)\,d\omega$ est un nombre λ_p compris entre le maximum et le minimum de $g(\omega)$ sur σ_p; σ_p contenant le point $\omega = 2k\pi\alpha$ transformé de

η_k, $|g(2k\pi\alpha)-\lambda_p|=|h(\eta_k)-\lambda_p|$ est inférieur à l'oscillation de $g(\omega)$ sur σ_p. Donc

$$\left|\frac{Q_m}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\omega)\,d\omega - \sum_{k=0}^{Q_m-1} h(\eta_k)\right|$$

est inférieur à la variation totale de $g(\omega)$ ou de $h(\theta)$ sur Γ ou sur C, soit

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\omega)\,d\omega.$$

$$i_{Q_m}/i_0=e^{Q_m I+\delta_m V}, \qquad (\delta_m^2<1)$$

et aussi la même formule pour i_0/i_{-Q_m}, δ_m étant remplacé par δ'_m. On en conclut $I=0$ et $i_{Q_n}/i_0=e^{\delta_m V}$, ce qui est impossible.

D'après

$$d\theta_{Q_n}/d\theta=e^{\Sigma h(\eta_k)} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{2\pi}\frac{d\theta_1}{d\theta_0}\,d\theta_0=2\pi$$

on trouve bien $I=0$ et $d\theta_{Q_m}/d\theta_0=e^{\delta_m V}$, $(\delta_m=\delta_m(\theta)<1)$.

Consulter mes Notes aux Comptes Rendues à l'Académie des Sciences de Paris groupées dans *Un demi-siècle de Notes communiquées aux Académies* (p. 575 à 585 et observation, p. 88) et mon mémoire du Journal de Mathématiques reproduit dans *Articles et Mémoires*, II, p. 881—923.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie

PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par T. PEYOVITCH, BEOGRAD

Le but de cet article est d'exposer quelques propriétés asymptotiques du système (1) en utilisant la méthode des approximations successives de Picard, qui donne les résultats les plus efficaces.

Soit donné, pour abgréger l'écriture, un système de deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}\,y + a_{12}\,z + f_1(x) + F_1(x, y, z), \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = a_{21}\,y + a_{22}\,z + f_2(x) + F_2(x, y, z), \end{cases}$$

où a_{ik} sont des constantes, $f_i(x)$ et $F_i(x, y, z)$ des fonctions définies et continues pour $|y| < A, |z| < A$ et pour la variable réelle $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant aux conditions

$$(2) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f_i(x) = b_i, \quad F_i(x, 0, 0) = 0, \\[2ex] |F_i(x, y, z) - F_i(x, \bar{y}, \bar{z})| \leqslant L\,[|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|], \end{cases}$$

A et L étant des nombres positifs et fixés et b_i des constantes finies et déterminées.

Le système (1), par la transformation linéaire à coefficients constants

$$(3) \qquad \begin{cases} u = \alpha_{11}\,y + \alpha_{12}\,z \\ v = \alpha_{21}\,y + \alpha_{22}\,z \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} y &= \beta_{11}\,u + \beta_{12}\,v, \\ z &= \beta_{21}\,u + \beta_{22}\,v, \end{aligned}$$

dont les déterminants $|\alpha_{ik}| \neq 0, |\beta_{ik}| \neq 0$, peut être ramené à une forme canonique dépandant de la nature de l'équation caractéristique

$$(4) \qquad D(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{vmatrix} = 0.$$

A la racine double ($r_1 = r_2$) correspond en général le système d'équations de la forme

$$
(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = r_1 u + \varphi_1(x) + \Phi_1(x, u, v), \\[2ex] \dfrac{dv}{dx} = r_1 v + u + \varphi_2(x) + \Phi_2(x, u, v) \end{cases}
$$

avec

$$
\varphi_i(x) = \alpha_{i1} f_1(x) + \alpha_{i2} f_2(x)
$$

$$
\Phi_i(x, u, v) = \alpha_{i1} F_1(x, \beta_{11} u + \beta_{12} v, \beta_{21} u + \beta_{22} v) +
$$

$$
+ \alpha_{i2} F_2(x, \beta_{11} u + \beta_{12} v, \beta_{21} u + \beta_{22} v).
$$

Il est évident que les fonctions $\varphi_i(x)$ et $\Phi_i(x, u, v)$ sont, d'aprés (2) et (3), définies et continues pour $|u| < B$, $|v| < B$ et pour la variable réelle $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant au conditions

$$
(6) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} \varphi_i(x) = d_i, \qquad \Phi_i(x, 0, 0) = 0, \\[1ex] \Phi_i(x, u, v) - \Phi_i(x, \bar{u}, \bar{v}) \leqslant K[|u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|], \end{cases}
$$

B et K étant des nombres positifs ef fixés et d_i des constantes finies et déterminées.

Cherchons les solutions des équations (5) par la méthode des approximations successives.

Sait, pour $x \geqslant x_0 > 0$, u_0 et v_0 un système de solutions asymptotiques bornées des équations[1)]

$$
(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_0}{dx} = r_1 u_0 + \varphi_1(x), \\[2ex] \dfrac{dv_0}{dx} = r_1 v_0 + u_0 + \varphi_2(x), \end{cases}
$$

c'est-à-dire

$$
(8) \qquad |u_0(x)| \leqslant M, \quad |v_0(x)| \leqslant M \quad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0,
$$

auquel correspond, d'après (3), un système de solutions asymptotiques bornées y_0 et z_0 des équations

$$
\frac{dy_0}{dx} = a_{11} y_0 + a_{12} z_0 + f_1(x),
$$

$$
\frac{dz_0}{dx} = a_{21} y_0 + a_{22} z_0 + f_2(x).
$$

---

1) C'est-à-dire les solutions, pour $x \geqslant x_0 > 0$, qui tendent vers des limites finies et déterminées, lorsque x augmente indéfiniment.

En partant des solutions u_0 et v_0 de système (7), on peut déterminer deux suites de fonctions

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots,$$

comme les solutions des équations

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_n}{dx} = r_1 u_n + \varphi_1(x) + \Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1}), \\ \dfrac{dv_n}{dx} = r_1 v_n + u_n + \varphi_2(x) + \Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1}). \end{cases}$$

Les équations intégrales correspondant aux équations ci-dessus sont

$$u_n = e^{r_1 x}\left(\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\varphi_1(x)\,dx + C_1\right) + e^{r_1 x}\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx,$$

$$v_n = e^{r_1 x}\left(\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\varphi_2(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x} u_n\,dx + C_2\right) +$$

$$+ e^{r_1 x}\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx,$$

ou

$$u_n = e^{r_1 x}\left(\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\varphi_1(x)\,dx + C_1\right) + e^{r_1 x}\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx,$$

$$v_n = e^{r_1 x}\left\{\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\varphi_2(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} dx\left[\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\varphi_1(x)\,dx + C_1\right] + C_2\right\} +$$

$$+ e^{r_1 x}\left[\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx + \int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx\right].$$

Nous allons distinguer plusieurs cas:

1°. r_1 *est un nombre réel négatif ou complexe à partie réelle négative* $\rho < 0$.

Dans ce car on aura, d'après (7),

$$
(10)\qquad \begin{cases} u_n = u_0 + e^{r_1 x}\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\,\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx, \\[2ex] v_n = v_0 + e^{r_1 x}\left[\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\,\Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx + \right. \\[2ex] \qquad \left. + \displaystyle\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\,\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx\right]. \end{cases}
$$

Pour $n=1$ les équations ci-dessus, d'après (6), donnent

$$
|u_1 - u_0| \leqslant K e^{\rho x}\int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}\,[\,|u_0| + |v_0|\,]\,dx,
$$

$$
|v_1 - v_0| \leqslant K e^{\rho x}\left\{\int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}\,[\,|u_0| + |v_0|\,]\,dx + \int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}\,[\,|u_0| + |v_0|\,]\,dx\right\}
$$

ou, d'après (8),

$$
(11)\qquad \begin{cases} |u_1 - u_0| \leqslant 2KM\dfrac{1}{|\rho|} \leqslant 2KM\left(\dfrac{1}{|\rho|} + \dfrac{1}{|\rho|^2}\right), \\[2ex] |v_1 - v_0| \leqslant 2KM\left(\dfrac{1}{|\rho|} + \dfrac{1}{|\rho|^2}\right). \end{cases}
$$

Pour $n=2$ les équations (10), d'après (6), donnent

$$
|u_2 - u_1| \leqslant K e^{\rho x}\int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}\,[\,|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|\,]\,dx,
$$

$$
|v_2 - v_1| \leqslant K e^{\rho x}\left\{\int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}\,[\,|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|\,]\,dx + \right.
$$

$$
\left. + \int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}\,[\,|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|\,]\,dx\right\}
$$

ou, d'après (11),

$$|u_2-u_1| \leqslant (2K)^2 M\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)\frac{1}{|\rho|} \leqslant (2K)^2 M\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)^2,$$

$$|v_2-v_1| \leqslant (2K)^2 M\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right) \leqslant (2K)^2 M\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)^2.$$

Continuant ainsi de suite, on obtiendra

$$|u_n-u_{n-1}| \leqslant (2K)^n M\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)^n.$$

$$|v_n-v_{n-1}| \leqslant (2K)^n M\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)^n.$$

Si l'on a

$$(12) \qquad 2K\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)<1, \qquad M\frac{1}{1-2K\left(\frac{1}{|\rho|}+\frac{1}{|\rho|^2}\right)} \leqslant B,$$

les séries

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} u=u_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1}), \\ v=v_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(v_n-v_{n-1}) \end{cases}$$

convergent uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$ et représentent les solutions des équations (5).

A. *Les équations* (1) *admettent, d'après* (3), *pour* $x \geqslant x_0 > 0$, *un système de solutions asymptotiques bornées dépendant de deux paramètres arbitraires (constantes d'intégrations), sous les conditions* (2) *et* (12).

2°. r_1 *est un nombre réel positif ou complexe à partie réelle positive* $\rho > 0$.

Dans ce cas les équations (10) deviennent

$$(13) \qquad \begin{cases} u_n=u_0-e^{r_1x}\int\limits_x^{\infty} e^{-r_1x}\,\Phi_1(x,u_{n-1},v_{n-1})\,dx\,. \\ v_n=v_0-e^{r_1x}\left[\int\limits_x^{\infty} e^{-r_1x}\,\Phi_2(x,u_{n-1},v_{n-1})\,dx - \right. \\ \qquad \left. -\int\limits_x^{\infty}dx\int\limits_x^{\infty} e^{-r_1x}\,\Phi_1(x,u_{n-1},v_{n-1})\,dx\right] \end{cases}$$

avec

$$u_0 = e^{r_1 x} \int_{\infty}^{x} e^{-r_1 x} \varphi_2(x)\, dx,$$

$$v_0 = e^{r_1 x} \left[\int_{\infty}^{x} e^{-r_1 x} \varphi_2(x)\, dx + \int_{\infty}^{x} dx \int_{\infty}^{x} e^{-r_1 x} \varphi_1(x)\, dx \right].$$

Pour $n=1$ les équations (13), d'après (6), donnent

$$|u_1 - u_0| \leqslant K e^{\rho x} \int_{x}^{\infty} e^{-\rho x} [|u_0| + |v_0|]\, dx,$$

$$|v_1 - v_0| \leqslant K e^{\rho x} \left\{ \int_{x}^{\infty} e^{-\rho x} [|u_0| + |v_0|]\, dx + \int_{x} dx \int_{x} e^{-\rho x} [|u_0| + |v_0|]\, dx \right\}$$

ou, d'après (8),

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &|u_1 - u_0| \leqslant 2KM \frac{1}{\rho} \leqslant 2KM\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right), \\ &|v_1 - v_0| \leqslant 2KM\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Pour $n=2$ les équations (13), d'après (6), donnent

$$|u_2 - u_1| \leqslant K e^{\rho x} \int_{x}^{\infty} e^{-\rho x} [|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|]\, dx,$$

$$|v_2 - v_1| \leqslant K e^{\rho x} \left\{ \int_{x}^{\infty} e^{-\rho x} [|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|]\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x}^{\infty} dx \int_{x}^{\infty} e^{-\rho x} [|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|]\, dx \right\}$$

ou, d'après (14),

$$|u_2 - u_1| \leqslant (2K)^2 M \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right) \frac{1}{\rho} \leqslant (2K)^2 M \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right)^2,$$

$$|v_2 - v_1| \leqslant (2K)^2 M \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right)^2.$$

Continuant ainsi de suite, on obtiendra

$$|u_n - u_{n-1}| \leqslant (2K)^n M\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\right)^n,$$

$$|v_n - v_{n-1}| \leqslant (2K)^n M\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\right)^n.$$

Par conséquent, les séries (α) convergent uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$ sous la conditions (12) et représentent les solutions des équations (5).

B. *Les équations* (1) *admettent, d'après* (3), *pour* $x \geqslant x_0 > 0$, *un système de solutions asymptotiques bornées, sous les conditions* (2) *et* (12).

3°. r_1 *est nombre imaginaire* $r_1 = \theta i$ *ou égale à zéro* ($\theta = 0$).

Dans ce cas les équations (13) deviennent

$$(15)\qquad \begin{cases} u_n = u_0 - e^{\theta ix}\displaystyle\int_x^{\infty} e^{-\theta ix}\,\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx, \\ v_n = v_0 - e^{\theta ix}\left[\displaystyle\int_x^{\infty} e^{-\theta ix}\,\Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx - \right. \\ \qquad \left. - \displaystyle\int_x^{\infty} dx \int_x^{\infty} e^{-\theta ix}\,\Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\,dx\right], \end{cases}$$

avec

$$u_0 = e^{\theta ix}\int_{\infty}^{x} e^{-\theta ix}\,\varphi_1(x)\,dx,$$

$$v_0 = e^{\theta ix}\left[\int_{\infty}^{x} e^{-\theta ix}\,\varphi_2(x)\,dx + \int_{\infty}^{x} dx \int_{\infty}^{x} e^{-\theta ix}\,\varphi_1(x)\,dx\right].$$

Pour $n=1$ les équations, d'après (6), donnent

$$|u_1 - u_0| \leqslant K\int_x^{\infty}[|u_0|+|v_0|]\,dx = K\,\varepsilon_1^{(1)}(x),$$

$$|v_1 - v_0| \leqslant K\left\{\int_x^{\infty}[|u_0|+|v_0|]\,dx + \int_x^{\infty} dx\int_x^{\infty}[|u_0|+|v_0|]\,dx\right\} = K\,\varepsilon_2^{(1)}(x)$$

avec

$$\varepsilon_1^{(1)}(x) \to 0, \qquad \varepsilon_2^{(1)}(x) \to 0 \qquad \text{pour } x \to \infty,$$

sous la conditions

$$\int_x^\infty dx \int_x^\infty [|u_0| + |v_0|]\, dx = o(1) \qquad \text{pour } x \to \infty.$$

Soit $\varepsilon^{(1)}(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_1^{(1)}(x) \leqslant \varepsilon^{(1)}(x), \qquad \varepsilon_2^{(1)}(x) \leqslant \varepsilon^{(1)}(x) \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0,$$

avec $\varepsilon^{(1)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$, on aura

(16) $$|u_1 - u_0| \leqslant K\,\varepsilon^{(1)}(x), \quad |v_1 - v_0| \leqslant K\,\varepsilon^{(1)}(x), \quad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0.$$

Pour $n = 2$ les équations (15), d'après (6), donnent

$$|u_2 - u_1| \leqslant K \int_x^\infty [|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|]\, dx,$$

$$|v_2 - v_1| \leqslant K \left\{ \int_x^\infty [|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|]\, dx + \int_x^\infty dx \int_x^\infty [|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|]\, dx \right\}$$

ou, d'après (16),

$$|u_2 - u_1| \leqslant 2K^2 \varepsilon_1^{(2)}(x), \quad |v_2 - v_1| \leqslant 2K^2 \varepsilon_2^{(2)}(x)$$

avec

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon_1^{(2)}(x) = \lim_{x\to\infty} \int_x^\infty \varepsilon^{(1)}(x)\, dx = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon_2^{(2)}(x) = \lim_{x\to\infty} \left[\int_x^\infty \varepsilon^{(1)}(x)\, dx + \int_x^\infty dx \int_x^\infty \varepsilon^{(1)}(x)\, dx \right] = 0,$$

sous la condition

$$\int_x^\infty dx \int_x^\infty \varepsilon^{(1)}(x)\, dx = o(1) \qquad \text{pour } x \to \infty.$$

Soit $\varepsilon^{(2)}(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_1^{(2)}(x) \leqslant \varepsilon^{(2)}(x), \qquad \varepsilon_2^{(2)}(x) \leqslant \varepsilon^{(2)}(x) \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0,$$

avec $\varepsilon^{(2)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$, on aura

$$|u_2 - u_1| \leqslant 2K^2 \varepsilon^{(2)}(x), \qquad |v_2 - v_1| \leqslant 2K^2 \varepsilon^{(2)}(x) \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0.$$

Continuant ainsi de suite, on obtiendra

$$|u_n - u_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}(2K)^n \varepsilon^{(n)}(x), \qquad |v_n - v_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}(2K)^n \varepsilon^{(n)}(x),$$

où $\varepsilon^{(n)}(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ est une suite de fonctions positives et continues, pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant à la relation $\varepsilon^{(n)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$ sous la condition

$$(17) \qquad \int_x^\infty dx \int_x^\infty \varepsilon^{(n-1)}(x)\, dx = o(1) \qquad \text{pour } x \to \infty, \ (n = 1, 2, \ldots)$$

et qui doit converger uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$.

La suite de fonctions $\varepsilon^{(n)}(x)$, à cause de la relation $\varepsilon^{(n)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$ est bornées pour $x \geqslant x_0 > 0$, c'est-à-dire

$$\varepsilon^{(n)}(x) \leqslant M \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si l'on a

$$(18) \qquad 2K < 1, \qquad M\frac{1-K}{1-2K} \leqslant B,$$

les séries (α) convergent uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$ et représentent les solutions des équations (5), sous la condition (17) et si la suite de fonctions $\varepsilon^{(n)}(x)$ converge uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$.

C. *Les équations* (1) *admettent, d'après* (3), *pour* $x \geqslant x_0 > 0$, *un système de solutions asymptotiques bornées, sous les conditions* (2), (17), (18) *et si la suite de fonctions* $\varepsilon^{(n)}(x)$ *converge uniformément pour* $x \geqslant x_0 > 0$.

4°. r_1 *est un nombre réel négatif ou complexe à partie réelle négative* $\rho_1 < 0$ (1°.), r_2 *est un nombre réel positif ou complexe à partie réelle positive* $\rho_2 > 0$ (2°.).

Dans ce cas les équations (5) et (9) deviennent

$$(5') \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = r_1 u + \varphi_1(x) + \Phi_1(x, u, v), \\[2ex] \dfrac{dv}{dx} = r_2 v + \varphi_2(x) + \Phi_2(x, u, v); \end{cases}$$

$$(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_n}{dx} = r_1 u_n + \varphi_1(x) + \Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1}), \\[2ex] \dfrac{dv_n}{dx} = r_2 v_n + \varphi_2(x) + \Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1}), \end{cases}$$

d'où l'on a

$$(19') \qquad \begin{cases} u_n = u_0 + e^{r_1 x} \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x} \Phi_1(x, u_{n-1}, v_{n-1})\, dx, \\[2ex] v_n = v_0 - e^{r_2 x} \displaystyle\int_{x}^{\infty} e^{-r_2 x} \Phi_2(x, u_{n-1}, v_{n-1})\, dx \end{cases}$$

avec

$$u_0 = e^{r_1 x}\left(\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x} \varphi_1(x)\, dx + C_1\right),$$

$$v_0 = e^{r_2 x} \int_{\infty}^{x} e^{-r_2 x} \varphi_2(x)\, dx.$$

Pour $n=1$ les équations (19), d'après (6), donnent

$$|u_1 - u_0| \leqslant K e^{\rho_1 x} \int_{x_0}^{x} e^{-\rho_1 x} [|u_0| + |v_0|]\, dx,$$

$$|v_1 - v_0| \leqslant K e^{\rho_2 x} \int_{x}^{\infty} e^{-\rho_2 x} [|u_0| + |v_0|]\, dx$$

ou, d'après (8),

$$|u_1 - u_0| \leqslant M \frac{2K}{|\rho_1|}, \qquad |v_1 - v_0| \leqslant M \frac{2K}{|\rho_2|}$$

ou

$$(20) \qquad |u_1 - u_0| \leqslant M \frac{2K}{|\rho_1|}, \qquad |v_1 - v_0| \leqslant M \frac{2K}{|\rho_1|},$$

sous la condition, par exemple, $\dfrac{1}{|\rho_2|} \leqslant \dfrac{1}{|\rho_1|}$.

Pour $n=2$ les équations (19), d'après (6), donnent

$$|u_2-u_1|\leqslant Ke^{\rho_1 x}\int\limits_{x}^{x} e^{-\rho_1 x}[|u_1-u_0|+|v_1-v_0|]\,dx\,,$$

$$|v_2-v_1|\leqslant Ke^{\rho_2 x}\int\limits_{x}^{\infty} e^{-\rho_2 x}[|u_1-u_0|+|v_1-v_0|\,dx$$

ou, d'après (20),

$$|u_2-u_1|\leqslant M\frac{(2K)^2}{|\rho_1|^2}\,,\qquad |v_2-v_1|\leqslant M\frac{(2\,K)^2}{|\rho_1\rho_2|}\leqslant M\frac{(2K)^2}{|\rho_1|^2}\,.$$

Continuant ainsi de suite, on obtiendra

$$|u_n-u_{n-1}|\leqslant M\frac{(2K)^n}{|\rho_1|^n}\,,\qquad |v_n-v_{n-1}|\leqslant M\frac{(2K)^n}{|\rho_1|^n}\,.$$

Si l'on a

(21) $$\frac{2\,K}{|\rho_1|}<1$$

les séries (α) convergent uniformément pour $x\geqslant x_0>0$ et représentent les solutions des équations (5').

D. *Les équations* (1) *admettent, d'après* (3), *pour* $x\geqslant x_0>0$, *un système de solutions asymptotiques bornées dépendant d'un paramètre arbitraire (constante d'intégration), sous les conditions* (2) *et* (21).

5°. r_1 *est nombre réel négatif ou complexe à partie réelle négative* $\rho_1<0$ (1°.), r_2 *est nombre imaginaire ou zéro* ($\theta_2=0$) (3°).

Dans ce cas l'équations (19') deviennent

(22) $$\begin{cases} u_n=u_0+e^{r_1 x}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\,\Phi_1(x,u_{n-1},v_{n-1})\,dx\,, \\ v_n=v_0-e^{\theta_2 ix}\displaystyle\int\limits_{x} e^{-\theta_2 ix}\,\Phi_2(x,u_{n-1},v_{n-1})\,dx \end{cases}$$

avec

$$u_0=e^{r_1 x}\Big(\int\limits_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\,\varphi_1(x)\,dx+C_1\Big),$$

$$v_0=e^{\theta_2 ix}\int\limits_{\infty}^{x} e^{-\theta_2 ix}\,\varphi_2(x)\,dx\,.$$

Pour $n=1$ les équations (22), d'après (6), donnent

$$|u_1-u_0| \leqslant Ke^{\rho_1 x}\int_{x_0}^{x} e^{-\rho_1 x}[|u_0|+|v_0|]\,dx = K\varepsilon_1^{(1)}(x),$$

$$|v_1-v_0| \leqslant K\int_{x}^{\infty}[|u_0|+|v_0|]\,dx = K\,\varepsilon_2^{(1)}(x),$$

avec $\varepsilon_1^{(1)}(x)\to 0$, $\varepsilon_2^{(1)}(x)\to 0$, sous les conditions

(23) $$u_0(x)\to 0, \qquad v_0(x)\to 0 \qquad \text{pour } x\to\infty,$$

(24) $$\int_{x}^{\infty}[|u_0|+|v_0|]\,dx = o(1) \qquad \text{pour } x\to\infty.$$

Soit $\varepsilon^{(1)}(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_1^{(1)}(x) \leqslant \varepsilon^{(1)}(x), \qquad \varepsilon_2^{(2)}(x) \leqslant \varepsilon^{(1)}(x) \qquad \text{pour } x \geqslant x > 0$$

avec $\varepsilon^{(1)}(x)\to 0$ pour $x\to\infty$, on aura

(25) $$|u_1-u_0| \leqslant K\,\varepsilon^{(1)}(x), \qquad |v_1-v_0| \leqslant K\,\varepsilon^{(1)}(x).$$

Pour $n=2$, les équations (22), d'après (6), donnent

$$|u_2-u_1| \leqslant Ke^{\rho_1 x}\int_{x_0}^{x} e^{-\rho_1 x}[|u_1-u_0|+|v_1-v_0|]\,dx,$$

$$|v_2-v_1| \leqslant K\int_{x}^{\infty}[|u_1-u_0|+|v_1-v_0|]\,dx$$

ou, d'après (25),

$$|u_2-u_1| \leqslant 2K^2 e^{\rho_1 x}\int_{x_0}^{x} e^{-\rho_1 x}\,\varepsilon^{(1)}(x)\,dx = 2K^2\varepsilon_1^{(2)}(x)$$

$$|v_2-v_1| \leqslant 2K^2\int_{x}^{\infty}\varepsilon^{(1)}(x)\,dx = 2K^2\varepsilon_2^{(2)}(x),$$

avec $\varepsilon_1^{(2)}(x)\to 0$, $\varepsilon_2^{(2)}(x)\to 0$ pour $x\to\infty$, sous la condition

$$\int_{x}^{\infty}\varepsilon^{(1)}(x)\,dx = o(1) \qquad \text{pour } x\to\infty.$$

Soit $\varepsilon^{(2)}(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_1^{(2)}(x) \leqslant \varepsilon^{(2)}(x), \quad \varepsilon_2^{(2)}(x) \leqslant \varepsilon^{(2)}(x) \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0,$$

avec $\varepsilon^{(2)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$, on aura

$$|u_2 - u_1| \leqslant 2K^2 \varepsilon^{(2)}(x), \quad |v_2 - v_1| \leqslant 2K^2 \varepsilon^{(2)}(x).$$

Continuant ainsi de suite, on obtiendra

$$|u_n - u_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}(2K)^n \varepsilon^{(n)}(x), \quad |v_n - v_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}(2K)^n \varepsilon^{(n)}(x),$$

où $\varepsilon^{(n)}(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ est une suite de fonctions positives et continues pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant à la relation $\varepsilon^{(n)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$, sous la condition

$$\text{(26)} \qquad \int_x^\infty \varepsilon^{(n-1)}(x)\, dx = o(1) \qquad \text{pour } x \to \infty, \ (n = 1, 2, \ldots)$$

et doit converger uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$.

La suite de fonctions $\varepsilon^{(n)}(x)$, à cause de la relation $\varepsilon^{(n)}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$ et bornée pour $x \geqslant x_0 > 0$, c'est-à-dire

$$\varepsilon^{(n)}(x) \leqslant M \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0, \ (n = 1, 2, \ldots),$$

Les séries (α) d'après (18), convergent uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$ et représentent les solutions des équations (5'), sous les conditions (23) et (26) et si la suite de fonctions $\varepsilon^{(n)}(x)$ convergent uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$.

E. *Les équations* (1) *admettent, d'après* (3), *pour* $x \geqslant x_0 > 0$ *un système de solutions asymptotiques bornées dependant d'un paramètre (constante d'intégration), sous les conditions* (2), (18), (23) *et* (26) *et si la suite de fonctions* $\varepsilon^{(n)}(x)$ *converge uniformèment pour* $x \geqslant x_0 > 0$.

Remarque. — Si l'on remplace les conditions (2) par les conditions

$$\text{(2')} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f_i(x) = b_i, \ F_i(x, 0, 0), \\ F_i(x, y, z) - F_i(x, \bar{y}, \bar{z}) \leqslant \lambda(x)\,[\,|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|\,], \end{cases}$$

où $\lambda(x)$ est fonction définie, positive et continue pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant à la condition $\lim\limits_{x \to \infty}(x) = 0$ ou bornée les démonstrations des théorèmes précédents peuvent être un peu modifiées*). Dans ce cas les condi tions (6) deviennent

$$(6')\qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \varphi_i(x) = d_i, \quad \Phi_i(x, 0, 0) = 0 \\ |F_i(x, u, v) - \Phi_i(x, \bar{u}, \bar{v})| = K\lambda(x)[|u-\bar{u}| + |v-\bar{v}|]. \end{cases}$$

Considérons, par exemple le 3° cas. Dans ce cas les équations (15), pour $n=1$, d'après (6′), donnent

$$(26)\quad \begin{cases} |u_1-u_0| \leqslant K\int\limits_x^\infty \lambda(x)[|u_0|+|v_0|]\,dx = M\,2K\int\limits_x^\infty \lambda(x)\,dx = M\varepsilon_1(x), \\ |v_1-v_0| \leqslant K\Big\{\int\limits_x^\infty \lambda(x)[|u_0|+|v_0|]\,dx + \int\limits_x^\infty dx\int\limits_x^\infty \lambda(x)\,dx\,[|u_0|+|v_0|]\,dx\Big\} \leqslant \\ \leqslant M\,2K\Big\{\int\limits_x^\infty \lambda(x)\,dx + \int\limits_x^\infty dx\int\limits_x^\infty \lambda(x)\,dx\Big\} = M\varepsilon_2(x), \end{cases}$$

avec $\varepsilon_1(x)\to 0$, $\varepsilon_2(x)\to 0$ pour $x\to\infty$, sous la condition

$$(17')\qquad \int\limits_x^\infty dx\int\limits_x^\infty \lambda(x)\,dx = o(1) \qquad \text{pour } x\to\infty.$$

Soit $\varepsilon(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqslant x_0 > 0$ satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_1(x) \leqslant \varepsilon(x), \qquad \varepsilon_2(x) \leqslant \varepsilon(x)^{**)}, \qquad \varepsilon(x)\to 0 \qquad \text{pour } x\to\infty,$$

les inégalités (26) deviennent

$$(27)\qquad \begin{cases} |u_1-u_0| \leqslant M\varepsilon(x) \leqslant M\varepsilon, \\ |v_1-v_0| \leqslant M\varepsilon(x) \leqslant M\varepsilon, \end{cases}$$

avec

$$\varepsilon = Max\,\varepsilon(x) \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0,$$

---

*) Dans ce cas on peut obtenir les théorèmes analogues aux théorèmes des équations linéaires [1].

**) Pour la fonction $\varepsilon(x)$ peut être prise la fonction $\varepsilon_2(x)$.

Pour $m=2$ les équations (15), d'après (6′), donnent

$$|u_2-u_1| \leqslant K \int_x^\infty \lambda(x)\,[|u_1-u_0|+|v_1-v_0|]\,dx,$$

$$|v_2-v_1| \leqslant K \left\{ \int_x^\infty \lambda(x)\,[|u_1-u_0|+|v_1-v_0|]\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_x^\infty dx \int_x^\infty \lambda(x)\,[|u_1-u_0|+|v_1-v_0|]\,dx \right\}$$

ou, d'après (27),

$$|u_2-u_1| \leqslant M\varepsilon\, 2K \int_x^\infty \lambda(x)\,dx = M\varepsilon\varepsilon_1(x) \leqslant M\varepsilon\varepsilon(x) \leqslant M\varepsilon^2,$$

$$|v_2-v_1| \leqslant M\varepsilon\, 2K \left\{ \int_x^\infty \lambda(x)\,dx + \int_x^\infty dx \int_x^\infty \lambda(x)\,dx \right\} =$$

$$= M\varepsilon\varepsilon_2(x) \leqslant M\varepsilon\varepsilon(x) \leqslant M\varepsilon^2.$$

Continuant ainsi de suite, ou aura

$$|u_n-u_{n-1}| \leqslant M\varepsilon^{n-1}\varepsilon_1(x) \leqslant M\varepsilon^{n-1}\varepsilon(x) \leqslant M\varepsilon^n,$$

$$|v_n-v_{n-1}| \leqslant M\varepsilon^{n-1}\varepsilon_2(x) \leqslant M\varepsilon^{n-1}\varepsilon(x) \leqslant M\varepsilon^n.$$

Si l'on choisit x_0 assez grand pour que l'on ait

(28) $$\varepsilon = Max\, \varepsilon(x) \leqslant 1 \qquad \text{pour } x \geqslant x_0 > 0,$$

les séries (α) convergenant uniformément pour $x \geqslant x_0 > 0$ et représentent les solutions des équations (5) sous la condition (17′) et le théorème C alors devient

C′. Les équations (1) *admettent, d'après* (3) *pour* $x \geqslant x_0 > 0$, *un système de solutions asymptotiques bornées, sous le condition* (2′), (17′) *et* (28).

Il est facile à voir que le système

$$\frac{dx}{dy} = p_{11}(x)\,y + p_{12}(x)\,z + f_1(x) + F_1(x, y, z)\,,$$

$$\frac{dz}{dx} = p_{21}(x)\,y + p_{22}(x)\,z + f_2(x) + F_2(x, y, z)\,.$$

où $p_{ik}(x)$ sont des fonctions continues, pour $x \geqslant x_0 > 0$, satisfaisant aux conditions $\lim\limits_{x \to \infty} p_{ik}(x) = a_{ik}$, admet les mêmes propriétés que le système (1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Peyovitch, *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles* (Société des mathematiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, édition spéciale, 1952, Beograd).

[2] K. Tatarkiewicz*), a) *Propriétés asymptotiques des systèmes d'équations différentielles ordinaires presque linéaires* (Annales Universitaties Mariae Curie-Sklodowska, vol. VII, 2, 1954, section A, Lublin-Palonia).

b) *Quelques exemples de l'allure asymptotique de solutions d'équations différentielles* (Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, vol. VII, 9, 1954, section A, Lublin-Polonia).

*) Où il se trouve presque toute la littérature concernant cette question.

*Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie*

О ЧИСЛЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, У КОТОРОГО ПРАВАЯ ЧАСТЬ ЕСТЬ ОТНОШЕНИЕ ДВУХ МНОГОЧЛЕНОВ

И. ПЕТРОВСКИЙ, МОСКВА

Меня интересовала оценка сверху числа предельных циклов уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{1}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — многочлены n-ой степени с действительными коэффициентами.

Когда ставится задача об отыскании верхней грани числа действительных корней многочлена или числа действительных кусков, из которых может состоять плоская алгебраическая кривая n-го порядка, как хорошо известно, очень полезно бывает перейти в комплексную область. Я попытался перенести этот метод и для оценки числа предельных циклов уравнения (1).

Под комплексным решением $y=\varphi(x)$ уравнения (1) мы будем понимать полную аналитическую функцию (аналитическое продолжение по Вейерштрассу элемента решения). Если положить

$$x=x^*+i\,x^{**} \quad \text{и} \quad y=y^*+i\,y^{**},$$

где x^* и x^{**}, y^* и y^{**} — действительны, то каждому такому решению будет соответствовать некоторая двумерная поверхность Φ в четырёхмерном пространстве (x^*, x^{**}, y^*, y^{**}). Кроме обыкновенных точек мы будем причислять к Φ полюсы и точки ветвления конечного порядка функции $\varphi(x)$. Но мы не будем причислять к Φ особые точки уравнения (1), где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ обращаются в 0. Мы будем предполагать, что рассматриваемые действительные замкнутые интегральные линии не проходят через особые точки уравнения (1).

Каждая действительная замкнутая интегральная линия уравнения (1), в частности предельный цикл, есть замкнутая одномерная линия (топологическая окружность), лежащая на одном из таких комплексных решений. Такую замкнутую одномерную линию мы будем называть циклом.

Комплексное двумерное пространство (x, y) мы будем считать проективным.

Мы исключим из рассмотрения некоторые особые уравнения, количество которых мало по сравнению со всеми уравнениями (1). Если изображать уравнения точками в пространстве K коэффициентов многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, то эти исключения составят множество M, которое не разбивает пространства K. Я буду говорить, что мы будем рассматривать *почти все* уравнения (1) или *общее* уравнение такого вида. В исключительное множество M попадут в частности все те уравнения, которые имеют бесконечно много замкнутых действительных интегральных линий. В начале рассмотрения нам придётся включить в это множество и ещё некоторые другие уравнения, но потом оказывается возможным распространить нашу оценку числа действительных предельных циклов на всякое уравнение (1) с действительными коэффициентами, имеющее лишь конечное число замкнутых решений.

Лемма I. У общего действительного уравнения (1) предельный цикл является циклом негомологичным нулю на соответствующей комплексной интегральной кривой Φ.

Доказательство. Мы говорим, что цикл C гомологичен нулю на двумерной поверхности Φ, если на этом цикле можно натянуть плёнку Π, состоящую только из внутренних точек Φ. Так как коэффициенты уравнения (1) мы предполагаем сейчас действительными, то точки комплексно-сопряжённые с точками Π также принадлежат Φ. Они образуют новую плёнку $\overline{\Pi}$, которая также натянута на C. Плёнки Π и $\overline{\Pi}$ вместе образуют, очевидно, всю поверхность Φ. Значит, вся поверхность Φ состоит только из обыкновенных точек кривой $y = \varphi(x)$, её полюсов и точек ветвления конечного порядка. Отсюда следует, что функция $y = \varphi(x)$ — алгебраическая. Но нетрудно показать, что уравнения вида (1), имеющие алгебраические решения, в пространстве K образуют множество (комплексной) размерности, чем K. И потому это множество не разбивает K и мы отнесём его к M.

Аналогично доказывается следующая

Лемма II. У общего действительного уравнения (1) два действительных предельных цикла, лежащие на одной и той же комплексной интегральной кривой, негомологичны между собою.

Оказывается, что каждое дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечно много комплексных решений, на которых имеются циклы негомологичные нулю. Но те циклы, которые гомологичны действительным предельным циклам уравнения (1) с действительными коэффициентами, обладают следующим замечательным свойством.

Рассмотрим проекцию цикла C, лежащего на комплексной интегральной кривой Φ, на какую-нибудь комплексную прямую l. Эта проекция образует на двумерной действительной плоскости, состоящей из точек l, некоторую замкнутую, вообще говоря, самопересекающуюся кривую S. Пусть p^* — есть число точек самопересечения этой проекции. Обозначим через p — минимум чисел p^* для класса гомологичных между собою циклов C. Можно показать, что p не зависит от выбора l и что у действительного уравнения (1) для циклов, гомологичных действительному предельному циклу, лежащих на соответствующей комплексной интегральной кривой Φ, всегда $p=0$. Мы будем говорить, что цикл C принадлежит к классу C_0. Значит, действительные предельные циклы принадлежат к классу C_0.

Московский математик Евгений Михайлович Ландис доказал следующее замечательное утверждение, которое является фундаментальным для излагаемого метода и которое я долго, но безуспешно пытался доказать.

Лемма III. Числа циклов C_p, имеющихся у всех решений уравнения (1), одинаковы почти для всех таких уравнений.

В частности, числа циклов C_0, соответствующих действительным предельным циклам, одинаковы почти у всех таких уравнений. Отсюда следует, что достаточно определить число циклов C_0 у решений одного такого уравнения общего вида и мы получим оценку для числа действительных предельных циклов и почти всех уравнений (1). К сожалению, этого нельзя сделать, рассматривая непосредственно одно какое-нибудь из общих уравнений (1). Это происходит потому, что топологическая структура общего комплексного решения общего уравнения (1) гораздо сложнее, чем топологическая структура решений, представляемых простейшими функциями, как это бывает, когда уравнение интегрируется.

Но я решил эту задачу для случая $n=2$ следующим образом. Я рассмотрел уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(y-1)}{x(x-1)}, \tag{2}$$

которое, конечно, является особым, принадлежащим множеству M, которое мы пока исключали из рассмотрения. Общее решение этого уравнения даётся формулой

$$y = \frac{c(x-1)}{x-c}. \tag{3}$$

На каждом из этих решений имеется бесконечно много циклов негомологичных нулю, если точки

$$x=0,\ y=0; \qquad x=0,\ y=1; \qquad x=1,\ y=0; \qquad x=1,\ y=1,$$

не считать принадлежащими комплексным линиям (3), так как эти точки являются особыми для уравнения (2). Точно также мы не будем считать принадлежним комплексным линиям (3) бесконечно удаленые особые точки уравнения (2).

Можно показать, что у всякого близкого к (2) уравнения вида (1), в том числе у неособого уравнения, может существовать комплексное решение имеющее цикл класса C_0, только в том случае, если этот цикл близок к некоторому циклу l класса C_0 на соответствующей кривой (3). Отсюда получается следующий метод определения числа циклов C_0 у общего комплексного уравнения (1) и тем самым для оценки числа предельных циклов у действительного уравнения такого вида.

Рассмотрим замкнутую кривую l класса C_0 на каком-нибудь комплексном решении (3). Проварьируем уравнение (2), то-есть, рассмотрим уравнения, близкие к нему. Тогда получим

$$\frac{d\delta y}{dx} = -\left[\frac{y(y-1)}{x(x-1)}\right]'_y \delta y + \frac{M_1(x,y)\cdot x\cdot(x-1)+M_2(x,y)\cdot y\cdot(y-1)}{x^2(x-1)^2} \tag{4}$$

где $\delta y(x)$ — вариация $y(x)$, а $M_1(x,y)$ и $M_2(x,y)$ — произвольные многочлены второй степени.

Пусть S есть проекция цикла l на комплексную плоскость x-ов, не имеющая самопересечений. Тогда этому циклу будет соответствовать цикл класса C_0 для близких к (2) уравнений вида (1), в том, и только в том случае, если приращение $\delta y(x)$ при обходе контура S будет равен 0. Для этого необходимо, как легко видеть, выписывая формулу для решения линейного уравнения первого порядка (4) относительно $\delta y(x)$, чтобы было

$$\int\limits_S \frac{(x-C)^2}{x(x-1)}\,\frac{x(x-1)M_1(x,y)+y(y-1)M_2(x,y)}{x^2(x-1)^2}\,dx = 0. \tag{5}$$

Отсюда следует, что для того, чтобы оценить сверху число циклов класса C_0 у общего уравнения (1), нам надо рассмотреть замкнутые кривые S, охватывающие различные комбинации точек 0, 1, C и ∞ на плоскости x-ов и найти число значений C, при которых для каждой из этих кривых, выполняется равенство (5). Этот подсчёт легко производится, учитывая, что вычеты подинтегральной функции (5) суть рациональные функции относительно C. Производя этот подсчёт и учитывая также решения уравнений (2), не вошедшие в общее решение (3), мы находим, что всего на решениях уравнения (2) может быть 14 кривых, служащих пределами циклов класса C_0 для уравнений общего вида (1). Но через каждую особую точку уравнения (1) за исключением множества уравнений, имеющих размерность на одну (комплексную) единицу меньше, чем у множества всех уравнений (1) проходит 2 особых решения, для которых эта точка является обыкновенной. На каждом таком решении в окрестности особой точки лежит цикл, гомологичный нулю, но охватывающий эту точку. Уравнение (1) имеет 7 особых точек: 4 конечных и 3 бесконечно-удалённых. Одно из особых решений, проходящих через каждую бесконечно-удалённую особую точку, есть бесконечно удалённая прямая. Замкнутые линии на решениях уравнений (2), предельные для этих циклов, не лежащие на бесконечно удалённой прямой и охватывающие особые точки, также окажутся в числе найдённых нами 14. Следовательно, из этого числа 14 надо исключить 11 замкнутых кривых, соответствующих циклам гомологичным нулю. Получим, что число циклов негомологичных нулю и друг другу, не больше 3.

С другой стороны, горьковский математик П. П. Баутин, нашёл уравнение вида (1) с тремя предельными циклами. Таким образом наша оценка для случая, когда $Q(x, y)$ и $P(x, y)$ многочлены второй степени, является точной.

Во всех предыдущих рассуждениях, мы принимали, что уравнение (1) есть общее уравнение. Но, предельным переходом от этого ограничения можно избавиться. Важно только, что это уравнение имело конечно число замкнутых действительных интегральных линий.

Методы, которыми мы оценивали число циклов класса C_0, у уравнения (1), применимы и для оценки количества циклов любого класса C_p у таких уравнений.

Следует особо отметить циклы, соответствующих таким линиям S на плоскости x-ов, у которых сумма обходов вокруг каждой из точек 0, I, C, равна 0. Таким линиям S соответствует некоторый негомологичный нулю цикл на *каждом* решении у почти всех уравнений (1). Таким образом таких циклов у каждого такого уравнения имеет континуум.

Методы, которыми мы пользовались для оценки числа предельных циклов у действительного уравнения (1), когда степени многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ равны 2, мы с Ё. М. Ландисом применили и к общему случаю, когда многочлены $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в правой части уравнения имеют любую степень. Мы изучили таким образом топологическую структуру решений *почти у всех* уравнений, типа (1), то-есть – за исключением множества уравнений, которых коэффициенты многочленов

$P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в пространстве всех коэффициентов этих многочленов образуют множество низшей размерности.

Мы получили таким образом следующие оценки числа d действительных предельных циклов у таких уравнений

$$d \leqslant \frac{9n^3 + n^2 - 6n + 6}{2}, \qquad \text{при нечётном } n \text{ и}$$

$$d \leqslant \frac{9n^3 - 4n^2 - 27n + 14}{2}, \qquad \text{при чётном } n.$$

В отличие от случая $n = 2$, эти оценки, повидимому, неточны. Пока имеются примеры уравнений вида (1), у которых число предельных циклов порядка n^2.

Трудности при изучении уравнения (1), когда $n > 2$, состояли в следующем.

Возьмём какое-нибудь семейство комплексных алгебраических кривых:

$$M(x, y) + c\,N(x, y) = 0 \tag{6}$$

где c — постоянный комплексный параметр. Это семейство аналогично семейству (3). Возьмём какой-нибудь цикл C на одной из кривых семейства (6) и будем его непрерывно деформировать, когда точка x описывает замкнутую линию на комплексной плоскости. Как известно, благодаря известным работам Соломона Александровича Лефшеца, цикл C при этом обходе не перейдёт, вообще говоря, в цикл гомологичный переходному. Соответственно этому при $n > 2$ интегралы аналогичные интегралу (5) не будут уже рациональными функциями c. Поэтому нам пришлось вместо простого семейства (3) исходить и из более сложного семейства (6), когда общая линия этого семейства имеет особенности.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3–4 (1957) Beograd
Yougoslavie

LE PRINCIPE VARIATIONNEL ET ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CONDUCTIBILITÉ DES MÉTAUX AUX TÉMPERATURES BASSES.

par V. GLASER, B JAKŠIĆ, I SUPEK, ZAGREB

Résumé

Il s'agit d'un probléme de mouvement des électrons libres dans le métal soumis á l'influence d'un champ éléctrique exterieur. À cause de l'interaction reciproque des éléctrons, les vibrations de réseau (phonons), l'impureté dans le métal etc. on arrive à un état stationnaire. On peut définir cet état par une équation integralle pour des fonctions, qui donnent en verité l'ampleur de déviation des électrons et des phonons, d'une repartition thérmodinamique. On déduit un principe variationnel général pour la même équation integralle.

Nous considérons á part le cas de l'interaction exclusive éléctron-phonon, qui est d'une grande importance dans le métal, parce qu'elle donne la dépendance de la témperature. Chez des témperatures basses dans ce cas, on voit que l'équation intégralle se réduit à une équation différentielle partielle sur une surface énérgetique de métal.

L'équation se résout simplement pour des surfaces rotationnelles symétriques.

Pour des surfaces moins symétriques il est plus difficile d'obtenir une solution. Elle sera tout de même plus simple que la solution d'une équation intégralle.

BIBLIOGRAPHIE

J. Supek,: *Zeitschrift für Physik*, 149, 324, (1957).
V. Glaser, B. Jakšić: *Il Nuovo Cimento*, 7, 259, (1958).
V. Glaser, B. Jakšić: *Glasnik matematičko-fizički*, 12, 257 (1957).
B. Jakšić: *Il Nuovo Cimento* (sous presse).

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie

LES PROBLÈMES ACTUELS DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

par F. G. TRICOMI, TURIN

1. Orientation

Le programme de ce „colloque" donne déjà quelques indications sur les problèmes actuels dans la théorie des équations différentielles ordinaires: par exemple on y trouve des conférences sur des questions de stabilité et sur des questions asymptotiques qui sont des problèmes tout à fait à l'ordre du jour.

Mon rapport n'aura aucun caractère exhaustif, mais je cite seulement une suite d'exemples, car je n'ai fait aucune analyse systématique de l'énorme littérature du sujet dans ces dernières années, mais seulement des recherches. On pourrait même dire, en empruntant le mot de la science minéralogique, que je n'ai fait rien d'autre qu'une prospection du territoire récent de la théorie des équations différentielles ordinaires.

Toutefois je ne crois pas me tromper en disant que la grande majorité des centaines de travaux qu'on publie annuellement sur les équations différentielles ordinaires, traite l'étude qualitative — soit asymptotique soit non — des solutions de nos équations. Une minorité concerne des problèmes d'autre genre comme, par exemple, les suivants:

1) Les recherches de M. H. L. Turrittin [1] sur les équations linéaires avec des points singuliers irréguliers, qui, dans certains cas permettent de remplacer les représentations asymptotiques classiques des solutions avec des séries convergentes dans le sens ordinaire du mot.

2) Les contributions appréciables de M. D. S. Mitrinovitch [2] tendant au perfectionnement du traité bien connu de Kamke qui énumère plus de 1500 équations spéciales importantes.

3) Les recherches de M. H. T. Davis [3] sur deux des six équations algébriques du second ordre avec points critiques fixes qui — contrairement aux autres quarante équations et plus du catalogue célèbre de Painlevé — ne sont pas intégrables au moyen des fonctions classiques.

À coté de la prédominance des questions qualitatives, on remarqe une prédominance des équations non-linéaires sur les linéaires. Ça ne veut pas toutefois dire que l'étude des équations et des systèmes linéaires soit épuisée ou presque épuisée et nous allons le voir tout de suite mais seulement que l'étude de quelques classes d'équations non-linéaires a été imposée par les applications, malgré la préférence bien compréhensible des mathématiciens pour les problèmes linéaires. En effet il y a des questions capitales sur les systèmes oscillants (mécaniques ou électriques) et sur les servo-mécanismes – c'est-à-dire sur l'automatisation – qui conduisent à des équations non-linéaires, qu'on ne peut pas linéariser sans les dénaturer.

Une confirmation de cette prédominance actuelle des équations non-linéaires est fournie par le fait que lorsque, récemment, mon ami G. Sansone a voulu compléter son traité encyclopédique bien connu sur les équations différentielles ordinaires par un livre concernant plus spécifiquement les équations non linéaires, il a dû écrire (en collaboration avec le Prof. R. Conti) un volume de 641 [4] pages entières qui est maintenant devenu un guide indispensable dans le labyrinthe des travaux récents sur ce sujet.

Mais, avant de revenir sur cela, disons quelques mots sur les questions actuellement plus vives dans le champ des équations linéaires.

2. Équations linéaires

Comme je viens de le dire, le champ des équations et des systèmes linéaires est loin d'être épuisé. En effet, on rencontre bien des travaux sur l'équation linéaire la plus simple possible après celles qui sont intégrables par quadratures, c'est-à-dire sur l'équation du second ordre:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\,(x)\,y = 0. \tag{1}$$

Il s'agit quelque fois d'amélioration des conditions afin que les solutions aient un caractère oscillant ou non-oscillant, comme dans une partie des recherches récentes de Ph. Hartman et A. Wintner [5] et de R. V. Petropavlovskaya [6]; ou de l'étude, assez difficile, du comportement asymptotique des solutions non-oscillatoires sans hypothèses minimales sur le coefficient $A\,(x)$, comme dans certaines des dernières recherches de mon regretté collegue G. Ascoli [7]; ou encore d'améliorations de la limite inférieure, donnée initialement par De La Vallée-Poussin, de la distance de deux zéros consécutifs d'une solution oscillante [8].

Toutefois les recherches actuellement prédominantes ne sont pas celles de ce genre, mais plutôt, d'un coté, l'étude des systèmes d'un nombre quelconque d'équations au moyen de la notation matricielle et, d'autre part, l'étude des points de transition dans les représentations asymptotiques.

En me limitant à dire ici quelque chose de la deuxième question seulement, je remarquerai que, dans les conditions les plus simples possibles, elle prend naissance lorsque le coefficient A de l'équation (1) a la forme

$$A(x) = q(x) + \lambda\, r(x) \tag{2}$$

λ étant un paramètre „très grand" et $r(x)$ une fonction changeant de signe dans l'intervalle consideré.

Puisque le signe de $r(x)$ – et conséquement de $A(x)$ – a une importance décisive pour le caractère (oscillatoire ou non-oscillatoire) des solutions de (1) pour $\lambda \to \infty$, on appelle (en ce cas) points de transition les zéros (avec changement de signe) de la fonction $r(x)$.

Jusqu'à une époque récente, les mathématiciens ont évité ces points génants, mais depuis une trentaine d'années, des applications ont obligé à les envisager, et maintenant leur étude est assez avancée, au moins dans les cas des équations du second ordre. Dans le rapport récent de mon ami A. Erdélyi au Congrès International d'Amsterdam de 1954 [9] on donne une bonne orientation générale sur la question, et la bibliographie commentée du même Auteur [10] est un guide précieux dans la littérature, déjà assez ample, du sujet.

Toutefois, je me permets d'appeler l'attention aussi sur un petit mémoire de moi sur ce sujet [11] car je crois que la méthode de Fubini [12] que j'ai employée dans ce travail, n'est pas seulement un outil pour traiter la question, mais l'outil le plus naturel dans ce but.

En supposant que le point de transition consideré (pour simplifier: l'origine) soit simple, on montre que l'équation (1) peut se ramener à la forme

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + [\lambda - Q(x)]\, z = 0 \tag{3}$$

et successivement, en posant

$$x = (3\lambda)^{-\frac{1}{3}}\, t\,,$$

à l'autre

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{3}\, tz = \lambda^{-\frac{2}{3}}\, Q^*(t)\, z\,, \tag{4}$$

Q et Q^* étant deux fonctions régulières dans l'entourage du point de transition $x = t = 0$.

L'équation (4) – dont le premier membre, égal à zéro, donne l'équation différentielle des deux fonctions d'Airy $A_1(t)$ et $A_2(t)$ – est vraiment idéale pour l'application de la méthode de Fubini, qui, sans aucun calcul, montre que l'équation (3) a deux solutions linéairement indépendantes $Z_1(x)$ et $Z_2(x)$ donées des représentations asymptotiques

$$Z_h(x) = A_h[(3\lambda)^{\frac{1}{3}} x] + O(\lambda^{-\frac{2}{3}})$$

qu'on pourrait améliorer sans trop de peine, comme il est montré dans mon travail cité plus haut.

Parmi les nombreux travaux tout récents sur ce sujet, je me borne à rappeler ici un mémoire de R. W. Mckelvey [13] sur les points de transition multiples et un de R. Langer [14] sur les équations linéaires du troisième ordre.

3. Équation de van der Pol et ses généralisations

Dans l'énorme littérature sur les questions des équations différentelles non-linéaires, une partie importante concerne l'équation de van der Pol (an 1926).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(x^2-1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{5}$$

et ses généralisations successives, comme l'équation de Liénard (an 1928)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega f(x)\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{6}$$

l'équation de Liénard généralisée

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \tag{7}$$

etc, où les fonctions — coefficients $f(x)$ et $g(x)$ satisfont à des conditions que nous n'allons pas rappeler ici.

Plus récemment, toujours sous la pression des applications, on a commencé à étudier aussi les équations correspondantes non homogènes surtout lorsque la „fonction perturbatrice" au second membre est une fonction périodique du temps t.

Dans l'étude de ces équations – qui dominent beaucoup de phénomènes vibratoires dans les systèmes avec un seul degré de liberté – ce qui intéresse avant tout, c'est l'existence ou la non-existence de solutions périodiques, soit lorsque ces solutions sont désirées (systèmes oscillants) soit lorsque elles ne sont pas désirées (p. ex. mécanismes avec auto-régulation).

Dans la recherche de ces solutions périodiques on peut quelquefois se servir d'une méthode développée par Henri Poincaré à l'usage de la mécanique céleste, mais plus souvent on est reduit à discuter si un système autonome de deux équations différentielles du premier ordre, c'est à dire un système de la forme

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{8}$$

admet ou non des caractéristiques (c'est-à-dire des courbes intégrales) fermées.

L'étude qualitative des caractéristiques d'un système autonome est un problème des plus classiques et je dois y revenir d'ici à peu. Il a donné lieu a des recherches celèbres de H. Poincaré, J. Bendixson et autres, qui - d'une certaine manière - marquent le passage de la théorie ancienne des équations différentielles à la théorie moderne, dans laquelle il n'y est plus question d'intégration „explicite" de l'équation, mais de la discussion qualitative des solutions et des méthodes pour leur évaluation numérique.

Toutefois, tandis que ces études sont assez avancées en ce qui concerne l'étude locale du champ vectoriel (ou du champ de direction) attaché à l'équation, elles sont moins avancées en ce qui concerne les propriétés globales du champ, telles que l'existence d'une caractéristique fermée qui, habituellement, est un cycle limite de l'équation, à savoir la limite d'une infinité d'autres courbes intégrales.

Le problème de la recherche de ces cycles-limites pour un système de la forme (8) ou plus généraux est un des problèmes les plus actuels dans la théorie des équations différentielles ordinaires, et le livre cité de Sansone—Conti est un guide précieux dans la forêt des publications y relatives. On connaît une multitude de conditions soit nécessaires soit suffisantes pour l'existence de ces cycles limites mais, à l'état actuel des choses, un système du type (8) étant donné, il reste assez difficile de décider s'il y a ou non des cycles-limites et combien. Par exemple, ce n'est qu'en 1955 qu'un travail très intéressant de I. G. Petrovski et E. M. Landis [15] a montré que — $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ étant deux polynômes de deuxième degré — le nombre maximum (effectivement atteint) des cycles — limites du système (8) est trois.

Les difficultés sont encore plus considérables dans l'étude des oscillations forcées, c'est à dire dans le cas d'équations avec de seconds membres périodiques. En effet, — à part le fait que pareillement au cas linéaire, on peut avoir résonance ou non-résonance — il y a ici la difficulté que les oscillations „de régime" du système n'ont pas nécessairement la même fréquence ν de la fonction perturbatrice, mais on peut aussi avoir les oscillations „superharmoniques" avec des fréquences multiples de ν. Sur ce sujet sont particulièrement importantes les recherches de M. L. Cartwright et J. E. Littlewood, sur lesquelles vient de paraître un gros mémoire dans les Acta Mathematica [16].

4. Points singuliers des systèmes autonomes

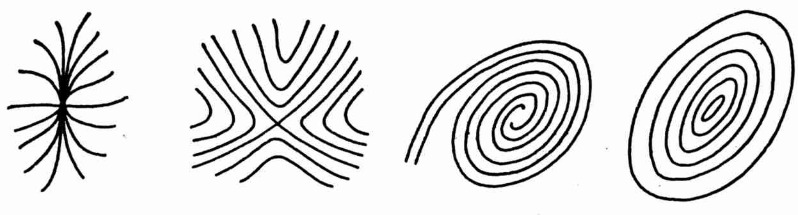
En passant sous silence d'autres questions importantes — par exemple les questions de stabilité dont a parlé M. Denjoy – je vais m'arrêter un moment sur la discussion des points singulaiers isolés du champ vectoriel attaché à un système autonome du type (8), en faisant l'hypothèse habituelle que, dans le voisinage d'un de ces points – disons de l'origine O – le système peut s'écrire

$$\frac{dx}{dt} = Ax + By + f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Cx + Dy + g(x, y), \tag{9}$$

où A, B, C, D sont quatres constantes non toutes nulles à la fois et f et g deux fonctions d'ordre de grandeur plus petite que les premiers termes, c'est-à-dire telles que

$$f(x, y) = o(r), \quad g(x, y) = o(r); \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{10}$$

Comme il est généralement connu, le problème de la discussion des caractéristiques du système dans les environs de O est assez élémentaire si le déterminant $\Delta = AD - BC$ n'est pas zéro. Précisément – abstraction faite d'une difficulté relative à la distinction du cas du foyer de celui du centre — on sait qu'il n'y a que quatre configurations possibles des caractéristiques: 1) noeud, 2) col, 3) foyer, 4) centre (voir les croquis correspondants) qu'on peut distinguer les unes des autres en ayant égard au signe du déterminant Δ et du discriminant $(A - D)^2 + 4BC$.



(1) (2) (3) (4)

Tout différent c'est le cas $\Delta = 0$, dans lequel ce que l'on savait jusqu'à ce dernier temps n'était pas beaucoup, bien que certaines méthodes de Bendixson, Frommer et d'autres fussent applicables même dans ce cas. On peut presque dire que l'on savait seulement que, à coté des quatre configurations classiques précédentes, des configurations des caractéristiques tout à fait différentes étaient aussi possibles.

Quelques travaux importantes qui viennent de paraître apportent beaucoup de clarté sur la question.

Le principal de ces travaux est un travail de 1955 de K. A. Keil [17], auquel les Math. Reviews ne donnent que sept lignes mais qui est largement condensé dans le cité livre de Sansone-Conti. Dans ce travail on montre que, dans le cas considéré, le système peut être ramené à l'une on à l'autre des deux systèmes canoniques:

$$(11^A) \qquad \frac{dx}{dt} = x + f_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g_1(x, y) \; ;$$

$$(11^B) \qquad \frac{dx}{dt} = y + f_2(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g_2(x, y)$$

suivant que $A + D \neq 0$ ou $A + D = 0$, où les fonctions $f_1, \ldots, g_2$ satisfont à des conditions analogues à (10).

La discussion du système (11^A) est la plus facile et on trouve que si l'origine n'est pas un col ou un noeud, elle peut être un noeud — col, c'est à dire un point singulier ayant le caractère de deux comme le montre le croquis (5) à coté.


(5)

La discussion du système (11^B) est un peu plus difficile et les résultats de Keil sont moins complets, dans ce sens que l'A. ne donne pas, en tout cas, des conditions à priori permettant de dire laquelle des différentes configurations possibles se vérifie dans un cas donné. En plus, pour pouvoir étudier des possibilités autres que les suivantes, il convient de renforcer les conditions (10) en supposant, par exemple, que les fonctions du genre de f et g soient douées de dérivées des deux premiers ordres continues.

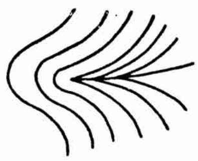
Dans ces conditions on trouve que l'origine, si ce n'est pas un foyer ou un centre, peut donner lieu à deux configurations nouvelles que j'appelerai respectivement promontoire (promontorio, Bergvorsprung) et col mince (colle stretto, schmale Sattel) ou à deux configurations composées: noeud-promontoire et noeud-col mince.

Dans la configuration du promontoire (dont j'ai déjà parlé dans mon livre de 1953, en y donnant un exemple très élementaire) il y a une caractéristique et une seule qui lie l'origine avec un point de rebroussement, pendant que les autres ont une allure comparable à celle des courbes de niveau d'une carte topographique dans les environs justement d'un promontoire (voir le croquis 6 à côté).

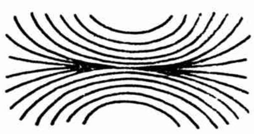
La configuration des caractéristiques dans un col mince ne diffère pas complètement de celle bien connue du col, mais les deux séparatrices sont tangentes entre elles. Elle rappelle (croquis 7) l'allure des courbes de niveau dans les environs d'un col reliant deux larges vallées à travers une mince crête de montagne.

(6)

(7)



(8)



(9)

Enfin, les deux configurations composées donnent lieu à des figures du genre des croquis (8) et (9) à coté.

Comme on le voit, il y a neuf configurations de caractéristiques essentiellement différentes, tandis que dans un travail de A. F. Andreev [18] presque simultané à celui de Keil — que je connais seulement à travers une analyse (de M. S. Lefschetz) dans les Math Reviews — on parle de huit configurations. Probablement M. Andreev devait trouver le cas (5) du noeud-col, parce qu'il considère seulement (11^B) comme forme canonique du système en discussion. Pour décider la question il faudrait étudier attentivement le travail original, ce que je n'ai pas pu faire pour beaucoup de raisons, dont la première est que je ne comprends pas le russe.

J'aime enfin à signaler un travail de R. M. Minc [19] sur l'allure des caractéristiques du système des trois équations

$$\dot{x} = P(x, y, z), \qquad \dot{y} = Q(x, y, z), \qquad \dot{z} = R(x, y, z)$$

où le point désigne la dérivation par rapport à t et P, Q, R sont trois polynômes des fonctions inconnues x, y, z. Il s'agit donc, essentiellement, de la discussion des courbes intégrales d'une équation du second ordre: un sujet sur lequel il n'y a pas beaucoup d'études.

5. Proposition d'un ouvrage international sur les équations différentielles

Je me permets de conclure ce rapport – qui n'a aucune pretension d'être complet — sur les problèmes actuels de la théorie des équations différentielles ordinaires, en exposant quelques réflexions que j'ai eu l'occasion de faire pendant sa préparation, en passant en revue (avec l'aide essentielle des Math. Reviews) les centaines de travaux sur le sujet publiés dans ces derniers temps.

La première de ces réflexions c'est que ces travaux ainsi que ceux sur les équations aux dérivées partielles, l'analyse fonctionnelle etc – sont si nombreux, qu'on peut légitimement se demander: À quoi bon les publier, si bien peu de personnes peuvent jamais les lire? En effet, un bon mathématicien, connaissant les sinq ou six langues modernes importantes qui voudrait suivre personnellement (c'est à dire ne pas se servir seulement des résumés dans les Math. Reviews ou le Zentralblatt, quelquefois misleading) la littérature d'un de ces sujets devrait y consacrer presque toute sa journée de travail; avec le résultat de ne plus pouvoir, faute de temps, développer les connaîssances si péniblement acquises!

On peut donc répéter, comme mon collègue G. Loria[20] le disait déjà en 1928: Quo vadimus? Où allons nous?

Mon impresion est que nous nous trouvons dans une situation semblable à celle d'il n'y a presque deux siècles, lorsque on a dû se convaincre que le système ancien de communication des découvertes scientifiques au moyen de lettres privées entre savants ne marchait plus. Dès lors on a commencé à publier dans les journaux scientifiques et dans les comptes rendus des académies. Maintenant il faut créer quelque chose de nouveaux, sans continuer à faire semblant de croire qu'on lira ce que presque personne n'aura eu le temps de lire!

L'expérience nous apprend que les difficultés dont je parlais disparaissent – ou s'attenuent grandement – lorsque on a la chance de rencontrer dans le domaine qui intéresse, un ouvrage encyclopédique récent (et bien fait) du genre du livre de Sansone et Conti sur les équations nonlinéaires dont j'ai parlé au commencement.

Pourquoi ne pas tâcher que cela soit la règle au lieu d'être l'exception?

Dans ce but, il serait nécessaire que l'Union Mathém. Internationale ou l'Unesco ou quelque autre organisation semblable nommât de petits comités d'experts de tous pays, chargés de publier un après l'autre, une disaine d'ouvrages du genre indiqué, et de les maintenir à jour par des éditions successives, disons, tous les cinq ans. De cette manière avec la publication d'une couple de volumes chaque année (qu'on n'aura aucune difficulté à colloquer) la nécessité de consulter les travaux originaux se reduira, au pire des cas, à quatre ou cinq années, sauf des cas spéciaux (études historiques, par exemple).

On peut ajouter qu'avec une organisation semblable se reduiront grandement les inconvenients toujours croissants mais déjà sensibles de l'habitude (j'oserais dire de la mauvaise habitude) moderne de ces publications scientifiques demi-clandestines, ayant forme de „reports" etc cyclo styles, si répandus maintenant surtout dans les Etats Unis. Il suffirait, en effet, de ces „reports" qui seraient regulièrement envoyés au comité compétent qui - le cas échéant - les utilisera pour la prochaine édition de l'ouvrage dont il est chargé.

Je ne sais pas s'il était posible d'organiser quelque chose de semblable à ce que je propose, mais il faudra bien faire quelque chose si nous ne voulons pas étouffer dans une mer de papier. Faute de mieux, il ne restera qu'à recommander une espèce de birth controll, même pour les publications de mathématiques.

LITTÉRATURE

[1] Acta Math. 93, 27—66 (1955); Confér. Semin. Matem. Bari, № 17 (1956).

[2] La première note dans les Jahresb. d. Deutschen Math. Ver. 58, 58—60 (1956). Pour les suivantes on peut voir les Math. Reviews.

[3] OOR Project № 956 (72 pp) Northwestern Univ., Evanston, Ill. 1955. Il vient de paraitre un livre de Davis et d'autres auteurs intitulé „Studies in Differential Equations" (Northwestern Univ. Press, Evanston 1956) contenant un article de Davis sur le sujet.

[4] G. Sansone—R. Conti: Equazioni differenziali non lineari. Monogr. Mathem. C. N. R. № 3 — Roma, Ed. Cremonese, 1956.

[5] American J. of Math. 77, 45—86 (1955).

[6] Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.) 105, 29 - 31 (1955).

[7] Boll. Unione Mat. Ital. (3) 8, 115—123 (1953); Riv. Matem. Univ. Parme, 4, 11 29 (1953).

[8] Ph. Hartman—A. Wintner, Quart. Applied Math. 13, 330—2 (1955); C. Foiss—G., Gussi — V. Poenaru, Bul. Mat. Fiz. Acad. Romine, 7, 699—721 (1955).

[9] Proced. Intern. Congress, III, 92—101 (1956).

[10] California Inst. of Technology, Depth. of Math. Tech. Rep. № 22, 22 pp (Pasadena Calif 1955).

[11] Rend. Acc. Lincei (8) 17, 137—141 (1954).

[12] Cette méthode est une généralisation de la méthode bien connue de Liouville — Steklov — Langer, fondé, comme cette dernière, sur la traduction du problème en une équation intégrale de Volterra.

[13] Trans. Amer. Math. Soc. 79, 103—123 (1955).

[14] Trans. Amer. Soc. 80, 93 - 123 (1955).

[15] Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.) 102, 29—32 (1955).

[16] J. E. Littlewood, Acta Math. 97, 267—308 (1957).

[17] Jahresber. Deutsche Math. Ver. 57, 111—132 (1955).

[18] Vestnik Leningrad, 10, № 8, 43—65 (1955).

[10] Dans le volume en mémoire de A. A. Andronovw (Moscow, 1955) pp. 499—534.

[20] Atti Congr. Intern. Matem., Bologna 1928—6, 421—26 (1932).

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie

UN MODE DE DÉTERMINATION DES INTÉGRALES PREMIÈRES QUALITATIVES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

par D. MARKOVITCH, BEOGRAD

I. *Introduction.* Plusieurs fois j'ai employé dans les diverses branches d'analyse mathématique comme l'instrument méthodique la propriété connue de la moyenne arithmétique (dans la suite m. a.)

$$(1) \qquad m \leqslant \frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu} \leqslant M, \quad M = \underset{1 \leqslant \nu \leqslant n}{\mathrm{Max}} \{a_\nu\}, \quad m = \mathrm{Min}\{a_\nu\},$$

a_ν étant les quantités réelles, b_ν non negatives. Il faut remarquer que M, respectivement m, ne dependent que des a_ν.

Dans ce travail je vais donner une esquisse de l'application de la propriété mentionée de la m. a. aux équations différentielles ordinaires dont les éléments x, y, y', y'', ... sont toujours réels. Autrement dit, notre but est, d'indiquer à quelques formes (types) des équations différentielles ordinaires assez fréquentes qu'on peut simplifier par la méthode de la m. a. La simplification consiste en réduction d'une équation differentielle

$$(2) \qquad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

à une autre plus simple

$$(3) \qquad f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m)}),$$

mais encadrée par deux fonctions $M(x)$ et $m(x)$.

Au point de vue de l'application de la méthode, on distinguera deux cas:

1° l'application directe, et

2° l'application indirecte.

II. *L'application directe.* Pour simplifier l'exposition de la méthode, considérons d'abord une équation du premier ordre dont la forme peut être exprimée par exemple par

$$f(x, y, y') = \frac{u_0 + u_1 \varphi(y, y')}{v_0 + v_1 \varphi(y, y')}. \tag{4}$$

Les fonctions u_ν, v_ν $(\nu = 0,1)$ sont réelles et continues, v_ν encore positives dans (a, b), et $\varphi(y, y')$ non négative pour toutes les valeurs réelles de y, y'. Alors l'application directe donne

$$m(x) \leqslant f(x, y, y') \leqslant M(x), \tag{5}$$

où

$$M(x) = \text{Max}\left\{\frac{u_0}{v_0}, \frac{u_1}{v_1}\right\}, \quad m(x) = \text{Min}\left\{\frac{u_0}{v_0}, \frac{u_1}{v_1}\right\}. \tag{6}$$

La réduction (5), indépedante de φ, est commune pour une famille des équations de la forme (4) lorsque la fonction $\varphi(y, y')$ est soumise aux restrictions enoncées.

Remarquons que $M(x)$ est *max* si pour une valeur $x_0 \in (a, b)$ est

$$M(x_0) > m(x_0),$$

c'est à dire $m(x)$ est *min*. Si cette inégalite est valable pour tout $x \in (a, b)$, alors on n'echange pas le rôle de *max* resp. *min* entre les fonction $M(x)$ et $m(x)$. Mais en général ce rôle *max* et *min* peut s'echanger plusieurs fois dans (a, b) ce que dépend des zéros réels de l'equation

$$M(x) - m(x) = 0.$$

Quelques exemples montrent que les équations différentielles assez compliquées peuvent être réduites aux équations connues et simples d'où il est beaucoup plus facile de déduire quelques conclusions pour les solutions particulières que de l'équation donnée.

Ainsi par ex. l'équation

$$y' = \frac{u_0 + u_1 y^{2k}}{v_0 + v_1 y^{2k}}, \tag{7}$$

se réduit aux équations différentielles comparatives très simples

$$y' = M(x) \quad \text{et} \quad y' = m(x),$$

indépendantes de k entier.

De même l'équation

$$y' + ya(x) = \frac{u_0 + u_1 e^{\lambda y}}{v_0 + v_1 e^{\lambda y}}, \tag{8}$$

où λ est réel, se réduit aux équations différentielles comparatives linéaires

$$y' + ya(x) = h(x),$$

$h(x)$ etant tantôt *max* tantôt *min* au sens qui est déjà expliqué.

Il est intéressant de citer l'exemple suivant

$$(9) \qquad y = \frac{u_0 + u_1 y'^{2k}}{v_0 + v_1 y'^{2k}}, \quad k \text{ entier}$$

d'où il suit

$$m(x) \leqslant y \leqslant M(x),$$

pour toutes les valeurs de y'. Les propriétés de l'intégrale y suivent immédiatement sans aucune intégration.

Concrétement l'équation

$$(10) \qquad y = \frac{\sin x + y'^2}{1 + y'^2}$$

donne

$$\sin x \leqslant y \leqslant 1.$$

D'où la conclusion: *si les intégrales de l'équation* (10) *possédent les zéros réels, ils peuvent se trouver seulement dans les intervalles* $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ *où k est entier.*

Les exemples (7), (8), (9) et (10) indiquent le rôle que joue la forme commune des équations quelques fois tout à fait différentes.

Le raisonnement analogue au precédent peut être appliqué à une équation plus générale

$$(11) \qquad f(x, y, y') = \frac{\sum_{\nu=0}^{m} u_\nu \varphi_\nu}{\sum_{\nu=0}^{m} v_\nu \varphi_\nu},$$

où les fonctions u_ν, v_ν et $\varphi_\nu(y, y')$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ remplissent les mêmes conditions comme dans l'équ. (4). Alors il suit

$$(12) \qquad \operatorname{Min}\left\{\frac{u_\nu}{v_\nu}\right\} \leqslant \underset{0 \leqslant \nu \leqslant m}{f(x, y, y')} \leqslant \operatorname{Max}\left\{\frac{u_\nu}{v_\nu}\right\}.$$

Donc, les équations comparatives sont indépendantes de φ_ν.

III. *L'application indirecte.* On a vu que les cas et les exemples que nous avons traité, exigent que l'équation donnée doit avoir, ou bien doit être ramenée, à une *forme fractionaire.* Mais si cette forme n'existe pas, elle peut dans un grand nombre de cas être effectuée. L'équation considérée peut *être comparé* par un *élément comparatif* convenablement choisi. Sans nuir la généralite du raisonement on peut considérer d'abord l'équation simple

$$(13) \qquad y' = u_0 + u_1 y^2,$$

où $u_\nu\ (\nu = 0, 1)$ sont les fonctions continues dans un intervalle (a,b). Constituons maintenant *l'élément comparatif* au moyen de l'expression

$$v_0 + v_1 y^2 > 0 \tag{14}$$

dont les fonctions $v_\nu\ (\nu = 0, 1)$ sont arbitraires mais positives dans (a,b). Alors l'équ. (13) *comparée* par (14) donne

$$\frac{y'}{v_0 + v_1 y^2} = \frac{u_0 + u_1 y^2}{v_0 + v_1 y^2},$$

d'où il suit

$$(v_0 + v_1 y^2) \cdot m(x) \leqslant y' \leqslant (v_0 + v_1 y^2)\, M(x),$$

$M(x)$ et $m(x)$ étant définies comme auparavant.

Il est vrai que la méthode conduit aux équations comparatives de même forme que l'équation donnée, mais le choix des fonctions arbitraires v_ν peut, dans beaucoup de cas, faire que les équations comparatives s'achèvent ou par quadrature ou bien se reduisent aux équations connues. Le cas le plus simple est celui ou les fonctions v_ν se reduisent a $c_\nu > 0$ (c_ν constantes arbitraires) Remarquons que les cas plus généraux

$$y' = \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu y^{2\nu} \quad \text{ou} \quad y' = \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu y^\nu$$

ne font pas les difficultés à la méthode, sauf la restriction $y > 0$ dans le second cas.

Citons quelques détails concernant le choix de *l'élément comparatif.* L'équation de Riccati (10) peut être par ex. comparée par $1 + y^2$. Or, de l'équation (10) il suit

$$\text{Min}\,\{u_0, u_1\} \leqslant \frac{y'}{1 + y^2} \leqslant \text{Max}\,\{u_0, u_1\}.$$

De même l'équation

$$y' = u_0 + u_1 y^2 + u_2 y^4 + \cdot \cdot \cdot + u_m y^{2m}$$

peut être comparée par

$$(1 + y^2)^m.$$

Donc

$$m(x) \leqslant \frac{y'}{(1 + y^2)^m} \leqslant M(x)$$

où

$$M(x) = \underset{0 \leqslant \nu \leqslant m}{\text{Max}} \left\{ \frac{u_\nu}{\binom{m}{\nu}} \right\}, \quad m(x) = \text{Min} \left\{ \frac{u_\nu}{\binom{m}{\nu}} \right\}.$$

L'exemple

$$y'^2 + yy' f_1(x) + y^2 f_2(x) = f_3(x)$$

montre que pour $y > 0$, $y' > 0$, elle peut être comparée par

$$(y' + yg(x))^2,$$

où $g(x)$ est une fonction arbitraire positive dans un intervalle (a, b). Alors on réduit l'équation donnée aux équations comparatives

$$m(x) \leqslant \frac{f_3(x)}{(y' + yg(x))^2} \leqslant M(x)$$

où

$$M(x) = \text{Max}\left\{1, \frac{f_1(x)}{2g(x)}, \frac{f_2(x)}{g^2(x)}\right\}, \quad m(x) = \text{Min}\left\{1, \frac{f_1(x)}{2g(x)}, \frac{f_2(x)}{g^2(x)}\right\}.$$

Les équations comparatives sont dans ce cas les équations linéaires.

Les procédés et les remarques que nous avons exposé en appliquant la méthode aux divers cas des équations différentielles du premier ordre sont applicables aussi et aux équations d'ordre superieur. L'exemple classique montre que l'équ. diff.

$$\frac{y''}{y} = R(x), \qquad R(x) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu \Big/ \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu x^\nu$$

se réduit pour $c_\nu > 0$, $x > 0$ aux équations

$$\lambda_1 \leqslant \frac{y''}{y} \leqslant \lambda_2, \qquad \lambda_1 = \underset{0 \leqslant \nu \leqslant m}{\text{Min}}\left\{\frac{a_\nu}{c_\nu}\right\}, \qquad \lambda_2 = \text{Max}\left\{\frac{a_\nu}{c_\nu}\right\},$$

linéaires à coefficients constants.

La restrictions $x > 0$ peut être diminuée, par la représentation de

$$R(x) = \sum_{\nu=0}^{m} a'_\nu (x+a)^\nu \Big/ \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu' (x+a)^\nu .$$

La méthode sera valable alors pour $c_\nu' > 0$ et $x > -a$, où a désigne un nombre arbitraire réel et positif.

IV. Dans cet article j'ai seulement le but d'indiquer un mode de simplification dans le domaine des équations differentielles ordinaires sans aller dans les détails de perfectionnement technique de la méthode. De même, j'ai laissé à coté maintenant aussi et l'analyse des intégrales particulières des équations données, c'est-à-direles recherches détaillés des propriétés des intégrales particulières, en considérant que cette question doit être étudiée séparément.

Ce travail unit méthodiquement le mode de determination des *intégrales premières qualitatives* d'une équation différentielle, d'après la définition suivante de M. Petrovitch [1]:

Dans un grand nombre de cas il existe pour une même équation

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

une telle expression

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)})$$

qui varie seulement dans un intervalle lorsque on y remplace une intégrale de l'équ. donnée. On exprime cela par

$$f = \lambda$$

avec

$$\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2.$$

La forme (1), c'est-à-dire la forme de la m. a., dont les propriétés nous avons employées comme un instrument méthodique, n'est pas la forme unique, mais je la trouve la plus simple et la plus fréquente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Petrovitch M.; *Calcul avec les intervalles numériques*, Beograd 1932, pp 163—164 (en serbe).

*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3–4 (1957) Beograd
Yougoslavie*

SUR UNE APPLICATION DES INTÉGRALES SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

par GEORGES KARAPANDJITCH, BEOGRAD

Dans un article antérieurement publié nous avons montré la possibilité d'utiliser les intégrales singulières des équations différentielles [1] pour obtenir les quadratures.

Il s'agissait de l'équation de Clairaut, ainsi que d'une équation plus générale que celle de Clairaut, dont nous allons nous occuper aussi dans cet article. Les interprétations théoriques, d'un autre point de vue sur ce sujet, ont été données par B. Rachaïsky [2] dans un article récent. Tout d'abord nous allons esquisser d'une manière abrégée la méthode dont il s'agit. Partons de l'équation différentielle

$$y = N(x, y'). \tag{1}$$

Comme il est bien connu, le système

$$y = N(x, y'), \qquad \frac{\partial N(x, y')}{\partial y'} = 0, \tag{2}$$

définit l'intégrale singulière — si elle existe; par élimination de y' des deux équations on obtient $y = \tau(x)$ qui doit satisfaire l'équation (1).

En cas d'intégrale singulière les quantités x, y, y' ont les mêmes valeurs pour chaque point d'enveloppe ainsi que pour les courbes appartenant à l'intégrale générale. On obtient de la deuxième des équations (2) la rélation

$$y' = k(x), \tag{3}$$

d'où par intégration nous avons

$$y = \int k(x)\, dx + C; \tag{4}$$

d'autre part, en utilisant les relations (1) et (3) il est facile d'établir la relation

$$y = N[x, k(x)]. \tag{5}$$

Cependant, de la relation (4) pour $C=0$, et au moyen de (5) nous pouvons obtenir

$$\int k(x)\,dx = N[x, k(x)]. \tag{6}$$

La relation (6) nous fournit des quadratures par une voie algébrique: la substitution de y' de l'équation (3) dans l'équation (1) nous donne la quadrature requise.

Remarquons que nous avons appliqué la méthode citée dans le cas de l'équation de Clairaut ainsi que dans un autre travail en manuscrit [3] pour deux équations différentes de celle de Clairaut. Nous utilisons les transformations du contact car elles offrent la possibilité de former un grand nombre d'équations dont nous pouvons obtenir les intégrales générales sans difficulté, d'où nous pouvons démontrer l'existence d'intégrale singulière.

Maintenant, utilisons une équation plus générale que celle de Clairaut dont nous nous sommes occupés antérieurement [1]. Cette équation est de la forme suivante

$$y - \frac{\varphi}{\varphi'} y' = f\left(\frac{y'}{\varphi'}\right), \tag{7}$$

où φ désigne une fonction quelconque de variable x.

Il est facile de vérifier que les deux expressions

$$x_1 = \frac{y'}{\varphi'}, \qquad y_1 = y - \frac{\varphi}{\varphi'} y',$$

sont en involution. On obtient l'intégrale générale de l'équation (7) (Lagrange) en posant $x_1 = C$ (c'est-à-dire $y' = C \cdot \varphi$) dans l'équation même, à savoir

$$J(x, y, C) \equiv y - C\varphi - f(c) = 0.$$

C'est ce qui présente l'intégrale générale de l'équation (7).

Pour examiner l'existence de l'intégrale singulière utilisons [4] les conditiones nécéssaires

$$D \equiv \begin{vmatrix} J_x & J_y \\ J_{xc} & J_{yc} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C\varphi' & 1 \\ \varphi' & 0 \end{vmatrix} = -\varphi' \gtrless 0, \qquad J_{cc} \equiv -f''(c) \gtrless 0. \tag{8}$$

Les deux conditiones étant remplies (sauf pour $\varphi = \text{const}$ et $f = \alpha \cdot C + \beta$) — nous avons l'intégrale singulière.

En différentiant la relation (7) d'après y' nous obtenons

$$-\varphi = f'\left(\frac{y'}{\varphi'}\right), \tag{9}$$

d'où pour les différentes formes de fonction f' on peut obtenir une série d'intégrales d'après la méthode que nous venons d'indiquer. Citons un cas pour illustrer nos assertions. Soit

$$-\varphi = \frac{\left(\frac{y'}{\varphi'}\right)^2 - 1}{2\frac{y'}{\varphi'}} \equiv f'\left(\frac{y'}{\varphi'}\right),$$

d'où on a (en tenant seulement le signe +)

$$y' = -\varphi\varphi' + \varphi'\sqrt{\varphi^2+1}. \qquad a)$$

Comme il est

$$f\left(\frac{y'}{\varphi'}\right) = \int f'\left(\frac{y'}{\varphi'}\right) d\left(\frac{y'}{\varphi'}\right) = \int \frac{\left(\frac{y'}{\varphi'}\right)^2 - 1}{2\frac{y'}{\varphi'}} d\left(\frac{y'}{\varphi'}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{y'}{\varphi'}\right)^2 - \frac{1}{2} ln \frac{y'}{\varphi'} \qquad b)$$

et en utilisant l'équation (7) et les relations a) et b) il est facile d'établir

$$\int \varphi'(-\varphi + \sqrt{\varphi^2+1})\, dx = \varphi A + \frac{1}{4} A^2 - \frac{1}{2} ln A, \qquad (10)$$

$$A \equiv -\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}.$$

De cette manière nous avons obtenu une quadreture par une autre voie, utilisant parmi les autres opérations les quadratures tout à fait élémentaires comme celle en b). La méthode exposée est d'un caractère algébrique.

Cependant si on compare les quadratures obtenues avec les résultats d'intégration par parties on obtient un certain nombre d'autres nouvelles quadratures. Pour illustrer cela considérons la quadrature (10) obtenue au moyen de la méthode exposée — à savoir

$$\int \varphi' \sqrt{\varphi^2+1}\, dx = -\frac{\varphi^2}{2} + \varphi\sqrt{\varphi^2+1} +$$

$$+\frac{1}{4}(-\varphi+\sqrt{\varphi^2+1})^2 - \frac{1}{2} ln(-\varphi + \sqrt{\varphi^2+1});$$

cependant, d'après l'intégration par parties on obtient

$$\int \varphi' \sqrt{\varphi^2+1} = \varphi\sqrt{\varphi^2+1} - \int \varphi \frac{\varphi\varphi'}{\sqrt{\varphi^2+1}} dx,$$

d'où en comparant les résultats obtenus au moyen des deux méthodes nous avons

$$\int \frac{\varphi^2 \varphi'}{\sqrt{\varphi^2+1}} dx = \frac{\varphi^2}{2} - \frac{1}{4} A^2 + \frac{1}{2} \ln A, \tag{11}$$

$$A \equiv -\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}.$$

Prenant les fonctions diverses pour la fonction dérivée figurant dans la méthode d'intégration par parties — on peut obtenir plusieurs quadratures; par exemple citons encore

$$\int \frac{\varphi'}{\varphi} \cdot \varphi \sqrt{\varphi^2+1}\, dx = \varphi \sqrt{\varphi^2+1} \ln \varphi - \int \ln \varphi \frac{2\varphi^2+1}{\sqrt{\varphi^2+1}} \varphi' dx,$$

d'où d'une manière analogue il suit par comparaison avec (10) — la quadrature qui se trouve à la seconde partie de la dernière relation.

Soit

$$x_1 = \frac{1}{\psi'(y)\, y'},$$

une formule des transformations du contact d'où suit, en intégrant cette rélation à titre d'une équation différentielle, par la mèthode de V. P. Ermakof — la deuxième formule

$$\frac{\psi(y)}{\psi'(y)\, y'} - x = y_1.$$

Formons une équation différentielle

$$\frac{\psi(y)}{\psi'(y)\, y'} - x = f\left[\frac{1}{\psi'(y)\, y'}\right], \tag{12}$$

où f désigne une fonction quelconqu. On obtient l'intégrale générale de cette équation d'une manière analogue à celle du cas précédent

$$J(x, y, C) \equiv C\psi - x - f(C) = 0.$$

Les conditions 8) nous donnent

$$D \equiv \begin{vmatrix} J_x & J_y \\ J_{xc} & J_{yc} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & C\psi'_y(y) \\ 0 & \psi'_y(y) \end{vmatrix} = -\psi'(y) \neq 0, \qquad J_{cc} \equiv -f''(c) \gtrless 0.$$

Ces conditions étant remplies (sauf $\varphi = \text{const}$ et f étant une fonction linéaire) nous démontrent l'existence d'une intégrale singulière. Prenons la fonction f' de la forme suivante

$$\psi = \frac{\left(\frac{1}{\psi' y'}\right)^2 + 1}{\left(\frac{1}{\psi' y'}\right)^2 - 1} \equiv f'(u), \qquad u = \frac{1}{\psi' y'} \tag{c)}$$

d'où on a

$$f(u) = \int f'(u)\, du = \int \frac{u^2+1}{u^2-1}\, du = u + ln\, \frac{u-1}{u+1}.$$

On peut tirer de la formule c)

$$\frac{1}{\psi' y'} = \sqrt{\frac{\psi+1}{\psi-1}}. \tag{d)}$$

et on a enfin par intégration

$$x = \int \psi' \sqrt{\frac{\psi+1}{\psi-1}}\, dy. \tag{e)}$$

En utilisant d) et e) on a au moyen de la relation 12)

$$\int \psi' \sqrt{\frac{\psi+1}{\psi-1}}\, dy = \sqrt{\psi^2 - 1} - ln\, \frac{\sqrt{\psi+1} - \sqrt{\psi-1}}{\sqrt{\psi+1} + \sqrt{\psi-1}}. \tag{13}$$

La relation (13) nous donne une autre quadrature différente de celle que nous avait donnée la relation (10).

La comparaison du résultat de notre méthode avec ceux qui donnent l'intégration par parties nous conduit aux autres quadratures tout à fait analogues à celles du cas précédent.

Enfin citons les plus simples formes de la fonction f, à savoir:

$$f' = \frac{u^2 \pm 1}{2\, ku}, \qquad f' = \frac{2\, uk}{u^2 \pm 1}, \qquad k = 1, -1, i$$

$$f' = \frac{T(u) - 1}{2\, kT(u)} \qquad T(u) \equiv \sin^2 u, \cos^2 u, \mathrm{tg}^2\, u, \qquad f' = \frac{1}{u(u \pm 1)}$$

$$f' = \alpha u^2 + \beta u + \gamma, \qquad f' = \alpha + \frac{1}{1+u^2}, \qquad f' = \alpha + \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$f' = \frac{u \pm 1}{u \mp 1}, \qquad f' = \frac{u^2 \pm 1}{u^2 \mp 1}$$

u étant un argument quelconque. Grâce à ces dernières formules de la fonction f il est possible d'obtenir un certain nombre de quadratures. L'usage de chaqune dépend de la nature des transformations du contact. Les considérations exposées donnent les expressions d'une série de quadratures. Il est tout naturel de poser la question suivante. Etant donné une fonction quelconque il s'agit d'appliquer la méthode exposée pour en avoir la quadrature de la fonction donnée.

Il faudrait donc pour cela composer l'équation différentielle correspondante, dont l'intégrale singulière allait donner la quadrature requise.

Ce problème est aisé à résoudre du point de vue théorique car il s'agit du problème de l'inversion des fonctions. Or, du point de vue pratique on peut rencontrer des difficultés purement algébriques. Pour les surmonter on n'aurait qu'à établir une certaine classification des quadratures.

Donnons en un exemple. Prenons l'intégrale

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{ln x+1}{ln x-1}}\, dx.$$

Si nous voulons appliquer la méthode que nous venons d'indiquer — nous avons tout de suite des difficultés. La plus simple équation différentielle que l'on doit utiliser dans ce but — celle de Clairaut n'offre pas la possibilité d'appliquer notre méthode — car l'inversion de la fonction

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{ln\, x+1}{ln\, x-1},$$

où on doit exprimer x par y', présente une difficulté insurmontable.

Cependant si, nous possédons une classification des diverses quadratures il est facile de constater que notre intégrale appartient à la classe que définit la relarion (13) pour $\psi = ln\, x$.

Malgré des difficultés du caractère algébrique qui peuvent s'introduire — néanmoins la méthode exposée permet d'établir une classification des quadratures de certaines fonctions.

Il est intéressant d'insister sur la méthode en question du point de vue gnoséométhodologique, en profitant de la théorie d'équations différentielles dans un autre domaine d'analyse mathématique.

RÉFÉRENCES

[1] G. Karapandjitch, *Sur une application des intégrales singulières des équations différentielles ordinaires* — Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de R. P. de Serbie II. 1—2, 1950 Beograd.

[2] B. Rachajsky, *Principe de l'intégration des équations différentielles ordinaires à l'aide de la différentiation et la théorie des transformations de contact. Applications.* — Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de R. P. de Serbie VIII, 3—4, 1956 Beograd.

[3] G. Karapandjitch, *Application des transformationes du contact sur les équationes différentielles* 1956 (en manuscrit).

[4] Mangoldt—Knopp, *Einführung in die höhere Mathematik* t. II 1948 S. Hirzel Verlag Stuttgart.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie

LE PROBLÈME DE CAUCHY DANS LE CAS LINÉAIRE ANALYTIQUE

par JEAN LERAY, PARIS

Notations. — X est un espace affin; le point x de X a les coordonées $(x_1, \ldots, x_l)$. S est une hypersurface d'équation $s(x)=0$; $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est un opérateur différentiel, linéaire, holomorphe sur X, d'ordre m. Le problème de Cauchy consiste à trouver une fonction $u(x)$ telle que:

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = v(x);$$

$u(x)$ et ses derivées d'ordres $< m$ sont des fonctions holomorphes donées sur S.

Notons ξ une fonction linéaire: $\xi \cdot x = \xi_0 + \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_l x_l$. On nomme solution unitaire $U(\xi, x)$ de a la solution du problème de Cauchy le plus simple:

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(\xi, x) = 1, \quad U(\xi, x) \text{ s'annule } m \text{ fois pour } \xi \cdot x = 0.$$

L'adjoint de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est l'opérateur $a^*\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ où

$$a^*(\xi, x) = a(x, -\xi).$$

Par exemple l'adjoint de $a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}$ est l'opérateur $-\frac{\partial}{\partial x_1} a_1$, qui transforme $u(x)$ en $-\frac{\partial}{\partial x_1}[a_1(x)\, u(x)]$. La solution unitaire de a est notée $U^*(\xi, x)$.

Résultats. — 1) Près de S, la solution du problème de Cauchy peut-être uniformisée: elle est la projection sur X d'une fonction holomorphe.

2) D'où: quand x est fixé, $U(\xi, x)$, considérée comme fonction de ξ, peut êtreuniformisée.

3) $U(x)$ s'exprime par une intégrale d'ordre $2l$, dépendant de S seulement, portant sur $U^*(\xi, x)$, $v(x)$ et les donées de Cauchy; d'où singularités de $u(x)$: ce sont les caractéristiques tangentes à S et les caractéristiques issues des singularités des données.

4) Si $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est hyperbolique, sa solution élémentaire s'exprime de même par une intégrale d'ordre l, portant sur $U^*(\xi, x)$; elle est holomorphe quand les deux points dont elle dépend ne sont pas sur une même bicaractéristique.

5) Si $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est à coefficients polynomiaux, son transformé de Laplace $A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$ a pour la solution unitaire homogène $U^*(\xi, x)$ à des dérivations $-\frac{\partial}{\partial \xi_0}$ près. D'où, quand $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est linéaire en x et homogène en $\frac{\partial}{\partial x}$, la résolution par quadratures du problème de Cauchy et l'obtention par quadratures de la solution élémentaire de a supposé hyperbolique, une fois determinées les bicaractéristiques de a.

Bibliographie. — Cinq articles à paraître au Bulletin de la Societé mathématique de France. Les résultats 1), 2), 5) ont été annoncés aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences (t. 245, p. 1483 et p. 2146); une partie du résultat 3) également (t. 242, p. 953); les résultats 4) le seront prochainement.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957), Beograd
Yougoslavie

SUR L'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR

par **MIHAILO ARSENOVIĆ**, BEOGRAD

Les équations linéaires avec les coefficients constants

I

Les équations à deux variables indépendantes.

I—1 Considérons l'équation

$$Ar+2Bs+Ct+2Dp+2Eq+Fz+G=0, \qquad A\gtrless 0, \qquad F\gtrless 0. \tag{1}$$

Pour intégrer cet équation, il suffit de trouver encore une équation telle que ces deux équations admettent une intégrale commune; c'est-à-dire elles doivent être en involution. Si nous partons de l'équation $F(t, s)=0$ ou $t+\Phi(s)=0$, il est bien facile démontrer que l'équation cherchée nous pouvons prendre sous la forme

$$t+c_1 s=0, \tag{2}$$

c_1 étant une constante arbitraire.

En effet, en cherchant les dérivées des équations (1) et (2) par rapport à x et y; si nous calculons les valeurs des fonctiens $\partial s/\partial x$ et $\partial s/\partial y$, on voit facilement que l'on a $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)$, et que par conséquent les équations (1) et (2) sont en involution.

On peut écrire l'équation (2) sous la forme $\frac{\partial q}{\partial y}+c_1\frac{\partial q}{\partial x}=0$, et on obtient l'integrale générale

$$z=f(x)+\varphi(x-c_1 y). \tag{3}$$

Les fonctions f et φ nous devons déterminer de façon que la fonction (3) satisfaite l'équation donnée (l'équation (1)). De cette manière nous obtenons l'intégrale complète de l'équation (1) sous la forme

$$z=c_2 e^{\lambda_1(x-c_1 y)}+c_3 e^{\lambda_2(x-c_1 y)}+c_4 e^{\mu_1 x}+c_5 e^{\mu_2 x}-\frac{G}{F}, \tag{4}$$

où $\lambda_{1/2}$ et $\mu_{1/2}$ désignent les solutions respectivement des équations

$$(CC_1^2-2BC_1+A)\lambda^2+2(D-C_1E)\lambda+F=0, \qquad A\mu^2+2D\mu+F=0. \tag{5}$$

Il est facile de trouver l'intégrale complète aussi dans les cas $F=0$, $D\gtrless 0$ et $F=0$, $D=0$. Il ne reste que l'équation pour laquelle est $A=0$ et $C=0$, c'est-à-dire étudier l'équation de Laplace.

I—2 L'équation de Laplace

$$s+ap+bq+cz+d=0. \tag{5}$$

Dans ce cas l'équation auxiliaire nous pouvons prendre sous la forme

$$r-c_1^2t=0. \tag{7}$$

On trouve facilement l'intégrale de cette équation sous la forme

$$z=f(y+c_1x)+\varphi(y-c_1x). \tag{8}$$

En substituant la fonction z et ses dérivées dans l'équation (6) on trouve l'intégrale complète pour l'équation de Laplace sous la forme

$$z=c_2e^{\lambda_1(y+c_1x)}+c_3e^{\lambda_2(y+c_1x)}+c_4e^{\mu_1(y-c_1x)}+c_5e^{\mu_2(y-c_1x)}-\frac{d}{c}, \tag{9}$$

$\lambda_{1,2}$ et $\mu_{1,2}$ sont déterminées par les équations

$$c_1\lambda^2+(ac_1+b)\lambda+c=0, \qquad c_1\mu^2+(ac_1-b)\mu-c=0. \tag{10}$$

II

Les équations à n variables indépendantes.

II – 1 Supposons que l'équation

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{s=1}^{n+1}A_{ks}p_{ks}=0,\ A_{ks}\equiv A_{sk};\ p_{k,n+1}\equiv p_k;\ p_{n+1,n+1}\equiv z, \tag{11}$$

pouvait se ramener à l'ensemble des deux équations du premier ordre

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_1}\Theta+\psi_2\frac{\partial}{\partial x_2}\Theta+\cdots+\psi_{2n-2}\frac{\partial}{\partial x_n}\Theta+\psi_{2n}\Theta=0.\\ \frac{\partial z}{\partial x_1}+\psi_1\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+\psi_{2n-3}\frac{\partial z}{\partial x_n}+\psi_{2n-1}=\Theta,\end{gathered} \tag{12}$$

on obtient, pour déterminer les valeurs de ψ_i le système

$$\begin{gathered}A_{11}(\psi_{2k-1}\psi_{2r}+\psi_{2r-1}\psi_{2k})=2A_{k+1,r+1}\\ (k=0,1,2,\ldots,n-1,n;\quad r=k,k+1,\ldots,n;\quad \psi_{-1}\equiv 1,\quad \psi_0\equiv 1)\end{gathered} \tag{13}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes de cette réduction sont données par

$$(A_{\alpha i}, A_{\beta j}, A_{\gamma\nu}) \equiv \begin{vmatrix} A_{\alpha i} & A_{\alpha j} & A_{\alpha\nu} \\ A_{\beta i} & A_{\beta j} & A_{\beta\nu} \\ A_{\gamma i} & A_{\gamma j} & A_{\gamma\nu} \end{vmatrix} = 0, \tag{14}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, i, j, \nu = 1, 2, \ldots, n+1),$$

c'est à-dire tous les mineurs du troisième ordre du déterminant

$$D \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1,n+1} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ A_{1,n+1} & \ldots & A_{n+1,n+1} \end{vmatrix} \tag{15}$$

sont égales à zéro.

Pour démontrer que les conditions (14) sont nécessaires, partons des équations (12). En y éliminant Θ on obtient l'équation de la forme (11), où les coefficients A_{ks} sont déterminés aux relations (13). En les substituant dans le déterminant (15) sa valeur devient

$$D \equiv \frac{A_{11}{}^{n+1}}{2^{n+1}} \begin{vmatrix} 1+1 & 1+1 & \cdots & 1+1 \\ \psi_1+\psi_2 & \psi_1+\psi_2 & \cdots & \psi_1+\psi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{2n-1}+\psi_{2n} & \psi_{2n-1}+\psi_{2n} & \cdots & \psi_{2n-1}+\psi_{2n} \end{vmatrix},$$

d'où il résulte que tous les déterminants du troisième ordre sont égals à zéro.

Pour démontrer que les conditions (14) sont suffisantes, considérons dans le système (13) les équations correspondant aux valeurs $k=\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$, $r=i-1$, $j-1$, $\nu-1$. On obtient neuf équations avec douze variables indépendantes; mais ce système se reduit à six équations à cinq variables indépendantes et ce dernier système nous donne les conditions (14).

Si l'on suppose que les conditions (14) ont lieu, nous pouvons maintenant déterminer les valeurs ψ_i et il ne reste qu'intégrer deux équations du premier ordre de système (12). De cette manière on obtient l'intégrale générale de l'équation (11) sous la forme

$$\begin{aligned} z = {} & e^{\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)} f(x_2 - \psi_2 x_1, \ldots, x_n - \psi_{2n-2} x_1) + \\ & + e^{-\psi_{2n-1} x_1} \varphi(x_2 - \psi_1 x_1, \ldots, x_n - \psi_{2n-3} x_1), \end{aligned} \tag{16}$$

f et φ sont deux fonctions arbitraires de $(n-1)$ arguments, et α est la la fonction définie.

II—2 Considerons l'équation (11) pour laquelle les conditions (14) ne sont pas satisfaites. Dans ce cas cherchons une équation auxiliaire d'une manière analoque à l'équation (2). On voit immédiatement que l'équation cherchée doit satisfaire deux conditions. Elle doit être en involution avec l'équation donnée et doit admettre la forme intégrable, c'est à-dire elle a l'intégrale de la forme (16).

Prenons donc

$$
\begin{gathered}
z = f(u_2, u_3, \ldots, u_n) + \varphi(v_2, v_3, \ldots, v_n), \\
(u_i = x_i + x_1; \quad v_i = x_i - x_1; \quad i = 1, 2. \ldots \ , n).
\end{gathered} \tag{17}
$$

En substituant cet intégrale dans l'équation (11) nous obtenons, pour déterminer les fonctions f et φ, deux équations du second ordre linéaires avec $(n-1)$ variables indépendantes, de la forme

$$
\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} A_{ks}^{(1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_s} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} A_{ks}^{(2)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_s} = 0.
$$

Appliquant les considérations analogues à chacune des équations (18) diminuant successivement le nombre des variables, on arrive à l'équation du second ordre à deux variables indépendantes.

III

Les équations du troisième ordre.

La méthode exposée peut s'appliquer pour obtenir l'intégrale complète des équations d'une ordre supérieur. Bornons nous à considé les équations du troisième ordre à deux variables indépendantes

$$
\begin{aligned}
A_{111} p_{111} + A_{222} p_{222} + A_{112} p_{112} + A_{122} p_{122} + \\
+ A_{11} p_{11} + A_{12} p_{12} + A_{22} p_{22} + A_1 p_1 + A_2 p_2 + Az = 0.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Pour trouver une intégrale complète de l'equation (19) partons de l'équation

$$
z = f(x_2 + x_1) + \varphi(x_2 - x_1) + \psi(x_1). \tag{20}
$$

En substituant z et ses dérivées dans l'équation (19), nous avons l'intégrale cherchée sous la forme

$$
z = \sum_{i=1}^{3} c_i e^{(x_2 + x_1)\lambda_i} + \sum_{i=4}^{6} c_i e^{(x_2 - x_1)\mu_i} + \sum_{v=7}^{9} c_i e^{\rho_i x_1}, \tag{21}
$$

où les valeurs λ_i, μ_i et ρ_i sont déterminées par les équations

$$
\begin{gathered}
(A_{111} + A_{222} + A_{112} + A_{122}) \lambda^3 + (A_{11} + A_{12} + A_{22}) \lambda^2 + (A_1 + A_2) \lambda + A = 0, \\
(A_{222} - A_{111} + A_{112} - A_{122}) \mu^3 + (A_{11} - A_{12} + A_{22}) \mu^2 + (A_2 - A_1) \mu + A = 0, \\
A_{111} \rho^3 + A_{11} \rho^2 + A_1 \rho + A = 0.
\end{gathered} \tag{22}
$$

Remarquons que si l'on prend l'équation du cinquième ordre nous arrivons à l'équation algébrique du cinquième dégré.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd Yougoslavie

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

par N. SALTYKOW, BEOGRAD

Introduction

Il s'agit de présenter, dans mon rapport, la théorie des caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, en involution, dans son état actuel, après tous les perfectionnements que la théorie considérée avait subis après les Oeuvres de Jacobi et S. Lie et les travaux recents.

Considérons le système des m équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconue z des n variables indépendantes, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en involution:

$$\left.\begin{array}{c} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, m) \end{array}\right\} \tag{1}$$

les p_s désignant respectivement les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_s}$. Supposons que le déterminant fonctionnel soit distinct de zéro

$$\Delta \equiv D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{p_1, p_2, \ldots, p_m}\right) \gtrless 0, \tag{2}$$

de sorte que les équations données (1) soient résolubles par rapport aux variables

$$p_1, p_2, \ldots, p_m. \tag{3}$$

Les équations linéaires, aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction inconue, f, des variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, \tag{4}$$

considérées comme indépendantes,

$$(F_i, f) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{5}$$

engendrent un système d'équations en involution, dites *linéaires des caractéristiques* du système (1)

Or, nous avions aussi étudié d'autres formes d'équations des caractéristiques. C'est ainsi qu'en vertu de l'inégalité (2), le système d'équations linéaires (5), par rapport aux dérivées $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial f_i}{\partial p_s}$, est résoluble par rapport aux m premières de ces dérivées et admet le système correspondant d'équations aux différentielles totales de la forme

$$\left.\begin{array}{l} dx_{m+k} = \sum\limits_{i=1}^{m} X_{m+k}^{i}\, dx_i, \quad dp_s = \sum\limits_{i=1}^{m} P_s^i\, dx_i, \\ (k=1, 2, \ldots, n-m; \ s=1, 2, \ldots, n), \end{array}\right\} \tag{6}$$

où l'on vient de poser

$$X_{m+k}^{i} = -\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}, \qquad P_s^i = \frac{\Delta_i^s}{\Delta},$$

Δ_{ik} et Δ_i^s désignant ce qui devient le déterminant Δ (2), si l'on y remplace les éléments de la i-ème colonne par les dérivées partielles des fonctions

$$F_1, F_2, \ldots, F_m,$$

prises respectivement par rapport à la variable p_{m+k} et p_s.

Les équations (6) sont dites *équations des caractéristiques aux différentielles totales* du système considéré (1).

Enfin, la troisième forme d'équations des caractéristiques du système (1) est dite *aux dérivées partielles des variables paramètriques.* Celles-ci se présentent sous la forme d'équations de Charpit généralisées [1] qui correspondent au système linéaire (5), à savoir:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{\nu=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial p_\nu} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_i}{\partial p_{m+k}}, \quad (k=1, 2, \ldots, n-m), \\ \sum\limits_{\nu=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial p_\nu} \frac{\partial p_s}{\partial x_\nu} = -\frac{\partial F_i}{\partial p_s}, \quad (s=1, 2, \ldots, n). \end{array}\right\} \tag{7}$$

Si l'on considère le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre impliquant explicitement la fonction inconue, z, les équations de leurs caractéristiques généralisent respectivement les trois types cités (5), (6) et (7). (v. Mémor. des Sci. Math., Fascicule L, Chapitre VI) [2].

Enfin, si les équations (1) sont données sous la forme résolue par rapport à m dérivées du premier ordre:

$$\left.\begin{array}{c} p_k + H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array}\right\} \tag{8}$$

Les équations différentielles des caractéristiques du système (8) deviennent respectivement linéaires, s'exprimant de la manière suivante

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial f}{\partial x_{m+\nu}} - \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}} \frac{\partial f}{\partial p_{m+\nu}}\Big) = 0,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m)\,;$$

les équations aux différentielles totales correspondantes deviennent

$$\left.\begin{array}{l} d x_{m+\nu} = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} d x_k, \\ \\ d p_{m+\nu} = - \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}} d x_k, \\ \\ (\nu = 1, \ldots, n-m) \end{array}\right\} \tag{9}$$

représentant la forme dite *canonique aux différentielles totales.*

De même que précédemment, si les équations données aux dérivées partielles impliquent la fonction inconnue, z, explicitement, leurs équations différentielles des caractéristiques sont aisément réductibles aux trois formes typiques. Surtout celles qui admettent la forme *canonique d'équations aux différentielles totales*, dont la théorie fut détaillement étudiée, depuis 1898 [3], jouent un rôle important dans la théorie moderne d'intégration des équations aux dérivées partielles. Développant cette théorie je l'avais exposé dans plusieurs travaux qui ont été publiés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences à Paris* dans le *Journal des Mathématiques pures et appliquées* de *Liouville,* dans les éditions des *Académies des sciences de Belgiques* et de *Serbie,* dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France,* dans les traveaux *des Congrès Intérnationaux des Mathématiciens à Rome,* en 1908, et Cambridge en 1912, et dans les *Mémorials des Sciences Mathématiques* [4]. Malgré cela, en 1955, *M. I S. Arzanyh* avait réproduit dans le Journal „*Uspehi Matematitcheskih nauk*" (N. S.) 8, № 3, mes anciens résultats [3] dans l'article, qu'il avait publié, en russe, sur l'intégration d'un système canonique en différentielles totales, sans allusion à leur ancienne origine.

On va insister, dans les pages qui vont suivre, sur les nouveaux développements de la théorie étudiée.

Chapitre I

Méthodes modernes d'intégration d'équations aux dérivées partielles du premier ordre

Les problèmes que nous allons étudier concernent les différents cas qui se présantent pour l'intégration des équations différentielles de caractéristiques.

Si l'on connait $n-m$ intégrales distinctes en involution du système (5),

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n-m},$$

distinctes des fonctions F_i, n'importe qu'elles soient distinctes on non par rapport aux variables canoniques de la seconde classe, l'intégration du système donné s'acheve par une quadrature.

Supposons, à présent, que l'on ne connaisse que quelques k, intégrales quelconques du système (5),

$$f_1, f_2, \ldots, f_k, \qquad (k < 2n - 2m - 1). \tag{10}$$

Si l'on ne réussit plus d'obtenir de nouvelles intégrales des caractéristiques (5), on pourrait, poursuivant le problême d'intégration des équations (1), profiter de l'une des trois méthodes suivantes.

1°. La théorie des groupes fonctionnels des intégrales des caractéristiques;

2°. La théorie des éléments dites intégrables;

3°. La théorie des groupes des invariants différentiels.

Observons qu il serait indispensable pour cela de ramener, tout d'abord, les intégrales connues (10) à un groupe fonctionnel des intégrales. C'est à dire on va former les parenthèses de Poisson de chaque paire des intégrales connues (10), ainsi que de celles qui en dérivent, moyennant lesdites parenthèses. On appliquera ce procédé jusqu'à ce que l'on réuissit d'obtenir les intégrales des caractéristiques jouissant de la propriété que les parenthèses de Poisson de chaque paire des intégrales considérées ne produisent que les intégrales de leur ensemble. Celui-ci offrira alors le groupe fonctionnel requis des intégrales des caractéristiques.

Cela étant, supposons que les intégrales obtenues engendrent un élément intégral, c'est à dire offrent un système des n intégrales en involution; l'intégration du système considéré (1) s'achève alors au moyen d'une quadrature.

Envisageons une autre hypothèse possible, supposant que les intégrales obtenues, n'étant pas en involution, offrent un élément intégrable; cela veut dire que les intégrales considérées, étant au nombre supérieur à n, le système d'équations données (1) et des celles qui s'obtienent, en égalant les autres intégrales du groupe considéré à des constantes arbitraires, rend la relation

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s \, dx_s$$

une différentielle exacte.

Dans ce cas, l'intégration des équations s'achéve de même par une quadrature [5].

Or, si aucun des deux cas mentionnés n'avait point lieu, étudions un nouveau procédé d'intégration que l'on dira des caractéristiques prolongées.

Supposons, à ce fait, que le groupe fonctionnel des intégrales se présante sous la forme suivante:

$$f_1, f_2, \ldots, f_N, \qquad (N \geqslant k). \tag{11}$$

Étudions, tout d'abord, la structure du groupe (11), pour en tirer toutes les fonctions *distinguées* de ce groupe [6]. On dit *fonctions distinguées* les intégrales du groupe considéré qui soient en involution entre elles, ainsi que avec toutes les autres intégrales du groupe (11).

Supposons que le nombre maximum des fonctions distinguées du groupe (11) était M et que l'on va les désigner par

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_M. \tag{12}$$

Il est bien entendu que l'on a

$$M \geqslant m,$$

car toutes les intégrales des caractéristiques

$$F_1, F_2, \ldots, F_m$$

font partie des fonctions distinguées (12). De plus il existe la relation [4] (Mémor. des Sci. Math., Fasc., LXV, p. 29)

$$N - M = 2\rho.$$

Cela étant, le groupe fonctionnel (11) prend la forme suivante dite canonique:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_M, f_{M+1}, f_{M+2}, \ldots, f_N, \tag{13}$$

les $N-M$ dernières intégrales (13) pouvant étre prises à volonté parmi celles (11), à condition que les intégrales (13) soient distinctes.

De cette manière le problème d'intégration du système étudié (1) revient à l'intégration d'un nouvel système d'équations

$$\Phi_i = 0, \qquad \Phi_{m+j} = C_j,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, M-m)$$

C_j étant des constantes arbitraires, et dont on connait le groupe des N intégrales distinctes des caractéristiques (13).

Si le nombre de ces dernières équations obtenues était supérieur à celui, m, d'équations données, les difficultés de leur intégration diminuent. Il pouvait même arriver que le nouveau problème d'intégration était achevé, dans ces nouvelles circonstances, dans l'une des hypothèses suivantes:

1°. Si le nombre des intégrales des caractéristiques (13) était complet, c'est à dire, si l'on avait

$$N = 2n - M - 1.$$

2°. Si les intégrales connues des caractéristiques (13) offraient, n intégrales en involution:

$$N = M = n.$$

3°. Si les intégrales connues des caractéristiques (13) définiraient un élément intégrable [4] (Mémor. des Sci. Math. Fasc. LXX, № 32, p. 50)

$$N > n, \qquad N = M + \rho.$$

Or, si aucune des hypothèses citées n'avait lieu, le problème d'intégration reviendrait à chercher une nouvelle intégrale des caractéristiques du nouveau système

$$(\Phi_i, f) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, M)$$

dont on connait N intégrales distinctes (13).

Si l'on réussit de trouver une intégrale de ce dernier système, il devient possible de renouveler les considérations qui vienent d'être exposées, car la nouvelle intégrale trouvée des caractéristiques produit, au moins, une nouvelle fonction distinguée du groupe fonctionnel des intégrales des caractéristiques composé des anciennes intégrales (13) et de celle que l'on vient d'obtenir que l'on pouvait désigner par f_{N+1} ou, encore mieux, par Φ_{M+1}.

Les circonstances deviennent favorables pour l'intégration, si l'on était en état de prolonger le calcul analogue jusqu' au moment, où l'on parvienne d'achever le problème posé d'intégration.

Or, le plus d'importance présente le cas le moins favorable, où les considérations exposées ne nous donnent aucune possibilité d'augmenter le nombre des intégrales connues des caractéristiques.

C'est alors qu'il nous reste de profiter d'une nouvelle méthode dite des groupes des invariants différentiels, dont on avait fait allusion à la page 200, au point 3°.

Chapitre II

Caractéristiques prolongées et invariants différentiels

Revenons aux équations des caractéristiques

$$(\Phi_i, f) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, M)$$

admettant le groupe des intégrales des caractéristiques (13).

Complétons ce dernier système par les nouvelles équations aux dérivées partielles linéaires, en considérant le nouveau système d'équations que l'on dira *système prolongé des caractéristiques des équations données* (1) à savoir:

$$\left.\begin{array}{c}(\Phi_i, f)=0, \qquad (f_{M+j}, f)=0, \\ (i=1,2,\ldots,M;\ j=1,2,\ldots,N-M).\end{array}\right\} \tag{14}$$

Ce système diffère essentiellement des systèmes que l'on considère dans la nouvelle méthode de Jacobi.

En effet, dans la méthode Jacobienne, les premiers éléments des parenthèses de Poisson figurant dans les premiers membres des équations linéaires des caractéristiques se trouvent en involution entre eux. Par conséquent, les équations des caractéristiques correspondantes engendrent un système d'équations linéaires en involution. Au contraire, les M premières équations des caractéristiques prolongés (14), seulement, jouiss-ent des propriétés analogues d'involution, tandis que les premiers éléments des $N-M$ dernières (14) n'engendrent qu'un groupe fonctionnel. Cela étant, les M premières équations (14) sont en involution, tandis que les $N-M$ dernières équations (14) engendrent un système fermé. Or, chaque équation du second groupe de ces dernières équations est en involution avec toutes les équations du premier groupe d'équations.

C'est pour cela, nous appelerons les équations du type (14) système *semi-normal d'équations linéaires aux dérivées partielles* du premier ordre.

Leur théorie est importante, car elle s'impose forcement dans les recherches modernes sur l'intégration des équations aux dérivées partielles étudiées.

Considérons, par exemple, les équations cononiques du mouvement relatif des deux corps, autour du troisième, en variables de Jacobi. Le système correspondant d'équations aux dérivées partielles admet trois intégrales des aires et se ramène à l'un des systèmes suivants:

$$(H, f) = 0, \quad (f_i, f) = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{15}$$

ou bien

$$(H, f) = 0, \quad (\Phi, f) = 0, \quad (f_1, f) = 0, \quad (f_3, f) = 0, \tag{16}$$

H désignant la fonction caractéristique du problème et les f_i étant les premiers membres des intégrales des aires engendrant un groupe fonctionnel des trois intégrales. Or, se dernier admet une fonction distinguée que l'on a pris sous la forme suivante

$$\Phi = f_1^2 + f_2^2.$$

Chacune des trois dernières équations (15) se trouve en involution avec la première équation, mais les trois dernières équations engendrent un système fermé des trois équations.

Quant au système (16), ses trois premières équations se trouvent en involution, cependant la dernière équation engendre un système fermé avec les trois premières équations (16).

Les solutions des $N-M$ dernières équations (14) sont dites invariants différentiels du système des M premières équations (14), les fonctions f_{M+j} étant les intégrales des M premières équations (14).

Le rôle des invariants différentiels dans l'intégration des équations des caractéristiques prolongées, (14), va ressortir de l'étude détaillée du problème d'intégration d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, et des équations aux dérivées partielles de la forme générale.

Chapitre III

Systèmes semi-normaux d'équations linéaires aux dérivées partielles

La méthode Jacobienne d'intégration d'un système normal d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue répose sur le théorème suivant [7]:

Considérons le système normal des deux équations linéaires:

$$X^i(f) \equiv \sum_{k=1}^{n} X_k^i \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \qquad (i = 1, 2) \tag{17}$$

les coefficients X_k^i, aux deux indices, supérieurs et inférieurs, représentant les fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si la première équation (17), *pour $i=1$, admet une intégrale f_1, alors l'expression $X^2(f_1)$, l'opérateur de la seconde équation* (17) *pour $i=2$, de l'intégrale f_1 représente de même l'intégrale de la première équation* (17).

Le théorème cité s'étend sur un système normal d'un nombre quelconque d'équations linéaires, à savoir,

Ayant l'intégrale d'une équation d'un système considéré, l'opérateur de chacune d'autres équations, du même système, appliqué à la dite intégrale, produit une intégrale de la première équation intégrée.

D'une manière analogue, si *l'on a une intégrale des plusieurs équations d'un système normal, les opérateurs d'autres équations du même système appliqué à l'intégrale citée produisent les intégrales des équations admettant l'intégrale envisagée.*

Les résultats exposés s'étendent, d'une certaine manière, sur les systèmes semi-normaux d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. En effet, considérons un système fermé des $m+m'$ équations linéaires aux derivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue, f, des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la forme:

$$X^i(f) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m, \; m+1, \ldots, m+m'), \tag{18}$$

l'opérateur du premier membre d'équations données étant désigné par

$$X^i(f) \equiv \sum_{k=1}^{n} X_k^i \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

les coefficients X_k, aux doubles indices, i et k, représentant des fonctions des variables x_k.

Supposons que les m premières équations (18) engendrent le premier groupe d'équations *en involution entre alles*, ainsi que avec chacune des équations du second groupe des m' équations (18), à partir de la $m+1$ — ième jusqu'à la $m+m'$, ces dernières m' équations formant un système fermé d'équations.

Si le fonction,

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

était une intégrale du second groupe des m' équations (18), on a les identités:

$$X^{m+\nu}(\varphi) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m'). \tag{19}$$

Il résulte des conditions de compatibilité d'équations (18) que les égalités,

$$X^i(X^{m+\nu}(f)) - X^{m+\nu}(X^i(f)) = 0, \tag{20}$$

sont identiquement vérifiées de même pour

$$f = \varphi,$$

et pour toutes les valeurs des indices i, de 1 jusqu'à m, ainsi que, pour les valeurs de ν, à partir de 1 jusqu'à m. Alors, grâce aux identités (19), on a les idéntités

$$X^{m+\nu}(X^i(\varphi)) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m'),$$

qui démontrent que les opérateurs $X^i(\varphi)$ représentent les intégrales du second groupe des équations données (18).

Supposonns, à présent, que la fonction,

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

était une intégrale du premier groupe des m équations (18), de sorte que l'on ait les identités:

$$X^i(\psi) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il résulte des identités (20) que l'on a les identités suivantes:

$$X^i(X^{m+\nu}(\psi)) = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ 1, 2, \ldots, m').$$

Par conséquent, les opérateurs

$$X^{m+\nu}(\psi), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m'),$$

représentent les intégrales du premier groupe des m premières équations du système (18).

Appliquons les théorèmes démontrés à l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre.

Considérons, tout d'abord, le système *semi-normal* d'équations linéaires

$$X^i(f) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m, m+1), \tag{21}$$

introduisant l'hypothèse que la première équation (21) soit en involution avec chacune des autres équations (21), cependant, que ces m dernières équations (21) engendrent un systéme fermé.

Supposons que φ soit une intégrale des m dernières équations (21). Il en résulte que l'expression,

$$X'(\varphi),$$

représente de même une intégrale de ces m dernières équations (21); désignons la par φ_1, et formons la suite des fonctions:

$$X'(\varphi) = \varphi_1, \quad X'(\varphi_1) = \varphi_2, \ldots, X'(\varphi_{\nu-1}) = \varphi_\nu, \quad X'(\varphi_\nu) = \varphi_{\nu+1}, \tag{22}$$

où $\varphi_{\nu+1}$, représente une certaine fonction des intégrales qui précédent à savoir:

$$\varphi_{\nu+1} = \theta(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu). \tag{23}$$

Cherchons, pour intégrer la première équation (21), l'intégrale de cette dernière sous la forme:

$$f = \Phi(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu),$$

l'assujetant de vérifier la condition:

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k} X'(\varphi_k) = 0, \qquad \varphi_0 \equiv \varphi.$$

L'égalité obtenue produit, grâce aux relations (22) et (23), l'équation pour définir le fonction Φ, sous la forme suivante:

$$\varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} + \cdots + \varphi_\nu \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{\nu-1}} + \theta(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_\nu} = 0. \tag{24}$$

Cette dernière équation admet ν intégrales distinctes que l'on désignera par

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\nu.$$

Ces fonctions obtenues, en les exprimant en anciennes variables, produisent ν intégrales

$$f_1, f_2, \ldots, f_\nu$$

non seulement de la première équation (21), mais, en même temps, des toutes les équations du système (21).

Il va sans dire que l'algorithme exposé réussit, si la suite (22) ne s'arretait pas au premier membre. Il suffit, pour l'éviter, de prendre la première équation (21) sous la forme résolue par rapport à l'une des dérivées premières que l'on éliminerait des autres équations du système (21).

Cela étant, si l'on avait

$$\nu < n - m - 1,$$

alors, pour avoir les autres intégrales du système (21), qui manquent, on pourra appliquer de nouveau l'algorithme précédent, en prenant pour point de départ une nouvelle intégrale des m dernières équations (21), et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait établi le système complet des intégrales distinctes du système étudié (21).

La méthode d'intégration exposée s'étend aisément sur les systèmes *semi-normaux* d'équations linéaires d'une forme plus générale suivante:

$$X^i(f) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+m'), \tag{25}$$

dont les m premières équations sont en involution entre elles et avec chacune des m' dernières équations (25), celles-ci formant un système fermé. Par conséquent, les m premières équations (25) representent le premier groupe, tandis que les m' dernières équations (25) engendrent le second groupe d'équations.

Supposons que l'on connaisse une intégrale φ du second groupe d'équations (25) et qu'en appliquant à φ les opérateurs des premiers membres d'équations du premier groupe (25), on obtienne le groupe des intégrales distinctes

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu \; (\nu < n - m' - 1).$$

Cela veut dire qu'on a les égalités suivantes

$$\left.\begin{array}{l} X^i(\varphi_k) = \theta_{ik}(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu), \\ (i = 1, 2, \ldots, m; \; k = 0, 1, 2, \ldots, \nu), \; \varphi_0 \equiv \varphi, \end{array}\right\} \tag{26}$$

les fonctions θ_{ik} étant définies par le calcul indiqué.

Cherchons, à présent, les intégrales du système de toutes les équations (25) sous la forme suivante

$$f = \Phi(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu),$$

la fonction Φ vérifiant les conditions

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k} X^i(\varphi_k) = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Grâce aux relations (26) ces dernières équations produisent le système d'équations requises

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{k=0}^{\nu} \theta_{ik}(\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k} = 0, \\ (i = 1, 2, \ldots, m). \end{array}\right\} \tag{27}$$

Vu que les m premières équations (25) sont en involution, les équations obtennues (27) engendrent, en général, un système fermé d'équations. Les intégrales du système (27) seront, de même, les intégrales du système (25). De la manière analogue, comme antérieurement, on va obtanir le système complet des intégrales du système étudié (25).

Chapitre IV.

Application des systèmes semi-normaux aux équations aux dérivées partielles de forme générale

Considérons l'équation

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} \gtrless 0. \tag{28}$$

Supposons que l'équation linéaire des caractéristiques correspondantes

$$(F, f) = 0$$

admette le groupe fonctionnel des m' intégrales distinctes,

$$f_1, f_2, \ldots, f_{m'} \qquad (m' \leqslant n-1), \tag{30}$$

n'engendrant point des fonctions distinguées.

Le problème de l'intégration de l'équation étudiée (28) se ramène à la recherche de la solution du système fermé des équations représentées par l'ensemble de l'équation (29) et des m' équations linéaires suivantes

$$(f_i, f) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m'). \tag{31}$$

Les fonctions (30) étant les intégrales de l'équation (29) celle-ci se trouve en involution avec chacune des équations (31). Or, ces dernières équations (31) engendrent un système fermé, car les fonctions (30) représentent un groupe fonctionnel. Cela étant, le système des $m' + 1$ équations

(29) et (31) offre un système semi-normal. Le premier groupe d'équations est représenté actuellement par l'équation unique (29), tandis que le second groupe d'équations est formé par les (31). Enfin, les intégrales de ces dernières équations offrent les invariants différentiels du groupe fonctionnel (30). Par conséquent, nous sommes en état de formuler le résultat obtenu, à titre du théorème généralisé de Poisson, sous la forme suivante:

Les paranthèses de Poisson formées du premier membre d'une équation aux dérivées partielles non linéaire et d'un invariant différentiel du groupe fonctionnel de l'équation des intégrales des caractéristiques de l'équation donnée produisent un nouvel invariant différentiel du même groupe d'intégrales.

Pour généraliser le résultat cité considérons le système normal des m équations aux dérivées partielles:

$$\left.\begin{array}{c} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \\ (i = 1, 2, \ldots, m) \end{array}\right\} \tag{32}$$

et le système correspondant des équations linéaires aux dérivées partielles des caractéristiques

$$(F_i, f) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{33}$$

Supposons que celui-ci admette le groupe fonctionnel das m' intégrales distinctes

$$f_1, f_2, \ldots, f_{m'}, \quad (m' < n - m) \tag{34}$$

sans fonctions distinguées, car, dans le cas contraire, en les égalant à des constants arbitraires, on va adjoindre les équations obtenues à celles (32), en diminuant, en même temps, le nombre des intégrales (34).

Cela posé, restant dans l'hypothèse formulé antérieurement sur les équations (32) formons le système des m' équations linéaires aux dérivées partielles des invariants différentielles

$$(f_i, f) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m'). \tag{35}$$

Ce dernier système est fermé. Cependant chacune des équations (33) est en involution avec les équations des caractéristiques (35). Par conséquent, le système d'équations (33) et (35) est fermé, et il est possible de formuler le théorème, généralisant sur le système (32), celui qui se comporte à une équation aux dérivées partielles (28):

Les parenthèses de Poisson formées par le premier membre d'une équation quelconque d'un système normal d'équations aux dérivées partielles et un invariant différentiel du groupe fonctionnel des intégrales des caractéristiques du système normal considéré, produisent un nouvel invariant différentiel du même groupe fonctionnel des intégrales des caractéristiques.

Les théorèmes cités se prêtent à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (28) et du système (32).

Chapitre V

Méthode des invariants différentiels d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre

Considérons l'équation

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p_1} \gtrless 0. \tag{36}$$

Supposons que l'équation linéaire correspondante des caractéristiques

$$(F, f) = 0 \tag{37}$$

admette le groupe fonctionnel des m' intégrales distinctes

$$f_1, f_2, \ldots, f_{m'} \quad (m' < n-1) \tag{38}$$

sans fonctions distinguées.

L'intégration de l'équation (36) se ramène à l'intégration du système complet d'équations linéaires formé par l'équation (37) et les suivantes

$$(f_k, f) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, m'). \tag{39}$$

Alors, d'après le théorème généralisé de Poisson le système (39) admettra la suite finie des intégrales suivantes, φ désignant une intégrale du système (39):

$$(F, \varphi) = \varphi_1, \ (F, \varphi_1) = \varphi_2, \ \ldots, \ (F, \varphi_{\nu-1}) = \varphi_\nu, \ (F, \varphi_\nu) = \varphi_{\nu+1},$$

la fonction $\varphi_{\nu+1}$ représentant une fonction bien déterminée des autres intégrales connues sous la forme

$$\varphi_{\nu+1} = \theta(F, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_\nu).$$

Cela étant, cherchons les intégrales des caractéristiques de l'équation donnée (36) de la forme suivante

$$f = \Phi(F, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_\nu),$$

vérifiant la condition

$$(F, \Phi) = \sum_{j=0}^{\nu} \varphi_{j+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} = 0, \qquad \varphi_0 \equiv \varphi.$$

Par conséquent, les fonctions requises représentent les intégrales de l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} + \cdots + \varphi_\nu \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{\nu-1}} + \theta(F, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_\nu} = 0 \tag{40}$$

la fonction F y figurant à titre d'un paramètre constant.

Supposons, d'abord, que l'équation (40) admette une intégrale seulement

$$\Phi_1 (F, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_\nu).$$

Celle-ci évidemment, d'après sa définition même, se trouve en involution avec la fonction F.

D'autre part, Φ_1 étant une fonction des intégrales du système (39), en est, de même, une intégrale. Par conséquent, Φ_1 est en involution avec les intégrales des caractéristiques (38), et le problème se ramène à l'intégration du système des deux equations

$$F = 0, \qquad \Phi_1 = C_1 \tag{41}$$

C_1 désignant une constante arbitraire, et ce système admet le groupe fonctionnel des intégrales des caractéristiques (38), le même que l'équation primitive (36). De cette manière le nombre des intégrales requises a diminué d'une unite.

Dans le cas particulier, où l'on a $n=3$, l'intégration s'achève par une quadrature. En effet, l'ensemble des équations (41) et de l'intégrale unique, auquel se ramène le groupe (38), définit un élément intégral de l'équation étudiée (36).

Passons à l'étude du cas, où l'on tire de l'equation (40) plusieurs intégrales:

$$\left.\begin{array}{c} \Phi_j \ (F, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu), \\ (j = 1, 2, \ldots, \lambda; \lambda < \nu). \end{array}\right\} \tag{42}$$

Il est évident, que chacune des fonctions (42) se trouve en involution avec F et avec chacune des intégrales du groupe fonctionnel (38).

Supposons qu'il existe, parmi les intégrales (42), ϑ' intégrales en involution entre elles:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{\vartheta'}.$$

On a donc les équations

$$\Phi_i = C_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \vartheta'), \tag{43}$$

formant ensemble avec l'équation donnée (36) un système des $\vartheta'+1$ équations en involution; ce système admet le groupe fonctionnel, des intégrales (38) des caractéristiques. Quant aux autres intégrales (42),

$$\Phi_{\vartheta'+1}, \Phi_{\vartheta'+2}, \ldots, \Phi_\lambda, \tag{44}$$

les paranthèses de Poisson

$$\left.\begin{array}{c} (\Phi_j, \Phi_\nu) \\ (j = 1, 2, \ldots, \vartheta'; \quad \nu = \vartheta'+1, \vartheta'+2, \ldots, \lambda) \end{array}\right\} \tag{45}$$

produisent de même les intégrales de l'équation (37).

Supposons que toutes ces fonctions (44) et (45), ainsi que les intégrales (38) engendrent un groupe des μ intégrales distinctes que l'on désignera, pour unifier les désignations, par

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\mu \qquad (\mu < 2m - m' - 1);$$

ces fonctions vérifient bien les conditions

$$(\psi_i, \psi_k) \equiv \theta_{ik} (F, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{\vartheta'};\ \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\mu),$$

pour toutes les valeurs distinctes des indices i et k, à partir de 1 jusqu'à μ, les fonctions θ_{ik} admettant les valeurs bien déterminées.

Cela posé, cherchons les solutions des équations

$$(\Phi_j, f) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

sous la forme

$$f = \Psi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\mu).$$

La fonction Ψ sera définie par les équations

$$(\Phi_j, \Psi) = \sum_{k=1}^{\mu} \theta_{jk} \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_k}, \quad (j = 1, 2, \ldots, \vartheta').$$

De cette maniére le problème de l'intégration de l'équation (36) se ramène à celui du système d'équations (36) et (43).

Il va sans dire que la méthode d'intégration d'une équation aux dérivées partielles (36) s'étend aisémant sur i'intégration des systèmes normaux d'équations aux dérivées partielles.

L'avantage de la théorie exposée se manifeste immédiatement sur l'exemple de *V. G. Imschanetsky*

$$F \equiv (x_2 p_1 + x_1 p_2)\, x_3 + \alpha\, p_3 (p_1 + p_2) = a,$$

α et a désignant deux constantes arbitraires.

L'équation linéaire correspondant des caractéristiques admet le groupe fonctionnel des deux integrales

$$f_1 \equiv (x_1 + x_2)(p_1 + p_2), \qquad f_2 \equiv \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2),$$

que la théorie des groupes fonctionnels n'est pas en état d'utiliser, car elle exige le minimum des trois intégrales.

Cependant, il saute aux yeux que ce groupe admet l'invariant différentiel évident

$$\varphi \equiv x_3 .$$

Par conséquent, composons la suite

$$(F, x_3) = \alpha (p_1 - p_2) = \varphi_1, \qquad (F, \varphi_1) = \alpha\, x_3 (p_1 - p_2) = \varphi\, \varphi_1;$$

il en résulte, pour définir la fonction Φ, l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} + \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} = 0,$$

et l'intégrale requise s'obtient, sous la forme

$$\varphi_1 - \frac{1}{2} \varphi^2 = C,$$

ou bien

$$\alpha (p_1 - p_2) - \frac{1}{2} x_3^2 = C,$$

C désignant une constante arbitraire. De cette manière l'intégration s'achève par une quadrature.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Saltykow, *Étude sur les intégrales d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles des plusieurs fonctions inconnues* (Journal de C. Jordan. Paris 1897).

N. Saltykow, Étude bibliographique sur le Mémoire inédit de Charpit (Bulletin des Sciences Mathématiques. Paris 1897).

[2] N. Saltykow, *Méthodes classiques d'intégration des équations partielles du premier ordre à une fonction inconnue* (Mémorial des Sciences Mathématiques Fascicule L (Paris 1931).

[3] N. Saltykow, *Généralisation de la première Méthode de Jacobi d'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue* (Communication de la Société Mathématique de Kharkow, 1898;

Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences, 23 janvier 1899 Paris et 30 janvier 1899 Paris.

N. Saltykow, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles, du premier ordre d'une seule fonction inconnue* (Annales Scientifiques de l'Université de Kharkow 1899, en russe).

[4] Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences à Paris 26 juin, 3 juillet 24 juillet 1899.

Journal de C. Jordan Paris 1899.

Bulletin de la Société Mathématique de France. Paris 1901.

Comptes rendus des Séances l'Académie des Sciences à Paris, 3 août, 10 août, 24 août 1903.

Mémorial des Sciences Mathématiques, L, (1931) et, LXX, (1934).

Mémoires de Académie de Belgique. Classe des Sciences Colléction in 4° Deuxième serie, T,VI, fascicule 4.

Méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue. Edition Spéciale de l'Académie Serbe des Sciences, CXXXIX. Belgrade 1947 (en serbe),

[5] N. Saltykow, *Sur la Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue* (Mémoires Académie de Belgique. Classe des Sciences, Colléction in—4^{0}, Deuxième Serie t. VI, fasc. 4) Chapitre V.

[6] v. 5 Chapitre VII.

[7] N. Saltykow, *Méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue.* Belgrade 1947, Chapitre IV № 44, p. 156.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3–4 (1957) Beograd
Yougoslavie

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С. Л. СОБОЛЕВ, МОСКВА – НОВОСИБИРСК

В коротком докладе трудно осветить все вопросы, касающиеся применения функциональных методов в теории уравнений в частных производных. Поэтому я ограничусь лишь некоторыми вопросами, которые мне кажутся, наиболее характерными, не претендуя на полноту.

Об' единяющей идеей для всех методов рассматриваемых ниже исторически служит идея обобщенных решений. В процессе изучения разнообразных задач на отыскание функций, удовлетворяющих некоторым уравнениям в частных производных, оказалось полезным использовать класс функций, не обладающих повсюду непрерывными производными нужного порядка, но являющихся в некотором смысле предельными для настоящих решений уравнений. Такие обобщенные решения ищутся, естественно, в различных функциональных пространствах, иногда полных, а иногда специально пополняемых при помощи введения новых „идеальных элементов".

От индивидуального решения наука перешла к изучению функциональных пространств, операторов в них и тех элементов, которые являются решениями.

Вопрос о том, когда эти обобщенные решения будут решениями в классическом смысле при таком рассмотрении становится отдельным от первого.

Я коснусь в своем докладе следующих четырех методов в теории уравнений в частных производных:

1. Вариационные методы.

2. Методы, связанные с различными понятиями предельного перехода, использующие полноту некоторых функциональных пространств ипонятие компактности.

3. Топологические методы, основанные на геометрических свойствах в целом различных функциональных пространств.

4. Методы, основанные на свойствах двойственных функциональных пространств.

Методы эти тесно связаны между собой. В этом смысле строго разделения их провести нельзя.

§1 Вариационные методы в уравнениях с частными производными

Вариационный метод в теории уравнений в частных производных может быть в основном сведен к двум задачам:

а). Краевая задача для уравнения в частных производных

$$\Phi u = 0 \tag{1}$$

в области Ω при условиях на границе области

$$qu/_{\Gamma} = 0 \tag{2}$$

(Левую часть уравнения (1) и условия (2), т. е. операторы Φ и q мы не считаем однородными) приводится к задаче об отыскании экстремума некоторого функционала

$$extr\ F(u) \tag{3}$$

определенного в соответствующем функциональном пространстве X. Уравнение Эйлера для функционала (3), вытекающее из равенства нулю первой его вариации и есть уравнение (1).

Граничные условия чаще всего изучаются двух видов: 1) Условия закрепления, требующее от решения, равно как и от всех допустимых к сравнению функций, выполнения некоторых неоднородных соотношений на границе. Эти условия суживают пространство, где ищется экстремум. 2) Условия,т. н. свободной вариации, вытекающне требования обращения в нуль граничной части вариации интеграла. Эти условия выделяют функцию, дающую экстремум, от других, которые могут быть допущены до сравнения.

б) Рассматривается задача о нахождении всех решений уравнения

$$Lu_i + \lambda_i u_i = 0 \tag{4}$$

с линейным однородным оператором L при однородных условиях

$$lu/_{\Gamma} = 0$$

вместе с задачей отыскания всех тех λ_i, для которых такое решение существует. Требуется, кроме того, установить ряд свойств, полученных решений: их ортогональность, полноту итд.

Эта вторая задача, следуя Куранту, решается при помощи сведения ее к последовательным задачам на условный экстремум функционала

$$F(u)$$

в пространстве X_i, при условии что другой функционал $P(u)$ сохраняет заданное значение.

Пространства X_i строятся с использованием уже найденных функций u_1, u_2,... u_{i-1}. Уравнение (4) будет служить уравнениям Лагранжа для изучаемой задачи. Эти факты общеизвестны и нет надобности рассказывать их подробно. По отношению к вариационному методу мы остановимся лишь на двух новых вопросах.

1. В настоящее время, помимо изучения конкретных задач на экстремумы различных функционалов, рассматривается также общая схема решения вариационных задач и приведения краевых задач к вариационным. Частные задачи будут включаться в эту общую схему. Выясняется обширный класс случаев, в которых задача об отыскании решения некоторого уравнения в частных производных приводится к отысканию такого экстремума. Речь идет обычно об отыскании решения уравнения

$$Au=f \tag{1'}$$

для симметрического положительного $[(Au, u)>0]$ или положительного определенного: $(Au, u)>c(u, u)$ оператора A. Задача эта решается при помощи отыскания минимума функционала:

$$F(u)=(Au, u)-(u, f)-(f, u)$$

примерно в том же плане как и при непосредственном изучении (1'). Мы не будем говорить об этом более детально.

2. Выясняются более глубоко свойства функций, принадлежащих разным функциональным пространствам, возникающим в вариационных задачах.

В частности изучено какие значения эти функции могут и должны принимать на границах области существования. Поясним вначале эту мысль на простом примере задачи Дирихле.

Пусть ищутся решения уравнения

$$-\Delta u=f$$

с условием

$$u|_{\Gamma}=\varphi(Q\ ; \quad Q\in\Gamma. \tag{8}$$

Как известно эта задача может быть исследована и решена при помощи минимизации интеграла

$$D(u)=\int\left[\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2-2uf\right]dx \tag{9}$$

среди функций, удовлетворяющих (8).

Иногда при этом вначале подстановкой $u=v+\varphi$ приводят условия (8) к однородным.

В том и другом случае встает вопрос о том, достигается ли минимум (9) на функциях, удовлетворяющих (8).

Может случиться: или, что ни для одной функции, удовлетворяющей этому условию, интеграл D не принимает конечного значения; или же еще, что нижняя грань интеграла D не достигается и последовательность u_k таких, что

$$\lim_{k\to\infty} D(u_k) = \inf D(u)$$

не имеет предельного элемента u, который удовлетворял бы поставленным условиям.

Это может случиться, если замыкание в соответствующей метрике, определяемой интегралом D, множества функций, удовлетворяющих (8) содержит функции этим условиям не удовлетворяющие.

В частности, замыкание в этой метрике множества финитных функций (функций равных нулю в приграничной полосе) вовсе не будет иметь в пределе равными нулю значения на границе производных любого порядка.

Ответ на вопрос о том, как ведет себя в самом деле на границе предельная в метрике интеграла Дирихле функция для последовательности функций финитных, дается при помощи, так называемых „теорем вложения" функциональных пространств.

Из них же вытекает новое понимание граничных условий. Следует отметить, что, как это будет видно из дальнейшего, приводимые ниже теоремы играют весьма важную роль и в методах, отличных от вариационных.

Назовем пространством $W_p^{(l)}$ ($p>1$, $l\geqslant 0$ целое) пространство функций φ, заданных в области Ω n-мерного эвклидова пространства R_n, звездной относительно некоторого шара, с границей Γ и с нормой определяемой, например, формулой:

$$\|\varphi\|^p_{W_p^{(l)}} = \int |\varphi|^p \, d\Omega + \int \Big[\sum_{|\alpha|=l} (D^\alpha \varphi)^2 \Big]^{\frac{p}{2}} d\Omega \tag{10}$$

(обозначения призводных $D^\alpha\varphi$ взяты по Gårding'y).

Пространство $W_p^{(l)}$ не будет полным, если производные понимать в классическом смысле. Его можно сделать полным, рассмотрев, так называемые, обобщенные производные, или слабые производные: функции ψ_α, удовлетворяющие условиям:

$$\int (\varphi D^\alpha \omega + (-1)^{|\alpha|} \omega \psi_\alpha) \, d\Omega = 0 \tag{11}$$

с любыми финитными ω.

Положим

$$D^\alpha \varphi = \psi_\alpha \tag{12}$$

Такую $D^\alpha\varphi$ мы будем называть обобщенной производной. Можно доказать, что введенный оператор обобщенной производной для функции из $W_p^{(l)}$ является сильным замыканием оператора обычного дифференцирования в пространстве L_p функций суммируемых с p-ой степенью модуля и с нормой:

$$\|D^\alpha \varphi\|_{L_p}^p = \int |D^\alpha \varphi|^p \, d\Omega. \tag{13}$$

Для существования обобщенной производной, вообще говоря, не требуется непрерывности функции, так как ее значения на множестве точек меры нуль могут не приниматься во внимание. (Норма $W_p^{(l)}$ даваемая формулой (10), как можно легко установить, может быть в ряде случаев заменена другими, иногда, более удобными эквивалентными нормами, но на этом мы останавливаться не будем).

Определение $W_p^{(l)}$ дано таким образом для целых l. Для l дробных существует интересное обобщение С. М. Никольского и его учеников: мы для простоты ограничимся здесь целыми l.

Укажем четыре теоремы: Теоремы вложения:

Теорема I. Всякий элемент $\varphi(Q) \in W_p^{(l)}$ при $lp > n$ есть функция точки Q, непрерывная вплоть до границы (или может быть сделана непрерывной, если изменить ее значение на некотором множестве точек меры нуль). Справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_C \leqslant K \|\varphi\|_{W_p^{(l)}} \tag{14}$$

где K некоторая постоянная. Доказательство этой теоремы мы, по понятным причинам, не будем приводить в кратком докладе.

Назовем оператором вложения оператор, который приводит каждой функции φ из $W_p^{(l)}$ эту же функцию φ рассматриваемую как элемент более широкого пространства C. Это не тождественный оператор, ибо он действует из $W_p^{(l)}$ в C. Неравенство (14) говорит о том, что оператор вложения сохраняет топологию.

Из сходимости φ_k в $W_p^{(l)}$ следует и сходимость в C.

Теорема II. Оператор вложения из $W_p^{(l)}$ в C при $lp > n$ является вполне непрерывным, т. е. приводит в соответствие всякому ограниченному в $W_p^{(l)}$ множеству, множество компактное в C. Справедливо неравенство:

$$\|\varphi(P + \Delta P) - \varphi(P)\|_C \leqslant K \|\varphi\|_{W_p^{(l)}} \eta(\Delta P) \tag{15}$$

где $\eta(\Delta P)$ стремится к нулю при $|\Delta P| \to 0$.

Теорема III. Всякий элемент φ пространства $W_p^{(l)}$ при $lp > n$ имеет определенный смысл на любом достаточно гладком (например, аналитическом) многообразии Σ размерности s, где

$$n - lp < s \leqslant n \tag{16}$$

и является там элементом пространства L_q, где:

$$\frac{s}{q}=\frac{n}{p}-l. \tag{17}$$

Иначе говоря, это значит, что изменив, если понадобится раз навсегда значения φ на множестве точек меры нуль, мы можем ее превратить в такую, для которой не существует особенностей с носителями размерности выше $n-lp$.

Справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_{L_q(\Sigma)}\leqslant K\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}. \tag{18}$$

Теорема является содержательной и для многообразия размерности n, где она утверждает суммируемость φ с более высокой степенью нежели p.

Применяя теорему к производнным от φ порядка r ниже l, получим их принадлежность к $L_q(\Sigma)$, где

$$\frac{s}{q}=\frac{n}{p}-(l-r). \tag{19}$$

Из (18) следует, что оператор вложения сохраняет топологию: сходимость в $W_p^{(l)}$ влечет за собой сходимость в L_q. Полезно заметить, что если $q^*<q$, то $L_{q^*}\subset L_q$ причем вложение также сохранает топологию.

Таким образом, теорема III устанавливает вложение $W_p^{(l)}$ не только в $L_q(\Sigma)$, но и в $L_{q^*}(\Sigma)$ для всякого $q^*<q$

Теорема IV (Кондрашова):

Оператор вложения $W_p^{(l)}$ в L_{q^*} есть оператор вполне непрерывный, т. е. переводит любое ограниченное множество в компактное. Справедливо неравенство

$$\|\varphi(P+\Delta P)-\varphi(P)\|_{L_{q^*}}\leqslant K\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}\eta(\Delta P) \tag{20}$$

где $\eta(\Delta P)\to 0$ при $(\Delta P)\to 0$.

(Как недавно установил В. М. Бабич, оператор вложения из $W_p^{(l)}$ в L_q не является вполне непрерывным).

В применении к вариационным задачам из теорем вложения вытекает ряд следствий.

Уже на примере задачи Дирихле видно, что для всякой функции, имеющей конечный интеграл Дирихле, т. е. принадлежащей $W_2^{(1)}$, имеют смысл ее значения на любых многообразиях измерения s, где $n-2<s\leqslant n$, т. е. на многообразиях размерностей n и $n-1$.

Таким образом, постановка краевой задачи Дирихле оказывается имеющей смысл и, к тому же, имеющий смысл всегда для всех решений из $W_2^{(1)}$. Эти значения, однако, могут не быть непрерывными функциями точки этого многообразия.

Теоремы III и IV устанавливают и характер стремления функции к своим граничным значениям. Такое стремление, как оказывается, справедливо в метрике L_{q}^*

$$q^* < q \quad ; \quad \frac{n-1}{q} = \frac{n}{2} - 1$$

т. е. при

$$q^* < \frac{2(n-1)}{n-2},$$

если рассматривать значения, принимаемые функцией на близких поверхностях, как элементы того же L_q^*. Полная непрерывность оператора вложения устанавливает и тот факт, что в замыкании множества финитных функций φ однородные краевые значения для тех производных, которые участвуют в задаче, в самом деле сохраняются при предельном переходе. Остановимся еще на одном следствии:

Вариационную задачу, а следовательно и уравнение в частных производных, можно рассматривать в областях, граница которых не целиком $n-1$ мерна, а содержит куски других измерений.

Пусть Γ состоит из $\Gamma_{n-1}, \ldots, \Gamma_{n-x}, \ldots, \Gamma_0$.

Изучая функционал $F(u)$ соответствующий нелинейным задачам или задачам с уравнениями высшего порядка, мы подчас можем из существования функционала $F(u)$ заключить о его принадлежности пространствам $W_p^{(l)}$ таким, что $n-lp < n-2$ и оценить норму и в таком $W_p^{(l)}$.

В этих случаях, например, функцию реализующую экстремум можно подчинить еще условиям на Γ_{n-2} итд.

$$u\Big|_{\Gamma_{n-2}} = \varphi_1, \ldots, u\Big|_{\Gamma_{n-s}} = \varphi_{s-1}, \ldots, D^\alpha u\Big|_{\Gamma_{n-l}} = \varphi_{l-1}^{\alpha}$$

задавая, вообще говоря, несколько производных от u на многообразиях низших размерностей. Такие условия сохраняются при предельном переходе от минимизируюшей последовательности к предельным функциям. Их существование и компактность соответствующих производных обеспечивается теоремами вложения. Предельная функция для такой минимизирующей последовательности, в самом деле, будет принимать эти предельные значения.

Так, в бигармоническом уравнении $\Delta^2 u = 0$ при $n=3$ можно задать предельные значения неизвестной функций u на двумерных, одномерных и нульмерных частях границы, а градиент u — на двумерных частях.

Напомним, что, например при нахождении решения уравнения Лапласа, хотя мы и могли бы поставить те же условия на минимизирующую последовательность, в предельной функции все условия, лишние по сравнению с обычной задачей Дирихле, пропадут.

Таким образом, развитые методы позволяют установить, что полученные при решении вариационной задачи функции не только дают экстремум интеграла, но и фактически удовлетворяют дифференциальному уравнению Эйлера. Аналогичным способом удается установить и единственность решения уравнения Эйлера при рассматриваемых краевых условиях.

С этой целью доказывается, что всякая функция η, удовлетворяющая фактически всем поставленным краевым условиям с нулевой правой частью, служит слабым пределом для допустимых вариаций и, значит, для нее верно обычное интегральное тождество для вариаций. При этом функция $u+\eta$ оказывается принадлежащей к классу допустимых функций. Из единственности минимума при этом вытекает единственность решения соответствующих уравнений.

Несколько отлично вариационное рассмотрение задач, связанных со свободной вариацией, к числу которых относятся, например, задачи Неймана и третья краевая задача для уравнения Лапласа, т. е. задача нахождения решения уравнения

$$\Delta u = f$$

при условиях:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + nu = \varphi. \qquad (*)$$

Эта задача приводится, как известно, к задаче о минимуме интеграла

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega + 2 \int\limits_{\Gamma} nu^2 \, d\Gamma = F(u)$$

в классе произвольных функций (свободная вариация).

Здесь для функции можно говорить не о сильном, а лишь о слабом удовлетворении условиям (*). Исследования того, когда из такого „обобщенного“ удовлетворения (*) следует справедливость этих условий в сильном смысле является дополнительным вопросом, которого мы здесь касаться не будем.

Как мы увидим ниже, такого же рода разница в характере выполнения граничных условий возникает и в ряде других функциональных методов.

Вне нашего обзора остались вопросы теории нелинейных вариационных задач и соответствующих задач о собственных функциях.

§2 Использование предельного перехода в функциональном пространстве

Схему рассмотрений указанного вида проще всего пояснить на теории уравнений в частных производных гиперболического типа. Она одинакова и для задачи Коши и для смешанных задач. Пусть нам дано, например, уравнение

$$Lu = f \tag{23}$$

с начальными условиями:

$$\left\{ u, \frac{\partial u}{\partial t} \right\}\Bigg|_{t=0} = \{u_0, u_1\}$$

и пусть плоскость $t=0$, несущая начальные данные, является пространственной.

Будем рассматривать начальные данные, как элемент некоторого топологического пространства, например:

$$\{u_0, u_1\} \in \{W_2^{(1)} \times L_2\}.$$

При помощи, так называемых энергетических неравенств можно установить, что при некотором ограничении на коэффициенты для любых два раза непрерывно дифференцируемых функций v справедливых оценки:

$$\| v |_{t=T} \|^2_{W_2^{(1)}(\Omega(T), n)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=T} \right\|^2_{L_2(\Omega(T), n)} \leqslant \tag{26}$$

$$\leqslant K \left[\| v |_{t=0} \|^2_{W_2^{(1)}(\Omega(0), n)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} \right\|^2_{L_2(\Omega(0), n)} + \int_0^T \| L v \|^2_{L_2(\Omega(t), n)} dt \right]$$

где $\| \ldots \|_{W_2^{(1)}(\Omega, n)}$ обозначает норму в области Ω n-мерной плоскости $t = \mathrm{const}$ и $\Omega(t)$ - переменная область сечения некоторого об'ема этой плоскостью.

Об'ем должен быть выбран убывающим быстрее, чем со скоростью волн.

Пусть еще нам удалось установить каким-нибудь способом разрешимость задачи Коши при достаточно гладких условиях

$$\{u_0^{(m)}, \quad u_1^{(m)}\} \tag{27}$$

образующих в $W_2^{(1)}(n) \times L_2(n)$ плотное множество и достаточно гладких F.

Из неравенства (26) легко заключить, что норма $\left\| \left\{ u^{(m)}(t), \frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} \right\} \right\|$ решения задачи в той же метрике будет сколь угодно мала при малой норме $u_0^{(m)}, u_1^{(m)}$ и F.

Это позволяет установить, что последовательность функций будет фундаментальной последовательностью при любых t и будет при

$k \to \infty$, в силу полноты пространств $W_2^{(1)}$ и L_2, равномерно сходиться к некоторой непрерывно зависящей от t траектории в пространстве $\{W_2^{(1)}(n) \times L_2(n)\}$. Эта траектория и рассматривается как обобщенное решение задачи. Таким образом, схема решения задачи такова: Методами анализа доказывается существование решения для некоторого множества начальных условий плотного в пространстве Банаха E. Дополнительно устанавливается непрерывная зависимость решения от начальных и краевых условий. При этом из полноты рассматриваемых пространств вытекает необходимость существования решения при любых условиях из E.

Рассуждения подобного характера могут быть перенесены и на уравнения нелинейные.

Рассмотрим, например, задачу Коши для квазилинейного уравнения в частных производных вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \sum_{i,j} A_{ij}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \tag{28}$$

(к такому виду можно привести любое нелинейное уравнение при помощи дифференцирования). Пусть

$$\left\{u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\}\Bigg|_{t=0} = \{\varphi_0, \varphi_1\}. \tag{29}$$

Подставим в коэффициенты этого уравнения и свободный член F вместо u и $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ некоторую заданную функцию v и $\frac{\partial v}{\partial x_k}$. Тогда задача превратится в линейную.

Обозначим через $\tilde{A}_{ij}(x)$, $\tilde{F}(x)$ результат такой подстановки.

Теоремы вложения позволяют оценить норму функции u в пространствах $W_p^{(l)}$, где $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{k-l}{n}$ через норму в пространстве $W_2^{(k)}$.

В силу этого оказывается возможным построить класс сложных функций многих переменных $\Phi\left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ инвариантных по отношению к подстановкам вместо v функций того же класса. Таким классом является класс функций, непрерывно зависящих от v с достаточным количеством производных а по x принадлежащий $W_2^{(k)}$, где $k = \left[\frac{n}{2}\right] + 2$.

В этом классе нормы Φ оцениваются через нормы v. Применяя эти соображения мы получаем серию оценок коэфициентов A_{ij} и F:

$$\|A_{ij}\|_{W_p^{(l)}} \leqslant |\Phi(\|v\|_{W_2^{(k)}})|$$

в разных нормах через нормы v.

С другой стороны, обычная техника энергетических неравенств в сочетании с теоремами вложения дает возможность оценить нормы решения линейного уравнения через коэффициенты. Получаем систему неравенств

$$\|u\|_{W_2^{(k)}} \leqslant \psi\left(\|A_{ij}\|_{W_p^{(l)}};\ \|u|_{t=0}\|_{W_2^{(1)}};\ \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=}\right\|_{L_2}\right).$$

Полученные две системы неравенств при помощи, например, метода запаздывающего аргумента, т. е. соотношений

$$v(x, t) = u(x, t - \eta)$$

или метода Шаудера-Лерэя, о котором будет речь идти ниже, позволяют установить существование и единственность решений уравнения (28) в тех же условиях (существование производных до порядка $\left[\frac{n}{2}\right] + 3$ от начальных данных), что и для уравнений линейных. (Разумеется, речь идет о решениях в малом).

§3 Топологические методы, основанные на геометрических свойствах в целом об'ектов функциональных пространств.

Вариационный метод послужил отправным пунктом в выработке точки зрения, при которой левая часть дифференциального уравнения рассматривается как оператор, ставящий в соответствие функции u — элементу некоторого пространства, фукцию $Au = f$ элемент другого (вообще говоря, отличного от первого) пространства.

Вскоре выяснилось, что целый ряд задач приводит к исследованию уравнения, которое, будучи записано в операторной форме, имеет вид:

$$\lambda A f = f. \tag{30}$$

В этом случае естественно рассматривать оператор как определяющий отображение некоторого пространства K в себя. Вопрос о разрешимости (30) сводится к вопросу существования неподвижной точки соответствующего отображения. Когда A — линейный оператор, изучение свойств (30) в зависимости от λ является предметом классической спектральной теории, на чем мы не будем останавливаться. Нас интересует случай $\lambda = 1$.

Чрезвычайно общий критерий разрешимости уравнения

$$A\varphi = \varphi \tag{31}$$

дает т. н. принцип сжатых отображений:

Если A действует в шаре T полного метрического пространства, преобразуя этот шар в себя, причем

$$\| A\varphi_1 - A\varphi_2 \| \leqslant \alpha \| \varphi_1 - \varphi_2 \|, \qquad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

то уравнение (31) имеет единственное решение.

Общеизвестное доказательство этого утверждения не предполагает линейности ни у A, ни у исходного пространства K. Сам принцип служит общей основой метода последовательных приближений.

Родственный, но во многих отношения более богатый критерий разрешимости (30) связан с комбинаторной (мы называем ее так в отличие от чисто метрической) топологией основного пространства K, предполагаемого в этом случае банаховым.

Напомним некоторые определения. Если в единичном шаре T конечно-мерного эвклидова пространства действует оператор A, то на T можно рассмотреть векторное поле: каждой точке $x \in T$ сопоставляется вектор (точка) Ax. Степень отображения

$$Px = \frac{Ax}{\| Ax \|}$$

границы шара S на себя называется вращением векторного поля на S. Если поле на S не содержит нулевых векторов и вращение его $\neq 0$, то поле внутри T имеет неподвижные точки. Для произвольного непрерывного отображения в банаховом пространстве понятие степени отображения пока не определено. Но для отображения вида $E - A$, где A — вполне непрерывный, E — единичный операторы и соответствующего векторного поля можно определить понятие вращения за счет аппроксимации A и образа границы AS конечномерными об' ектами.

Это позволяет сформулировать т. н. принцип Лерэя — Шаудера:

Если A вполне непрерывный оператор, определенный за замкнутом шаре T банахова пространства, $AS \subset T$ и поле $E - A$ не имеет на S нулевых векторов, то внутри T существует, по крайней мере одна, неподвижная точка этого поля.

Сформулированный принцип также не предполагает линейности оператора A. Приведем некоторые примеры его использования, оставив в стороне применение, ставшее классическими, к нелинейным интегральным уравнениям.

Рассмотрим уравнение

$$Au = f \tag{32}$$

в котором A — дифференциальный оператор, с коэффициентами зависящими от неизвестной функции u. Задавшись некоторой функцией v, подставив ее вместо u в коэффициенты A и решив полученное линейное уравнение $A(v)u=f$, можем рассматривать полученное решение как результат применения к v (элементу Банахова пространства) некоторого оператора $B: Bv=u$. Если для преобразования $B-E$ существует неподвижная точка (нулевой вектор), то обеспечено существование решения уравнения (32). Существование неподвижной точки гарантировано, если B непрерывен и отображает некоторое выпуклое множество Банахова пространства в его компактную часть. Таким образом Роте исследовал некоторые нелинейные параболические уравнения.

Намеченные выше топологические методы разработаны пока недостаточно, но перспективы их применения являются, повидимому многообещающими.

§4 Методы, основанные на свойствах двойственных функциональных пространств

Приведем схему использования методов, основанных на фундаментальной идее функционального анализа — идее сопряженных пространств и сопряженных операторов.

Дифференциальный оператор определяется, обычно, на множестве гладких функций, имеющих достаточно непрерывных производных и равных нулю в некотором приграничном слое. С функционалной точки зрения задача нахождения решений уравнений в частных производных состоит в нахождении таких пар функциональных пространств X (в котором расположена область определения оператора L) и Y (в котором лежит область значений L) и такого расширения $\tilde{L}$ оператора L, которое будет иметь ограниченный обратный с областью значений $R_{\tilde{L}}=Y$.

Ниже мы укажем ряд приемов для решения этой задачи, разработанных в литературе и основанных на нескольких простейших идеях.

В приложениях бывает удобно строить расширения оператора L рассматривая его как M^*, т. е. как сопряженный к другому оператору M, или как произведение M^* на какие-либо другие операторы.

Как известно, сопряженный оператор строится в сопряженном функциональном пространстве.

Пусть L действует из X в Y

$$x \in X \quad , \quad Lx=y \in Y$$

и определен на множестве $\Omega_L \subset X$. Область значений $R_L \subset Y$.

Сопряженный оператор будет определен на множестве $\Omega_{L^*} \subset Y^*$ (причем $R_{L^*} \subset X^*$) формулой

$$(Lx, \eta)=(x, \xi)=(x, L^*\eta). \tag{33}$$

Рассматривая заданное пространство X или Y мы получаем сопряженное пространство X^* или Y^* чисто абстрактно.

Однако в приложениях необходима конкретная его реализация, которая может быть, вообще говоря, осуществлена самым различным образом. Если при этом исходить, например, из представления всюду плотного в X множества функционалов в виде интеграла

$$(v, u) = \int v u \, d\Omega, \tag{34}$$

то получится классическое определение сопряженных операторов.

При других определениях результат может оказаться другим.

Поясним сказанное на примере пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ функций из $W_2^{(1)}$ равных нулю на границе Γ области Ω.

По определению нормой будет в этом пространстве

$$\| u \|^2_{W_2^{(1)}} = \int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega . \tag{35}$$

Как мы уже отмечали, сопряженное пространство, построенное абстрактно, вообще говоря, не будет пространством функций или обобщенных функций. Однако возможны его изоформные реализации при помощи различных приемов.

Рассмотрим в качестве примера два из них:

Пример первый:

Рассматриваются всевозможные интегралы вида

$$\{u, v\} = \int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega \tag{36}$$

где v — непрерывно дифференцируемая функция. Функционалам в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ будут отвечать такие скалярные произведения. Мы получаем гильбертово пространство K_1. Общий вид линейного функционала в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ будет (36), где $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$.

Прием второй:

Рассматриваются интегралы

$$(u, v) = \int_\Omega u v \, d\Omega \tag{37}$$

с гладкими функциями v. Любым таким v будут соответствовать функционалы. Замыкая далее в метрике сопряженной к $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ это многообразие функций, мы придем к идеальнным элементам, принадлежащим к некоторому классу обобщенных функций. Назовем это пространство $W_2^{(-1)}$, например, при первом способе изоморфной реализации.

Функциа

$$v_1 = \begin{cases} ln \dfrac{4\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2\right]}{(x-2)^2+y^2}; & x>0 \\ ln \dfrac{4\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2\right]}{(x+2)^2+y^2}; & x<0 \end{cases} \tag{38}$$

будет давать тот же функционал, что обобщения функции

$$v_2 = \delta(x)\left[\frac{8}{y^2+4} - \frac{2}{y^2+\frac{1}{4}}\right] \tag{39}$$

при втором способе реализации.

Назовем оператор, приводящий в соответствие каждому элементу v из одной реализации абстрактного пространства сопряженного к $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ соответствующий элемент из другой его реализации, оператором изоморфной перереализации.

Оператор T_0, превращающий v, соответствующиее первой из указанных выше двух реализаций, в соответствующий элемент второй реализации, в данном случае будет на гладких функциях совпадать с оператором Лапласа.

В самом деле, для таких функций справедливо соотношение:

$$\int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} d\Omega = \int_\Omega u v_2 \, d\Omega \tag{40}$$

верное для любых функций u из $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$.

Интегрируя по частям выражение слева, получим очевидно

$$\int_\Omega u(\Delta v_1 - v_2)\, d\Omega = 0.$$

Откуда и следует наше утверждение.

Отсюда между прочим вытекает, что оператор изоморфной перереализации даст решение краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f \tag{42}$$

где f обобщенная функция принадлежащая $W_2^{(-1)}$.

Действительно, пусть требуется найти решения уравнения (42) из $W_2^{(1)}$, обращающееся в нуль на границе Γ области Ω.

Как мы видим, ответ на поставленный вопрос дает оператор изоморфной перереализации: $u = T_0^{-1} f$. (43)

Идея использования различных реализаций введена и систематически развита Вишиком, Гордингом, Лионсом, Браудером и др.

В случае, когда реализация X^* и Y^* уже выбрана, мы получаем постановку краевой задачи теории уравнений в частных производных. Как мы отмечали, часто при этом решение уравнений сводится к отысканию обратного оператора для L^*. При этом важную роль играет вопрос об области значений L^*. Для ограниченного L областью определения сопряженного оператора будет всё Y^*. Пусть множество $V \subset X$ есть прообраз нуля в операторе L, т. е. $Lx=0$ равносильно $x \in V$.

Рассмотрим еще множество $R_{L^*} \subset X^*$. Тогда:

1) Эти множества ортогональны. Из $x \in V$, $\xi \in R_{L^*}$ следует

$$(x, \xi) = 0.$$

Аналогично, если $V^* \subset Y^*$ есть прообраз нуля для L^*, а R_L область значений оператора L, имеем

2) Из $y \in R_L$, $\eta \in V^*$ следует

$$(y, \eta) = 0.$$

Справедливы еще следующие утверждения.

3) Если $(x, \xi) = 0$ для всех $\xi \in R_{L^*}$ и область определения Ω_{L^*} плотна в Y^*, то $x \in V$; иными словами, прообраз нуля для L состоит из тех x из Ω_L, которые ортогональны к области значений R_{L^*}.

4) Если $(y, \eta) = 0$ для всех $y \in R_L$, тогда $\eta \in V^*$. Иными словами прообраз нуля для L^* состоит из тех η, которые ортогональны к области значений R_L.

Вообще говоря, область значений оператора L может и не совпадать с множеством V тех элементов Y, которые ортогональны к V^*: $R_L \subset V$. Вообще говоря, и R_{L^*} область значений L^* не совпадает с множеством V^* всех ортогональных к V элементов: $R_{L^*} \subset V$.

Сопряженный оператор L^* всегда бывает замкнутым и, если для него удается установить неравенство:

$$\| L^* \eta \|_{X^*} \geqslant C \| \eta \|_{Y^*},$$

то область значений L^* будет замкнутым множеством, ибо из сходимости $L^* \eta_k$ будет следовать сходимость η_k.

Если R_{L^*} обладает тем свойством, что ортогональное к нему множество $R_{L^*}^{\perp}$ из X пусто, то множество R_{L^*} называется полным. При выполнении обоих этих условий, обеспечивающих замкнутость и полноту R_{L^*} существование ограниченного L^{*-1} обеспечено.

Остановимся на одном важном способе решения краевых задач теории уравнений в частных производных. Иногда можно для оператора L, заданного на плотном множестве Ω_L в пространстве E рассмотреть Lu как элемент пространства E^*, т. е. считать, что $R_L \subset E^*$.

Это позволяет изучить скалярное произведение

$$(Lu, u).$$

Предположим, что оно всегда положительно для неравных нулю u:

$$(Lu, u) > 0 \text{ при } u \neq 0. \tag{44}$$

Так будет, например, с оператором Лапласа $Lu = -\Delta u$ ибо

$$(-\Delta u, u) = \int \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \geqslant 0.$$

Отметим, что (44) означает, что прообраз нуля для L всегда есть нуль. Можно принять (Lu, u) за норму некоторого гильбертова пространства H:

$$(Lu, u) = \|u\|^2_H = \{u, u\}. \tag{45}$$

Скалярное произведение в этом пространстве будет иметь вид

$$\{u, v\} = \left\{\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2}\right\} - \left\{\frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2}\right\} = \frac{1}{2}[(Lu, v) + (Lv, u)].$$

В симметрическом случае

$$(Lu, v) = (Lv, u) = \{u, v\}.$$

Допустим еще, что замыкание множества Ω_L по норме H лежит в E

$$H \subset E.$$

Каждой функции $v \in H$ однозначно сопоставляется соотношением $v \in E$ она же сама, как элемент пространства E. Обозначим этот оператор вложения через S (Это вложение может быть просто перереализацией).

Построим сопряженный оператор S^*.

По определению сопряженного оператора он будет определен на E^* и область его значений будет лежать в H. Мы будем иметь, полагая $f \in E^*$,

$$(Sv, f) = \{v, S^* f\}. \tag{46}$$

Можно установить, что оператор S^* будет представлять собой расширение обратного оператора L^{-1} на пространство E^*. В самом деле, пусть $f = Lu$. Тогда

$$(Sv, f) = (Sv, Lu) = \{v, u\} \tag{47}$$

из сопоставления (46), (47) и вытекает что $L^{-1} f = S^* f$ или $u = S^* f$.

Свойства сопряженных операторов доказывают его ограниченность и замкнутость. Тем путем, который только что изложен, были исследованы, наряду с классическими задачами, еще и ряд новых. Заслуга его разработки принадлежит Фридрихсу и Вишику.

Подобным же путем решается задача о минимуме квадратичного функционала (Михлин).

Метод сопраженных операторов совместно с идеей вложения функциональных пространств рассмотренный нами выше, развит и в случаях когда Lu не является симметрическим. При его помощи был получен весьма общего характера результат, касающийся эллиптических задач. Пусть опять метрика в гильбертовом пространстве определяется соотношением:

$$\|u\|^2_H = (L\,u, u) \geqslant 0. \tag{48}$$

Пространство H полагаем лежащим в E

$$H \subset E. \tag{49}$$

Рассмотрим оператор вложения S из H в E и пусть функционал x над $v \in H$ определяется формулой

$$\{x, v\} = (L\,u, S\,v)$$

где $L\,u$ элемент E^*. Таким образом

$$x = S^*\,L\,u.$$

Полагая, что u_1 некоторый элемент H, а $S\,u_1 = u$ мы получим для x выражение

$$x = S^*\,L\,S\,u_1 = \tilde{L}\,u_1,$$

где $\tilde{L} = S^*\,L\,S$.

$\tilde{L}$ — оператор действующий в H со значениями в H.

В симметрическом случае оператор $\tilde{L}$ совпадал с тождественным оператором. Действительно

$$\{\tilde{L}\,u, v\} = (L\,S\,u, S\,v) = \{u, v\}.$$

Теперь, вообще говоря, это будет не так.

Отметим некоторые его свойства. Имеем

$$\{\tilde{L}\,u, u\} = \{S^*\,L\,S\,u, u\} = (L\,S\,u, Su) = \{u, u\}.$$

Отсюда следует, что обратный к $\tilde{L}$ оператор $\tilde{L}^{-1}$ будет однозначным и ограниченным, и сам $\tilde{L}$ допускает замыкание $\tilde{\tilde{L}}$.

Для применений наиболее важным является случай, когда область значений $\tilde{\tilde{L}}$ есть всё пространство H.

$$\Omega_{\tilde{\tilde{L}}} = H. \tag{60}$$

Условие (60) выполнено, например, в случае, если оператор $\tilde{L}$ ограничен в H, ибо тогда он представлен в виде.

$$\tilde{L} = J + \mathcal{K}$$

где J - тождественный оператор, а $\mathcal{K}$ — кососимметрический ограниченный.

Пусть теперь выполнены условия (48), (49) и (60). Тогда уравнение:

$$(h, S\,v) = \{\tilde{\tilde{L}}\,u, v\} \tag{62}$$

получаемое из тождества

$$(Lu, Sv)=\{\bar{\bar{L}}u, v\}$$

всегда имеет решение:

Действительно, преобразуя левую часть (62), получим:

$$(h, Sv)=\{S^* h, v\}=\{\bar{\bar{L}}\bar{\bar{L}}^{-1} S^* h, v\}$$

и, следовательно,

$$u=\bar{\bar{L}} S^* h. \tag{64}$$

Будем называть решение (64) обобщенным решением задачи.

Оператор

$$S^{-1}\bar{\bar{L}}u=h$$

является расширением оператора L. Назовем его L_1. Область значений L_1, заполняет всё E^*. Оператор L_1^{-1} непрерывен. Если E^*—пространство Банаха, то

$$\|u\|_H \leqslant c\|h\|_E.$$

Если пространство E может быть сужено до E_1 так, чтобы оставалось

$$H\subset E_1\subset E,$$

то, очевидно, оператор L_1^{-1} может быть распространен и на E_1^*.

В общей логической схеме, развернутой нами, влияние граничных условий скрыто в условии (49), состоящем во вложимости H вместе со своей метрикой в пространство E. Условие (49) означает, что сходимость в H влечет автоматически сходимость в E, а вытекающее из этого соотношение $E^*\subset H$ говорит о том, что все граничные условия, обеспечиваемые метрикой H, сохраняются в E^*. В частности, это значит, что обращение в нуль на некоторых многообразиях размерностей $n-1$, $n-2$, ..., гарантированное в H в силу теорем вложения, сохраняется и в E^*. Таким образом, теоремы вложения функциональных пространств дают нам возможность провести исследование первой основной краевой задачи для эллиптических дифференциальных операторов.

Для второй и третьей краевых задач ситуация будет аналогичной.

Помимо новых подходов к решению задач классических в теории эллиптических уравнений функциональными методами позволившими полно и широко разработать теорию этих задач, были добыты и принципиально новые факты. К их числу относятся, например, теория сильно эллиптических систем уравнений Вишика, обобщенная затем Ниренбергом.

Сильно эллиптической в точке x_0 называется система вида:

$$Lu = \sum_{|i|,\,|j| \leqslant m} \overline{D}^j A^{ij}(x) D^i u = h$$

$$D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}; \quad i_1 + \dots + i_n = |i|; \quad \overline{D}^j = (-1)^{|j|} D^j$$

где $A^{ij}(x)$ матрица порядка N, коэффициенты которой удовлетворяют условию:

$$\Big(\sum_{|i|,\,|j| \leqslant m} A^{ij}(x_0)\xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} \xi_1^{j_1} \dots \xi_n^{j_n} \zeta, \zeta\Big) > 0$$

для любого вектора $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N) \neq 0$ и любых ξ_i

$$\sum_i \xi_i^2 \neq 0.$$

Для сильно эллиптических систем оператор Lu имеет квадратичную форму положительно определенную на функциях, удовлетворяющих однородным условиям на границе.

При достаточно малых размерах области (или в случае постоянных коэффициентов при любых размерах области)

$$(Lu, u) \geqslant K^2 \| u \|\, W_2^{(m)}.$$

Далее доказательство существования решения первой краевой задачи для сильно эллиптических систем в существенном не отличается от изложенного выше. При области любых размеров, как показали Гординг и Браудер, добавляя постоянный оператор u можно установить, что

$$((L + M)\, u, u) \geqslant c^2 \| u \|^2\, W_2^{(m)}.$$

В этом случае вместо существования и единственности устанавливается Фредгольмовость рассматриваемой задачи.

Второй результат заслуживающий внимания — это теория задач с уравнением, сохраняющим свой тип лишь в любой внутренней области (не вплоть до границ). Пусть в уравнении

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

коэффициенты a_{ij} удовлетворяют условиям

$$\sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j > x_n^\alpha \xi_n^2 \quad ; \quad c_1^2 x_n^2 \leqslant a_{nn} \leqslant c^2 x_n^2 \quad .$$

в области $x_n > 0$. Во всех внутренних точках будем считать уравнение эллиптическим. Будем еще считать $b_n > 0$ для $x_n = 0$. Методом барьеров эти задачи рассматривались ранее Келдышем и Олейник.

При исследовании этих задач теоремы вложения, в том виде, как они были приведены выше, оказываются недостаточными.

Для нормы H_1, определенной формулой

$$\{u,u\} = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + c' u^2 \right) d\Omega$$

уже не всегда можно утверждать, что элементы H_1 будут иметь в замкнутой области необходимые предельные значения.

Вишиком даны соответствующие обобщения теорем вложения, позволившие осуществить до конца ту же указанную выше схему, что и для обычных задач.

Остановимся еще на одном вопросе, связанном с так называемым методом ортогональных проекций.

В классических задачах математической физики, в задаче Дирихле и т. п., ищется решение однородного уравнения с неоднородными граничными условиями.

Например, искомой может быть гармоническая функция u удовлетворяющая граничным условиям.

$$u\big|_{\Gamma} = \varphi(Q), \quad Q \in \Gamma \tag{65}$$

и уравнению

$$-\Delta u = 0. \tag{66}$$

Определим граничные значения для функции u с помощью вспомогательной функции $\varphi(P)$, заданной в $\Omega + \Gamma$. Условие (65) заменим требованием, чтобы новая неизвестная ψ удовлетворяла однородным граничным условиям

$$\psi\big|_{\Gamma} = (u-\varphi)\big|_{\Gamma} = 0. \tag{67}$$

В метрике H_1 со скалярным произведением

$$\{u, v\} = \int\limits_{\Omega} \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega$$

функция ψ в силу (67) будет ортогональна к любому решению уравнения Лапласа, т. е. $\{\psi, u\} = 0$, если верны (66) и (67).

Это вытекает из классической формулы интегрирования по частям. Проанализируем это обстоятельство подробнее.

Пусть оператор — Δu действует в пространстве H_1 на многообразии $\Omega_\Delta \subset H_1$, а значения его лежат в пространстве E со скалярным произведением

$$(f, v) = \int fv \, d\Omega; \ \int (\Delta u, v) \, d\Omega = (\Delta u, v).$$

Множество гармонических функций будет служить прообразом нуля в пространстве H_1.

Построим оператор сопряженный с $-\Delta$. По определению

$$(-\Delta u, v) = \{u, -\Delta^* v\} = \{u, \psi\}. \tag{68}$$

Таким сопряженным оператором оказывается оператор, приводящий в соответствие элементу v из F^* элемент из H_1, связанный с v формулой (68).

С другой стороны, для произвольного u и $v \in H_1$ такого, что

$$v\big|_{\Gamma} = 0 \tag{69}$$

имеем $(-\Delta u, v) = \{u, v\}$, откуда видно, что $-\Delta^*$ есть в этом случае просто оператор, приводящий каждой функции v, удовлетворяющей (69), ее самое как элемент H_1. Область определения $-\Delta^*$ при произвольных u будет множеством всех v, удовлетворяющих (54). Следовательно, $-\Delta^*$ будет в этом случае оператором вложения. Таким образом, факт ортогональности в метрике H искомого решения задачи Дирихле к функциям v равным нулю на границе, есть просто конкретное выражение основного свойства сопряженных операторов: ортогоналности прообраза нуля к области значений сопряженного оператора.

Разбивая основное гильбертово пространство H_1 в прямую сумму прообраза нуля I и его ортогонального дополнения, сразу получаем метод решения этой и других подобных задач.

Этот метод был предложен *Weyl*'ем и развит М. И Вишиком в применении к обширному классу эллиптических уравнений.

Разберем теперь приложение рассматриваемых идей к случаю, когда оператор не является эллиптическим. Остановимся на смешанной задаче. Простейшим примером её есть задача решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

при условиях

$$u\,|_s = 0; \qquad \left\{u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\}_{t=0} = \{u_0, u_1\}.$$

Излагаемые построения были предложены Фридрихсом и затем применены Ладыженской к уравнениям 2-го порядка гиперболического и параболического типов. Поясним идею метода Фридрихса на примере указанной смешанной задачи.

Пусть X пространство троек функций, определенных в области $Q = [\Omega \times t]$ и Ω

$$v(x, t); \quad v_0(x); \quad v_1(x)$$

с метрикой

$$\|\chi\|^2_X = \|v\|^2_{L_2(Q)} + \|v_0(x)\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} + \|v_1(x)\|^2_{L_2(\Omega)},$$
$$\chi \in X.$$

В этом пространстве рассмотрим многообразие Ω_1 таких троек, для которых функция $v(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема в

Q и имеют место соотношения $v_0(x)=v(x,0)$, $v_1(x)=\frac{\partial v}{\partial t}(x,0)$ и, кроме того, $v(x,T)=\frac{\partial v}{\partial t}(x,\ T)=0$, $v|_s=0$.

На этом многообразии определен $\Box v$ как элемент $L_2(Q)=Y$ по формуле $\Box v=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\Delta v$. Построим сопряженный оператор.

Он будет во всяком случае определен на функциях u, дважды непрерывно дифференцируемых и равных нулю на Γ; для таких функций, очевидно, получим:

$$(u,\Box v)=\int\limits_Q u\Box v dQ=\int\limits_Q v\Box u dQ+\int\limits_\Omega u\Big|_{t=0} v_1 d\Omega-\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} v_0 d\Omega=(\xi,\chi),$$

$$\xi=\left(\Box u,-\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0},\ u\Big|_{t=0}\right);\ \chi=(v,v_0,v_1).$$

Оператор $\Box^*$, как мы видели, действует из L_2 в пространство троек функций, причем:

$$\Box u=\left(\Box u,-\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0},\quad u\Big|_{t=0}\right).$$

Покажем, что $\Box^{*-1}$ существует. Это и даст нам решение обобщенной задачи Коши о восстановлении функции u из L_2 по значениям

$$\Box u,\quad u|_{t=0},\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}.$$

С этой целью доказываются два свойства оператора $\Box^*$:

1) область значений его в X^* всюду плотна; 2) обратный оператор ограничен. Как было указано ранее, отсюда сразу будет следовать существоване и единственность решения смешанной задачи.

Плотность $R_{\Box^*}$ доказывается применением теоремы единственности Ладыженской.

Теорема. Существует не более одной функции v, которая удовлетворяет тождеству:

$$\int\limits_Q v\Box u\,dQ=\int\limits_Q u f\,dQ+\int\limits_\Omega\left(\varphi_0\frac{\partial u}{\partial t}-\varphi_1 u\right)\Big|_{t=0}d\Omega$$

при любых u из $W_2^{(2)}$ таких, что $u|_{t=T}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=T}$; $u|_s=0$.

Перефразируя эту теорему, получим:

Существует не более одной функции v, которая удовлетворяет тождеству

$$\iint\limits_Q v \Box u\, dQ = \iint\limits_Q u f\, dQ - \int\limits_\Omega \left(\varphi_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \varphi_1 u\right)_{t=T} d\Omega$$

при любых u из $W_2^{(2)}$ таких, что $u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$; $u|_s = 0$.

В частности, если $\varphi_0 = \varphi_1 = f = 0$, то такая функция будет тождественным нулем.

Ограниченность оператора обратного к $\Box^*$ есть следствие т. н. энергетического неравенства.

Для функций u удовлетворяющих условиям

$$u\Big|_{s=0} = 0;\quad u\Big|_{x=0} = \varphi_0;\quad \frac{\partial u}{dt}\Big|_{x=0} = \varphi_1;\quad \Box u = F$$

справедливо тривиальное соотношение

$$\int\limits_{t=t_1} \left[\sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] d\Omega \leqslant \int \left[\sum_i \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}\right)^2 + \varphi_1^2\right] d\Omega + C \int\limits_{0 \leqslant t \leqslant t_1} F^2\, d\Omega\, dt.$$

Метод установления плотности значений $\Box^*$, примененный Фридрихсом и Ладыженской, оказывается распространимым на широкий класс параболических, Шредингеровских и операторных уравнений.

Вишик осуществил метод несколько отличный от метода Ладыженской, ближе примыкающий к изложенному выше в применении к эллиптическим уравнениям.

Для исследования той же задачи о волновом уравнении составляется форма:

$$B(u, v) = \int\limits_Q \left\{-\frac{\partial u}{dt} \frac{\partial}{\partial t}\left[(T-t)\frac{\partial v}{\partial t}\right] + \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{dx_i}\left[(T-t)\frac{\partial v}{dt}\right]\right\} d\Omega\, dt$$

для v из D_0 (Q) (пространства фуцкций, для которых v и $\frac{\partial v}{\partial t}$ оба принадлежат к $W_2^{(1)}$ и обращаются в нуль при $t=0$). Согласно определению, под обобщенным решением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

при условиях

$$u|_s = 0;\quad \left\{u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\}_{t=0} = 0$$

мы будем понимать функцию u, для которой при любых v таких как указано выше:

$$B(u,v)=\int\limits_Q f(T-t)\frac{\partial v}{\partial t}\,dQ=(f,v).$$

При помощи формы $B(u,v)$ мы можем построить гильбертово пространство H_1, считая:

$$\|u\|^2_{H_1}=B(u,u)$$

(положительность $B(u,u)$ устанавливается легко).

Пространство H_1 вложимо в $\overset{(0)}{W}{}_2^{(1)}$; более того:

$$B(u,u)=\|u\|^2_{H_1}\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}}.$$

Рассмотрим форму $B(u,v)$ как скалярное произведение в H_2 — гильбертовом пространстве $(n+1)$-мерных векторных функций двух векторов

$$\nabla u \quad \text{и} \quad Dv=\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\left[(T-t)\frac{\partial v}{\partial t}\right];\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(T-t)\frac{\partial v}{\partial t}\right]\right\}.$$

Оператор ∇u действует в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$, а оператор D в $\overset{\circ}{D}(Q)$. Мы получим

$$B(u,v)=(\nabla u, Dv).$$

Вводя оператор, сопряженный к ∇u, можем придать $B(u,v)$ вид:

$$B(u,v)=(u,\nabla^*Dv).$$

Построенный ∇^*Dv мы подвергнем еще изоморфной перереализации, полагая

$$(u,\nabla^*Dv)=\{u,T_0\nabla^*Dv\},$$

В этом случае оператор $\hat{S}^*=T_0\nabla^*D$ имеет ограниченный обратный, а область его изменения в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ представляет собою плотное множество, что можно установить, доказав с одной стороны теорему единственности:

Теорема:

Из

$$B(u,v)=\{u,\hat{S}^*v\}=0$$

для всех v следует $u=0$; а с другой — воспользовавшись неравенством

$$B(v,v)\geqslant\frac{1}{2}\{v,v\}.$$

Вводя теперь оператор $\hat{S}$, сопряженный с $\hat{S}^*$, получим равенство:

$$\{\hat{S}u, v\} = \left[f, (T-t)\frac{\partial v}{\partial t}\right]. \tag{70}$$

Для получения искомого решения нам остается еще преобразовать правую часть (70).

Имеем

$$\left[f, (T-t)\frac{\partial v}{\partial t}\right] = \left[(T-t)f, \frac{\partial v}{\partial t}\right] = [Gf, \nabla v] = [f_1, \nabla v]$$

где f_1 — вектор с компонентами $0, 0, \ldots, (T-t)f$.

Далее $[f_1, \nabla v] = [\nabla^* f_1, v]$ и, наконец,

$$[f_1, \nabla v] = \{T_0 \nabla^* f_1, v\} = \{F, v\}$$

где T_0 — оператор изоморфный перереализации.

Таким образом

$$\{\hat{S}u, v\} = \{F, v\}.$$

Обратимость оператора $\hat{S}$ вытекающая из свойств сопряженного, дает

$$u = \hat{S}^{-1}F.$$

Методы, изложенные выше, дали возможность разобраться и в ряде новых задач теории уравнений в частных производных.

В частности, удалось разрешить смешанные задачи для уравнений типа

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial u}{\partial t} + cu = f,$$

где A, B и C — дифференциальные операторы над u (не зависящие от t). Первая частная задача такого рода была рассмотрена автором настоящего доклада в 1951 году, дальнейшие результаты получен Вишиком и Ладыженской.

Мы видели выше какую большую роль в решении краевых задач сыграли энергетические неравенства.

Общее рассмотрение таких неравенств выходит за рамки настоящего доклада. Некоторые замечания будут сделаны ниже.

Далее мы хотели бы остановиться на бурно развивающейся за последние годы теории обобщенных функций, опять таки основанной на идее использования двойственных пространств.

Автором настоящего доклада в 1934—35 г. г. на основе теории сопряженных операторов была построена теория обобщенных функций в применении к обращению гиперболических уравнений (к решению задачи Коши).

Обобщенные функции были построены как пополнение множества гладких функций в классической формуле для линейного функционала

$$(\rho, v) = \int \rho v dx.$$

Это дает возможность реализации линейных функционалов $Y^{(m)*}$ над пространством $Y^{(m)}$ финитных m — раз, дифференцируемых функций. Об'единение получаемых $Y^{(m)}$ по m от 0 до ∞ было тем основным функциональным пространством, в котором строились дифференциальные операторы и решалась задача Коши.

В 1950 году, пользуясь приблизительно тем же аппаратом, Лоран Шварц написал свою книгу „Теория распределений". Существенно новой явилась развитая им теория интегралов Фурье для обобщенных функций.

Мною в 1934-35 году пространство $Y^{(m)*}$ исследовалось лишь в слабой метрике. Аппаратом для решения задач были явные представления решения задачи Коши для уравнений 2-го порядка. Л. Гордингу удалось построить теорию этой задачи для гиперболических уравнений высших порядков, не пользуясь явным видом решения и опирясь лишь на энергетические неравенства, полученные впервые И. Г. Петровским и выведенные позднее Д. Лерэем новым изящным методом. *P. Lax* в 1954 году для задачи Коши для уравнения 2-го порядка и вслед за этим Л. Гординг для уравнений m — го порядка получают обращение гиперболического оператора в пространствах обобщенных функций с сильной метрикой.

Метод Лакса-Гординга основывается на установлении обобщенного энергетического неравенства:

$$\| Lu \|_Y \geqslant C \| u \|_X . \tag{71}$$

Здесь пространством Y служит некоторое пространство функционалов.

Аппаратом для получения этого неравенства служит то же интегральное тождество, которое дает обычные энергетические неравенства.

Не останавливаясь на подробностях вывода, укажем лишь, что наличие неравенства (71) позволяет установить однозначность обратного оператора, что, в сочетании с теоремой о плотности значений, дает возможность получить решение задачи.

Функциональные методы позволили получить, как мы уже видели, ряд обобщений понятия решения уравнений в частных производных, связанных с новыми постановками краевых задач.

Наиболее широкая постановка задачи Коши для гиперболических уравнений в обобщенных функциях принадлежит автору доклада и относится к 1934 году. Для общих краевых и смешанных задач аналогичные постановки и решения даны автором и Вишиком в 1956 г.

Напомним некоторые результаты теории обобщенных функций.

Обобщенные функции есть пополнение второй указанной выше реализации функционалов над пространствами $Y^{(m)}$ или $\tilde{W}_p^{(m)}$ финитных (отличных от нуля в конечной области) функций, допускающих производные до порядка m непрерывные или суммируемые со степенью p.

Множество функционалов

$$(l, u) = \int\limits_{\Omega} l(x)\, u(x)\, d\Omega$$

с функциями $l(x)$, замыкается по метрике $Y^{(m)*}$ или $\tilde{W}_p^{(m)}$. Каждому отдельному элементу соответствует обобщенная функция.

Обобщенные функции неограниченно дифференцируемы. Говорят, что обобщенная функция φ обращается в нуль в некоторой области Ω_1, если $(\varphi, f) = 0$ для всех функций f отличных от нуля только в Ω_1. Носителем обобщенной функции φ называется область вне которой φ обращается в нуль.

Дифференциальный оператор L над обобщенной функцией определяется как формально сопряженный к некоторому оператору M над пространством $Y^{(m)}$ или $\tilde{W}_p^{(m)}$.

Рассмотрим задачу Коши, т. е. задачу нахождения решения гиперболического уравнения

$$L u = \rho$$

при условиях $\quad u\Big|_{t=0} = u_0; \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1,$

где ρ пока произвольная функция. Будем расматривать функцию

$$\bar{u} = \begin{cases} u & t > 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

как элемент пространства обобщенных функций.

Вычисляя формально $L\bar{u}$ по формуле $(L\bar{u}, v) = (\bar{u}, Mv)$ можем преобразовать правую часть к виду

$$\int\limits_{t>0} \rho v dx dt + \int\limits_{t=0} \left(u_0 \frac{\partial v}{\partial x} - u_1 v \right) dx.$$

Таким образом, справа оказывается известная обобщенная функция

$$\bar{\rho} + \delta(t)\, u_0 + \delta'(t)\, u_1.$$

Иными словами

$$L\bar{u} = \bar{\rho} + \delta(t)\, u_0 - \delta'(t)\, u_1 = \rho_1,$$

Задача Коши свелась таким образом к нахождению значенния обратного оператора:

$$L^{-1}\rho_1.$$

Этот обратный оператор строится, разумеется, как сопряженнй к M^{-1} на соответствующем подпространстве.

Покажем каким образом можно ставить и решать более общие краевые и смешанные задачи на примере третьей краевой задачи для уравнения Лапласа. Этот пример и был опубликован в печати, в ДАН. В области Ω с достаточно гладкой границей изучается уравнение:

$$\Delta u = f$$

с условиями

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h\,u \Big|_s = \varphi\,.$$

Вводим функции

$$\bar{u} = \begin{cases} u & \text{в } \Omega \\ 0 & \text{вне } \Omega \end{cases}; \qquad \bar{f} = \begin{cases} f & \text{в } \Omega \\ 0 & \text{вне } \Omega \end{cases}.$$

Вычисляя опять Δu через сопряженный, получим

$$(\Delta\bar{u}, v) = (\bar{u}, \Delta v) = \int\limits_{\Gamma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h\,u\right)v - u\left(\frac{\partial v}{\partial n} + h\,v\right)\right]d\Gamma + \int\limits_{\Omega} f v\, d\Omega.$$

Как видно, отсюда вычислить $\Delta\bar{u}$ в этом случае невозможно. Однако значения, принимаемые $\Delta\bar{u}$ на множестве таких v для которых

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + h\,v\right)\Big|_{\Gamma} = 0$$

можно. На линейном многообразии E_1 таких функций

$$(\Delta\bar{u}, v) = \int\limits_{\Omega} f v\, d\Omega + \delta(\Gamma)\varphi.$$

Иными словами, на этом многобразии

$$\Delta\bar{u} = \bar{f} + \delta(\Gamma)\,\varphi.$$

Нетрудно видеть, что задача обращения оператора Лапласа на

$$Y^{(m)*}$$

вообще говоря, неразрешима, т. к. оператор Δ имеет неравный нулю прообраз нуля.

Будем рассматривать оператор Δ на множестве E_1, рассматриваемом как сужение пространства $Y^{(m)}$. Поскольку мы не меняем топологию $Y^{(m)}$, то множество функционалов над E_1 будет просто множеством классов функционалов над $Y^{(m)}$ принимающих на E_1 одно и то же значение. На E_1 прообраз нуля для Δu будет нулем, что и дает возможность найти определенное решение задачи обращения.

Изучим вначале оператор Δ^{-1}. Допустим, что в области Ω мы умеем обращать этот оператор на функционалах из E_1 при помощи функции Грина или каким угодно другим путем. Введем в рассмотрение оператор приведения R в $Y^{(m)}$, приводящий в соответствие любой функции $\varphi \in Y^{(m)}$ элемент $\tilde{\varphi} \in C^{(m)}$, принимающий во всех точках Ω те же значения, что и φ.

Областью значений этого оператора может быть либо все $C^{(m)}(\Omega)$, либо не все $C^{(m)}(\Omega)$.

В первом случае сопряженный оператор R^* не имеет прообраза нуля и приводит однозначно любому элементу $\rho \in C^{(m)*}$ соответствующий элемент $R^*_\rho \in Y^{(m)*}$. Областью его значений, как легко видеть, будет множество тех ρ для которых Ω является носителем. R^{*-1} будет существовать и будет определен на всех таких ρ. Решение нашей задачи дается при этом формулой

$$u = R^* \Delta^{-1} R^{*-1} \rho. \tag{72}$$

Формула (72) имеет место в предположении, что нам известна непрерыность Δ^{-1} в некоторых пространствах, которая может быть установлена любых способом.

Изложенный метод может без всякого труда быть перенесен на совершено произвольные краевые задачи. Он позволяет строить обобщенные решения в самой широкой постановке, исходя из некоторых хорошо изученных классических задач.

Хочется указать еще на интересный вопрос о краевых задачах дая уравнений не принадлежащих ни к какому классическому типу, для которых корректно поставленных краевых задач до сих пор не было известно.

Хёрмандер в своей диссертации методами функционального анализа установил существование корректных краевых задач для любых уравнений с постоянными коэффициентами в фиксированной области.

Подробно остановиться на этой работе я не имею времени.

На этом разрешите закончить.

Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE À TROIS VARIABLES INDÉPENDANTES RÉDUCTIBLES À CEUX DE CHARPIT

par B. RACHAJSKY, BEOGRAD

Sommaire. On étudie un tel système d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables indépendantes qui soit réductible à un systeme de Charpit dont l'intégration se ramène à celle d'un système des équations différentielles ordinaires. Détermination des conditions lesquelles doivent vérifier le système en question. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrale complète. Intégration et généralisation de la notion des fonctions caractéristiques de N. Saltykow pour le système considéré et leur application à la formation de l'intégrale complète. L'intégrale générale du système correspondant de Charpit et la formation des solutions du système étudié en généralisant la méthode de Lagrange. Généralisations des considérations éxposées sur les systèmes des équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue d'un nombre quelconque des variables indépendantes.

Introduction. Les équations aux dérivées partielles du premier ordre représentent l'une des théories les plus perfectionnées du calcul intégrale qui pouvait servir comme modèle pour les équations d'ordres supérieures. Les systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction à deux variables indépendantes en involution de Darboux—Lie offrent le plus des propriétés analogues à la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Citons quelques propriétés en question: Tout d'abord, il est aisé d'introduire, pour former les équations équivalentes ordinaires, les équations de Charpit, [1]; on généralise, en second lieu, la théorie des fonctions caractéristiques pour la formation de l'intégrale complète à l'aide de l'intégrale générale des équations ordinaires [2]. Enfin, il existe une analogie concernant les rapports entre les divers genres d'intégrales, [3]. Cependant dans la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction inconnue de plusieures variables indépendantes se présentent les difficultés nouvelles.

Le but de ce travail est d'étudier le système d'une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes réductible au système de la forme de Charpit.

1. Considérons le système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes x_i

$$(1)\qquad p_{ii}+f_i(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23})=0,\quad (i=1,2,3)$$

avec les notations usuelles:

$$p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i},\qquad p_{ij}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j},$$

et avec les conditions d'indépendance de l'ordre de la différentiation de la fonction z par rapport aux x_i.

Formons les équations dérivées

$$(2)\qquad \frac{\partial p_{ii}}{\partial x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial p_{12}}\frac{\partial p_{12}}{\partial x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial p_{13}}\frac{\partial p_{13}}{\partial x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial p_{23}}\frac{\partial p_{23}}{\partial x_k}+D_k f_i=0,$$

$$(i,k=1,2,3)$$

le symbol D_k désignant l'opérateur suivant

$$D_k\equiv\frac{\partial}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{s=1}^{3}p_{sk}\frac{\partial}{\partial p_s}$$

Si l'on introduit les conditions suivantes:

$$(3)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial p_{23}}=\frac{\partial f_2}{\partial p_{13}}=\frac{\partial f_3}{\partial p_{12}}=0,$$

$$(4)\qquad \frac{1}{\dfrac{\partial f_2}{\partial p_{12}}}=\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}}}{1}=\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial p_{23}}}=\frac{D_2 f_1}{D_1 f_2},$$

$$(5)\qquad \frac{1}{\dfrac{\partial f_3}{\partial p_{13}}}=\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}}}{1}=\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}}}{\dfrac{\partial f_3}{\partial p_{23}}}=\frac{D_3 f_1}{D_1 f_3},$$

$$(6)\qquad \frac{1}{\dfrac{\partial f_3}{\partial p_{23}}}=\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial p_{23}}}{1}=\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial p_{12}}}{\dfrac{\partial f_3}{\partial p_{13}}}=\frac{D_3 f_2}{D_2 f_3},$$

des neuf equations (2) il ne restera que six équations distinctes suivantes

$$
(7)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}} \dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_3} + D_1 f_1 = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}} \dfrac{\partial p_{21}}{\partial x_3} + \dfrac{1}{\dfrac{\partial f_2}{\partial p_{12}}} D_2 f_2 = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}} \dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_3} + \dfrac{1}{\dfrac{\partial f_3}{\partial p_{13}}} D_3 f_3 = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}} \dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_3} + D_2 f_1 = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}} \dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_3} + D_3 f_1 = 0. \\[2ex]
\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}} \dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_3} + \dfrac{1}{\dfrac{\partial f_2}{\partial p_{12}}} D_3 f_2 = 0.
\end{cases}
$$

Si l'on ajoute aux équations (7) encore les équations suivantes

$$
(8)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \dfrac{\partial z}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}} \dfrac{\partial z}{\partial x_3} - p_1 - \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} p_2 - \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}} p_3 = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial p_i}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \dfrac{\partial p_i}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}} \dfrac{\partial p_i}{\partial x_3} - p_{i1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} p_{i2} - \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}} p_{i3} = 0, \\
\qquad (i = 1, 2, 3)
\end{cases}
$$

le système (7) et (8) est alors un système de Charpit des fonctions z p_i, p_{ii}, p_{ij}. Le système correspondant aux équations différentielles ordinaires devient:

$$
(9)\quad
\begin{cases}
dx_1 = \dfrac{dx_2}{\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}}} = \dfrac{dx_3}{\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}}} = \dfrac{dz}{p_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} p_2 + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}} p_3} = \dfrac{dp_i}{p_{i1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} p_{i2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}} p_{i3}} = \\[3ex]
= \dfrac{dp_{11}}{-D_1 f_1} = \dfrac{dp_{22}}{-D_2 f_2 \Big/ \dfrac{\partial f_2}{\partial p_{12}}} = \dfrac{dp_{33}}{-D_3 f_3 \Big/ \dfrac{\partial f_3}{\partial p_{13}}} = \dfrac{dp_{12}}{-D_2 f_1} = \\[3ex]
= \dfrac{dp_{23}}{-D_3 f_2 \Big/ \dfrac{\partial f_2}{\partial p_{12}}} = \dfrac{dp_{13}}{-D_3 f_1}.
\end{cases}
$$

Ces dernières équations jouent, par rapport au système (1) avec les conditions (3)—(6), le même rôle que les équations des caractéristiques dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

2. Dans la théorie du système (1) nous utiliserons la notion de l'intégrale complète:

$$z = V(x_1, x_2, x_3, C_1, \ldots, C_7) \tag{10}$$

où l'on a la condition

$$\Delta \equiv D\begin{pmatrix} V, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23} \\ \hline C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{11}$$

introduisant les notations suivantes

$$V_i \equiv \frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad V_{ij} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j},$$

C_i désignant les constantes arbitraires distinctes; de plus le résultat de l'élimination des équations: $z = V$, $p = V_i$, $p_{ii} = V$, $p_{ij} = V_{ij}$ de toutes les constantes arbitraires C_i ne donne que les équations (1).

Dans le cas où le système (1) est réductible à un système de Charpit (7)—(8), son intégrale complète (10) doit satisfaire à des conditions complémentaires qu'on va établir. En effet, les équations suivantes

$$z = V(x_1, x_2, x_3, C_1, \ldots, C_7)$$

$$p_i = V_i(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$p_{ij} = V_{ij}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \quad (j = 1, 2, 3, i \neq j)$$

sont équivalentes, grâce à (11), aux équations

$$F_k(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}) = C_k, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, 7). \tag{12}$$

On a de plus les relations $p_{ii} = V_{ii}$, $(i = 1, 2, 3)$ que l'on peut remplacer aisément, en vertu des équations précédentes, par les égalites suivantes

$$-f_i(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}) = V_{ii}(x_1, x_2, x_3, F_1, \ldots, F_7) \equiv \overline{V}_{ii}, \tag{13}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Introduisons, enfin, les désignations

$$\overline{F}_k = F_k(x_1, x_2, x_3, V, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23}) = C_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, 7). \tag{12'}$$

En différentiant ces dernières relations par rapport aux C_i on obtient

$$(14)\qquad \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial C_i}+\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_s}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial C_i}+\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_{12}}\frac{\partial^3 V}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial C_i}+\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_{13}}\frac{\partial^3 V}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial C_i}+$$

$$+\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_{23}}\frac{\partial^3 V}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial C_i}=\frac{\partial C_k}{\partial C_i},$$

$$(i, k=1, 2, \ldots, 7).$$

Il en resulte, grâce à (11):

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{F}_k}{\partial z}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{C_k, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right), & \dfrac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_{12}}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{V, V_1, V_2, V_3, C_k, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right), \\ \dfrac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_1}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{V, C_k, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right), & \dfrac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_{13}}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{V, V_1, V_2, V_3, V_{12}, C_k, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right), \\ \dfrac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_2}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{V, V_1, C_k, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right), & \dfrac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_{23}}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{V, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, C_k}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right) \\ \dfrac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_3}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{V, V_1, V_2, C_k, V_{12}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right). & \end{cases}$$

D'autre part, différentiant les identités (13), on trouve:

$$(16)\qquad -\frac{\partial f_i}{\partial \mu}=\sum_{k=1}^{5}\bar{V}_{iiC_k}\frac{\partial F_k}{\partial \mu}, \qquad (i=1, 2, 3)$$

$$(17)\qquad -\frac{\partial f_i}{\partial x_s}=\frac{\partial \bar{V}_{ii}}{\partial x_s}+\sum_{k=1}^{5}V_{iiC_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_s}, \qquad (i, s=1, 2, 3),$$

où l'on remplace μ respectivement par p_{ij}, p_s, z. En désignant, par les paranthèse ( ), le resultat de la substitution de z, p_i, p_{ij} respectivement par leur valeurs V, V_i, V_{ij} et par $\Delta_{12}^{(i)}$, les valeurs des déterminants fonctionnels

$$\Delta_{12}^{(i)}\equiv D\left(\frac{V, V_1, V_2, V_3, V_{ii}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right), \qquad (i=1, 2, 3)$$

on met les équations (16) sous la forme suivante, par exemple, pour $\mu=p_{12}$

$$-\frac{\partial f_i}{\partial p_{12}}=\sum_{k=1}^{5}V_{iiC_k}\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_{12}}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{5}V_{iiC_k}D\left(\frac{V, V_1, V_2, V_3, C_k, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right),$$

ou bien

$$(18)\qquad -\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_{12}}\right)=\frac{\Delta_{12}^{(i)}}{\Delta}, \qquad (i=1, 2, 3)$$

et de la même manière aussi

$$-\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_{13}}\right)=\frac{\Delta_{13}^{(i)}}{\Delta}, \qquad -\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_{23}}\right)=\frac{\Delta_{23}^{(i)}}{\Delta}, \qquad (i=1,2,3)$$

$$-\left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)=\frac{\Delta_{z}^{(i)}}{\Delta}, \qquad -\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_s}\right)=\frac{\Delta_{s}^{(i)}}{\Delta}, \qquad (i=1,2,3)$$

où l'on vient de poser

$$\Delta_{13}^{(i)} \equiv D\left(\frac{V, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{ii}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right), \quad \Delta_{23}^{(i)} \equiv D\left(\frac{V, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{ii}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right),$$

$$\Delta_{z}^{(i)} \equiv D\left(\frac{V_{ii}, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right), \quad \Delta_{1}^{(i)} \equiv D\left(\frac{V, V_{ii}, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right), \ldots$$

D'autre part en différentiant les identités (12′) par rapport aux x_s on obtient

$$-\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial x_s}=\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial z}V_s+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_i}V_{is}+\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_{12}}V_{12s}+\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_{13}}V_{13s}+\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial p_{23}}V_{23s}=0$$

et grâce aux formules (15) et (17) on a

$$-\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_s}\right)=V_{iis}-\frac{1}{\Delta}\left(V_s\,\Delta_z^{(i)}+\sum_{j=1}^{3}V_{js}\,\Delta_j^{(i)}+V_{12s}\,\Delta_{12}^{(i)}+V_{13s}\,\Delta_{13}^{(i)}+V_{23s}\,\Delta_{23}^{(i)}\right).$$

En vertu des formules établies on aura

$$D_s f_i=-V_{iis}+V_{12s}\frac{\Delta_{12}^{(i)}}{\Delta}+V_{13s}\frac{\Delta_{13}^{(i)}}{\Delta}+V_{23s}\frac{\Delta_{23}^{(i)}}{\Delta}. \tag{20}$$

$$(i, s=1,2,3).$$

Écrivons les conditions (4) – (6) sous la forme suivante

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\frac{\partial f_2}{\partial p_{12}}=1, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\frac{\partial f_2}{\partial p_{23}}=\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}, \qquad D_2 f_1=\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}D_1 f_2, \tag{4′}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}\frac{\partial f_3}{\partial p_{13}}=1, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}\frac{\partial f_3}{\partial p_{23}}=\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}, \qquad D_3 f_1=\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}D_1 f_3, \tag{5′}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p_{23}}\frac{\partial f_3}{\partial p_{23}}=1, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial p_{23}}\frac{\partial f_3}{\partial p_{13}}=\frac{\partial f_2}{\partial p_{12}}, \qquad D_3 f_2=\frac{\partial f_2}{\partial p_{23}}D_2 f_3,\tag{6′}$$

où les deux dernières de la dexième colonne sont les conséquences des précédentes. Les conditions (3) et $(4')-(6')$ sont satisfaites identiquement aussi dans le cas de la substitution de z, p_i, p_{ik} respectivement par V, V_i, V_k de sorte que l'on obtient les conditions cherchées:

$$(3_1) \qquad \Delta_{23}^{(1)} = \Delta_{13}^{(2)} = \Delta_{12}^{(3)} = 0$$

$$(4_1) \qquad \Delta_{12}^{(1)} \Delta_{12}^{(2)} - \Delta^2 = 0, \qquad \Delta_{12}^{(1)} \Delta_{23}^{(2)} + \Delta \Delta_{13}^{(1)} = 0,$$

$$(5_1) \qquad \Delta_{13}^{(1)} \Delta_{13}^{(3)} - \Delta^2 = 0, \qquad \Delta_{13}^{(1)} \Delta_{23}^{(2)} + \Delta \Delta_{12}^{(1)} = 0,$$

$$(6_1) \qquad \Delta_{23}^{(2)} \Delta_{23}^{(3)} - \Delta^2 = 0, \qquad \Delta_{23}^{(2)} \Delta_{13}^{(1)} + \Delta \Delta_{12}^{(2)} = 0.$$

Les deux dernières conditions de la seconde colonne sont les conséquences de toutes les précédentes. Les relations de la troisième colonne $(4')-(6')$ n'imposent pas des conditions nouvelles à la fonction V. En effet, en prennant, par exemple, la relation

$$(D_2 f_1) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\right) D_1 f_2$$

il est aisé de démontrer que cette relation est verifiée identiquement, grâce aux conditions précédentes, à savoir

$$-V_{112}\left(1 - \frac{\Delta_{12}^{(1)} \Delta_{12}^{(2)}}{\Delta_2}\right) + V_{123}\left(\frac{\Delta_{13}^{(1)}}{\Delta} + \frac{\Delta_{12}^{(1)} \Delta_{23}^{(2)}}{\Delta^2}\right) + V_{223}\frac{\Delta_{23}^{(1)}}{\Delta} + V_{113}\frac{\Delta_{13}^{(2)}}{\Delta} \equiv 0.$$

On trouve de même que les conditions $(3_1)-(6_1)$, sauf celles qui viennent d'être mentionnées, sont non seulement nécessaires mais aussi suffisantes pour que $z = V$ soit une intégrale du système (1) réductible à celui de Charpit (7)—(8).

Il est intéressant de poser la question: est ce qu'il est possible d'étendre sur le système (9) le théorème de Jacobi concernant les équations aux dérivées partielles du premier ordre et généralisé sur le système d'équations aux dérivées du second ordre, en involution de Darboux—Lie, [3]?

3. Posons maintenant le problème de la formation de l'intégrale complète du système (1) sous les conditions (3)—(6), à l'aide de l'intégrale générale du système des équations différentielles ordinaires (9). L'intégrale générale de ce système de 12 équations est composée de trois équations données (1) et de neuf nouvelles intégrales distinctes. La vari-

able x_1 étant principale, cherchons l'intégrale générale sous la forme suivante:

$$(21)\quad \begin{cases} x_2 = m\,(x_1, C_1, \ldots, C_9) & p_i = P\,(x_1, C_1, \ldots, C_9) \\ x_3 = n\,(x_1, C_1, \ldots, C_9) & p_{ii} = P_{ii}\,(x_1, C_1, \ldots, C_9) \\ z = Z\,(x_1, C_1, \ldots, C_9) & p_{ik} = P_{ik}\,(x_1, C_1, C, C_9),\ P_{ik} = P_{ki} \end{cases}$$

$$(i, k = 1, 2, 3)$$

Supposons que l'on ait

$$(22)\qquad D\left(\frac{m, n}{C_8, C_9}\right) \neq 0,$$

alors les deux premières équations (21) se mettent sous la forme résoluble par rapport à C_8 et C_9:

$$(23)\qquad \begin{aligned} C_8 &= a\,(x_1, x_2, x_3, C_1, \ldots, C_7) \\ C_9 &= b\,(x_1, x_2, x_3, C_1, \ldots, C_7)\,. \end{aligned}$$

En éliminant C_8 et C_9 des autres équations (21), à l'aide de (23), on obtient

$$(24)\quad \begin{cases} z = \bar{Z}\,(x_1, x_2, x_3, C_1, \ldots, C_7) \\ p_i = \bar{P}_i\,(x_1, x_2, x_3, C_1, \ldots, C_7) \\ p_{ii} = \bar{P}_{ii}\,(x_1, x_2, x_3, C_1, \ldots, C_7),\ (i = 1, 2, 3) \\ p_{ik} = \bar{P}_{ik}\,(x_1, x_2, x_3, C_1, \ldots, C_7),\ (i = 1, 2, 3;\ i \neq k)\,. \end{cases}$$

Puisque les équations (21) sont les intégrales du système (9), les identités suivantes ont lieu

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial m}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}},\quad \dfrac{\partial n}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}}, \\[2ex] \dfrac{\partial Z}{\partial x_1} = P_1 + \dfrac{\partial m}{\partial x_1} P_2 + \dfrac{\partial n}{\partial x_1} P_3, \\[2ex] \dfrac{\partial P_i}{\partial x_1} = P_{i1} + \dfrac{\partial m}{\partial x_1} P_{i2} + \dfrac{\partial n}{\partial x_1} P_{i3},\ (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Considérons les identités évidentes resultant des formules (21) et (24),

$$(26)\quad \begin{cases} Z\,(x_1, C_1, \ldots, C_9) = \bar{Z}\,(x\ , m, n, C_1, \ldots, C_7) \\ P_i\,(x_1, C_1, \ldots, C_9) = \bar{P}_i\,(x_1, m, n, C_1, \ldots, C_7), \qquad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

et leurs formules dérivées

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x_1} = \left(\dfrac{\partial \bar{Z}}{\partial x_1}\right) + \left(\dfrac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2}\right)\dfrac{\partial m}{\partial x_1} + \left(\dfrac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3}\right)\dfrac{\partial n}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial P_i}{\partial x_1} = \left(\dfrac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_1}\right) + \left(\dfrac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_2}\right)\dfrac{\partial m}{\partial x_1} + \left(\dfrac{\partial P_i}{\partial x_3}\right)\dfrac{\partial n}{\partial x_1}, \qquad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

les parenthèses désignant le resultat de la substitution de x_2 et x_3 respectivement par les fonctions m et n. En soustrayant (27) de (25) on a

$$\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_1}\right) - P_1 + \left[\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2}\right) - P_2\right]\frac{\partial m}{\partial x_1} + \left[\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3}\right) - P_3\right]\frac{\partial n}{\partial x_1} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_1}\right) - P_{i1} + \left[\left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_2}\right) - P_{i2}\right]\frac{\partial m}{\partial x_1} + \left[\left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_3}\right) - P_{i3}\right]\frac{\partial n}{\partial x_1} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

et l'on a tiré les relations nouvelles

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{Z}}{\partial x_1} - \bar{P}_1 + \left(\dfrac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2} - \bar{P}_2\right)\left(\dfrac{\partial m}{\partial x_1}\right) + \left(\dfrac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3} - \bar{P}_3\right)\left(\dfrac{\partial n}{\partial x_1}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_1} - \bar{P}_{i1} + \left(\dfrac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_2} - \bar{P}_{i2}\right)\left(\dfrac{\partial m}{\partial x_1}\right) + \left(\dfrac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_3} - \bar{P}_{i3}\right)\left(\dfrac{\partial n}{\partial x_1}\right) = 0. \quad (i = 1, 2\ 3) \end{cases}$$

En vertu de la première des équations (28) et des relations

$$(29)\qquad \bar{P}_2 = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2}, \qquad \bar{P}_3 = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3}$$

on conclut

$$(30)\qquad \bar{P}_1 = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_1}.$$

Supposons que l'on tire de (29) et (30) les relations

$$\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \bar{P}_3}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \bar{P}_3}{\partial x_2}.$$

Grâce aux conditions $\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \neq 0$ et $\dfrac{\partial f_1}{\partial P_{13}} \neq 0$, aux équations (28).

vu les conditions

$$(3 \qquad \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x_2} = \bar{P}_{12}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x_3} = \bar{P}_{13}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_3}{\partial x_2} = \bar{P}_{23}$$

on obtient les conditions

$$(32)\qquad \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x_1} = \bar{P}_{11}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial x_2} = \bar{P}_{22}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_3}{\partial x_3} = \bar{P}_{33}.$$

Donc, les conditions (29) et (31) produisent les conditions (30) et (32). Les dérivées des identités (26) donnent les nouvelles identités

$$(33)\qquad \frac{\partial Z}{\partial C_\mu} = \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial m}{\partial C_\mu} + \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3}\right)\frac{\partial n}{\partial C_\mu} + \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial C_\mu}\right), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 7),$$

$$(34)\qquad \frac{\partial Z}{\partial C_\nu} = \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial m}{\partial C_\nu} + \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3}\right)\frac{\partial n}{\partial C_\nu}, \qquad (\nu = 8, 9),$$

$$(35)\qquad \frac{\partial P_i}{\partial C_\mu} = \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_2}\right)\frac{\partial m}{\partial C_\mu} + \left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_3}\right)\frac{\partial n}{\partial C_\mu} + \left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial C_\mu}\right), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 7),$$

$$(36)\qquad \frac{\partial P_i}{\partial C_\nu} = \left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_2}\right)\frac{\partial m}{\partial C_\nu} + \left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_3}\right)\frac{\partial n}{\partial C_\nu}, \qquad (\nu=8, 9)$$

les parenthèses ayant la désignation antérieurement établie. En admettant que l'on ait

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial C_\mu} \neq 0, \qquad (\mu = 1, 2, ., 7)$$

on obtient agrâce aux (29), (33)—(34) les conditions suivantes

$$(37)\qquad U_{C_\mu} \neq 0, \quad (\mu = 1, 2, . , 7), \quad U_{C_\nu} = 0, \quad (\nu=8, 9)$$

où nous introduisons des nouvelles notions U_C des fonctions que nous dirons „caractéristiques“ du système (1)

$$U_C \equiv \frac{\partial Z}{\partial C} - P_2\frac{\partial m}{\partial C} - P_3\frac{\partial n}{\partial C}.$$

D'autre part, sous l'hypothèse

$$\frac{\partial P_i}{\partial C_\mu} \neq 0 \quad (i=1, 2, 3;\ \mu = 1, 2, . , 7)$$

et en vertu (31) et (35)—(36), on conclut

$$(38)\qquad W^i_{C_\mu} \neq 0, \quad (\mu=1, 2, . ,7;\ i=1, 2, 3), \; W^i_{C_\mu} = 0, \quad (\mu = 8, 9)$$

en appelant W_C^i les autres nouvelles fonctions caractéristiques qui signifient

$$V_C^i \equiv \frac{\partial P_i}{\partial C} - P_{i2}\frac{\partial m}{\partial C} - P_{i3}\frac{\partial n}{\partial C}.$$

Si les formules (24) définissent l'intégrale complète du système (1) sous l'hypothèse (3)—(6), alors les conditions (37) et (38) ont lieu. Donc les conditions citées sont nécessaires. Démontrons que ces conditions sont aussi suffissantes pour la formation de l'intégrale complète. Donc, en admettant que les conditions (37) et (38) existent, il est aisé de former les différences suivantes des formules (37) et (33)—(34)

$$(39)\qquad \left[\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2}\right) - P_2\right]\frac{\partial m}{\partial C_\nu} + \left[\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3}\right) - P_3\right]\frac{\partial n}{\partial C_\nu} = 0, \quad (\nu = 8, 9)$$

$$(40)\qquad \left[\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2}\right) - P_2\right]\frac{\partial m}{\partial C_\mu} + \left[\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3}\right) - P_3\right]\frac{\partial n}{\partial C_\mu} + \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial C_\mu}\right) \neq 0, \quad (\mu = 1, .., 7)$$

et celles des formules (38) et (35)—(36)

$$(41)\qquad \left[\left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_2}\right) - P_{i2}\right]\frac{\partial m}{\partial C_\nu} + \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_3}\right) - P_{i3}\right]\frac{\partial n}{\partial C_\nu} = 0, \quad (\nu = 8, 9;\ i = 1, 2\ 3)$$

$$(42)\qquad \left[\left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_2}\right) - P_{i2}\right]\frac{\partial m}{\partial C_\mu} + \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_3}\right) - P_{i3}\right]\frac{\partial n}{\partial C_\mu} + \left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial C_\mu}\right) \neq 0,$$

$$(i = 1, 2, 3;\ \mu = 1, .., 7).$$

D'après (22) les équations (39) donnent les conditions (29) et par conséquent la condition (30). En vertu de l'équation (40) on obtient

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial C_\mu} \neq 0, \quad (\mu = 1, 2, .., 7).$$

Il suffit de prendre les deux premières équations (41). Ces équations, d'après (22), donnent les conditions (31), et alors les conditions (32) ont lieu. Les équations (42) ne donnent que les relations

$$\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial C_\mu} \neq 0, \quad i = 1, 2, 3;\ \mu = 1, \ldots 7)$$

qui ne sont cependant nécessaires.

Il resulte des considérations exposées que pour former l'intégrale complète du système (1) à l'aide de l'intégrale générale (21) du système

(9) les conditions nécessaires et suffisantes, éxprimées par les fonctions caractéristiques suivantes, doivent avoir lieu

$$(37')\quad \begin{cases} U_{C_\mu} \neq 0, \ (\mu=1, \ldots, 7) \ U_{C_\nu}=0, \ (\nu=8, 9), \\ W^i_{C_\nu}=0, \ (\nu=8, 9; \ i=1, 2). \end{cases}$$

De cette manière il est demontré le rôle important que jouent les fonctions caractéristiques introduites dans la théorie du systeme étudié (1), sous l'hypothèse (3)—(6).

4. Citons quelques propriétés des fonctions caractéristiques. Les formules (21) s'obtient de neuf intégrales distinctes du système (9), c'est-à-dire ces équations sont résolubles par rapport aux neuf constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_9$ de sorte que l'on a la condition suivante.

$$D\left(\frac{m, n, Z, P_1, P_2, P_3, P_{12}, P_{13}, P_{23}}{C_1, C_2, \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, C_7}\right) \neq 0.$$

On peut en former les déterminants dans lesquels les colonnes 3^e, 4^e 5^e, 6^e sont remplacées respectivement par les U_C, W^i_C $(i=1, 2, 3)$. Ces déterminants sont distincts de zero. Il en resulte qu'au moins l'une des fonctions caractéristiques dans chaque groupe: U_{C_i}, $W^1_{C_i}$, $W^2_{C_i}$, $W^3_{C_i}$ est, distincte de zero. Démontrons que les fonctions caractéristiques sont homogènes et linéaires de leurs valeurs initiales: U^0_C, $(W^i_C)^0$. En partant des identités (25) et des éxpressions qui déffinisent des fonctions caractéristiques on obtient l'équation

$$\frac{\partial U_C}{\partial x_1} = W^1_C + \frac{\partial m}{\partial x_1} W^2_C + \frac{\partial n}{\partial x_1} W^3_C.$$

Pour obtenir les expressions des dérivées par rapport à x_1 des autres fonctions caractéristiques nous procédérons de la manière suivante. Substituons dans les formules

$$\frac{\partial W^1_C}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial C}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} - P_{12}\frac{\partial m}{\partial x_1} - P_{13}\frac{\partial n}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial P_{12}}{\partial C}\frac{\partial m}{\partial x} + $$
$$+ \frac{\partial P_{13}}{\partial C}\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial P_{12}}{\partial x_1}\frac{\partial m}{\partial C} - \frac{\partial P_{13}}{\partial x_1}\frac{\partial n}{\partial C}$$

les formules

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial x_1} = -(D_2 f_1), \qquad \frac{\partial P_{13}}{\partial x_1} = -(D_3 f_1)$$

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial C} + (D_2 f_1)\frac{\partial m}{\partial C} + (D_3 f_1)\frac{\partial n}{\partial C} + \frac{\partial f_1}{\partial z} U_c + \frac{\partial f_1}{\partial p_1} V^1_C + \frac{\partial f_1}{\partial p_2} V^2_c +$$
$$+ \frac{\partial f_1}{\partial p_3} V^3_C + \frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\frac{\partial P_{12}}{\partial C} + \frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}\frac{\partial P_{13}}{\partial C} + \frac{\partial f_1}{\partial p_{23}}\frac{\partial P_{23}}{\partial C} = 0$$

ainsi que les relations (3), (6) et (25). On obtient de cette manière le resultat

$$(44)\qquad \frac{\partial W_C^1}{\partial x_1} = -\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) U_C + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\right) V_C^1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_2}\right) V_C^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_3}\right) V_C^3\right].$$

D'une manière analogue on obtient encore les deux équations nouvelles

$$(45)\qquad \frac{\partial W_C^2}{\partial x_1} = -\frac{\partial m}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) U_c + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right) V_C^1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_2}\right) V_C^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_3}\right) V_C^3\right],$$

$$(46)\qquad \frac{\partial W_C^3}{\partial x_1} = -\frac{\partial n}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right) U_C + \left(\frac{\partial f_3}{\partial p_1}\right) V_C^1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial p_2}\right) V_C^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial p_3}\right) V_C^3\right].$$

Les équations (43)—(46) représentent les équations différentielles linéaires et homogènes des fonctions U_C et W_C^i. Les solutions de telles équations s'expriment linéairement et homogènement par les valeurs initiales des fonctions considérées.

Les propriétés démontrées des fonctions caractéristiques on peut utiliser pour vérifier les conditions (37′), pour former l'intégrale complète du système (1), sous l'hypothèse (3) - (6), à l'aide de l'intégrale générale du système (9).

5. Posons le problème de la formation de l'intégrale contenant des fonctions arbitraires du système donné (1) à l'aide de l'intégrale générale du système de Charpit. Outre de trois intégrales particulières définies par les équations données (1), le système (9) a encore neuf intégrales ψ_1, ψ_2, $F_1, \ldots, F_7$. L'intégrale générale du système de Charpit (7)—(8) qui vérifie les équations (1), sous l'hypothèse (3)—(6), est définie par les équations citées et les équations suivantes

$$(47)\qquad F_j = \varphi_j(\psi_1, \psi_2), \qquad (j = 1, \ldots, 7)$$

φ_j désignant les fonctions arbitraires. On pose pour déterminer les valeurs de variables parametriques x_{i+1}, p_i, p_{ik}

$$(48)\qquad f_i \equiv \alpha_i, \quad (i = 1, 2); \qquad F_j \equiv \beta_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, 7).$$

Alors les variables mentionnées sont définies par les équations

$$\begin{aligned}
x_{i+1} &= \Phi_i(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \ldots, \beta_7), \qquad (i = 1, 2)\\
Z &= \Phi_3(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \ldots, \beta_7)\\
p_j &= \Phi_{j+3}(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \ldots, \beta_7), \qquad (j = 1, 2, 3)\\
p_{12} &= \Phi_7(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \ldots, \beta_7)\\
p_{13} &= \Phi_8(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \ldots, \beta_7)\\
p_{23} &= \Phi_9(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \ldots, \beta_7),
\end{aligned}$$

x_1 désignant la variable indépendante principale. On va chercher les solutions du système (1) vérifiant de plus les conditions:

$$dz = \sum_{k=1}^{3} p_k \, dx_k , \qquad dp_s \sum_{k=1}^{3} p_{sk} \, dx_k , \qquad (s=1, 2, 3)$$

p_{ii} étant déterminées par les équations (1). Grâce aux conditions introduites on a les conditions nouvelles

$$\sum_{i=1}^{2} A_{ki} \, d\alpha_i + \sum_{j=1}^{7} B_{kj} \, d\beta_j + K_k \, dx_1 = 0, \qquad (k=1, ., 4)$$

avec

$$A_{1i} \equiv \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha_i} - \Phi_5 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_i} - \Phi_6 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_i}, \qquad B_{1j} \equiv \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta_j} - \Phi_5 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta_j} - \Phi_6 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta_j},$$

$$A_{2i} \equiv \frac{\partial \Phi_4}{\partial \alpha_i} - \Phi_7 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_i} - \Phi_8 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_i}, \qquad B_{2j} \equiv \frac{\partial \Phi_4}{\partial \beta_j} - \Phi_7 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta_j} - \Phi_8 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta_j},$$

$$A_{3i} \equiv \frac{\partial \Phi_5}{\partial \alpha_i} - \bar{p}_{22} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_i} - \Phi_9 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_i}, \qquad B_{3j} \equiv \frac{\partial \Phi_5}{\partial \beta_j} - \bar{p}_{22} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta_j} - \Phi_9 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta_j},$$

$$A_{4i} \equiv \frac{\partial \Phi_6}{\partial \alpha_i} - \Phi_9 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_i} - \bar{p}_{33} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_i}, \qquad B_{4j} \equiv \frac{\partial \Phi_6}{\partial \beta_j} - \Phi_9 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta_j} - \bar{p}_{33} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta_j},$$

$$(i=1, 2) \qquad\qquad (j=1, 2, \ldots, 7)$$

$$K_1 \equiv \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} - \Phi_5 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} - \Phi_6 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \Phi_4 ,$$

$$K_2 \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} - \Phi_8 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \bar{p}_{11} ,$$

$$K_3 \equiv \frac{\partial \Phi_5}{\partial x_1} - \bar{p}_{22} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \Phi_9 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \Phi_7$$

$$K_4 \equiv \frac{\partial \Phi_6}{\partial x_1} - \Phi_9 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} - p_{33} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \Phi_8$$

$$p_{ii} \equiv -f_i (x_1, \Phi_1, ., \Phi_7), \quad (i=1, 2, 3).$$

Grâce aux équations (9) ils existent les identités suivantes

$$K_k \equiv 0 \quad (k=1, 2, 3, 4).$$

En vertu de (47) et (48) on a

$$\beta_j = \varphi_j(\alpha_1, \alpha_2), \qquad (j=1, \ldots, 7)$$

et les conditions (49) deviennent

$$\left(\sum_{i=1}^{2} A_{ki} + \sum_{i=1}^{7} B_{kj} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha_i}\right) d\alpha_i = 0 \quad (k=1, 2, 3, 4).$$

Les différentials $d\alpha_1$ étant distincts de zéro, on établit les relations

$$A_{ki} + \sum_{j=1}^{7} B_{kj} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (k=1, \ldots, 4;\ i=1, 2)$$

lesquelles doivent satisfaire les fonctions φ_j pour que (47) détermine la solution du système (1). Par conséquent le problème cité ci-desus est résolu d'une manière analogue comme le problème posé par Lagrange [4] dans la théorie des équations aux derivées partielles du premier ordre.

Les resultats obtenus dans cet article se généralisent aisément sur les systèmes des n $(n > 3)$ équations aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes.

RÉFÉRENCES

[1] N. Saltykow, Bulletin de l'Academie serbe des Sciences, (XCVIII, Beograd, 1950, p. 37 (en serbe).

[2] N. Saltykow, Journal de Math. pures et appliquées, 5e serie. t. V. 1899, p. 435; Bulletin de l'Academie serbe des Sciences, t. V. 1952, p. 101.

[3] B. Rachajsky, Bulletin de la Société des math. et phys. de la R. P. de Serbie t. VII, 1–2, p. 11, 1955; t. VIII, 1–2, p. 7, 1956; t. IX, 1–2, p. 67, 1957.

[4] Lagrange, Oeuvres complètes, t. X. Paris 1884, p. 354.

*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie*

PROCÉDÉS DE L'ENCADREMENT DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par **MILORAD BERTOLINO**, BEOGRAD

I

Michel Petrovitch s'est occupé beaucoup de l'encadrement des solutions des équations différentielles. Nous citerons quelques-uns de ses procédés. Il emploie beaucoup le principe des intégrales premières qualitatives. Nous l'exposerons en quelques mots.

Étant donnée l'équation [5]

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

considérons l'expression suivante

$$\Phi(x, y, y', \dots y^{(m)}). \tag{2}$$

Soit $y(x)$ une fonction appartenant à une classe déterminée des solutions de l'équation (1). Φ sera une intégrale première qualitative de (1), si Φ considerée comme une fonction de x varie dans un intervalle déterminé $[\lambda_1, \lambda_2]$, pour les solutions de la classe donnée. On écrit

$$\Phi = \lambda_1 + \theta(\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

On obtient, par exemple, pour chaque intégrale réelle de l'équation

$$y'^4 + y^4 = f(x),$$

$$\Phi = \frac{y'^2 + y^2}{\sqrt{f(x)}} = 1 + \theta(\sqrt{2} - 1), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1:$$

Petrovitch étudie de telles classes des équations différentielles dont les premières intégrales qualitatives donnent des équations $\Phi = \lambda$ qui sont plus faciles à étudier. De telle manière, en partant des conclusions relatives aux équations simples, il arrive jusqu'aux conclusions relatives aux équations plus générales ou plus compliquées.

Voici quelques-uns des résultats de Petrovitch.

*

Étant donnée l'équation [1]

$$y'' = f(x)\, y \tag{2}$$

où $f(x)$ est une fonction réelle, finie et continue dans un intervalle (a,b) de x, toute courbe intégrale y dont la dérivée première s'annule dans un point (x_0, y_0) compris dans l'intervalle (a, b) où f est positive, est dans cet intervalle comprise entre les deux courbes

$$y = y_0\, ch\,(x - x_0)\sqrt{N} \quad \text{et} \quad y = y_0\, ch\,(x - x_0)\sqrt{M}, \tag{4}$$

où N et M désignent une limite inférieure et une limite supérieure de $f(\xi)$ pour les valeurs comprises entre x_0 et x. Si f est négative dans (a, b) supposé suffisamment étendu, la courbe y est oscillante, se composant de demi-ondes alternativement positives et négatives. Chaque demi-onde, soit positive, soit négative, est comprise entre les deux courbes

$$y = y_0 \cos(x - x_0)\sqrt{N} \quad \text{et} \quad y = y_0 \cos(x - x_0)\sqrt{M} \tag{5}$$

N et M ayant des significations précédentes relatives à $-\,f(x)$.

*

Écrivons l'équation de Riccati sous la forme [1]

$$y' = \varphi\,(y - f_1)\,(y - f_2) \tag{6}$$

et supposons que les trois fonctions φ, f_1, f_2 de x soient positives dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = \alpha$, les fonctions f_1 et f_2 n'étant pas décroissantes dans cet intervalle et les deux courbes $y = f_1$ et $y = f_2$ n'étant pas tangentes toutes les deux à la fois à l'axe Ox en O. Supposons encore, pour fixer les idées, qu'on ait $f_1 < f_2$ dans cet intervalle. Soient

$$Y'_1 = \varphi\,(Y_1 - F_1)\,(Y_1 - F_2), \tag{7}$$

$$Y'_2 = \varphi\,(Y_2 - \Phi_1)\,(Y_2 - \Phi_2), \tag{8}$$

deux équations qu'on sait intégrer et telles que, dans l'intervalle $(0,\alpha)$ on ait constamment

$$F_1 \leqslant f_1,\ F_2 \leqslant f_2\,; \qquad \Phi_1 \geqslant f_1,\ \Phi_2 \geqslant f_2. \tag{9}$$

Dans l'intervalle $(0,\alpha)$ on aura constamment $Y_1 < y < Y_2$, où Y_1, Y_2, y désignent les intégrales respectives de (7), (8), (6) s'annulant pour $x = 0$.

Le même procédé s'applique aux équations [3]

$$y' = \varphi\,(y - f_1)\,(y - f_2) \ldots (y - f_n) \tag{10}$$

ainsi qu'à l'équation linéaire du second ordre

$$y''+f(x)\,y'+\varphi(x)\,y=0\,, \tag{11}$$

où le rôle des fonctions f_1 et f_2 est joué par les deux racines en r de l'équation du second degré

$$r^2+f(x)\,r+\varphi(x)=0\,. \tag{12}$$

On peut constater que Petrovitch a résolu le problème de l'encadrement des solutions de l'équation (11) en utilisant les résultats trouvés pour l'équation de Riccati. C'est le même cas dans la théorie classique où, pour résoudre (11) il faut connaître une solution de l'équation de Riccati.

*

Etant donnée une équation [1]

$$y'=F(x,y,f), \tag{13}$$

où f est une fonction en x figurant dans F, sur lequel on portera particulièrement l'attention et (x_0, y_0) le point initial de l'intégrale pour lequel la fonction et sa dérivée $\frac{\partial F}{\partial f}$ soient déterminées, finies et continues, ne changeant pas de détermination, et pour lequel cette dérivée partielle ne s'annule pas (les points ne remplissant pas cette condition apartiennent à certaines courbes fixes dans le plan xOy que l'on connaîtra d'avance, où bien sont isolés et fixes), on peut toujours choisir, et cela d'une infinité de manières, deux fonctions $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

Que ces fonctions soient déterminées, finies et continues dans un intervalle suffisamment petit de x_0-a_1 à x_0+a_2 (a_1 et a_2 étant deux constantes positives).

Qu'on ait dans cet intervalle $\lambda(x)<f(x)<\mu(x)$.

Qu'en désignant par u et v les intégrales respectives des équations

$$u'=F(x,u,\lambda)\,, \qquad v'=F(x,v,\mu) \tag{14}$$

prenant pour $x=x_0$ la valeur $u_0=v_0=y_0$, les fonctions u et v soient déterminées, finies et continues dans un intervalle suffisamment petit de x_0-b_1 à x_0+b_2 (b_1 et b_2 étant deux constantes positives).

Les deux intervalles $(x_0-a_1,\ x_0+a_2)$ et $(x_0-b_1,\ x_0+b_2)$ ont toujours une partie commune $(x_0-h_1,\ x_0+h_2)$ d'étendue non nulle, pour lequel on démontre le théorème de la moyenne suivant pour les équations du premier ordre:

Pour toute valeur de x, comprise dans l'intervalle $(x_0-h_1,\ x_0+h_2)$ l'intégrale y de (13), prenant pour $x=x_0$ la valeur $y=y_0$ est déterminée finie, continue et comprise dans l'intervalle entre les valeurs correspondantes des integrales u et v des équations (14) qui, pour $x=x_0$ prennent la valeur $u_0=v_0=y_0$.

Il faut souligner la richesse des idées de Petrovitch dans les résultats nombreux de la sorte donnée et le besoin d'examiner la possibilité d'une théorie plus générale qui les pourrait réunir tous. Il faudrait aussi comparer ces résultats avec ceux d'autres auteurs, pour constater les liaisons qui y existent. Petrovitch applique ses procédés a l'étude des solutions asymptotiques et des équations aux dérivées partielles [5].

II

En 1919, S. A. Tchapliguine a publié sa méthode de l'intégration approximative des équations différentielles du premier ordre [6].

Étant donnée l'équation

$$y'=f(x,y) \tag{15}$$

(f une fonction continue de deux variables indépendantes dans une region ω du plan $x\,O\,y$ où $\frac{\partial f}{\partial y}$ est finie), nous considérons la solution $y(x)$ de (15) qui prend pour $x=x_0$ une valeur $y=y_0$ (le point (x_0, y_0) se trouve dans ω). Soit $v(x)$ une fonction de x qui prend la valeur $v(x_0)=y_0$ et le long de laquelle on a

$$\frac{dv}{dx}-f(x,v)\gtrless 0 \tag{16}$$

dans un intervalle $[x_0, x_1]$, on aura aussi

$$v(x)\gtrless y(x)$$

dans le même intervalle.

On peut trouver ce théorème dans un des livres de Petrovitch [5] mais Petrovitch ne cite pas le nom de l'auteur.

La méthode de Tchapliguine va plus loin. En ajoutant la condition $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\gtrless 0$, Tchapliguine obtient la paire suivante des courbes de l'encadrement en connaîssant la paire précédente. Il n'y a qu'à résoudre les équations

$$y'=\frac{f(x,v_n)-f(x,u_n)}{v_n-u_n}(y-u_n)+f(x,u_n),\quad y'=f_y'(x,u_n)(y-u_n)+f(x,u_n). \tag{17}$$

Lusin a donné la vitesse de la convergence de cette suite des courbes.

Il a montré que

$$v_n - u_n < \frac{C}{2^{2n}} \tag{18}$$

(C étant une constante indépendante de n).

En étudiant les équations linéaires du second ordre

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x)\,, \tag{19}$$

Tchapliguine cherche les conditions suffisantes pour que soit

$$v(x) \gtrless y(x) \tag{20}$$

dans l'intérieur de l'intervalle $[x_0, x_1]$ dans lequel on a

$$v'' + a(x)\,v' + b(x)\,v - f(x) \gtrless 0, \tag{21}$$

($y(x)$ est la solution de l'équation (19) $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ et $v(x)$ une fonction $v(x_0) = y_0$, $v'(x_0) = y_0'$).

Il obtient cette condition: c'est l'existence, dans l'intervalle $[x_0, x_1]$, d'une solution continue de l'équation de Riccati

$$k' + k^2 - ak - a' + b = 0 \tag{22}$$

(les fonctions a, b, f sont les fonctions continues de x).

On peut ajouter que la méthode de Tchapliguine est très développée aujourd'hui en U. R. S. S. On l'applique aussi dans le domaine des systèmes des équations différentielles ordinaires, dans l'étude des équations intégrales, dans l'intégration approximative des équations aux dérivées partielles. Nous citerons, a la fin, quelques travaux de cette sorte.

III

Je montre un procédé relatif a l'équation (19), où a, b, f sont les fonctions continues de x. Il est bien connu qu'on peut intégrer (19) si l'on connaît une solution k_1 de l'équation de Riccati

$$k' + k^2 + ak + b = 0\,. \tag{23}$$

On obtient une équation linéaire du premier ordre qui donne l'intégrale générale. Mais nous pouvons appliquer à cette équation le théorème fondamental de Tchapliguine relatif aux équations du premier ordre. Nous aurons ainsi, excepté la solution particulière dont la forme est peut-être peu commode aussi les courbes inférieures ou supérieures pour apprécier l'intégrale. La courbe supérieure (inférieure) prend la forme

$$v(x) = \psi(x)\,\omega_1(x) \tag{24}$$

où $\psi(x) = F(x) + C_0$ prend, pour $x = x_0$ la valeur $\left(\frac{y}{\omega_1}\right)_{x=x_0}$ et $F(x)$ signifie la fonction primitive de la fonction $v_1(x)$ qui satisfait aux conditions

$$v_1(x_0)=\left[\left(\frac{y}{\omega_1}\right)'\right]_{x=x_0};\ v'_1+(2\,k_1+a)\,v_1-f(x)\,e^{-\int k_1\,dx}\gtrless 0. \qquad (25)$$

Enfin, $\omega_1=e^{\int k_1 dx}$, k_1 étant une solution continue de l'équatfion de Riccati (23).

En comparant ce procédé avac celui qui suit du théorème de Tchapliguine relatif aux équations du second ordre, on peut conclure:

a) La méthode de Tchapliguine s'appuie sur une inéquation du second ordre (21), tandis que la méthode de ci-dessus s'appuie sur une inéquation du premier ordre (25). On peut prouver que les courbes (24) satisfont à la condition (21). Il est clair que, dans le cas où a' existe dans $[x_0, x_1]$, les courbes (24) sont les courbes de l'encadrement, satisfaisant aux conditions suffisantes de Tchapliguine. Mais, dans le cas où a' n'existe pas dans chaque point de l'intervalle $[x_0, x_1]$, les courbes (24) ne peuvent pas être considérées comme les courbes de Tchapliguine qui satisfont à ses conditions suffisantes. Malgré cela, elles sont les courbes de l'encadrement, comme nous l'avons montré. Cet expliquation suit du fait évident que les deux équations de Riccati sont équivalentes dans le cas où a' existe. En posant dans (23), $k=k_1-a$ nous obtenons l'équation (22). Mais nous n'avons pas supposé l'existence de a' en prouvant que les courbes (24) sont les courbes de l'encadrement.

b) La connaissance de k_1 offre cependant la possibilité de trouver l'intégrale générale. C'est à cause de cela que la méthode exposée ne sert pas à encadrer les solutions, inconnues, mais *à* apprécier les solutions obtenues, vraiment à l'aide des quadratures, mais pas en termes finis ou, parfois, à l'aide des procédés compliqués.

Dans des exemples qui suivent sont obtenues les courbes supérieures des solutions qu'on ne peut pas donner en termes finis. Dans l'exemple *A*, les solutions ne sont pas commodes à étudier à cause de la fonctions assez générale figurant dans l'équation. Nous avons choisi des equations où les solutions continues de (23) sont évidentes.

Exemples

A) Etant donnée l'équation

$$f(x)\,y''+x\,y'-y=0,$$

(Forsyth-Jacobstahl: Differentialgleichungen p. 117) en supposant que $f(x)$ soit une fonction contiune et positive, considérons la solution y satisfaisant aux conditions

$$y(x_0)=y_0 \qquad y'(x_0)=y_0' \qquad x_0>0.$$

Nous obtenons

$$k_1 = \frac{1}{x}, \qquad S_i\, v_1(x) = \frac{t_0' x}{x_0}, \qquad \left(t = \frac{y}{\omega_1}\right);$$

on obtient la courbe supérieure

$$v(x) = x\left(\frac{t_0' x^2}{2 x_0} + t_0 - \frac{t_0' x_0}{2}\right), \qquad t_0' > 0,$$

ou la courbe inférieure si $t_0' < 0$.

Aprés avoir résolu l'équation, nous obtenons

$$y = x\left(t_0 + t_0' \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t}\left(\frac{2}{u} + \frac{u}{f(u)}\right) du} dt\right).$$

B) L'équation donnée

$$xy'' + (b - x)\, y' - ay = 0$$

([7] p. 562) où b n'est pas un nombre entier. Les solutions ont la forme

$$y = C_1 F(a, b, x) + C_2 x^{1-b} F(a - b + 1, 2 - b, x),$$

où

$$F(a, b, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{b(b+1)\ldots(b+k-1)} \frac{x^k}{k!}$$

(la fonction de Pochgammer-une série convergente pour chaque x). Dans le cas special $b = a + 1$ nous avons

$$y = C_1\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ax^k}{(a+k)x!}\right) + C_2 x^{-a}.$$

L'équation (23) a la solution $k_1 = -\frac{a}{x}$.

Considérons la solution $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 1$ et supposons que

$$0 < a < 1, \; 0 < x_0 < 1 - a, \; v_1 = x^a.$$

Nons obtenons, dans l'intervalle $x_0 < x < 1 - a$, la courbe supérieure

$$v(x) = \frac{x}{a+1} - \frac{x_0^{a+1}}{(a+1)\, x^a}.$$

LITTÉRATURE

[1] M. Petrovitch, *Intégration qualitative des équations différentielles*, Mémorial des sciences mathématiques, Paris 1931.

[2] M. Petrovitch, *Intégrales premières à restrictions*, Académie royale de Serbie, Посебна издања LXXII — 1929, 1—50.

[3] Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch, Académie royale de Serbie, Paris, 1922.

[4] M. N. Saltykow, *Problèmes d'intégration d'équations linéaires*, Extrait du Bulletin, t. X, № 2, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles de l'Académie Serbe des Sciences, Beograd 1956.

[5] Михаило Петровић, *Рачунање са бројним размацима*, Београд 1932.

[6] Н. Н. Лузин, *О методе приближённого интегрирования* акад. С. А. Чаплыгина, Успехи математических наук Т. VI. Выпуск 6 (46), 1951.

[7] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Издательство иностранной литературы, Москва 1951.

QUELQUES TRAVAUX RELATIFS À LA MÉTHODE DE TCHAPLIGUINE

1) Artemov G. A., *Über eine Modifikation der Čaplyginschen Methode für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung* — Doklady Akad. Nauk SSSR 101, 197—200 (1955).

2) Artemov G. A., *Die Methode Čaplygins und ihre Vereinfachung für eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus in zwei Veränderlichen* — Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 197—200 (1955)

3) Петров Б. Н., *Граница применимости теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах к линеиным уравнениям с обыкновениыми производными второго порядка*, ДАН СССР LI, № 4 (1946), 251—254,

4) Петров Б. Н., *Неприменимость теоремы о дифференциальном неравенстве С. А. Чаплыгина к некоторым нелинейным уравнениям с обыкновениыми производными второго порядка*, ДАН СССР LI, № 7, (1946), 465—498.

5) Саваренский Е. Ф., *Неограниченная применимость теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах к линенным уравнениям с частными производными первого порядка*, ДАН СССР LI, № 4 (1946), 255—258.

6) Панов Д. Ю., *О применении метода С. А. Чаплыгина к решению интегральных уравнений*, Известия ДАН СССР, ОМЕН, № 6 (1934), 843—886.

7) В. А. Чечик, *О применимости метода С. А. Чаплыгина к приближенному интегрированю нелинеиных дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными*, ДАН СССР т 91 № 4, 1953.

8) Г. А. Артемов, *Применение метода С. А. Чаплыгина к решению задачи Коши для нелинеиных уравнений в частных производных второго порядка гинерболического типа*, Украинский математический журнал III, IX, № 1, 1957.

9) Артемов Г. А., *Метод Чаплыгина и его видоизменение для приближённого решения некоторых типов дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных)*, Автореф. дисс. канд. физ.-матем. Воронежский гос. ун-т Воронеж 1954.

10) Бабкин Б. Н., *Решение одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом Чаплыгиня*, Прикл. матем. и механика, 1954, 18, 239—242.

11) Б. Н. Бабкин, *Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка методом последовательных приближений на основе теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах*, ДАН СССР 1948.

12) Гаяс Максудов, *Распространение способа акад. Чаплыгина по приближенному интегрированию дифференциальных уравнении I-го порядка на уравнения выше I-го порядка*, Казань.

13) С. С. Мусин, *Приближенное решение одного класса нелинеиных интегральных уравнений*, Математический зборник 1949.

14) Н. Н. Лузин, *Интегральное исчисление*, Москва 1949.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie

ANWENDUNGEN FUNKTIONALANALYTISCHER METHODEN ZUR NUMERISCHEN BERECHNUNG DER LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

von L. COLLATZ, HAMBURG

Aus dem weiten Gebiet der numerischen Behandlung von Differentialgleichungen soll hier ein kurzer Bericht über einige Methoden funktionalanalytischer Art gegeben werden, mit denen man exakte Fehlerabschätzungen für die gesuchte Lösung erhält. Angesichts des dauernd steigenden Einsatzes von Großrechenanlagen haben derartige Abschätzungen erhöhtes Interesse, da die Maschinen, die irgendwelche Näherungsverfahren benutzen, die Näherungslösung mit einer bestimmten Anzahl von Dezimalstellen liefern und man gerne wissen möchte, wieviele dieser Stellen man garantieren kann.

Der folgende Überblick enthält keine Beweise und Einzelheiten; aber einige Zahlenbeispiele mögen jeweils die Wirksamkeit der Methoden illustrieren. Es sind hier ganz einfache Beispiele gewählt worden, damit das Typische an den Methoden deutlicher hervortritt; die Methoden sind aber auch auf viel kompliziertere Aufgaben anwendbar; um nur ein Beispiel zu nennen: es wurden Abschätzungen durchgeführt für die kompressible Unterschallströmung um eine Kugel.

I. Der allgemeine Fixpunktsatz bei Transformationen in Banachräumen

1. Der Fixpunktsatz

Der Fixpunktsatz wurde schrittweise mehr und mehr verallgemeinert; er wurde zunächst für lineare Transformationen aufgestellt. Bei nichtlinearen Transformationen wurde es nötig, genauer auf die jeweiligen Bereiche zu achten. Es sei hier eine Formulierung genannt, die nicht nur in Banachschen Räumen, sondern allgemeiner in linearen vollständigen Räumen R gilt, in denen ein Abstand $||f-g||$ zweier Elemente f, g als nichtnegative Zahl mit den üblichen Abstandspostulaten (vergl. z. B. Aumann [1], S. 83, J. Weissinger [16]) erklärt ist.

Als Elemente von R werden in der praktischen Analysis gewöhnlich Zahlen, Vektoren, Matrizen, Funktionen, Systeme von Funktionen u. dergl. verwendet; bei der Anwendung auf Differentialgleichungen treten meist folgende Banachräume R auf: R enthält alle Funktionen $f(x)$ oder $f(x_1,...,x_m)$, die in einem Intervall $[a, b]$ oder allgemeiner in einem abgeschlossenen Bereich $\bar{B}$ des $x_1,...,x_m$ — Raumes definiert und stetig (oder mit stetigen partiellen Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung versehen) sind. Als Norm wird bei theoretischen Untersuchungen häufig einfach $\|f\| = \sup\limits_B |f|$ benutzt; für die Güte der erzielten Abschätzungen ist es aber oft von entscheidender Wichtigkeit, eine Norm

$$(1.1) \qquad \|f\| = \sup_B \varphi(x_j) |f(x_j)|$$

mit einer günstig gewählten in B positiven (in besonderen Fällen nichtnegativen) stetigen Funktion $\varphi(x_j)$ zu verwenden. In manchen Fällen, z. B. wenn auch die Werte der Ableitungen der gesuchten Funktion interessi eren empfiehlt es sich, Normen mit Ableitungen su verwenden, z. B. bei dem Banachraum der in einem abgeschlossenen Intervall $<a, b>$ stetigen und k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f(x)$:

$$(1.2) \qquad \|f(x)\| = \sup_{<a,b>} \sum_{\nu=0}^{k} \varphi_\nu(x) |f^{(\nu)}(x)|$$

,mit fest gewählten in $<a, b>$ nichtnegativen stetigen Funktionen $\varphi_\nu(x)$ mit $\varphi_n(x) > 0$ in $<a, b>$ (entsprechend bei Funktionen mehrerer Veränderlicher).

Nun sei T ein Operator, der in einem Teilraum F von R definiert ist und dort einer Lipschitzbedingung genügt:

$$(1.3) \qquad \| Tf_1 - Tf_2 \| \leqq K \| f_1 - f_2 \| \quad \text{für alle } f_1, f_2 \in F.$$

F sei ein vollständiger Teilraum, der auch mit R zusamenfallen darf.

Fragt man dann nach Lösungen u der Gleichgung

$$(1.4) \qquad Tf = f,$$

also nach Fixpunkten der Transformation T, so kann man, ausgehend von einem Element $u_0 \in F$, ein Iterationsverfahren aufstellen:

$$(1.5) \qquad u_{n+1} = Tu_n \qquad (n = 0,1,2,...),$$

es gilt dann (vergl. [3], [16]) der

Fixpunktsatz: Außer den obigen allgemeinen Voraussetzungen über R, F und T sei $K < 1$ und es sei mindestens eine der beiden Voraussetzungen erfüllt:

a) man weiss, dass alle u_n in F liegen, oder
b) es liegen u_0 und alle Elemente h der Kugel S

$$||h - u_1|| \leqq \frac{K}{1-K} ||u_1 - u_0|| \tag{1.6}$$

in F.
Dann gilt: Die Gleichung (1.4) hat genau eine Lösung u in F, die Folge u_n konvergiert gegen u

$$\lim_{n \to \infty} ||u - u_n|| = 0 \tag{1.7}$$

und u gehört sogar der Kugel S an.

Man hat damit Existenz der Lösung, Eindeutigkeit im Teilraum F und eine Fehlerabschätzung für die Näherung u_1.

Es gilt dann übrigens allgemein

$$||u - u_n|| \leqq \frac{K^n}{1-K} ||u_1 - u_0|| \qquad \text{für } n = 0,1,2,\ldots \tag{1.8}$$

2. Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen (vergl. L. Collatz [5] S. 32 — 40)

Vorgelegt sei die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} Lu = f(x_1,\ldots,x_m,u) & \text{in } B \\ U_\mu u = \gamma_\mu & \text{auf } \Gamma_\mu \quad (\mu = 1,\ldots,k). \end{cases} \tag{2.1}$$

Dabei sind L und U_μ lineare homogene Differentialoperatoren, f eine gegebene stetige, nach u stetig partiell differenzierbare Funktion. Γ_μ sind $(m-1)$ dimensionale Hyperflächen (gewöhnlich Randflächen des Bereiches B), auf denen die Randbedingungen vorgegeben sind. γ_μ sind gegebene Ortsfunktionen auf Γ_μ. Das Iterationsverfahren (1.5) besteht dann in der Bestimmung von u_{n+1} aus u_n nach

$$Lu_{n+1} = f(x_j, u_n) \text{ in } B, \quad U_\mu u_{n+1} = \gamma_\mu \quad \text{auf } \Gamma_\mu. \tag{2.2}$$

Die Randwertaufgabe

$$Lu = r(x_j) \text{ in } B, \quad U_\mu u = 0 \text{ auf } \Gamma_\mu \tag{2.3}$$

besitze bei stetigem r die eindeutig bestimmte Lösung

$$u(x_j) = \int_B G(x_j, \xi_j)\, r(\xi_j)\, d\xi_j \tag{2.4}$$

mit einer Greenschen Funktion $G(x_j, \xi_j)$.

Es sei H ein Bereich des $x_1,\ldots,x_m$, u—Raumes, der eine Lösung u von (2.1) und die u_i $(j = 0,1,..)$ enthält; in H gelte

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \leqq N(x_j). \tag{2.5}$$

Dann ist bei der Norm (1.1) als Lipschitzkonstante

(2.6) $$K = \sup_B \left[\varphi(x) \cdot \int_B | G(x_j, \xi_j) | \, N(\xi_j) \frac{1}{\varphi(\xi_j)} d\xi_i \right]$$

verwendbar.

Ist überdies die Greensche Funktion $G(x_j, \xi_j) \geqq 0$ und hat die Eigenwertaufgabe

(2.7) $$Lz = \lambda z \text{ in } B, \quad U_\mu z = 0 \text{ auf } \Gamma_\mu$$

eine in B nichtnegative Eigenfunktion $z(x_j)$ mit dem Eigenwert λ_z, so kann man $\varphi(x_j) = [z(x_j)]^{-1}$ wählen und erhält mit der dann nach (1.1) festgelegten Norm den einfachen (allerdings auch meist etwas gröberen, aber ohne Benutzung der Greenschen Funktion berechenbaren) Wert der Lipschitzkonstanten

(2.8) $$K = \frac{1}{\lambda_z} \cdot \underset{B}{Max}\, N(x_j).$$

Beispiel I: Bei der Randwertaufgabe (die aus einem mechanischen Problem entspringt) (hier ist y statt u geschrieben):

(2.9) $$-y'' = 1 + (1 + x^2)\, y, \qquad y(\pm 1) = 0$$

lassen sich leicht nach der Iterationsvorschrift

(2.10) $$-y''_{n+1} = 1 + (1 + x^2)\, y_n, \qquad y_{n+1}(\pm 1) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ausgehend von einer die Randbedingungen erfüllenden Funktion $y_0(x) = \alpha(1 - x^2)$ einige weitere Funktionen der Folge $y_n(x)$ ermitteln. Wählt man α so, dass y_0 und y_1 bei $x = 0$ übereinstimmen, so wird $\alpha = \frac{15}{16}$, und

(2.11) $$y_1 - y_0 = \frac{1}{32}(-x^2 + x^6), \qquad y_2 - y_1 = \frac{1}{32}\left(\frac{221}{2520} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{30} + \frac{x^8}{56} + \frac{x^{10}}{90}\right).$$

Als Banachraum werde die Menge der in $<-1,1>$ stetigen Funktionen mit der Norm (1.1) gewählt. Mit Hilfe der hier leicht angebbaren Greenschen Funktion kann man die Lipschitzkonstante K ermitteln (Durchführung der Rechnungen in [5]S. 184) und man erhält:

bei der Gewichtsfunktion $\varphi(x) \equiv 1$ die Abschätzung

$$| y_2(x) - y(x) | \leqq 0{,}0384\,;$$

und bei der Gewichtsfunktion $\varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)^{-1}$ die Abschätzung

$$| y_2(x) - y(x) | \leqq 0{,}0325\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right).$$

Der tatsächliche Fehler bei $x = 0$ beträgt $| y_2(0) - y(0) | = 0{,}0271$. In Beispiel II wird gezeigt, wie man die Abschätzung noch verbessern kann.

II. Verwendung allgemeiner Abstandsbegriffe

3. Abstandsbegriff

J. Schröder [11] bis [14] hat den Fixpunktsatz verallgemeinert, indem er als Abstand $||f-g||$ zweier Elemente $f, g \in R$ nicht mehr reelle Zahlen, sondern allgemeinere Größen $\rho(f, g)$ verwendet, die selbst Elemente eines halbgeordneten Raumes N sind. R heißt dann ein pseudometrischer Raum; solche Räume wurden von Kurepa [9] eingeführt. Der Abstand ρ soll die üblichen Abstandspostulate erfüllen

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \rho(f, g) = \theta \text{ genau für } f = g \\ \rho(f, g) \leqq \rho(f, h) + \rho(g, h) \end{cases}$$

für irgend drei Elemente f, g, h aus R.

In N kann man für Elemente ρ, σ mit reellen c_1, c_2 das Element $c_1 \rho + c_2 \sigma$ bilden, es gelten hierfür die Regeln der Vektoralgebra; für gewisse Elemente ρ hat $\rho \geqq \theta$ (θ als Nullelement von N) einen Sinn, und es gelten die üblichen Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen:

$$c \geqq 0, \quad \rho \geqq \theta \text{ ergibt } c\rho \geqq \theta; \text{ ferner } \rho \geqq 0, \ \sigma \geqq 0 \text{ ergibt}$$

$\rho + \sigma \geqq \theta$; $\theta \leqq \rho \leqq \theta$ gilt genau für $\rho = \theta$ und $\rho \geqq \sigma$ bedeutet $\rho - \sigma \geqq \theta$.

Weiter benötigt man einen Grenzbegriff; für $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_n = \rho$ wird verlangt:

1. Aus $\rho_n = \text{const} = \rho$ folgt $\rho_n \to \rho$.
2. Bei $\rho_n \to \rho$ strebt auch jede Teilfolge der ρ_n gegen ρ.
3. Aus $\rho_n \to \rho$, $\sigma_n \to \sigma$, $c_n \to c$ folgen $\rho_n + \sigma_n \to \rho + \sigma$, $c_n \rho_n \to c\rho$.
4. Aus $\theta \leqq \rho_n \leqq \sigma_n$ und $\sigma_n \to \theta$ folgt $\rho_n \to \theta$.
5. Aus $\rho_n \to \rho$ und $\rho_n \geqq \theta$ folgt $\rho \geqq \theta$.

Diese Forderungen sind so schwach, daß hier viele praktisch wichtige Räume, z. B. mit stetigen Funktionen erfaßt werden.

Wieder liege eine zu lösende Gleichung (1.4) vor, die durch das Iterationsverfahren (1.5) behandelt werde. Für den Operator T gebe es dann einen in N erklärten Operator P mit

$$(3.2) \qquad \rho(Tf_1, Tf_2) \leqq P\rho(f_1, f_2) \text{ für alle } f_1, f_2 \in F.$$

Der Operator P sei linear, stetig (aus $\rho_n \to \rho$ folge $P\rho_n \to P\rho$), positiv (aus $\rho \geqq \theta$ folge $P\rho \geqq \theta$) und für jedes Element ρ aus N sei die Folge

$$(3.3) \qquad \sigma_n = \sum_{j=1}^{n} P^{j-1}\rho$$

konvergent.

Es möge F das Ausgangselement u_0 der Iteration und alle Elemente h der Kugel S

$$\| h - u_1 \| \leqq \sigma$$

enthalten wobei σ die Ungleichung

$$(E - P)\, \sigma \geqq P \, \| u_1 - u_0 \| \tag{3.4}$$

erfüllt (E = indentischer Operator). Dann gelten die gleichen Aussagen wie beim Fixpunktsatz; Gleichung (1.4) hat genau eine Lösung in F, u_n konvergiert gegen u und u gehört sogar der Kugel S an.

4. Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. (vergl. J. Schröder [12])

Die Methode werde auf den speziellen Fall der Randwertaufgabe (2.1) angewendet und es werde der Einfachheit halber angenommen, daß die zugehörige Randwertaufgabe (2.3) eine in B nichtnegative Greensche Funktion $G(x_j, \xi_j)$ besitze. Dann kann man als halbgeordneten Raum N die Menge der in B stetigen Funktionen und als P den Operator

$$P\rho(x_j) = \int^{B} G(x_j, \xi_j)\, N(\xi_j)\, \rho(\xi_j)\, d\xi_j \tag{3.5}$$

verwenden; man gelangt dann zu folgender Fassung, bei der man die Greensche Funktion nicht explizit zu kennen braucht: Man habe mit Hilfe des Iterationsverfahrens (2.2) zwei Funktionen u_0, u_1 ermittelt und es sei

$$| u_1 - u_0 | \leqq \sigma_0(x_j) \text{ in } B. \tag{3.6}$$

(3.4) ist dann gleichbedeutend mit

$$L\sigma - N(x_j)\,\sigma \geqq N(x_j)\,\sigma_0(x_j); \quad U_\mu\sigma = 0; \tag{3.7}$$

man hat also nur noch eine nichtnegative Funktion $\sigma(x_j)$ zu suchen, welche die homogenen Randbedingungen und in B die Ungleichuug (3.7) erfüllt; dann gilt

$$| u_1 - u | \leqq \sigma(x_j) \text{ in } B. \tag{3.8}$$

Diese Abschätzung ist in gewissem Sinne nicht mehr verbesserbar. Wenn nämlich speziell in (2.1) $f(x_j, u) = N(x_j) \cdot u$ mit $N \geqq 0$ steht, wenn $u_1 - u_0 \geqq 0$ in B gilt und man also $\sigma_0 = u_1 - u_0$ setzen kann, so liefert diejenige Funktion $\sigma(x_j)$, für die in (3.7) das Gleichheitszeichen steht, den genauen Fehler $u - u_1 = \sigma$. Es wird also für numerische Zwecke darauf ankommen, die Ungleichung (3.7) „möglichst gut zu erfüllen" (d. h., daß $L\sigma - N\sigma - N\sigma_0$ der Null möglichst nahe kommt), was man häufig mit Hilfe der Relaxationsmethode durchführen kann.

Beispiel II. Bei der Randwertaufgabe (2.9) werde wie in (2.10), (2.11) iteriert, jetzt aber schärfer abgeschätzt. Hier ist $N(x) = 1 + x^2$; man hat also nach (3.7) eine Funktion $\sigma(x)$ zu ermitteln, für welche $\sigma(\pm 1) = 0$ und

$$-\sigma'' - (1 + x^2)\,\sigma \geqq (1 + x^2)\,|\,y_2 - y_1\,| \tag{3.9}$$

gilt. Man setzt σ am einfachsten als Polynom mit einigen freien Parametern c_ν an und bestimmt die c_ν nach der erwähnten Relaxationsmethode. Hier erhält man bereits mit $\sigma = \frac{0{,}0243}{8}(1 - x^2)$ brauchbare Ergebnisse. Nach (3.8) gilt somit

$$|\,y_2(x) - y(x)\,| \leqq 0{,}0304\,(1 - x^2). \tag{3.10}$$

Schon mit diesem Polynom 2. Grades hat man also eine bessere Abschätzung erhalten als in Beispiel I. Nimmt man für $\sigma(x)$ Polynome höheren Grades, so kann man mit der Abschätzung dem wirklichen Fehleverlauf beliebig nahe kommen, da hier $y_2 - y_1$ in $\langle -1, 1\rangle$ das Vorzeichen nicht wechselt.

Beispiel III. Randwertaufgabe bei der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung (Wärmeleitungsaufgabe):

$$-\Delta u = 1 - u - u^2 \quad \text{für } r < 1 \ (\text{mit } r^2 = x^2 + y^2) \qquad (\text{im Bereich } B) \tag{3.11}$$

mit der Randbedingung

$$u = 1 \quad \text{für } r = 1 \qquad (\text{auf dem Rande } \Gamma). \tag{3.12}$$

Zunächst hat man 2 Funktionen u_0, u_1 zu ermitteln, die die Randbedingung und

$$-\Delta u_1 = 1 - u_0 - u_0^2 \tag{3.13}$$

erfüllen.

Es werde $u_1 = 1 + a(1 - r^2) + b(1 - r^4)$ angesetzt, daraus u_0 berechnet nach (3.13) und die Parameter a, b so bestimmt, daß auch u_0 die Randbedingung erfüllt und u_0 nahe bei u_1 liegt. So wurde gewählt

$$u_1 = 1 - 0{,}13\,(1 - r^2) - 0{,}03\,(1 - r^4)$$

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{7{,}08 + 1{,}92\,r^2}\right).$$

Im Teilbereich der stetigen Funktionen $u(x, y)$ mit $0 \leqq u \leqq 1$ ist nach (2.5) $N = 3$ wählbar; also benötigt man eine auf dem Rande Γ verschwindende Funktion σ mit

$$-\Delta\sigma - 3\sigma \geqq 3\sigma_0 \quad \text{mit} \quad \sigma_0 = |\,u_1 - u_0\,|.$$

Hier wird angesetzt

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{3} c_\nu (1 - r^{2\nu}),$$

und Relaxation gibt rasch brauchbare Werte für die c_ν. Man erhält

$$|u - u_1| \leqq \sigma = 0{,}0024\,(8 - 9\,r^2 + r^6)\,.$$

Es liegt hier kein so günstiger Fall wie in Beispiel II vor, da $u_1 - u_0$ in B das Vorzeichen wechselt.

III. Newtonsches Verfahren mit Varianten

5. Verwendung des Begriffs der Ableitung eines Operators

Die zu lösende Gleichung laute jetzt

(5.1) $$Tu = 0$$

und T sei ein im Frechetschen Sinne im Teilraum F differenzierbarer Operator (sonst aber die Voraussetzungen über T, F, R wie in Nr. 1). Die Gleichung möge iterativ behandelt werden, beginnend mit einem Element u_0 in F. Es liegt nahe, die Differenz $\delta_n = u_{n+1} - u_n$ mit Tu_n im Zusammenhang zu bringen; denn beide sollen zugleich verschwinden. Wir setzen daher

(5.2) $$\delta_n = u_{n+1} - u_n = A_n\,Tu_n \qquad \text{oder}$$

(5.3) $$u_{n+1} = V_n\,u_n \quad \text{mit} \quad V_n = E + A_n\,T\,,$$

wobei A_n (oder im einfacheren Falle: A_n = konstante Transformation A) Transformationen sind, die das Nullelement und nur dieses wieder in das Nullelement überführen. Gewöhnlich wählt man als A_n lineare Transformationen.

Hier ordnet sich das gewöhnliche Newtonsche Verfahren unter, vergl. [7] [8] [10]:

(5.4) $$\delta_n = u_{n+1} - u_n = T_n'^{-1}\,Tu_n\,,$$

wobei $T_n' = T'(u_n)$ die Ableitung des Operators T an der Stelle u_n und $T_n'^{-1}$ die Inverse dazu bedeutet. Es gibt eine Variante, das vereinfachte Newtonsche Verfahren:

(5.5) $$\delta_n = u_{n+1} - u_n = T_0'^{-1}\,Tu_n\,,$$

welches rechnerisch bequemer durchführbar ist, aber nicht so rasch konvergiert als (5.4). Dieses Verfahren ordnet sich dem Iterationsverfahren von I unter und läßt daher eine unmittelbare Fehlerabschätzung zu, die zugleich für das gewöhnliche Newtonsche Verfahren anwendbar ist, da man stets den letzten gerechneten Schritt des gewöhnlichen Newtonschen Verfahrens als ersten Schritt des vereinfachten Newtonschen Verfahrens auffassen kann; zugleich erhält man so für das gewöhnliche Newtonsche Verfahren eine Fehlerabschätzung, bei der man nicht die zweite Ableitung benötigt, vergl. [4].

Da $T_0'^{-1}$ als Inverse einer Ableitung ebenso wie T_0' linear ist, kann man die Ableitung von $V_n = V$ unmittelbar bilden und man erhält für irgendzwei Elemente f, f^* aus F:

$$\|Vf - Vf^*\| \leqq \sup \|V'\| \, \|f - f^*\|, \tag{5.6}$$

man bekommt als Lipschitzkonstante K für das vereinfachte Newtonsche Verfahren

$$K = \sup_F \|V'\| \leqq \|T_0'^{-1}\| \sup_F \|T_0' - T'\| \tag{5.7}$$

und (1.8) kann unmittelbar angewendet werden.

6. Gewöhnliches und verbessertes Newtonsches Verfahren

Neben dem vereinfachten Newtonschen Verfahren gibt es verbesserte Newtonsche Verfahren, bei denen man zweite oder höhere Ableitungen heranzieht. Von vielen verschiedenen Arten sei nur die folgende genannt:

Man berechnet δ_n aus

$$\theta = T_n + T_n' \delta_n + \frac{1}{2} T_0'' \varphi_n \varphi_n \text{ mit } T_n + T_n' \varphi_n = \theta. \tag{6.1}$$

Dabei bedeutet $T_n = Tu_n$ und T_0'' die zweite Ableitung an der Stelle u_0.

Für das gewöhnliche Newtonsche Verfahren gibt es Konvergenzbeweise und Fehlerabschätzungen von Kantorowitsch, Ostrowski u. a. Man kann nun eine allgemeine Theorie aufstellen, die das gewöhnliche Newtonsche Verfahren und eine Reihe ihrer Verbesserungen als Spezialfälle enthält.

Das Verfahren bestehe in der Iterationsvorschrift

$$\delta_n = \Phi(T_n'^{-1}, T_n, T_n', T_n'', T_n''', \ldots) \tag{6.2}$$

wo Φ eine gegebene Funktion der Argumente ist; das Verfahren lasse Abschätzungen der Form zu

$$\begin{aligned} \|\delta_n\| &\leqq h(b_n, \|T_n\|) \, \|T_n\| \\ \|T_{n+1}\| &\leqq g(b_n, \|T_n\|) \, \|T_n\|^k, \end{aligned} \tag{6.3}$$

wobei k eine feste positive Zahl (die „Ordnung" des Verfahrens), b_n eine obere Schranke für $\|T_n'^{-1}\|$ bedeutet und g und h bekannte in ihren (nichtnegativen) Argumenten monotone Funktionen sind.

Sind gewisse Bedingungen über die Ausgangsnäherung erfüllt, so lassen sich Konvergenz und eine Fehlerabschätzung der Form

$$\|u - u_n\| \leqq \sigma \frac{\|T_0\|}{1 - \beta^k} \beta^{\frac{k^n - 1}{k - 1}} \tag{6.4}$$

beweisen.

IV. Monotonie-Eigenschaften

7. Aufgaben monotoner Art

Bei den Methoden von III kann die Bildung des inversen Operators zu T_n' Schwierigkeiten bereiten. Diese lassen sich oft umgehen, wenn der Operator von „monotoner Art" ist. Man erhält in solchen Fällen unter Annahme der Existenz einer Lösung oft sehr einfache und scharfe Schranken, wie an Beispielen linearer und nichtlinearer Randwertaufgaben, auch bei partiellen Differentialgeichungen, gezeigt werden kann. Ein Operator T heißt in einem Teilraum F eines halbgeordneten Raumes R von „monotoner Art", wenn für beliebige Elemente f_1, f_2 von F stets aus $Tf_1 \leqq Tf_2$ folgt $f_1 \leqq f_2$. Setzt man die Existenz u einer Lösung von

$$Tu = f \tag{7.1}$$

voraus, so hat man sofort die Möglichkeit der Eingabelung. Sind nämlich v_1 und v_2 zwei Näherungen mit

$$Tv_1 \leqq f \leqq Tv_2, \tag{7.2}$$

so folgt $$v_1 \leqq u \leqq v_2.$$

Man hat damit zugleich auch für das Relaxationsverfahren, bei dem man den „Defekt" $d = dv = Tv - f$ einer Näherung v durch Anbringen kleiner Korrekturen dem Nullelement zu nähern sucht, die Möglichkeit einer Fehlerabschätzung; denn hat man z. B. $d \geqq \theta$ erreicht, so weiß man $v \geqq u$ und entsprechend folgt $v \leqq u$ aus $d \leqq \theta$. Es wurden eine Reihe von Typen von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen 2. und 4. Ordnung (auch nichtlinearen) zusammengestellt, welche von monotoner Art sind. vgl. z. b. [2] [5] [6].

8. Monotone Operatoren

Es sei wieder (1.4) die zu lösende Gleichung in einem halbgordneten Raum R.

A. Der Operator T sei monoton nichtfallend, d. h. aus

$$u \leqq v \quad \text{folge} \quad Tu \leqq Tv. \tag{8.1}$$

Man hat zwei Iterationsfolgen

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad \hat{u}_{n+1} = T\hat{u}_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots\ldots), \tag{8.2}$$

wenn dann

$$u_0 \leqq u_1 \leqq \hat{u}_1 \leqq \hat{u}_0 \tag{8.3}$$

erfüllt ist, so gilt

$$u_0 \leqq u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots\ldots\ldots \leqq \hat{u}_2 \leqq \hat{u}_1 \leqq \hat{u}_0. \tag{8.4}$$

Nun werde vorausgesetzt:

V_1: Jeder monotonen beschränkten Folge v_x von Elementen aus R ist ein Grenzelement v aus R zugeordnet, $v_n \to v$, (eine Menge M von Elementen v heißt beschränkt, wenn es ein Element h gibt mit $v \leqq h$ für alle v aus M) und der Operator T ist stetig bezüglich dieses Grenzüberganges, d. h. aus $v_n \to v$ folge $Tv_n \to Tv$. Dann konvergieren die u_n gegen ein Grenzelement u^* und die $\hat{u}_n$ gegen ein Grenzelement $\hat{u}^*$, und es sind u^* und $\hat{u}^*$ Lösungen der Gleichung (1.4), es gilt

$$(8.5) \qquad u_n \leqq u^* \leqq \hat{u}^* \leqq \hat{u}_n \text{ für } (n=0, 1, 2, \ldots).$$

B. Der Operator T sei jetzt monoton nicht wachsend, d. h. aus

$$(8.6) \qquad u \leqq v \quad \text{folge} \quad Tu \geqq Tv.$$

Bei der Folge (1.5) sei jetzt

$$(8.7) \qquad u_0 \leqq u_2 \leqq u_1;$$

dann gilt

$$(8.8) \qquad u_0 \leqq u_2 \leqq u_4 \leqq \cdots \leqq u_5 \leqq u_3 \leqq u_1.$$

Es sei wieder obige Voraussetzung V_1 erfüllt und außerdem V_2: In der Menge M der Elemente u mit $u_0 \leqq u \leqq u_1$ möge das Gleichungssystem

$$(8.9) \qquad v = Tw, \qquad w = Tv$$

nur Lösungen mit $v = w$ besitzen.

Dann konvergieren die u_{2n} „von unten“ und die u_{2n+1} „von oben“ gegen eine Lösung u^* von (1.4):

$$(8.10) \qquad u_{2n} \leqq u_{2n+2} \leqq u^* \leqq u_{2n+3} \leqq u_{2n+1} \quad (u = 0, 1, 2, \ldots)$$

Man darf dann auch abändern (abrunden oder formelmäßig vereinfachen): Ist z. B. $u_0 \leqq v_0 \leqq u_2$ und setzt man $v_{n+1} = Tv_n$, so gilt

$$(8.11) \qquad v_0 \leqq u^* \leqq v_1.$$

9. Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichung

Es liege wieder die Randwertaufgabe (2.1) vor mit den dort getroffenen Voraussetzungen. Es existiere eine Greensche Funktion $G(x_j, \xi_j)$ derart, daß (2.1) einer (nichtlinearen) Integralgleichung $u = Tu$ gleichwertig ist. Ist ψ eine spezielle die Randbedingungen erfüllende Funktion, für die $L\,\psi$ existiert, so hat man

$$(9.1) \qquad u(x_j) = \psi(x_j) + \int_B G(x_j, \xi_j)\,[-L\,\psi(\xi_j) + f(\xi_j, u(\xi_j))]\, d\xi_j$$

Die Greensche Funktion sei nichtnegativ, dann ist T im Falle $\frac{\partial f}{\partial u} \geqq 0$ monoton nichtfallend und im Fall $\frac{\partial f}{\partial u} \leqq 0$ monoton nichtwachsend.

Die Voraussetzung V_1 ist, wenn die v_n selbst als Bildelemente von stetigen Funktionen w_n auftreten ($v_n = Tw_n$), wie es beim Iterationsverfahren der Fall ist, für die Greensche Funktion bei gewöhnlichen Differentialgleichungen normalerweise erfüllt und bei einfachen Fällen partieller Differentialgleichnungen (wie z. B. bei dem Laplaceschen Ausdruck $Lu = -\Delta u$ bei einem Kreisbereich) ebenfalls. (Näheres in [15]). Für die Voraussetzung V_2 wird die Differenz $\delta = u - w$ betrachtet. Für diese wird

(9.2) $$L\delta = f(x_j, w) - f(x_j, u) = \delta\Phi, \qquad U_\mu \delta = 0 \text{ auf } \Gamma_\mu;$$

dabei ist Φ der Wert von $\frac{\partial f}{\partial u}$ an einer Zwischenstelle zwischen u und w. Wenn in dem durch M gegebenen Streifen $u_0 \leqq u \leqq u_1$ gilt

(9.3) $$|\Phi| < |\lambda_1|,$$

wobei λ_1 der betragskleinste Eigenwert von $L\delta = \lambda\delta$ in B, $U_\mu \delta = 0$ auf Γ_μ ist, so ist Voraussetzung V_2 erfüllt.

Beispiel IV. Für die Randwertaufgabe

(9.4) $$-y'' = 1 + ay^2, \qquad y(\pm 1) = 0$$

sind unter Annahme von $0 \leqq u$ für $a > 0$ die Voraussetzungen von A (monoton nichtfallender Operator) und für $a < 0$ die Voraussetzungen von B (monoton nichtwachsender Operator) erfüllt.

Ausgehend von

(9.5) $u_0 = b(1 - x^2)$ erhält man u_1 leicht durch einen Iterationsschritt aus

$$-u_1'' = 1 + au_0^2, \quad u_1(\pm 1) = 0;$$

es wird

(9.6) $$u_1 - u_0 = \frac{1 - x^2}{30}[15 - 30b + ab^2\varphi(x)] \text{ mit } \varphi(x) = 11 - 4x^2 + x^4,$$

im Interval $\langle -1, 1\rangle$ gilt $8 \leqq \varphi(x) \leqq 11$.

A. Es sei $a = 1$. Wählt man zunächst $u_0 \equiv 0$, $\hat{u}_0 = 1 - x^2$, so ist (8.3) erfüllt, es gibt mindestens eine Lösung u^* von (9.4) mit $0 \leqq u^*(x) \leqq 1 - x^2$. Um bessere Schranken zu erhalten, wird b so gewählt, daß $u_1 - u_0$ in $\langle -1, 1\rangle$ nichtnegativ oder nichtpositiv ausfällt; man bekommt die günstigsten Werte b als Wurzeln von $15 - 30b + \gamma b^2 = 0$ mit $\gamma = 8$ bzw. 11.

Für $b = 0{,}5941$ wird $u_0 \leqq u_1$ und $u_1(0) = 0{,}6294 \leqq u^*(0)$, für $b = 0{,}6595$ volgt $u^* \leqq 0{,}6595\,(1-x^2)$.

B. Es sei nun $a = -1$. Für $u_0 \equiv 0$ ist (8.7) erfüllt:

$$u_1 = \frac{1}{2}(1-x^2), \qquad u_2 = \frac{1-x^2}{30}\left(15 - \frac{1}{4}\varphi(x)\right).$$

Es ist (9.3) mit $|\Phi| \leqq 2 \cdot \frac{1}{2} < |\lambda_1| = \frac{\pi^2}{4}$ erfüllt, also gibt es in der Menge M der Funktionen u mit $0 \leqq u \leqq \frac{1}{2}(1-x^2)$ genau eine Lösung u^* von (9.4) mit $a = -1$. Etwas engere Schranken erhält man mit Hilfe des Abänderungssatzes (8.11); mit $b = \frac{49}{120}$ folgt

$$0{,}40833 < \frac{49}{120} \leqq u^*(0) \leqq \frac{1}{2} - \frac{11}{30}\left(\frac{49}{120}\right)^2 < 0{,}43887.$$

Man hat so mit sehr geringem Rechenaufwand, allein mit der Iteration (9.5) (9.6), Existenz —, Eindeutigkeitsaussagen und Fehlerschranken für eine Lösungsfunktion $u^*(x)$ erhalten. Durch Verwendung von Polynomen höheren Grades lassen sich natürlich leicht wesentlich engere Schranken gewinnen.

Beispiel V. Für die Randwertaufgabe

$$\text{(9.7)} \qquad -\Delta u = -1 + a\,(u+u^2) \text{ für } r \leqq 1 \text{ (mit } r^2 = x^2+y^2) \text{ (in } B)$$
$$u = 1 \qquad \text{für } r = 1 \qquad \text{(auf } \Gamma)$$

sind bei der Annahme von $0 \leqq u$ für $a > 0$ die Voraussetzungen von *A* (monoton nichtfallender Operator) und für $a < 0$ die von *B* erfüllt. Die Iteration $-\Delta u_1 = -1 + a\,(u_0 + u_0^2)$, $u_1 = 1$ für $r = 1$ läßt sich, ausgehend von

$$\text{(9.8)} \qquad u_0 = 1 + b\,(1-r^2)$$

leicht ausführen.

A. Es sei $a = 1$, dann wird

$$144\,(u_1 - u_0) = (1-r^2)\,\psi \quad \text{mit} \quad \psi = 36 - 63\,b + 22\,b^2 - (27\,b + 14\,b^2)\,r^2 + 4\,b^2\,r^4.$$

Für $b = 0$ ist $u_1 \geqq u_0$; wählt man $\hat{u}_0 = 2 - r^2$ (das entspricht $b = 1$), so ist (8.3) erfüllt; es gibt also eine Lösung u^* von (9.7) mit $1 \leqq u^* \leqq 2 - r^2$.

Zur Aufstellung engerer Schranken wählt man b einmal so, daß $\psi \geqq 0$, und einmal so, daß $\psi \leqq 0$ ausfällt. Die günstigsten Werte von b ergeben sich wie in Beispiel IV durch Lösen quadratischer Gleichungen. Mit $b = \frac{1}{4}(15 - \sqrt{177})$ bzw. $24/(21 + \sqrt{89})$ erhält man $1{,}516 \leqq u(0{,}0) \leqq 1{,}789$.

B. Es sei $a=-1$; dann wird $144\,(u_1-u_0)=(1-r^2)\,.\,\tilde{\psi}$ mit

$$\tilde{\psi}=-\,(108+225\,b+22\,b^2)+(27\,b+14\,b^2)\,r^2-4\,b^2\,r^4.$$

Für $b=0$ wird $u_1=1-\dfrac{3}{4}(1-r^2)$ und es folgt $(u_2-u_1)\,144=(1-v^2)\,\tilde{\psi}$, wobei man $\tilde{\psi}$ mit $b=-\dfrac{3}{4}$ zu bilden hat. Man stellt fest, daß (8.7) erfüllt ist. Wieder kann man die Schranken mit Hilfe des Abänderungssatzes verbessern. Mit den Werten $-72/(75+\sqrt{4569})$ und $-12/(11+\sqrt{105}$ für b erhält man die Schranken

$$0{,}4352 \leqq u\,(0{,}0) \leqq 0{,}4951.$$

Wie in Beispiel IV hat der sehr einfache Ansatz (9.8) Existenz, Eindeutigkeitsaussagen und Fehlerschranken geliefert; die Schranken sind noch grob, lassen sich aber natürlich durch Rechnen mit Polynomen höheren Grades verbessern.

EINIGE LITERATURHINWEISE

[1] G. Aumann, *Reelle Funktionen*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954, 416 S.

[2] L. Collatz, *Aufgaben monotoner Art*, Archiv d. Math. 3 (1952) 366—376.

[3] „ , *Funktionalanalytische Methoden in der praktischen Analysis*, ZAMP 4 (1953) 327—357.

[4] „ , *Vereinfachtes Newtonsches Verfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben*, Arch. d. Math. 5 (1954) 233—240.

[5] „ , *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Berlin—Göttingen—Heidelberg. 2, Aufl. 1955, 526 S.

[6] „ , *Fehlerabschätzungen bei parabolischen Differentialgleichungen*, Anais Acad. Brasileira de Ciencies 28 (1956) 1—9.

[7] I. Fenyö, *Über die Lösung der im Banachschen Raum definierten nichtlinearen Gleichungen*, Acta math. Acad. Sci. Hungar 5, (1954) 85—93.

[8] L. Kantorowitch, *The method of Successive Approximations for Functional Equations*, Acta math. 71 (1939) 63—97.

[9] G. Kurepa, *Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudodistanciés*, C. R. 198 (1934) 1563—1565.

[10] A. Ostrowski, *Über die Konvergenz und die Abrundungsfestigkeit des Newtonschen Verfahrens*, Mat. Sbornik 2 (1937) 1073—1094.

[11] J. Schröder, *Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung*, Arch. Math. 7 (1956) 471—484.

[12] „ , *Neue Fehlerabschätzungen für verschiedene Iter* [illegible] Angew. Math. Mech. 36 (1956) 168—181 .

[13] „ , *Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff*, Math. Z. 66, (1956) 111—116.

[14] „ , *Über das Newtonsche Verfahren*, Arch. Rational Mechanics 1, (1957) 154—180.

[15] „ , *Eine Arbeit über monotone Operatoren*, gemeinsam mit L. Collatz, soll demnächst erscheinen.

[16] J. Weissinger, *Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens*, Math. Nachr. 8 (1952) 193—212.

*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 3—4 (1957) Beograd
Yougoslavie*

APPLICATION DES SPECTRES MATHÉMATIQUES À LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

par CONSTANTIN ORLOFF, BEOGRAD

Le but de ce travail est de donner une méthode purement arithmétique, applicable à la résolution des équations différentielles et donnant leurs intégrales sous forme de série de Taylor. L'avantage d'une telle méthode est le suivant: parce qu'on calcule exclusivement avec les nombres, on y peut se servir des machines à calculer, celles de bureau, ainsi que des machines électroniques. Cependant l'état actuel de la théorie des spectres ne donne pas de telle possibilité. Pour cette raison nous devons antérieurement, compléter cette théorie.

Pour le faire nous devons d'abord exposer le procédé numérique de Petrovitch [1], auquel il a donné le nom de la méthode spectrale, en traits courts et sous une forme un peu simplifiée. Nous l'exposerons, notamment, pour le cas des spectres cannelés, sans tranches parasitaires et avec le rythme spectral uniforme, cette simplification n'apportant aucun changement essentiel dans ce procédé lui-même. Le procédé en question à pour but la recherche d'un nombre limité ou illimité d'inconnues a_i $(i=0,1,2,3\ldots)$, a condition de savoir d'avance que ces inconnues sont des nombres entiers positifs, admettant une borne supérieure 10^h, où h est un entier positif. Cette condition doit être comprise de telle manière, que dans les problèmes à résoudre, il est toujours possible de faire, sur les a_i les conclusions citées, *avant* d'aborder le procédé spectral. Pour atteindre ce but on part des données b_k, qui sont aussi en nombre limité ou illimité, elles peuvent être des nombres ou des fonctions de forme quelconque. Le procédé spectral consiste à appliquer une suite d'opérations (au sens le plus large) à ces b_k, et a l'entier h, appelé rythme spectral uniforme. Les opérations en question dérivent du problème à résoudre et servent à obtenir *un nombre S*, appelé spectre résultant du problème. Ce nombre mis sous la forme d'un nombre décimal et partagé, à partir de virgule décimale, en tranches de h chiffres chacune, donne les valeurs de tous les a_i, de telle façon que chaque a_i est égal au nombre inscrit dans la tranche correspondante, traité comme nombre entier.

Ainsi le spectre résultant S dépend des données b_k et de h et on peut écrire

$$S = f(b_k, h) = F(h) \tag{1}$$

où par le symbole f est désigné l'ensemble des opérations à faire. Les b_k étant donnés, le spectre S ne dépend définitivement que du rythme h.

Un théorème très important de la théorie des spectres mathématiques est le suivant:

Théorème. *Si h est un rythme uniforme compatible avec le problème et les données b_k, alors chaque entier h_1, plus grand que h est aussi compatible avec le problème et les données en question et peut aussi servir de rythme uniforme.*

Ainsi pour *les mêmes données b_k* au moyen *des mêmes opérations f*, mais avec des rythmes différents, h et h_1, on peut former deux spectres résultants S et S_1 du même problème

$$S = f(b_k, h) = F(h), \qquad S_1 = f(b_k, h_1) = F(h_1), \tag{2}$$

Les nombres S et S_1 seront, naturellement, différents, mais traités comme spectres auront des tranches correspondantes avec les mêmes valeurs effectives. La différence n'est donc qu'en largeur de tranches, S ayant les tranches de largeur h et S_1 de largeur h_1. Ainsi la seule différence entre S_1 et S est que chaque tranche de S_1 commence par $h_1 - h$ zéros, qui sont absents dans les tranches de S.

Il en résulte donc, que la valeur h dans la formule (1) peut être traitée comme *une variable — nombre entier* avec une borne inférieure, cette borne étant définie par les données b_k, et le problème même. Ce fait était déjà connu mais paraissait sans beaucoup d'intérêt. On en tirait deux conclusions suivantes. Premièrement, on ne doit par toujours prendre le rythme, le plus petit possible. Secondement, on peut pour contrôler le résultat obtenu, former encore un spectre, avec un rythme plus grand. Hors de cela il paraissait inutile de former deux spectres résultants du même problème avec les mêmes données, car le premier spectre donne la solution complète du problème.

Avant de passer aux avantages qu'on peut tirer de ce fait fondamental, faisons un court résumé des conditions qui doivent être remplies, pour que le procédé de Petrovitch soit applicable: 1) Il faut savoir d'avance que toutes les inconnues a_i sont des entiers positifs, 2) pouvoir, au moyen des b_k et du problème même, déterminer l'entier auxiliaire h compatible avec les données et le problème, 3) connaître les opérations f à faire, pour obtenir le spectre S.

Ces conditions, difficiles à satisfaire, ont été modérées par les recherches postérieures. La première condition a été changée [2] de cette façon qu'il faut seulement connaître d'avance que les a_i sont des nombres entiers de n'importe quel signe. Puis il a été démontré [3] que la condition, que les a_i soient des nombres entiers n'est pas essentielle. Il s'agit seulement de savoir d'avance *la classe* à laquelle appartiennent tous les a_i, pourvu que cette classe contienne un nombre limité de nombres. Traitée plus généralement, pour les rythmes non-uniformes, cette condition n'exige pas que la classe en question ait un nombre limité de nombres, celui-ci peut être illimité, mais alors l'ensemble des nombres de cette classe ne doit pas avoir de points d'accumulation.

La troisième condition n'apporte pas beaucoup de difficultés, mais la seconde, la recherche antérieure du rythme compatible h, en apporte beaucoup. On les surmonte par plusieurs majorations successives plus ou moins heureuses, mais le rythme obtenu de telle façon, surtout dans les problèmes assez généraux, est très grand, beaucoup plus grand que ne l'exige le problème en question. Malheureusement on s'apperçoit de ce fait postérieurement, après avoir déjà effectué des calculs compliqués. D'autre part il n'y à aucun moyen satisfaisant de préciser le rythme h dans les problèmes généraux d'Analyse que nous voulons maintenant aborder.

Ces difficultés avec le rythme h, n'étaient pas de trop grand inconvénient dans la première période de l'application de la Méthode spectrale (1917—1953), quand elle était traitée comme une méthode théorique, avec le but de démontrer seulement la possibilité de transformer certains problèmes et procédés algébriques et analytiques en procédés purement arithmétiques, sans prétention d'être utilisée en pratique.

Mais avec la fondation d'une nouvelle branche de la Théorie des spectres mathématiques — Mathématique spectrale pratique [4], la grandeur non-nécessaire de h, est dévenue un grand inconvénient pour le développement de cette nouvelle branche.

Nous proposons donc, dans ce travail, d'introduire un nouveau procédé. Au lieu de former d'après la formule (1) un seul nombre — spectre S, avec un h préalablement calculé, nous proposons de calculer plusieurs nombres de la même forme

$$S_j = f(b_k, h_j) = F(h_j), \qquad (j = 1, 2 \ldots) \tag{3}$$

où f est le même ensemble d'opérations que dans la formule (1) et h_1, $h_2, \ldots$ sont des entiers positifs croissants *arbitrairement choisis*. Puis de comparer les nombres $S_1, S, \ldots$ entre eux et d'obtenir ainsi un certain nombre d'inconnues a_i d'après *les théorèmes de comparaison*, antérieurement établis. En prolongeant la formation des nombres (3) on pourrait, en principe, obtenir toutes les inconnues a_i. Il est évident que ce procédé peut donner des résultats complets (calcul de tous les a_i) toutes les fois qu'il s'agit d'un nombre limité d'inconnus, et cela est toujours le cas en Analyse numérique, ainsi que dans le cas où le nombre des inconnues est illimité, mais ils ont une borne supérieure. En ces cas pour un certain h_k le nombre (3) serait le spectre résultant du problème.

Avant de passer aux avantages de ce nouveau procédé, qui ne sont guère évidents, comparons un nombre de la forme (3) avec un spectre au sens classique. Un spectre donne tous les a_i, c'est-à-dire tous les chiffres de chaque a_i. Dans un spectre tous les chiffres de tous les a_i sont placés *distinctement*, et dans un nombre (3) les chiffres de plusieurs a_i sont mêlés d'une certaine façon.

Je propose donc, n'ayant pas trouvé de terme plus heureux, d'appeler un tel nombre — accord numérique à cause de ce mélange de chiffres, analogue au mélange des notes de musique dans un accord.[1] Un accord peut aussi être partagé en parties de h chiffres chacune. Nous appelerons une telle partie *note de l'accord*, et nous parlerons de la valeur effective d'une note de l'accord, analogiquement à la valeur effective d'une tranche de spectre. Si cette partie contient seulement un des a_i nous appellerons cette partie *note pure* de l'accord, dans le cas contraire nous parlerons d'une *note impure* de l'accord. Aussi on nommera comme *partie pure de l'accord* la partie formée de notes pures. Le nom de rythme, pour l'entier h_j, peut rester, car il est compatible avec cette terminologie suggérée par la musique.

L'introduction des accords numériques paraît à première vue être désavantageuse, car au lieu de former *un nombre*, nous devons former *deux nombres au moins*. Premièrement, dans les cas où l'on n'a pas trouvé la formule pour le rythme compatible h, la méthode des accords numériques est la seule méthode à suivre, car sans la connaissance du rythme compatible h la méthode spectrale est inapplicable. Secondement, si le rythme trouvé h est par exemple plusieurs fois plus grand, que ne le serait h_1 et h_2 des accords numériques, alors deux accords S_1 et S_2 auront ensemble moins de chiffres que le spectre S, et il sera donc plus facile de les calculer. Notons encore, que les machines électroniques à calculer peuvent calculer les accords les uns après les autres, les comparer automatiquement entre eux et terminer le calcul après avoir obtenu les accords avec une partie pure suffisamment grande pour trouver tous les a_i cherchés. Notons, que dans de certains problèmes, il ne s'agit pas de trouver un certain nombre de a_i fixé d'avance, mais on apprend par les valeurs des a_i trouvées, de quel nombre de a_i on peut se contenter. Ce cas donne un nouvel avantage aux accords numériques.

---

[1]) On pourrait aussi adopté le nom „quasi-spectre" ou „pseudo-spectre".

Passons maintenant au théorème fondamental de comparaison des accords numériques.

Théorème. *Soit à résoudre un problème, dont la solution est en forme d'une suite limitée ou illimitée de nombres entiers positifs bornés a_i. Si deux accords numériques résultants de ce problème, formés avec les rythmes uniformes différents, ont pour leurs k notes initiales correspondantes les mêmes valeurs effectives, alors ces dernières sont les k premiers termes de la suite cherchée.*[1]

Ce théorème fournit donc, pour les a_i bornés, entiers et positifs, les conditions nécessaires et suffisantes. Pour les a_i bornés et entiers il est valable, mais donne des conditions qui ne sont que nécessaires. En ce cas il faut que les conditions supplémentaires soient remplies. Nous n'allons pas maintenant parler de ces conditions supplémentaires pour les raisons suivantes. Premièrement ces conditions supplémentaires peuvent être de genre assez différent, et pour cela il est mieux d'en parler dans des problèmes concrets, que dans un exposé purement théorique. Secondement dans les problèmes pratiques, et ce sont bien de tels problèmes que nous voulons aborder, il s'agit d'obtenir une suite de a, en acceptant le risque plus théorique que réel d'ailleurs, que ces valeurs soient incorrectes, car on a beaucoup de contrôles spectraux, accordiaux et ordinaires, qu'on peut faire intervenir avant d'adopter la suite des a_i comme correcte. Si on constate par un de ces contrôles la faute, ou même sur le moindre soupçon de possibilité d'une telle faute on peut calculer encore un accord avec un plus grand rythme et éliminer la faute éventuelle.

Notons, que les accords numériques peuvent être formés aussi dans les cas, où le rythme n'est pas uniforme.

Après cette introduction, assez longue mais inévitable à cause que les résultats exposés n'étaient pas encore publiés, passons au problème d'intégration des équations différentielles ordinaires du premier ordre. Il s'agit d'obtenir les intégrales particulières aux valeurs initiales x_0, y_0 en forme d'une série de Taylor. Pour point de départ je prendrai ma méthode sur ce sujet publiée en 1934 [5].

Il s'agit d'obtenir l'intégrale en question de l'équation

$$y' = f(x, y),$$

les valeurs initiales x_0, y_0 déterminant un point ordinaire de la fonction f, qui alors est développable en série double de Taylor au voisinage de ce point

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} (x - x_0)^m (y - y_0)^n. \tag{4}$$

[1]) Ce théorème peut être formulé d'une manière plus générale. La démonstration est omise à cause de manque de place.

Pour cela il faut former l'expression

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx\,,$$

faire le développemment de l'intégrant en série de Taylor avec un terme, retrancher le résidu $R_1(x)$ et effectuer l'intégration. De cette manière on obtient la première approximation y_1

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} \overrightarrow{f(x, y_0)}^{1} dx = y_0 + \int_{x_0}^{x} [\alpha_1 + \overrightarrow{R_1(x)}]\, dx = y_0 + \alpha_1 (x - x_0) \qquad (5)$$

le symbole $\rightarrow 1$ représentant le retranchement du résidu R_1, et le symbole $\rightarrow$ le rejet de l'expression entière. La deuxième approximation s'obtient de manière analogue

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} \overrightarrow{f(x, y_1)}^{2} dx = y_0 + \int_{x_0}^{x} [\alpha_1 + \alpha_2 (x - x_0) + \overrightarrow{R_2(x)}]\, dx =$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} [\alpha_1 + \alpha_2 (x - x_0)]\, dx = y_0 + \alpha_1 (x - x_0) + \frac{\alpha_2}{2} (x - x_0)^2. \qquad (6)$$

Il est démontré dans l'article cité, que le coefficient α_1 de la formule (6) est le même que dans la formule (5), et cela vaut pour chaque coefficient α_i. C'est-à-dire, les coefficients une fois obtenus restent invariables. L'approximation du rang i s'obtient, donc, par la formule

$$y_i = y_0 + \int_{x_0}^{x} \overrightarrow{f(x, y_{i-1})}^{i} dx = y_0 + \int_{x_0}^{x} [\alpha_1 + \alpha_2 (x - x_0) + \ldots \alpha_i (x - x_0)^{i-1} +$$

$$+ \overrightarrow{R_i(x)}]\, dx = y_0 + \alpha_1 (x - x_0) + \frac{\alpha_2}{2} (x - x_0)^2 + \ldots\ldots + \frac{\alpha_i}{i} (x - x_0)^i$$

$$(i = 1, 2, \ldots\ldots) \qquad (7)$$

Les coefficients α_i ainsi obtenus sont les coefficients correspondants du développement de l'intégrale particulière cherchée y, en série de Taylor

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{i} (x - x_0)^i.$$

Ainsi la méthode exposée permet d'obtenir n'importe quel nombre de coefficients α_i de développement en question. Pour établir une méthode spectrale, prenons le cas le plus simple; supposons connu d'avance que x_0, y_0 ainsi que les $A_{m,n}$ de développement (4) sont des nombres entiers. Supposons quand même que les valeurs des $A_{m,n}$ ne sont pas connues et restent toujours inconnues. On peut modérer ces conditions pour pouvoir étendre la méthode à la classe plus large de fonctions $f(x, y)$, mais même ces conditions là sont remplies pour une classe assez vaste de fonctions $f(x, y)$. Par exemple pour la fonction

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{8}$$

où $Q(x_0, y_0) = 1$, P et Q étant les polynômes en x, y ayant des coefficients nombres entiers. D'ailleurs chaque *fonction* $f(x, y)$ *rationnelle à coefficients nombres entiers se réduit*, x_0, y_0 *étant nombres entiers, à la fonction de la forme* (8) *par une transformation élementaire.* Cette transformation ne doit pas être effectuée par un moyen algébrique, elle s'effectue automatiquement dans la formation des accords.

Dans la méthode analytique exposée il s'agissait donc de trois sortes de fonctions en x qu'on calcule par un procédé de récurrence, à savoir

$$\begin{array}{ccc} & & y_0 \\ f(x, y_0) & \overrightarrow{f(x, y_0)}^{\,1} & y_1 \\ f(x, y_1) & \overrightarrow{f(x, y_1)}^{\,2} & y_2 \\ f(x, y_2) & \overrightarrow{f(x, y_2)}^{\,3} & y_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{9}$$

Pour donner une méthode spectrale (ou accordiale), basée sur la méthode analytique citée antérieurement, il faut trouver les nombres correspondants aux fonctions en question (leurs spectres ou accords), trouver le procédé arithmétique, par récurrence, entre ces nombres, équivalant au procédé analytique cité plus haut et encore trouver le moyen de faire ressortir des quasi-spectres leurs parties effectives de telle façon qu'on puisse trouver n'importe quel nombre de coefficients a_i de développement de l'intégrale particulière en question en série de Taylor

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i!} (x - x_0)^i.$$

Faisons pour cela premièrement un tableau analogue au tableau (9)

$$\begin{array}{ccc} & & s_0 \\ \Sigma_1 & \bar{\Sigma}_1 & s_1 \\ \Sigma_2 & \bar{\Sigma}_2 & s_2 \\ \Sigma_3 & \bar{\Sigma}_3 & s_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{9'}$$

et analysons le. Premièrement, on voit clairement que les s_i doivent être des accords de y_i, les coefficients de ceux-ci étant des nombres non-entiers. Secondement on voit qu'il doit exister une relation de la forme

$$\Sigma_i = f(10^{-h}, s_{i-1}) \tag{10}$$

entre Σ_i et s_{i-1}, et enfin que $\bar{\Sigma}_i$ représente le nombre Σ_i abrégé avec $(i-1)\,h$ décimales (h étant nombre entier positif convenablement choisi, rythme des spectres et accords). Mais les Σ_i, définis par la formule (10), seront aussi les accords de $f(x, y_{i-1})$ dont les coefficients sont non-entiers et par cela on ne pourrait pas en tirer les coefficients a_i. Pour cela rappelons nous un théorème de la Théorie des spectres:

Si S est un spectre, au rythme uniforme h, de la suite de nombres entiers c_i, alors le nombre KS (K étant nombre entier) est le spectre de la suite de nombres Kc_i, avec le même rythme, pourvu que le rythme h soit assez grand, pour qu'être compatible avec la suite Kc_i.

Le nouveau spectre peut être aussi traité comme spectre de la suite c_i *sous l'influence de l'entier K.*

Si S n'est pas un spectre, mais un accord, et c_i les nombres rationels alors à condition que leur nombre soit limité, le théorème antérieur est valable pour les accords aussi, et on peut toujours trouver le nombre K tel que les Kc_i deviennent nombres entiers et KS devient le spectre ou accord (selon la grandeur de h) de la suite Kc_i. C'est bien notre cas, car $\bar{\Sigma}_i$ est un accord et ces c_i, dont le nombre est limité, sont des nombres rationaux. En ce cas comme nombre K — facteur révélateur (le nom est emprunté à la photographie) on peut prendre $(i-1)!$

Multiplions les deux premières colonnes du tableau (9') par $K=(i-1)!$ c'est-à-dire que Σ_1 et $\bar{\Sigma}_1$ seront multipliés par $0!$, Σ_2 et $\bar{\Sigma}_2$ par $1!$ etc., alors le tableau deviendra

$$\begin{array}{ccc} & & s_0 \\ S_1 & \bar{S}_1 & s_1 \\ S_2 & \bar{S}_2 & s_2 \\ S_3 & \bar{S}_3 & s_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{9''}$$

où

$$S_i = (i-1)!\,\Sigma_i \qquad \bar{S}_i = (i-1)!\,\bar{\Sigma}_i$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots$$

Les S_i sont les accords et les $\bar{S}_i$ sont les spectres ou accords (d'après la grandeur de h) de suivantes fonctions de x, à savoir $f(x, y_{i-1})$ respectivement $\overrightarrow{f(x, y_{i-1})}^{i}$, sous l'influence de $(i-1)!$. La relation entre S_i et $\bar{S}_i$ est la même qu'entre Σ_i et $\bar{\Sigma}_i$, notamment $\bar{S}_i$ est la valeur abrégé de S_i avec $(i-1)\,h$ décimales.

La formule (10) se transforme en formule suivante

$$S_i = (i-1)!\ f(10^{-h}, s_{i-1}) \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

et nous obtenons encore pour a_{i+1} la formule

$$a_{i+1} = 10^{ih}\,(\bar{S}_{i+1} - i\bar{S}_i) \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Le fait que y_{i+1} est la somme de y_i et du membre

$$\frac{a_{i+1}}{(i+1)!}\,(x - x_0)^{i+1},$$

donne la relation suivante entre s_{i+1} et s_i

$$s_{i+1} = s_i + 10^{-h}\,\frac{\bar{S}_{i+1} - i\bar{S}_i}{(i+1)!} \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Il faut encore établir les formules pour les valeurs initiales s_0, s_1, a_0, a_1 qui échappent à ce calcul de récurrence. Cependant on trouve

$$s_0 = y_0$$
$$s_1 = s_0 + 10^{-h}\,\bar{S}_1 \tag{14}$$
$$a_0 = y_0 \qquad a_1 = \bar{S}_1.$$

Ainsi les formules (11), (12), (13) et (14) donnent la possibilité de calculer tous les coefficients a_i, jusqu'à n'importe quel rang. Il semble que le problème soit résolu, mais il nous resterait encore à calculer le rythme h, que nous avons laissé indéfini, avec la remarque qu'il est assez grand.

Dans les problèmes résolus par la méthode spectrale le calcul de h est quelquefois bien compliqué. Dans le présent problème il pourrait être trouvé par majoration, seulement si on connaissait l'allure de la croissance des $A_{m,n}$. Cependant la supposition est que les $A_{m,n}$ sont et restent inconnus. Alors nous devons définitivement renoncer à la recherche de h, calcul inévitable dans les méthodes spectrales, et passer à la méthode accordiale. Jusqu'ici bien que nous nous soyons servis des accords, la méthode est restée spectrale (ou presque spectrale). En renonçant, maintenant, au rythme fixe h nous passons à la méthode accordiale. Les formules (11), (12), (13), (14) restent les mêmes, mais chaque pas dans ces évaluations de récurrence doit être fait par deux (ou plusieurs) calculs avec deux rythmes différents, (h_1 et h_2) pris arbitrairement. Si les deux calculs donnent le même a_i le pas est „pratiquement“ correct, au cas contraire on dois prendre un rythme plus grund h_3 et recommencer le pas de nouveau avec les rythmes h_2 $(h_2 > h_1)$ et h_3. On en fait de même jusqu'à obtenir le même coefficient a_i. Pour raison de manqne de place nous devons renoncer de parler des contrôles, applicables en cette méthode. Remarquons que chaque formule (11), (12), (13), (14), n'est valable que pour les spectres ou accords ayant le même rythme h, à quoi on doit faire attention. Notons encore, que si l'équation différentielle, avec les conditions initiales x_0, y_0 admet comme résolution un polynôme, l'évaluation se terminera d'elle-même, ce polynôme étant obtenu.

L'exemple qui va suivre rendra la théorie plus concrète.

Exemple

Soit donnée l'équation différentielle

$$y' = \frac{1 - x + y}{1 + x^2 y},$$

on cherche l'intégrale, pour laquelle $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, en forme de série de Taylor. Le calcul doit donner cinq premiers coefficients. La fonction $f(x, y)$ étant de forme (8), et la condition

$$Q(x_0, y_0) = 1$$

étant satisfaite, la méthode accordiale exposée peut être appliquée.

Prenons pour les rythmes h_1 et h_2 les nombres 1 et 2. Les accords formés avec le premier rythme porteront un index (1), et ceux-la formé avec le second rythme un index (2). Nous obtenons

		$a_0 = 0$	$s_0 = 0$
(1)	(1)		(1)
$S_1 = 0{,}9$	$\overline{S}_1 = 1$		$s_1 = 0{,}1$
(2)	(2)	$a_1 = 1$	(2)
$S_1 = 0{,}99$	$\overline{S}_1 = 1$		$s_1 = 0{,}01$
(1)	(1)		(1)
$S_2 = 0{,}99900099$	$\overline{S}_2 = 1{,}0$		$s_2 = 0{,}10$
(2)	(2)	$a_2 = 0$	(2)
$S_2 = 0{,}99999900$	$\overline{S}_2 = 1{,}00$		$s_2 = 0{,}0100$

$\overset{(1)}{\bar{S}}_3 = 2\,\overset{(1)}{\bar{S}}_2 = 2{,}00$ $\qquad\qquad$ $\overset{(1)}{s}_3 = 0{,}100$

$\overset{(2)}{\bar{S}}_3 = 2\,\overset{(2)}{\bar{S}}_2 = 2{,}0000$ $\qquad a_3 = 0 \qquad$ $\overset{(2)}{s}_3 = 0{,}010000$

$\overset{(1)}{\bar{S}}_4 = 3\,\overset{(1)}{\bar{S}}_3 = 5{,}994$ $\qquad\qquad$ $\overset{(1)}{s}_4 = 0{,}099975$

$\overset{(2)}{\bar{S}}_4 = 3\,\overset{(2)}{\bar{S}}_3 = 5{,}999994$ $\qquad a_4 = -6 \qquad$ $\overset{(2)}{s}_4 = 0{,}009999975$

$\overset{(1)}{S}_5 = 23{,}975431$ $\qquad$ $\overset{(1)}{\bar{S}}_5 = 23{,}9754$

$\overset{(2)}{S}_5 = 23{,}999975940$ $\qquad$ $\overset{(2)}{\bar{S}}_5 = 23{,}99997594$ $\qquad a_5 = -6$

L'intégrale cherchée est donc

$$y = x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{20} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

On voit de cet exemple, que si la série en question a de lacunes, le calcul se simplifie.

On peut généraliser les résultats obtenus dans quelques directions. Premièrement on peut modérer la condition que $A_{m,\,n}$ soient des nombres entiers.

L'autre généralisation est d'étendre la même méthode accordiale aux équations différentielles d'ordre supérieur et aux systèmes d'équations différentielles ordinaires simultanées. Les généralisations citées se font sans grandes difficultés.

A la fin de ce travail je fais remarquer encore la possibilité d'employer les machines à calculer dans les procédés cités.

LITTÉRATURE

[1] M. Petrovitch, *Les spectres numériques*. Gauthier-Villars, Paris, 1919.

M. Petrovitch, *Leçons sur les spectres mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[2] C. Orloff, *Les applications arithmétiques et analytiques des spectres mathématiques*, Thèse de doctorat, en serbo-croate, avec un résumé en français, Beograd, 1935.

[3] C. Orloff, *Les spectres de nombres non-entiers*. Comptes rendus du I Congrès des mathématiciens et physiciens de Yougoslavie, en serbo-croate, Beograd, 1950.

[4] C. Orloff, *Application pratique de la théorie des spectres mathématiques de Michel Petrovitch au calcul numérique*. La revue Scientifique, Paris, juillet-décembre 1953.

[5] C. Orloff, *Un procédé d'approximation concernant les intégrales des équations différentielles*, Bull. de l'Académie Serbe № 2, Beograd, 1935.

К. Орлов, *Једна метода апроксимирања за интеграле диференцијалних једначина*, Глас Срп. Акад. Наука CLXIII, први разред 80, 1934.

ИЗВЕШТАЈ

О РАДУ ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА Н.Р. СРБИЈЕ ЗА ГОДИШЊУ СКУПШТИНУ ОДРЖАНУ У БЕОГРАДУ НА ДАН 6. X. 1957 ГОД.

Друштво математичара и физичара НРС има сада 727 чланова. Од прошле годишње скупштине до данас Друштво је развијало своју делатност у овим смеровима: 1) издавачка делатност; 2) научни састанци; 3) семинари; 4) рад у подружницама; 5) рад комисија друштва.

1. Издавачка делатност. — *„Весник Друштва математичара и физичара НР Србије"*. — У поменутом периоду припремљен је и отштампан двоброј 3—4 за 1956 год. и припремљен за штампу двоброј 1—2 за 1957 годину. Тираж је 1000 примерака; размена се врши са 274 иностранa часописа. Потребно је организовати бољу дистрибуцију у нашој земљи, а такође и омогућити бољу техничку опрему (бољу хартију).

„Настава математике и физике". — Изашла су укупно 4 броја часописа, и то бр. 3 и бр. 4 за 1956 год. и бр. 1 и бр. 2 за 1957 годину. За 1957 годину дистрибуција се врши преко посебно организоване службе у оквиру Друштва. За тај посао ангажовано је једно стручно лице, које ради под надзором Уређивачког одбора. Овакав начин дистрибуирања омогућиће да се успостави непосредан контакт са претплатницима. Прикупљање претплате поверили смо и једном ревизору, који обилази осмогодишње школе у нашој републици. — Бр. 3 и 4 за 1957 год. изаћи ће до краја ове године и садржаће већи део материјала са Саветовања математичара и физичара које је одржано ове године у Херцегновом. Приходи часописа су претплата и дотације, Секретаријата за просвету Савезног извршног већа и Извршног већа НР Србије, као и мање субвенције од стране осталих друштава математичара и физичара. Овогодишња претплата тек пристиже; потребно је да је сви наши чланови што пре положе, јер тај приход треба добрим делом да омогући излажење наредног броја.

„Настава" послује преко свог чековног рачуна, што олакшава преглед прихода и расхода и омогућује наплату потраживања.

Садржај часописа је све богатији, али недостају чланци у вези са наставом у средњим стручним школама. Часопис се афирмисао и у иностранству.

„Математичко физички лист за ученике средњих школа". — Број претплатника у НР Србији је порастао, али у томе заостају многе београдске школе. Београдска подружница ће настојати да се више заложи за пропагирање тог часописа међу ученицима гимназија и средњих стручних школа.

Књига „Настава математике у Југославији". — Ову књигу припрема Савез преко наших друштава математичара и физичара. Наше Друштво је преко свог координационог пододбора ангажовало 8 математичара за обраду I поглавља Математика као наука, које садржи 27 тема и које се налазе у завршној фази. II поглавље Настава математике, садржи 10 тема; неколико наших чланова обрађује или учествује у обради 8 од тих тема. Тема Историјат развитка наставе математике у Југославији на свим ступњевима највећим делом је већ обрађена. И у обради осталих поглавља, а нарочито поглавља Перспективе даљег развоја наставе математике, ангажовани су чланови нашег Друштва. Материјална средства за припреме ове књиге које су у току обезбеђена су.

Нове едиције Друштва математичара и физичара НР Србије и Савеза друштава математичара и физичара Југославије. — Предлог Друштва математичара и физичара НР Србије да наша друштва, односно Савез, приступе издавању библиотеке за наставнике математике и физике и математичко-физичке библиотеке за ученике, Пленум Савеза одржан 24 септембра усвојио је с тим да Друштво математичара и физичара НР Србије разради у појединостима план о издавању тих библиотека и о учешћу како појединих друштава тако и Савеза у остваривању тог задатка. Тај предлог је на поменутом пленуму Управни одбор нашег Друштва мотивисао тиме да данас, кад припремне радње на одређивању правца и садржаја реформе школа улазе у своју завршну фазу, највећа се пажња и брига мора посветити питању спровођења те реформе, тј. питању припремања наставног кадра за нову наставу, наставу која ће стварно бити у складу са тежњама нове школе. Припремању те реформе су наша друштва и Савез дали, као што је познато, не мали допринос преко рада својих подружница, семинара, саветовања и конгреса, преко рада својих комисија и преко својих часописа, те зато друштва и Савез друштава математичара и физичара могу, са пуном друштвеном одговорношћу, плански и конструктивно стварати ове библиотеке обједињавајући све математичаре и физичаре Југославије, који могу учествовати у том раду. — Овај рад ће наша друштва координирати међу собом као и са заводима за унапређење школства.

2. Научни састанци. — Друштво је у Београду одржало 25 састанака на којима је дало 26 научних саопштења. Два саопштења дала су два инострана научника.

3. Семинари. — Одржани су тродневни семинари за наставнике математике и наставнике физике у Београду, Нишу, Зајечару, Шапцу, Зрењанину и Титовом Ужицу, петодневни у Новом Саду, Призрену и Косовској Митровици, двонедељни у Суботици и у Пећи и двадесето-дневни у Приштини. На неким од тих семинара (на територији уже Србије) учествовали су као предавачи и професори гимназија и професори Универзитета из Београда. Највећи број ових семинара био је организован за наставнике математике и физике из целог односног среза, а семинари у Новом Саду, Суботици и Приштини окупили су слушаоце из целе Покрајине, односно Области. На срееским семинарима учествовало је по 50—80 наставника, а на покрајинским и обласним преко 200 наставника.

У Београду су одржана три течаја на којима су наставници упознати са применом рачунских машина и руковањем рачунским машинама.

Овде треба поменути и републички семинар који се ових дана одржава у Београду.

На Саветовању математичара и физичара Н. Р. Црне Горе, коме су присуствовали и математичари и физичари Босне и Херцеговине (око 200 присутних) између предавача из свих наших Друштава, учествовало је и 9 предавача из нашег Друштва, са 10 предавања, која су се односила на конкретну реализацију реформе наставе математике и физике као и на перспективу даљег развоја математике и физике.

Осим ових семинара, скоро све подружнице су искористиле саборе просветних радника и одржале том приликом једнодневни семинар или саветовање.

4. Рад подружница. — Подружнице су саме или уз помоћ Управног одбора Друштва организовале горе поменуте семинаре, који су својим успехом показали да их као један значајан облик рада треба и даље одржавати. Но осећа се потреба да се непосредно после ове скупштине плански организује одржавање семинара по свим срезовима, стварајући на време план рада и ангажујући предаваче, при чему је важно да се сви учесници семинара претходно упознају са програмом.

Осим ових семинара подружнице су одржавале састанке са стручним предавањима и дискусијом. У Београду и Новом Саду одржаван је скоро сваке седмице по један такав састанак. У свим подружницама одржан је 131 састанак, од чега, например, у Новом Саду 26 (са преко 1000 присутних), Крагујевцу 11, Вршцу 17 итд.

Посебно истичемо учешће подружнице Зајечар у раду Друштва младих математичара и физичара, које је одржало 12 предавања (у Зајечару, Бору, Књажевцу и Неготину) и смотру (са око 200 учесника) са изложбом.

Такође треба истаћи да су наше подружнице прихватајући се решавања непосредних задатака у свом срезу, еластично развиле и друге облике рада: патронате у осмогодишњим школама, узајамно посећивање часова, састематско помагање нестручних или неискусних наставника. У том погледу заслужује посебно признање рад подружнице у Шапцу.

Наше подружнице раде на окупљању свих математичара и физичара у своје чланство. Досад су у томе постигнути извесни резултати, али они у свим срезовима нису још задовољавајући.

У свом раду неке подружнице наилазе на тешкоће материјалне природе, што им у многоме омета успешно развијање стручне делатности.

5. Рад комисија Друштва. — При Друштву постоје следеће комисије: Комисија за уџбенике, Комисија за програм и наставу и Комисија за научни рад.

Комисија за уџбенике. — Ове године није имала толико посла као ранијих година, зато што су многи уџбеници одобрени на две године.

Комисија за програм и наставу одржавала је почев од јануара редовне састанке сваког месеца. Образоване су секције за проучавање појединих области средњошколског курса математике и, преко једног сталног делегата, одржаван је контакт са Савезном комисијом за реформу школства. Комисија је учествовала на састанку претставника свих наших друштава (30 и 31 марта о. г.) на коме се дошло до јединственог програма за све осмогодишње школе у Југославији. О одлукама донетим на том састанку извештена је Савезна комисија за реформу школства, а наши чланови су са њом упознати преко часописа „Настава математике и физике".

Комисија за организацију научног рада и везе са иностранством при Друштву математичара и физичара у име Савеза друштава математичара и физичара Југославије припремила је Симпозијум из теорије диференцијалних једначина који ће се одржати у Београду, од 16—21 децембра 1957. Циљ овог симпозијума је да прикаже модерне теорије из области парцијалних једначина и њихових примена. Поред наших математичара који раде у тој области, учествоваће и 6 најистакнутијих светских математичара.

Управни одбор Друштва је, поред горе поменутих акција, непосредно организовао и два саветовања претставника установа и школа које су непосредно заинтересоване за коришћење практичне математике. На овим саветовањима су утврђени облици сарадње Нумеричког института при Природно-математичком факултету и установа чији су претставници учествовали на саветовању.

III Конгрес математичара и физичара Југославије. — На II Конгресу математичара и физичара Југославије Друштво математичара и физичара задужено је за организацију III Конгреса, који ће се 1959 год. одржати у Београду. На III Конгресу радиће наставне и научне секције. За потпуније и детаљније утврђивање програма рада Конгреса, образован је при Управном одбору посебан Одбор за припремање Конгреса.

Сада ћемо истаћи низ питања у чијем решавању, по мишљењу Управног одбора, Друштво треба да узме непосредно учешће:

1. *Систематска припрема кандидата за наставничке, односно професорске испите и учешће у образовању комисија за те испите.*

2. *Стварање приручника за наставнике, у сарадњи са Заводом за унапређење школства.*

3. *Даље развијање карактера и садржаја курсева на вишим школама и универзитетима*, водећи притом рачуна и о координацији наставе у средњим школама и наставе на вишим школама и универзитетима. У томе ће раду и књига „Настава математике у Југославији", коју припрема Савез друштава математичара и физичара Југославије, послужити као подлога.

По питању рада на стручном усавршавању наставника неопходно је појачати сарадњу са Удружењем учитеља, наставника и професора средњих школа.

Завршавајући овај кратак сумаран преглед рада Друштва математичара и физичара НР Србије, Управни одбор очекује од Скупштине да у дискусији дадне предлоге и сугестије за рад Друштва у наредној години по свим његовим секторима рада.

САСТАНЦИ ДРУШТВА

CXLIII

8. I. 1957.

Стеван Коички, стр. сарадник Института — Винча:
„О новим моделима атомског језгра“.

CXLIV

15. I. 1957.

Лазар Караџић, стручни сарадник ЕТФ:
„Апроксимација функција низом полинома“.

CXLV

5. II. 1957.

Др. Мато Брчић-Костић, професор у Суботици:
„О Ферматовом проблему“.

CXLVI

19. II. 1957.

Др. Иван Атанасијевић, предавач Универзитета:
„Мерења галактичког радио-зрачења на таласној дужини од 117 см“.

CXLVII

19. III. 1957.

Инж. Брана Перовић, асист. Института у Винчи:
„Сепаратор изотопа у Институту — Винча“.

CXLVIII

26. III. 1957.

Милорад Бертолино, асистент Унив.:
„Неке примене Чаплигинове методе“.

CXLIX

9. IV. 1957.

Академик Др. Никола Салтиков, проф. Унив.:

„Особине еквивалентности и корелативности парцијалних једначина првог реда“.

CL

23. IV. 1957.

Др. инж. Борислав Лилић, доцент Унив.:

„О једном проблему реалних бројева“.

CLI

7. V. 1957.

Жан Фавард, професор Сорбоне — Париз:

„О реформи наставе у средњим и вишим школама“.

CLII

14. V. 1957.

Др. Боривоје Рашајски, доцент Унив.:

„Принцип интеграције помоћу диференцијације и теорија трансформације додира“.

CLIII

29. X. 1957.

Михаило Арсеновић, асистент Унив.:

„О интеграљењу линеарних парцијалних једначина другог реда са сталним коефицијентима“.

Академик Др. Никола Салтиков, проф. Унив.:

„Интеграљење парцијалних једначина II реда општег облика“.

CLIV

5. XI. 1957.

Др. Драгољуб Марковић, проф. Унив.:

„Теориска обрада једног елементарног проблема из пермутација“.

CLV

12. XI. 1957.

Милорад Бертолино, асистент. Унив.:

„Један поступак уоквиравања решења диференцијалних једначина".

CLVI

26. XI. 1957.

Др. Драгољуб К. Јовановић, проф. Унив.:

„Експериментално потврђивање таласне механике при интеграцији алфа — протон".

Др. Златко Мамузић, доцент Унив.:

„Услови сепарације у једној класи простора опште топологије".

CLVII

20. XII. 1957.

Др. Ђуро Курепа, проф. Свеучилишта — Загреб:

„Појам трансформација у настави".

CLVIII

24. XII. 1957.

Др. Ђорђе Мушицки, доцент Унив.:

„Полупречници језгра „огледала" са становишта „шел" — модела".

ERRATA

Après qu'on a déjà publié le numéro IX, 1—2 (1957) de ce Bulletin, P. Papić m'a bien voulu remarquer que la proposition 4 citée à la page 33 soit inexacte. C'est pourquoi on doit supprimer le texte correspondant: „Cependant on peut obtenir ... " jusqu'à „D'autre part ... " (excl.) à la page 33 aussi bien que la phrase „Si la famille F est semi-multiplicative et inclusive dans M ... à la fois" — à la page 34.

Z. M.