BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES MATHÉMATICIENS ET PHYSICIENS DE LA R. P. DE SERBIE YOUGOSLAVIE

ВЕСНИК

ДРУШТВА
МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА
НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

IX

1–2

БЕОГРАД, 1957

С А Д Р Ж А Ј

Весник Друштва математичара и физичара НРС издаје Друштво математичара и физичара НРС у два двоброја годишње. Годишња претплата износи 400.— дин. коју треба слати на чековни рачун бр. 10-КБ-32-Ж-119 Друштву математичара и физичара НРС у Београду са назнаком на полеђини чека да се претплата шаље за „Весник Друштва математичара и физичара НРС".

Радове и сву преписку у вези с часописом „Весник" слати на адресу: Уређивачки одбор Весника Друштва математичара и физичара НРС, Београд, пошт. фах 791.

Штампа Графичко предузеће „Академија", Београд, Космајска ул. 28, Телефон 24-701

*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957) Beograd
Yougoslavie*

УСЛОВИЯ КОРРЕЛЯЦИИ И НЕСОВМЕСТНОСТИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИМ ИНТЕГРАЛОВ

Н. Н. САЛТЫКОВА

Анализ способа Якоби образования характеристик уравнений с частными производными первого порядка с одной неизвестной. Понятия о корреляции и несовместности уравнений с частными производными с их интегралами. Распространение на системы уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

1. Сербская Академия Наук получила в дар от Академии Наук С. С. С. Р. собрание всех ее изданий. Среди них находится и работа С. Л. Соболева [1] посвященная вопросу о формированию интегралов характеристик системы уравнений с частными производными первого порядка с одной неизестной функцией.

Результаты изложеные в этой работе вызывают живой интерес и желание дополнить исследования, которые я посвятил этому вопросу [2], имея в виду применение способа Яакоби для составления характеристик уравнений с частными производными первого порядка с одной неизвестной функцией. Для этого приходится рассмотреть два случая, которые могут встретиться, вводя в исследование два новых понятия, о *корреляции* и о *несовместности* уравнений с частными производными с их полными интегралами.

ГЛАВА I

КОРРЕЛЯЦИЯ И НЕСОВМЕСТНОСТ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ЕГО ИНТЕГРАЛА

2. Возьмем, прежде всего, одно уравнение с частными производными первого порядка:

$$f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,\ p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n)=0, \tag{1}$$

где p_i обозначают частные производные перваго порядка неизвестной функции z, взятые по независимой переменной x_i, $m \cdot e \cdot \frac{\partial z}{\partial x_i}$ для всех значений значка i, от 1 до n. Предположим, что имает место условие

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} \gtrless 0. \tag{2}$$

Обозначим полный интеграл уравнения (1) через

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) + b_n \tag{3}$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_n$ обозначают произвальные постоянные величины.

Согласно с определением полнаго интеграла, результат исключения этих произвольных постоянных из интеграла (3) и его первых производных уравнений,

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

дает одно только уравнение (1).

Если введем предположение

$$D\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, \quad b_2, \ldots, b_{n-1}}\right) \gtrless 0,$$

то $n-1$ последних уравнений (4) разрешимы относительно величин $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$. Предположим что результат их исключения из первого уравнения (4) дает уравнение с частными производными, которое напишется в следующем виде:

$$p_1 - H(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_2, p_3, \ldots, p_n) = 0, \tag{5}$$

при чем это уравнение эквивалентно заданному уравнению (1), само собою разумеется, в определенной области изменения рассматриваемых переменных величин.

Возвращаясь к последним $n-1$ уравнениям (4), предположим что они дают следующие значения для всех b_i:

$$\left.\begin{array}{c} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_2, p_3, \ldots, p_n) = b_i, \\ (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{array}\right\} \tag{6}$$

Якоби, создавая свою так называемую новую методу интегрирования уравнений с частными производными первого порядка, установил неопходимые и достаточные условия совместности системы n уравнений с частными производными первого порядка с одной неизвестной функцией. Эти условия состоят в том, что канонические переменные второго класса, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, которые определяются этими уравнениями, представляют частные производные одной и той же функции. Эти условия выражаются аналитически, при помощи условия инволюции рассматрваемых уравнений, обращая в нули скобки Пуассона, составленные из первых частей данных уравнений. Если эти скобки уничтожаются тождественно, то рассматраваемая система уравнений называется нормальной; но если указанные скобки уничтожаются в силу самых уравнений, то их система называется замкнутой.

Обращаясь к системе уравнений (5) и (6), которые по самому способу их образования совместны и в них переменные p_i представляют частные производные одной и той же функции z, легко заключить, что соответствующие уравнения образуют нормальную систему. В самом деле, составленные из их левых частей скобки Пуассона не заключают величин p_1, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ и поэтому должны уничтожаться тождественно. Таким образом получаются тождества:

$$\left.\begin{aligned} (p_1 - H_1, F_i) = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ (F_k, F_i) = 0, \ (k, i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Тождества первой строки (7) доказывают, что функции F_i представлют интегралы линейнаго уравнения с частными производными первого порядка неизвестной функции φ:

$$(p_1 - H, \varphi) = 0. \tag{8}$$

Эти интегралы, благодаря тождествам второй строки (7), представляют первую половину канонической системы интегралов уравнения (8).

Поэтому уравнения (6) определяют характеристики уравнения (5).

Таким образом доказывается первая часть классической теоремы Якоби о составлении интегралов характеристик первого класса данного уравнения (1), при помощи дифференцирования его полного интеграла по параметрическим независимым переменным в случае, когда это уравнение (1) представленно в виде (5)-ом, разрешенном относительно производной p_1.

В этом случае, будем говорить, что уравнение, предеставленное в виде (5)-ом и его полныи интеграл (3) находятея между собой в корреляции.

3. Если обратимся к исходному уравнению, написанному в виде (1), то нетрудно видет, что равенства, са скобками Пуассона,

$$(f, F_i)=0, \quad (i=1, 2, \ldots, n-1),$$

в общем случае удовлетворяются в силу самого уравнения (1). Поэтому функции F_i не могут рассматриваться как интегралы линейнаго уравнения:

$$(f, \varphi)=0,$$

где φ представлет неизвестную функцию; и поэтому уравнения (6) не могут определят характеристик уравнения (1).

Будем говорить тогда, что это уравнение и его полный интеграл несовместны, т. е. не находятся в корреляции.

Введенные понтия о корреляции и несовместности для всякаго уравнения с частными производными и его интеграла, в зависимости от вида рассматриваемаго уравнения, вполне решают вопрос о возможности составления характеристик при помощи дифференцирования соответствующаго полного интеграла.

В главе II Белгийских лекций [2] подробно рассматривается вопрос о составлении характеристик даннаго уравнения в случае несовместнасти с ним полного интеграла этого уравнения. В этом случае приходится прибегать к способу приведения несовместных элементов (уравнения и его полного интеграла), подыскивая соответствующие элементы, которые бы находились между собой в корреляции. Это приведение достигается очень легко введением вспомогательного параметра, вместо нуля, во второй части даннаго уравнения.

Составляя полный интеграл полученнаго, благодаря указанному преобразованию, уравнения легко доказать, что преобразованное уравнение и его найденный полный интеграл находятся в корреляции.

В самом деле, заменяем данное уравнение (1) ниже следующим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)=C, \tag{9}$$

где C представляет вспомогательный параметр. Составляем полный интеграл уравнении (9) в следующем виде:

$$z=U(x_1, x_2, \ldots, x_n, C, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})+b_n, \tag{10}$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_n$ произвольные постоянные величины, при чем

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}, \dfrac{\partial U}{\partial x_3}, \ldots, \dfrac{\partial U}{\partial x_n}}{b_1, \quad b_2, \ldots, b_{n-1}}\right) \gtreqless 0. \tag{11}$$

Поэтому производные уравнения

$$p_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (i=2, 3, \ldots, n) \tag{12}$$

разрешимы относительно величин $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ и совместно с исходным уравнением (9), которое претставлено в виде разрешенном относительно параметра C, дают следующую систему равенств:

$$\left.\begin{array}{c} f=C, \quad \Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)=b_i, \\ (i=1, 2, \ldots, n-1) \end{array}\right\} \tag{13}$$

которая по существу отличается от соответствующих равенств (6), в первом разобранном случае. Действительно, последние $n-1$ уравнений (13) заключают явно, переменную p_1, тогда как, в первом разобранном случае, соответствующие управнения (6) не заключали явно переменной p_i. Между тем в последних $n-1$ уравнениях (13) эта переменная фигурирует явно, вследствие исключения параметра C, при помощи первого уравнения (13).

В формулы (13) все переменные p_i входят, благодаря способу образования уравнений (12), при помощи дифференцирования одной и той же неизвесной функции z, как ее частные производные. Поэтому имеют место формулы:

$$\left.\begin{array}{ll} (f, \Phi_i)=0 & (i=1, 2, \ldots, n-1), \\ (\Phi_k, \Phi_i)=0 & (k, i=1, 2, \ldots, n-1). \end{array}\right\} \tag{14}$$

Полученные равенства удовлетворяютстя тождественно, так как скобки Пуассона не заключают величин

$$C, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1},$$

и поэтому формулы (14) не могут быть следствием уравнений (13).

Благодаря тождествам первой строки (14), заключаем, что уравнений (13) определяют искомые характеристики первоначального исходного уравнения (1), которое не зависит от введенаго параметра C, равно как и $n-1$ последних уравнений (13).

Таким образом разрешается, и во втором рассмотренном случе, вопрос о составлении уравнений характеристик, при помощи процесса дифференцирования, по Якоби, полного интеграла уравнения с частными производными и дополнительнаго, в рассматривамом случае, исключения введеннаго параметра.

4. Возьмем, для примера, уравнение С. Л. Соболева:

$$f \equiv \frac{p_1}{x_1}(p_1+x_2 p_2)-1=0, \tag{15}$$

обладающее полным интегралом

$$z=\sqrt{x_1^2+b_1 x_2^2}+b_2, \tag{16}$$

где b_1 и b_2 являются произвальными постоянными.

Если желаем воспользоваться интегралом (16), то необходимо заменить уравнение (15) уравнением разрешенным относитеьно одной из канонических переменных второго класса, p_1 или p_2. Разрешая уравнение (15) относительно p_1, получаем уравнение вида:

$$f_1 \equiv p_1+\frac{1}{2}(x_2 p_2 \pm R), \quad R \equiv \sqrt{x_2^2 p_2^2+4 x_1}. \tag{17}$$

Дифференцируя интеграл (16), находим производные уравнения

$$p_1=\frac{x_1}{R_1}, \quad p_2=\frac{b_1 x_2}{R_1}, \quad R_1 \equiv \sqrt{x_1^2+b_1 x_2^2}, \tag{18}$$

Разрешая второе уравнение (18) относительно b_1, получаем

$$b_1=\frac{1}{2}\left(p_2^2 \pm \frac{p_2}{x_2} R_1\right) \equiv F_1, \quad R_2 \equiv \sqrt{x_2^2 p_2^2+4x_1^2}. \tag{19}$$

Таким образом уравнение (19) представляет искомый интеграл характеристик. В этом легко увериться, составляя скобки Пуассона, которые уничтожаются тождественно:

$$(f_1, F_1)=0.$$

Если же мы не желаем преобразовывать даннаго уравнения (15), то приравняв его первую часть произвольному параметру C, напишем

$$\frac{p_1}{x_1}(p_1+x_2 p_2)-1=C,$$

и составляем полный интеграл этого уравнения в следующем виде:

$$z=-\frac{b_1}{2} x_1 \pm \frac{1}{12(1+C)}[4(C+1) x_1+b_1^2]^{3/2}+b_1 \log x_2+b_2.$$

Отсюда получется очевидный интеграл характеристик даннаго уравнени (15) вида:

$$x_2 p_2 = b_1,$$

который не зависит от введенаго параметра C и который очевиден, сам по себе, так как непосредственно может быть получен из данного уравнения отделением переменных x_2 и p_2.

ГЛАВА II

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

5. Теория, изложенная в предыдущей главе, распространяется, без всякого труда, на системы в инволюции уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции.

Возьмем следующую нормальную систему m названных уравнений

$$\left.\begin{array}{c} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \\ (i = 1, 2, \ldots, m), \end{array}\right\} \tag{1}$$

удовлетворяющих условию

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{p_1, p_2, \ldots, p_m}\right) \gtrless 0. \tag{2}$$

Обозначим в следующем виде полный интеграл системы уравнений (1)

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}) + b_{n-m+1}, \tag{3}$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_{n-m+1}$ претставлют различные $n-m+1$ произволные постояные величины. Введем предположение, что существует неравенство

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}}\right) \gtrless 0. \tag{4}$$

Поэтому производные уравнения полного интеграл (3),

$$p_s = \frac{\partial V}{\partial x_s} \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

занимающие последних $n-m$ мест (5), разрешимы относительно $b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}$ и дают $n-m$ следующих зависимостей

$$\left.\begin{array}{c} F_{m+i}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = b_i \\ (i = 1, 2, \ldots, n-m) \end{array}\right\} \tag{6}$$.

Исключая полученные значения b_i из m первых равенств (5), получаем систему m уравнений в частных производных следующаго вида:

$$\left.\begin{array}{c} p_k - H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = 0, \\ (k = 1, 2, \ldots, m), \end{array}\right\} \tag{7}$$

которая, очевидно, эквивалентна исходной системе уравнений (1).

Благодаря классической теории Якоби о совместности уравнений с частными производными, упомянутой в предыдущей главе, уравнения (6) и (7) находятся в инволюции, и поэтому имеют место тождества с скобками Пуассона:

$$\left.\begin{array}{c} (p_k - H_k, F_{m+i}) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-m) \\ (k = 1, 2, \ldots, m) \\ (F_{m+j}, F_{m+i}) = 0, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n-m). \end{array}\right\} \tag{8}$$

Тождества первых двух строк (8) показывают, что равенства (6) предствляют интегралы характеристик системы уравнений (7). Наконец, формулы третьей строки (8) утверждают, что найденные интегралы (6) образуют первую половину канонической системы интегралов характеристик данных уравнений (7).

Полученные зависимости обобщают на нормальные системы уравнений понятне о корреляции системы уравнений с частными производными и их полного интеграла, которое выше дано для случая одного уравнения.

Таким образом решается вопрое о розыскании характеристик системы уравнений с частыми производными при условии, что эта система представляется в виде уравнений разрешенных относительно частных производных неизвестной функции.

Если же это последнее условие не выполнено, то данная система уравнений несовместна с их полным интегралом.

6. В таком случае приходится воспользоваться способом введения вспомогательных параметров, число которых равно числу уравнений размaтриваемой системы уравнений. Для этого, вместо нормальной системы уравнений (1) составляем следующую систему уравнений

$$\left.\begin{array}{c} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = C_i, \\ (i = 1, 2, \ldots, m) \end{array}\right\} \tag{9}$$

которая, очевидно, будет опять таки нормалной, при чем все C_i являются введенными вспомогателными параметрами.

Вычисляем полный интеграл новой систем уравнений (9), который представляется в виде:

$$z=U(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_m, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m})+b_{n-m+1}, \quad (10)$$

зависящим от всех параметров $C_1, C_2, \ldots, C_m$ и $n-m+1$ произвольных постоянных величин $b_1, b_2, \ldots, b_{n-m+1}$ и, предположим, удовлетворяет условие:

$$D\left(\frac{\frac{\partial U}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial U}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}}{b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}}\right) \gtrless 0. \quad (11)$$

В таком случае, легко доказат, что первые n интегралов характеристик данной системы уравнений (1) определяются при помощи m уравнений (9) и $n-m$ уравнений, которые даются обобщенными формулама Якоби, следующаго вида:

$$p_{m+i}=\frac{\partial U}{\partial x_{m+i}} \quad (i=1, 2, \ldots, n-m). \quad (12)$$

Эти формулы получаются дифференцированием полного интеграла (10) по $n-m$ параметрическим независимым нepеменным величинам $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$.

В самом деле, в силу неравенства (11), уравнения (12) разрешимы относительно величин $b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}$ и представляются в следующем виде:

$$F_{m+i}(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_m, p_{m+1}, \ldots, p_n)=b_i$$

$$(i=1, 2, \ldots, n-m).$$

Подставляя в полученные уравнения значения всех параметров $C_1, C_2, \ldots, C_m$, которые определяются уравнениями (9), представляем искомые интегралы характеристик, при помощи уравнений следующаго вида:

$$F_i=C_i, \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

$$\Phi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_n)=b_j,$$

$$(j=1, 2, \ldots, n-m),$$

где в последних $n-m$ формулах, в выражении функций Φ_j, появляются переменные величины $p_1, p_2, \ldots, p_m$ в явном виде, благодаря подстановке значений параметров C_i, которые даны формулами (9).

Таким образом распространяется способ Якоби для составления интегралов характеристик на нормальные системы урвнений с частними производными первого порядка. Из приведных рассуждений видно, что идея Якоби составления рассматриваемых характеристик при помощи операций дифференцирования одинаково применима как в случае одного уравнения с частными производными, тек и для нормальной системы таковых уравнений. Само собою разумеется как в первом, так и во втором случае, всегда необходимо применять замечателные формулы Якоби и их обобщение не автоматически, но принимая во внимание изложенные свойства корреляции или несовместности полных интегралов и соответствующих им уравнений с частными производными.

Аналогические указания неопходимо иметь в виду также и и тогда, когда желают применять теорему Ли к интегрированию уравнений с частными производными. Только при таком внимательном пользовании формулами интегрирования уравнений, можно быть гарантированым от погрешных результатов.

7. Возьмем, для примера, нормальную систему уравнений, которую рассматривает С. Л. Соболев:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &\equiv p_1 p_2 + x_3 p_3 - x_1 x_2 = 0, \\ f_2 &\equiv x_3 (x_2 - p_1) - 1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Полный интеграл данной системы он берет в следующем виде:

$$z = x_1 x_2 - \frac{x_1}{x_3} + a_1\left(-\frac{x_2}{x_3} + \frac{1}{2x_3^2}\right) + a_2 \tag{14}$$

где a_1 и a_2[1] две произвольные постоянные величины.

Само собою разумеется, что обобщенные формулы Якоби неприменимы к интегралу (14), ибо он несовместим с данными уравнениями (13).

Поэтому, если желаем непременно воспользоваться полным интегралом в форме (14), то необходимо, разрешив уравнения (13) относительно производных, привести их таким образом к виду уравнений которые находились бы в корреляции с их полным интегралом (14); для этого, уравнения (13) приходится заменить следующими

$$\left.\begin{aligned} F_1 &\equiv p_2 + \frac{x_3^2}{x_2 x_3 - 1} p_3 - \frac{x_1 x_2 x_3}{x_2 x_3 - 1} = 0, \\ F_2 &\equiv p_1 + \frac{1}{x_3} - x_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

---

[1] В тексте С. Л. Соболева находится опечатка, и там вторая произвольная, a_2, пропущена.

Возьмем теперь частное производное уравнение, по параметрической переменпой x_3, от полнаго интеграла (14), коррелятивнаго с системой (15):

$$p_3 = \frac{x_1}{x_3^2} + a_1\left(\frac{x_2}{x_3^2} - \frac{1}{x_3^3}\right).$$

Разрешая последнее уравнение относительно a_1, находим искомый интеграл характеристик

$$F_3 \equiv \frac{(x_3^2 p_3 - x_1)\, x_3}{x_2 x_3 - 1} = a_1.$$

Действительно, легко убедиться в существовании тождеств:

$$(F_1, F_3) = 0, \quad (F_2, F_3) = 0,$$

которые подтверждают правильност обощенной теоремы Якоби.

Если же мы желаем найти уравнения характеристик уравнений с частными производными, которые даны в первоначальном виде (13), необходимо взять коррелятивный им полный интегрл. Соответствующий интеграл получается интегрированием нормальной системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} f_1 &\equiv p_1 p_2 + x_3 p_3 - x_1 x_2 = C_1, \\ f_2 &\equiv x_3 (x_2 - p_1) - 1 = C_2, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где C_1 и C_2 два вспомагательных параметра.

Для вычисления их полного интеграла воспользуемся методой дифференциальных инвариантов [3]. С этою целью интегрируем второе уравнени (16), как обыкновенное дифференциальное уравнение с одной независимой переменной x_1.

Соответствующий полный интеграл представляется уравнением

$$z = x_1\left(x_2 - \frac{C_2 + 1}{x_3}\right) + b, \tag{17}$$

где b представляет новую произвольную постоянную.

Принимая ее как новую неизвестную функцию, вместо z, и рассматравая уравнение (17) как основную формулу сокращенных преобразований прикосновения, получаем преобразованное к новым переменным первое уравнение (16) в следующем виде:

$$\left(x_2 - \frac{C_2 + 1}{x_3}\right)\frac{\partial b}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial b}{\partial x_3} = C_1.$$

Проинтегрировав последнее уравнение и возвратившись к старым переменным, находим полный интеграл коррелятивный системе (16) в следующем виде:

$$z = x_1\left(x_2 - \frac{C_2+1}{x_3}\right) + C_1 \log x_3 + a_1\left(\frac{x_2}{x_3} - \frac{C_2+1}{2\,x_3^2}\right) + a_2, \tag{18}$$

где a_1 и a_2 являются в качестве двух новых произвольных постоянных.

Поэтому, сагласно с обобщенной теоремой Якоби, искомый интеграл характеристик данной системы (13) определяется из производнаго уравнения взятого по параметрической переменной x_3, от полного интеграла (18):

$$p_3 = \frac{(C_2+1)\,x_1}{x_3^2} + \frac{C_1}{x_3} + a_1\left(\frac{C_2+1}{x_3^3} - \frac{x_2}{x_3^2}\right),$$

если исключить из него значения C_1 и C_2, которые определяются формулами (16). Таким образом получается искомый интеграл характеристик в следующем виде:

$$\Phi_1 \equiv x_3\,(p_2 - x_1) = a_1. \tag{19}$$

Действительно, имеем тождества:

$$(f_1, \Phi_1) = 0, \quad (f_2, \Phi_1) = 0.$$

Чтоби найти интеграл характеристик второга класса, сопряженный с интегралом (19), дифференцируем, обобщая теорему Якоби, интеграл (18) по a_1 и получаем

$$\frac{x_2}{x_3} - \frac{C_2+1}{2x_3^2} = a_1',$$

где a_1' новая произвольная постоянная величина.

Исключая отсюда значение C_2, определяемое второй формулой (16), находим второй искомый интеграл характеристик

$$\Psi_1 \equiv \frac{x_2+p_1}{2\,x_3} = a_1', \tag{20}$$

который, действительно, удовлетворяет условиям:

$$(f_1, \Psi_1) = 0, \quad (f_2, \Psi_2) = 0.$$

Нетрудно видеть, что оба интеграла, (19) и (20), сопряженные так как удовлетворяют тождественно условию:

$$(\Phi_1, \Psi_1) = 1.$$

Таким образом спроведливость обобщенной теоремы Якоби остается вне сомнения.

8. Данное изложение необходимо еше пополнить замечанием о применимости обобщенной теоремы Якоби также и к полным интегралам, в которых фигурируют, вместо произвольных постоянных, начальные значения параметрических переменных величин x_{m+k}^{0}, p_{m+k}^{0}.

Первоначально теорема Якоби, для случая одного уравнения с частными производными, была им доказана, когда он взял за произвольные постоянные величины начальные значения параметрических переменных.

Обобщенная теорема Якоби справедлива также и в этом последнем предположении.

Если пример, который приводит С. Л. Соболев, не подтверждает последний результат, то это происходит од того, что в его текст вкралас досадная ошибка. В самом деле, автор берет полный интеграл в следующем виде:

$$z = x_1 x_2 - \frac{x_1}{x_3} + \frac{p_3^0 x_1}{\sqrt{1 - 2 x_2 x_3}} + b, \tag{21}$$

где произвольными постанными служат величины p_3^0 и b.

Между тем легко убедиться, при помощи непосредственной подстановки, что формула (21) не удовлетворяет данным уравнениям (13) и поэтому не является их интегралом. Действительно, результат подстановки значения (21), функции z, во второе данное уравнение (13) дает в результате выражение

$$-\frac{p_3^0 x_3}{\sqrt{1 - 2 x_2 x_3}},$$

которое отнюдь не равно нулю.

Между тем, полный интеграл системы (13), с начальными значения мирассматриваемых параметрических переменных, вместо произвольных постоянных, имеет вид:

$$z = x_1 \left(x_2 - \frac{1}{x_3} \right) \pm \frac{p_3^0 x_3}{\sqrt{1 - 2 x_2 x_3}} + b, \tag{22}$$

т. е. в предпоследнем члене должна стоять, рядом с p_3^0, переменная x_3 вместо x_1, которая находится в фомуле (21).

Исходя из поправленной формулы (22), легко видеть, что и для начельных значений произвольных постоянных, имет место обобщенная теорема Якоби, принимая, разумеется, во внимание условия корреляции и несовместности рассматриваемых элементов вычисления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

[1] Доклады Академии Наук Союза Советских Социалистических Республик № 7 1929. Издательство Академии Наук СССР Ленинград стр. 168.

[2] *Sur la Théorie des Equations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue.* Académie de Belgique, Classe des Sciences. Mémoires — Collection in-4°, Deuxième Série. Tom. VI, fascicule 4.

[3] *Forme canonique des groupes fonctionnels.* Bulletin de L'Académie des Sciences Mathématiques et Naturelles. A. Se. Math. et Phys. № 5 Belgrade 1939.

УСЛОВИ КОРЕЛАЦИЈЕ И НЕСАГЛАСНОСТИ ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА И ЊИХОВИХ ИНТЕГРАЛА

Н. САЛТИКОВ, БЕОГРАД

Резиме

Анализа алгоритма Јакоби-а за налажење карактеристика парцијалних једначина првог реда с једном непознатом функцијом тражи да буду успостављени услови за изналажење дотичних карактеристика помоћу диференцирања потпуног интеграла датих једначина. За формирање карактеристика прве класе узимају се изводи по параметарским независно промељивим нвеличинама као у случају једне парцијалне једначина тако и за нормални систем парцијалних једначина. Посматрани проблем је био до танчине испитан у другој глави белгиских предавања [2]. Пет година доцније, исти проблем узео је поново у проучавање професор С. Л. Соболев [1] и тиме ми је сугерирао да уведем нове појмове о *корелацији* и *несагласности* посматраних парцијалних једначина и њихових потпуних интеграла. Служећи се овим појмовима, можемо искористити поступак Јакоби-а у случају корелације потпуног интеграла и одговарајућих парцијалних једначина. Али кад нема између њих колерације, тј. да су несагласни, онда се поставља проблем свођења несагласних једначина и њиховог интеграла у корелативну зависност, и то помоћу једног од два следећа различита начина. Ако проблем дозвољава претварање посматраних једначина, онда је лако њих довести у нови облик тако да трансформоване једначине буду у корелацији са посматраним интегралом. Међутим, ако се траже карактеристике само за једначине датог облика, то је неопходно узети нови облик потпуног итеграла, који би се налазио у корелацији са дотичним једначинама. У томе се успева увођењем помоћних параметара. Доказ изложених резултата заснива се на посматрању Јакоби-јевих услова сагласности (инволуције) парцијалних једначина, које сачињавају *нормални* или *затворени* систем једначина. Овим условима и одговарају уведени појмови корелације и несагласности посматраних једначина и њихових потпуних интеграла.

Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie

SUR L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE NON-LINÉAIRE DU DEUXIÈME ORDRE

par I. BANDIĆ, BEOGRAD

L'équation différentielle du deuxième ordre

$$yy'' + y^2 f(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

n'a été examinée que dans un petit nombre de cas spéciaux.

Ainsi, F. Mertens, [1], et W. Wirtinger, [2], déterminent la solution de l'équation (1) en la développant en séries, et cela pour le cas $f(x) = 0$, $\varphi(x) = ax$ et $\varphi(x) = ax^2$.

J. J. Müller, [3], résout le cas $f(x) = 1$, $\varphi(x) = ax + b$ en appliquant la méthode graphique d'intégration de Meissner.

Une solution plus générale est donnée par T. Leko, [4], qui trouve qu'on résout (1) au moyen des quadratures lorsque les coefficients $f(x)$ et $\varphi(x)$ satisfont à la condition

$$2\varphi\varphi'' = 4\varphi^2 + 3\varphi'^2 \tag{2}$$

Dans le présent travail on a d'abord posé une condition que les coefficients $f(x)$ et $\varphi(x)$ satisfont lorsque (1) est intégrable, et ensuite l'on a démontré que, partant d'une équation intégrable (1), on peut former directement une suite infinie d'équations intégrables ayant la forme (1).

Dans le développement de cette méthode on a appliqué les dérivées relatives de M. Petrović, [5], qui rendent possible de s'exprimer d'une manière plus concise et font arriver souvent aux certains résultats.

M. Petrović introduit la notion de dérivée relative du n-tième ordre de la fonction $u \equiv u(x)$ au moyen de la définition

$$\Delta_n(u) = \frac{u^{(n)}}{u}, \quad \left(u^{(n)} \equiv \frac{d^n u}{dx^n}\right),$$

d'où il déduit de nombreuses relations entre les dérivées relatives pour les diverses combinaisons de fonctions.

On utilisera ici les relations suivantes

$$\Delta_1(u\,v)=\Delta_1(u)+\Delta_1(v);\quad \Delta_1\left(\frac{u}{v}\right)=\Delta_1(u)-\Delta_1(v);\quad \Delta_1(u^n)=n\,\Delta_1(u);$$

$$\Delta_1(\exp\int u dx)=\exp\int\Delta_1(u)\,dx=u;\quad \Delta_2(u)=\Delta_1'(u)+\Delta_1^2(u).$$

1° En introduisant la nouvelle variable indépendante t et la nouvelle fonction inconnue $z\equiv z(t)$ au moyen de la substitution

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha(t)\\ y&=\beta(t)\cdot z\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

d'où il résulte

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\beta}{\alpha'}[z'+z\,\Delta_1(\beta)];\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\beta}{\alpha'^2}\left[z''+z'\,\Delta_1\left(\frac{\beta^2}{\alpha'}\right)+z\,\Delta_1(\beta)\,\Delta_1\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\right], \tag{4}$$

$$\left(z^{(\nu)}=\frac{d^\nu z}{dt^\nu};\quad \nu=1,2\right)$$

l'équation (1) affecte la forme

$$zz''+zz'\,\Delta_1\left(\frac{\beta^2}{\alpha'}\right)+\left[\Delta_1(\beta)\,\Delta_1\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)+\alpha'^2 f(\alpha)\right]z^2=\frac{\alpha'^2\,\varphi(\alpha)}{\beta^2}. \tag{5}$$

Si l'on détermine $\alpha\equiv\alpha(t)$ et $\beta\equiv\beta(t)$ de la condition

$$\left.\begin{aligned} \beta&=a\,\alpha'^{1/2}\\ \Delta_1(\beta)\,\Delta_1\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)&+\alpha'^2 f(\alpha)=0\end{aligned}\right\}\ (a=\text{const.}) \tag{6}$$

en introduisant en même temps la supposition

$$\varphi(\alpha)=\left(\frac{\beta}{\alpha'}\right)^2, \tag{7}$$

l'équation (5) se réduit à l'équation intégrable

$$zz''=1, \tag{8}$$

dont l'intégrale générale est

$$\int\frac{dz}{\sqrt{c_1+lnz}}=\sqrt{2}\,(t+c_2). \tag{9}$$

Dans ce cas-là l'intégrale générale de l'équation (1) affecte la forme paramétrique (3) où α et β sont donnés par le système (6) et z par la relation (9).

(1.1) Par conséquent, lorsqu'on détermine les fonctions α et β du système (6), on trouve alors, de (7), une forme de la fonction $\varphi(x)$ pour laquelle on résout (1) au moyen des quadratures.

Cependant, en éliminant β du système (6), on arrive à l'équation

$$2\,\alpha'\alpha''-3\,\alpha''^2+4\,\alpha'^4 f(\alpha)=0,$$

et celle-ci, par la substition

(10) $$\alpha'=p,$$

respectivement

$$\alpha''=p\frac{dp}{d\alpha},\quad \alpha'''=p\left[p\,\frac{d^2p}{d\alpha^2}+\left(\frac{dp}{d\alpha}\right)^2\right],$$

est transformée en équation

$$2\,pp''-p'^2+4\,p'f(\alpha)=0,\qquad \left(p^{(\nu)}=\frac{d^\nu p}{d\alpha^\nu},\quad \nu=1,2\right)$$

qui est homogène par rapport à p, p', et p''.

En la divisant par p^2 on trouve

$$2\,\Delta_2(p)-\Delta_1^2(p)+4\,f(\alpha)=0,$$

ou bien

$$2\,\Delta_1'(p)+\Delta_1^2(p)=-4\,f(\alpha).$$

Finalement, en introduisant la nouvelle fonction $\vartheta\equiv\vartheta(\alpha)$ au moyen de la substitution

(11) $$\Delta_1(p)=2\,\Delta_1(\vartheta),$$

la dernière équation est transformée en une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre

(12) $$\Delta_2(\vartheta)=-f(\alpha).$$

Soit $\vartheta\equiv\vartheta(\alpha)$ une solution de l'équation (12). Alors, de (11) on trouve

(13) $$p=\vartheta^2(\alpha)$$

et de l'équation (10)

(14) $$t=\int\frac{d\alpha}{\vartheta^2(\alpha)}.$$

Puisque, ensuite, en vertu de la première équation (6)

$$\beta=a\,\alpha'^{1/2}=ap^{1/2}$$

ou bien, en égard à (13)

(15) $$\beta = a\,\vartheta(\alpha),$$

on obtient, finalement, de (7)

(16) $$\varphi(\alpha) = \frac{a^2}{\vartheta^2(\alpha)}$$

(1.2) Par conséquent, l'équation différentielle

$$yy'' + y^2 f(x) = \varphi(x)$$

est résolue au moyen des quadratures lorsque

$$\varphi(x) = \frac{a}{\vartheta^2(x)}, \qquad (a = \text{const.})$$

où $\vartheta(x)$ représente une solution de l'équation linéaire

$$\Delta_2(\vartheta) = -f(x).$$

Dans ce cas-là, l'intégrale générale de l'équation donnée est exprimée paramétriquement

$$x = \alpha(t), \quad y = \beta(t) \cdot z,$$

où les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont données par les relations

$$t = \int \frac{d\alpha}{\vartheta^2(\alpha)}, \quad \beta = a\,\vartheta(\alpha),$$

tandis que z représente l'intégrale générale de l'équation

$$zz'' = 1, \quad \left(z'' = \frac{d^2 z}{dt^2}\right)$$

(1.3) Lorsque, des fonctions (12) et (16)

$$\left.\begin{aligned} -f(x) &= \Delta_2(\vartheta) \\ \varphi(x) &= \frac{a^2}{\vartheta^2} \end{aligned}\right\}$$

on élimine ϑ on obtient la relation directe entre les coefficients $f(x)$ et $\varphi(x)$ où (1) est intégrable.

En substituant ϑ de la seconde équation dans la première, on trouve

(17) $$f(x) = -\Delta_2\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\right],$$

ou bien, dans la forme développée

$$2\,\varphi\varphi'' = 4\,\varphi^2 f + 3\,\varphi'^2,$$

ce qui n'est, en effet, que la condition susmentionnée de T. Leko, [4].

2° Les résultats obtenus dans le premier paragraphe rendent possible la solution de deux problèmes: a) formation des formes intégrables de l'équation (1) sans aucune restriction préalable en ce qui concerne ses coefficients, b) formation des équations intégrables (1), lorsqu'un des coefficients, $\varphi(x)$, ou $f(x)$ est donné préalablement.

(2.1) La solution du problème sous a) découle directement de (1.2), car, partant de la fonction $\vartheta \equiv \vartheta(x)$ choisie arbitrairement, de (12) et de (16), on arrive directement à l'équation intégrable (1)

$$yy'' - y^2 \Delta_2(\vartheta) = \frac{a^2}{\vartheta^2(x)}, \quad (a \equiv \text{const.}) \tag{18}$$

Exemple. Si $\vartheta(x) \equiv mx + n$, ($m = \text{const.}$, $n = \text{const.}$), on trouve $\Delta_2(\vartheta) = 0$ de sorte que (18) devient

$$yy'' = \frac{a^2}{(mx + n)^2}.$$

Son intégrale générale est, en vertu de (14) et de (15)

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{m}\left(n + \frac{1}{mt}\right), \\ y &= -\frac{a}{mt} \cdot z \end{aligned}\right\}$$

où z est donné par l'égalité (9).

(2.2) Le cas où le coefficient $\varphi(x)$ est doneé par avance correspond au fond au problème de (2.1). Car, le coefficient $f(x)$ est obtenu directement de (17) et (1) affecte alors la forme

$$yy'' - y^2 \Delta_2\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\right] = \varphi(x). \tag{19}$$

Exemple. Soit $\varphi(x) \equiv k^2 x^{2m}$, ($k = \text{const.}$). Alors, de (17) on trouve

$$f(x) = -\Delta_2\left(\frac{1}{kx^m}\right) = \frac{m(m+1)}{x^2},$$

de sorte que (19) devient

$$yy'' - \frac{m(m+1)}{x^2} y^2 = k^2 x^{2m}.$$

Son intégrale générale est

$$x=\left[\frac{a^2}{k^2}(1-2m)\,t\right]^{\frac{1}{1-2m}}$$

$$y=\frac{a^2}{k}\left[\frac{a^2}{k^2}(1-2m)\,t\right]^{\frac{m}{2m-1}}z,$$

où z est obtenu de (9).

(2.3) Cependant, si le coefficient $f(x)$ est donnée par avance, alors doit être intégrable aussi l'équation (12)

$$\Delta_2(\vartheta)=-f(x),$$

car c'est seulement à cette condition-là qu'on peut déterminer $\varphi(x)$ de (16)

$$\varphi(x)=\frac{a^2}{\vartheta^2(x)}.$$

Dans ce cas-là, l'équation intégrable affecte la forme

(20) $$yy''+y^2 f(x)=\frac{a^2}{\vartheta^2(x)},$$

où $\vartheta(x)$ représente une solution de l'équation

(21) $$\Delta_2(\vartheta)=-f(x)$$

Exemples. 1. Soit $f(x)\equiv m$, ($m=$const.). L'équation (12) s'énonce comme $\Delta_2(\vartheta)=-m$, et une de ses solutions

a) pour $m<0$, $\vartheta=e^{x\sqrt{m}}$,

b) pour $m>0$, $\vartheta=\sin x\sqrt{m}$.

Dans le cas a) l'equation (20) affecte la forme

$$yy''+my^2=a^2 e^{-2x\sqrt{m}}.$$

Son intégrale générale est

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{1}{2m}\ln(-2t\sqrt{m}),\\ y&=a(-2t\sqrt{m})^{-1/2}\cdot z.\end{aligned}\right\}$$

Dans le cas b) l'équation (20) devient

$$yy''+m\,y^2=\frac{a^2}{\sin^2 x\sqrt{m}},$$

et son intégrale générale

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{\sqrt{m}}\operatorname{arc\,cotg}(-t\sqrt{m}),\\ y&=\frac{az}{\sqrt{1+mt^2}}. \end{aligned}\right\}$$

Dans l'un et dans l'autre cas z est donné par l'expression (9).

2. A la condition $f(x)=-\frac{\lambda^2}{x^4}$, $(\lambda\equiv\text{const.})$ correspond l'équation linéaire $\Delta_2(\vartheta)=\frac{\lambda^2}{x^4}$, dont une solution est $\vartheta=xe^{\lambda/x}$.

L'équation correspondante (20) est

$$x^4\,yy''-\lambda\,y^2=a^2\,x^2\,e^{-\lambda/x},$$

et con intégrale générale

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{2\lambda}{\sin 2\lambda t}\\ y&=-\frac{a\sqrt{2\lambda t}}{t\ln 2\lambda t}\cdot z \end{aligned}\right\}$$

où z est donné par la relation (9).

3° En utilisant un théorème sur l'équation différentielle linéaire homogène récurrente du deuxième degré, [6], on peut pour toute forme intégrable de l'équation (20), sous la condition (21), former une suite infinie d'équations intégrables de la même forme.

Ce théorème est conçu en termes suivants:

A toute équation linéaire homogène intégrable

$$\Delta_2(\vartheta)=\Phi,\quad (\Phi\equiv\Phi(x)),$$

correspond la suite d'équations intégrables

$$\Delta_2(\vartheta_k)=\Phi+\lambda_k,\quad (k=1,2,3,\ldots) \tag{22}$$

où

$$\lambda_k = \sum_{\nu=0}^{k-1} \left\{ \Delta_2 \left[\frac{1}{p\sqrt{X_\nu - \Delta_2(p)}} \right] \right\} - k\,\Delta_2(p), \tag{23}$$

et où $p \equiv p(x)$ est la fonction arbitraire de la variable x.

Les fonctions X_ν sont déterminées par la formule récurrente

$$X_\nu = X_{\nu-1} + \Delta_2 \left[\frac{1}{p\sqrt{X_{\nu-1} - \Delta_2(p)}} \right] - \Delta_2(p), \quad (X_0 \equiv \Phi). \tag{24}$$

Les intégrales générales de ces équations sont

$$\vartheta_k = \vartheta \prod_{\nu=0}^{k-1} \left[\frac{\Delta_1\left(\frac{\vartheta_\nu}{p}\right)}{\sqrt{X_\nu - \Delta_2(p)}} \right], \quad (\vartheta_0 \equiv \vartheta). \tag{25}$$

L'importance de ce théorème consiste dans le fait que, partant d'une équation homogène intégrable du deuxième degré on peut former une suite infinie d'équations intégrables, toutes de même forme, et leurs solutions sont obtenues de la solution de l'équation donnée exclusivement par des opérations algébriques et la différentiation relative.

Tenant compte du fait que dans les équations particulières figure aussi la fonction arbitraire $p \equiv p(x)$, le cercle des équations intégrables (20) peut être élargi arbitrairement.

(3.1) Si dans (20) on pose $f(x) = -\Phi(x)$ on obtient

$$yy'' - y^2\,\Phi(x) = \frac{a^2}{\vartheta^2(x)}, \tag{26}$$

et la condition (21) se réduit à l'équation linéaire

$$\Delta_2(\vartheta) = \Phi(x). \tag{27}$$

De la supposition que l'équation (27) est intégrable et que $\vartheta \equiv \vartheta(x)$ est une de ses solutions, et en vertu du théorème cité ci-dessus, il s'ensuit que toute équation

$$y_k\,y_k'' - y_k^2\,\Phi_k(x) = \frac{a^2}{\vartheta_k^2(x)}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{28}$$

est aussi intégrable et que

$$\Delta_2(\vartheta_k) = \Phi_k(x); \quad \Phi_k(x) = \Phi(x) + \lambda_k,$$

où λ_k est déterminé par les égalités (23) et (24) et ϑ_k par l'égalité (25).

Les intégrales générales des équations (28) sont obtenues de (3)

(29)
$$\left.\begin{aligned} x_k &= \alpha_k(t) \\ y_k &= \beta_k(t)\cdot z \end{aligned}\right\}$$

où, en vertu de (14)

(30)
$$t = \int \frac{d\,\alpha_k}{\vartheta_k^2(\alpha_k)},$$

et en vertu de (15)

(31)
$$\beta_k = a\,\vartheta_k(\alpha_k).$$

(3.1.1) Si l'on introduit la supposition $p \equiv \text{const.}$, les formules (23), (24) et (25) affectent des formes plus simples

(32)
$$\lambda_k = \sum_{\nu=0}^{k-1}\left[\Delta_2\left(\frac{1}{\sqrt{X_\nu}}\right)\right], \quad (X_0 \equiv \Phi)$$

(33)
$$X_\nu = X_{\nu-1} + \Delta_2\left(\frac{1}{\sqrt{X_{\nu-1}}}\right),$$

(34)
$$\vartheta_k = \vartheta \prod_{\nu=0}^{k-1}\left[\frac{\Delta_1(\vartheta_\nu)}{\sqrt{X_\nu}}\right], \quad (\vartheta_0 \equiv \vartheta)$$

Exemple. Pour plus de simplicité on prend $p \equiv \text{const.}$, et des équations (28) on n'a formé que la première, pour $k = 1$

a) Si dans (27) on pose $\Phi(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ on truove $\vartheta = \sqrt{x^2+1}$ de sorte que (26) apparaît sous la forme

(35)
$$yy'' - \frac{y^2}{(x^2+1)^2} = \frac{a^2}{x^1+1}$$

De (14) il résulte

$$t = \int \frac{d\,\alpha}{\alpha^2+1} = \text{arc tg}\,\alpha,$$

d'où

$$\alpha = \operatorname{tg} t,$$

et de l'équation (15)

$$\beta = a\sqrt{\alpha^2+1} = \frac{a}{\cos t}.$$

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (35) est

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{tg} t \\ y &= \frac{a}{\cos t} \cdot z \end{aligned}\right\},$$

où z est donné par l'expression (9).

b) En vertu de (32), (33) et (34) on trouve pour $k=1$

$$\lambda_1 = \frac{2}{x^2+1}; \quad x_1 = \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}; \quad \vartheta_1 = x\sqrt{x^2+1},$$

de sorte que (28) devient

(36) $$y_1 y_1'' - \frac{(2x^2+3)}{(x^2+3)^2} \cdot y_1^2 = \frac{a^2}{x^2(x^2+1)}.$$

Comme, d'après (14)

$$t = \int \frac{d\alpha_1}{\alpha_1^2(\alpha_1^2+1)},$$

d'où l'on obtient

(37) $$\frac{1}{\alpha_1} + \operatorname{arc\,tg} \alpha_1 = t$$

et en vertu de (15)

$$\beta_1 = a\,\alpha_1\sqrt{\alpha_1^2+1},$$

l'intégrale générale de l'équation (36) est alors

$$x = \alpha_1(t)$$

$$y = a\,\alpha_1\sqrt{\alpha_1^2+1} \cdot z,$$

où α_1 est donné par l'équation (37) et z par l'égalité (9).

LITTÉRATURE

[1] F. Mertens, Akademie der Wissenschaften in Wien, 126, 1917.

[2] W. Wirtinger, Akademie der Wissenschaften in Wien, 1919.

[3] J. J. Müller, *Oscillations électroniques dans le magnétron*, Revue Electricité 42, (1937).

[4] T. Leko, *Ueber die Integration der Differentialgleichung* $yy'' + y^2 f(x) = \varphi(x)$, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, T. 10, № 1, (1955), Zagreb.

[5] M. Petrović, *Jedan diferencijalni algoritam i njegove primene* (Un algorithme différentiel est ses applications, en serbe) Posebna izdanja SAN (Monographies de l'Académie Serbe des Sciences) vol. CXI, 1936, Beograd.

[6] I. Bandić, *On a recurrent linear differential equation of second order*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Zagreb, 1957.

О ИНТЕГРАЦИЈИ ЈЕДНЕ НЕЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА

И. БАНДИЋ, БЕОГРАД

Резиме

Диференцијална једначина (1) решавана је само у неким специјалним случајевима, [1] и [2]. Једно општије решење је дао Т. Леко, [3], налазећи да се (1) решава квадратурама кад је задовољен услов (2).

У овом раду је најпре изведен услов међу коефицијентима $f(x)$ и $\varphi(x)$ кад се (1) решава квадратурама, а затим је показано да се, полазећи од једне интеграбилне једначине (1), може непосредно формирати један бесконачан низ интеграбилних једначина истог облика.

При извођењу те методе примењени су релативни изводи М. Петровића, [5].

Уводећи супституцију (3), односно (4), долази се до једначине (5), која се при услову (6) и (7) трансформише у интеграбилну једначину (8), чији је општи интеграл дат релацијом (9).

Решење система (6) дато је једначинама (14) и (15), а из (7) следује једначина (16) којом је одређено $\varphi(x)$ кад се (1) решава квадратурама.

У т. 2^0 се на основу тога решавају два задатка:

а) формирање интеграбилног облика једначине (1) без икаквог унапред датог ограничења међу њеним коефицијентима;

б) формирање интеграбилне једначине (1) кад је један од коефицијената, $\varphi(x)$ или $f(x)$, унапред дат.

Решење задатка под а) непосредно проистиче из (1,2), јер се, полазећи од произвољне изабране функције $\vartheta \equiv \vartheta(x)$, из (12) и (16) директно долази до интеграбилне једначине (18).

И случај кад је дато $\varphi(x)$ решава се непосредно пошто се $f(x)$ добија директно из (17), из чега произилази интеграбилна једначина (19).

Међутим, кад је дат коефицијент $f(x)$, онда мора бити интеграбилна и линеарна једначина (12). Уз ту претпоставку интеграбилна једначина (1) јавља се у облику (20).

У т. 3^0 је показано да се за сваки интеграбилан облик једначине (20) може формирати бесконачан низ интеграбилних једначина истог облика, користећи се једном теоремом о рекурентној хомогеној линеарној диференцијалној једначини другог реда, [6].

Полазећи од једначине (26), и уз претпоставку да је линеарна једначина (27) интеграбилна, долази се до низа интеграбилних једначина (28) чија су решења дата системом (29) и једначинама (30) и (31).

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd Yougoslavie

QUELQUES REMARQUES SUR LES CONDITIONS DE SÉPARATION T_1, T_2, T_3 DANS UNE CLASSE D'ESPACES EN TOPOLOGIE GÉNÉRALE

par ZLATKO MAMUZIĆ, BEOGRAD

Dans [3] j'ai défini une classe d'espaces abstraits comme suit. Soient E, M deux ensembles non vides, f une application de l'ensemble-produit $E\times E$ dans M et F une famille de sous-ensembles de M telle que pour chaque X dans F on ait $\{f(a, a) \mid a\in E\}\subset X$. D'autre part, B_F étant une famille d'ensembles inclusivement[1] équivalente à F (on peut supposer tout de suite que B_F soit celle des familles d'ensembles inclusivement équivalentes à F, dont la puissance est la plus petite), posons:

U = la collection de tous les sous-ensembles V de $E\times E$ contenant au moins un élément de la famille de sous-ensembles

$$f^{-1}(B_F)=\{f^{-1}(X)\mid X\in B_F\},\ f^{-1}(X)=\{(x, y)\mid (x, y)\in E\times E, f(x, y)\in X\},\ X\in B_F.$$

En topologisant l'ensemble E de la façon suivante:

on dira que $a\in\overline{S}$, $a\in E$, $S\subset E$, si et seulement si pour chaque $X\in F$ il existe au moins un point b de S tel que $f(a, b)\in X$, ou bien par:

on dira que $a\in\overline{S}$, $a\in E$, $S\subset E$, si et seulement si pour chaque V de U il existe au moins un point b de S tel que $(a, b)\in V$, — on obtient la même topologie généralisée sur E et les deux systèmes de voisinages

$$W_X(a)=\{b\mid b\in E,\ f(a, b)\in X\},\quad X\in F,\ a\in E, \tag{1}$$

resp.

$$V(a)=\{b\mid b\in E,\ (a, b)\in V\},\quad V\in U,\ a\in E, \tag{2}$$

sont équivalents.

---

[1] On dira que les familles d'ensembles Φ et Ψ sont inclusivement équivalentes si pour chaque élément $\varphi\in\Phi$ il existe au moins un élément $\psi\in\Psi$ tel que $\psi\subset\varphi$, et inversement.

Pour qu'un espace ainsi défini soit à topologie transitive (c. à. d. pour qu'il vérifie l'axiome de transitivité $\alpha: \bar{\bar{S}}=\bar{S}, S\subset E$) une condition nécessaire et suffisante et la suivante ([3], p. 5):

(*e*) *Pour tout triplet de points a, b, c de E et chaque $X\in F$ il existe Y, Z dans F tels que*

$$[f(a, b) \in Y \& f(b, c) \in Z] \rightrightarrows [f(a, c) \in X].$$

La condition (*e*) étant supposée vérifiée, l'espace défini plus haut peut être reconstruit par les intérieurs des voisinages (1) et si l'on pose

$$\bigcup_{a\in E}\{f(a, b) \mid b\in int\, W_X(a)\} = X^i,\ X\in F,$$

on voit immédiatement que $W_{X^i}(a) = int\, W_X(a)$ pour tout point $a\in E$ et chaque $X\in F$.

Considérons encore la condition:

(*s*) *Pour tout couple de points a, b dans E et chaque $X\in F$ il existe au moins un élément $Y\in F$ tel que*

$$[f(b, a) \in Y] \rightrightarrows [f(a, b) \in X].$$

Ceci étant, démontrons tout d'abord les propositions suivantes.

Proposition 1. *Si les conditions (e) et (s) sont vérifiées, pour tout couple de points a, b dans E et chaque $X\in F$ il existe Y_0, X_0 dans F tels que $f(b, a) \in Y_0^i$ entraîne $f(a, b) \in X_0^i$.*

Démonstration. Soit (a, b) un élément quelconque de $E\times E$. Les éléments $f(b, a)$ et $f(a, b)$ sont bien déterminés et, d'après (*s*), pour chaque $X\in F$ il existe $Y\in F$ tel que si $f(b, a)\in Y$ on a $f(a, b)\in X$. Un élément X de F étant choisi et $Y\in F$ ainsi déterminé, il existe Y_0, X_0 dans F tels que $W_Y(b)\subset W_{Y_0^i}(b)$ et $W_X(a)\subset W_{X_0^i}(a)$, puisque l'espace correspondant peut être reconstruit par les intérieurs des voisinages (1). C'est ainsi que $f(b, a)\in Y_0^i$ et, puisque $f(a, b)\in X$, on doit avoir aussi $f(a, b)\in X_0^i$, c. q. f. d.

Proposition 2. *Si la condition (s) est vérifiée et si $a\in' \bar{S}$, $a\in E$, $S\subset E$, pour tout point $x\in S$ il existe $X\in F$ tel que $a\in' W_X(x)$.*

Démonstration. Supposons le contraire: soit $a\in W_X(x)$ pour chaque $X\in F$, x étant un point arbitraire de S ne satisfaisant pas à l'énoncé de la proposition, on aurait donc $f(x, a)\in X$ pour chaque $X\in F$. La condition (*s*) étant vérifiée par hypothèse, cela signifierait que pour tout X dans F il existe effectivement un $Y\in F$ tel qu'on ait:

$$[f(x, a) \in Y] \rightrightarrows [f(a, x) \in X],$$

c. à. d. on devrait avoir $x \in W_X(a)$ pour chaque $X \in F$, ce qui est impossible vu que $a \in' \bar{S}$, c. q. f. d.

Si la condition (s) est vérifiée et si $a \in' \bar{S}$, $a \in E$, $S \subset E$, d'après la proposition pécédente on aura $a \in' W_{X^i}(x)$, $x \in S$, pour au moins un élément X de F puisque $W_{X^i}(x) = int\, W_X(x) \subset W_X(x)$.

Posons

$$\bigcup_{x \in S} W_{Z_x^i}(x) = H,$$

Z_x étant un élément de F tel que $a \in' W_{Z_x^i}(x)$. D'après la proposition 2, Z_x existe pour chaque point x dans S.

Proposition 3. *Si les conditions (e) et (s) sont vérifiées et si $a \in' \bar{S}$, $a \in E$, $S \subset E$, il existe au moins un élément X_a de F tel que le voisinage $W_{X_a^i}(a)$ soit disjoint de l'ensemble H.*

Démonstration. Supposons au contraire qu'un tel ensemble $X_a \in F$ n'existe pas, on aurait donc

$$W_{X^i}(a) \cap H \neq v, \quad (v = \text{l'ensemble vide}),$$

pour chaque $X \in F$. Par conséquent, pour tout $X \in F$ il existerait un point $c \in E$ dépendant de X et appartenant à la fois à $W_{X^i}(a)$ et à H, c. à. d.

$$c \in W_{X^i}(a), \; c \in \bigcup_{x \in S} W_{Z_x^i}(x), \; Z_x \in F, \; X \in F.$$

Le point c appartenant à H, désignons par ξ le point de S, dépendant de X, dont le voisinage $W_{Z_\xi^i}(\xi)$ contient le point c. On aurait

$$f(a,c) \in X^i, \quad f(\xi, c) \in Z_\xi^i,$$

pour chaque $X \in F$, c et ξ dépendant de X. Vu que pour chaque $X \in F$ il existe ξ tel que $f(\xi, c)$ se trouve dans Z_ξ^i et la condition (s) étant supposée satisfaite, d'après la proposition 1 cela signifie que pour chaque $Y \in F$ il existe $\xi \in S$ et $Y_0 \in F$ tel que

$$[f(\xi, c) \in Z_\xi^i] \rightrightarrows [f(c, \xi) \in Y_0^i].$$

En conséquence, on devrait avoir les implications suivantes:

$$[f(a, c) \in X^i \;\&\; f(\xi, c) \in Z_\xi^i] \rightrightarrows [f(a, c) \in X^i \;\&\; f(c, \xi) \in Y_0^i],$$

$$[f(a, c) \in X^i \;\&\; f(c, \xi) \in Y_0^i] \rightrightarrows [f(a, \xi) \in X^i],$$

la dernière résultant de la proposition suivante ([3], p. 5): *si la condition* (e) *est satisfaite, pour tout triplet de points* α, β, γ *dans* E *et chaque* $X \in F$ *il existe* $Y \in F$ *tel que*

$$[f(\alpha, \beta) \in X^i \,\&\, f(\beta, \gamma) \in Y^i] \rightrightarrows [f(\alpha, \gamma) \in X^i].$$

On voit donc que pour chaque $X \in F$ il existerait un point ξ dans S tel que $\xi \in W_{X^i}(a)$, d'où $a \in \overline{S}$ contrairement à l'hypothèse, c. q. f. d.

De ce qui précède on déduit immédiatement les théorèmes suivants.

Théorème 1. *Si les conditions* (e) *et* (s) *sont vérifiées, tout espace défini par le système de voisinages* (1) *correspondant vérifie l'axiome de séparation* T_3.

Démonstration. En effet, dans tout espace de voisinages de M. Fréchet vérifiant l'axiome de transitivité α, l'axiome de séparation T_3 équivaut ([1], p. 43) à la condition suivante, dûe à A. Appert:

T_3'. *Si un point* a *n'est pas contigu à un ensemble* S, *c. à. d. si* $a \in '\overline{S}$, a *et* S *possèdent des entourages disjoints.*

Or l'ensemble $H = \bigcup_{x \in S} W_{Z_x^i}(x)$ est un entourage de S et, d'après la proposition 3, il existe un entourage $W_{X_a^i}(a)$ du point $a \in '\overline{S}$ disjoint de H. Ainsi la condition T_3' de A. Appert est satisfaite et puisque tout espace de voisinages (1) satisfaisant à la condition (e) est à topologie transitive, l'axiome T_3 est aussi vérifié[1], c. q. f. d.

Théorème 2. *Si les conditions* (e), (s) *sont vérifiées et si la condition*

$$\bigcap_{X \in F} X = \{f(a, a) \mid a \in E\}, \tag{3}$$

est satisfaite tout espace défini par le système de voisinages (1) *correspondant vérifie l'axiome de séparation* T_2.

Démonstration. En effet, nous avons démontré ([3], p. 9) que (3) est la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace défini par le système de voisinages (1) vérifie l'axiome de séparation T_1. Or, dans tout espace de voisinages on a l'équivalence $[T_1 \,\&\, T_3] \rightleftarrows [T_2 \,\&\, T_3]$ d'où le théorème 2, vu le théorème 1, c. q. f. d.

---

[1] Si l'on remarque que sous la condition (e) l'ensemble $\overline{S}$ est fermé, on obtient le théorème 1 comme une conséquence immédiate de la proposition 3.

Les résultats précédents montrent bien le rôle important des conditions (e) et (s) pour qu'un espace défini par le système de voisinages (1) vérifie les axiomes de séparation T_2 et T_3.

Cependant, on peut obtenir les résultats analogues si au lieu d'introduire la condition (s), on assujetit la famille F à la condition d'être inclusive[1] dans M. En effet, nous avons démontré ([3], p. 11—12) les propositions et les théorèmes suivants:

Proposition 4. *La famille F étant inclusive dans M, le système de voisinages* (1) *de chaque point $a \in E$ est inclusive dans E.*

Proposition 5. *La famille F étant inclusive dans M, la fermeture de chaque voisinage dans* (1) *est un élément de* (1).

Proposition 6. *La famille F étant inclusive dans M, la famille des fermetures de tous les voisinages* (1) *de chaque point $a \in E$ forme un système de voisinages équivalent au système* (1).

Vu la proposition 6 on déduit immédiatement:

Théorème 3. *Si la famille F est inclusive dans M et si la condition* (e) *est satisfaite tout espace défini par le système de voisinages* (1) *correspondant vérifie l'axiome de séparation T_3.*

Théorème 4. *Si la famille F est inclusive dans M et si la condition* (3) *est satisfaite tout espace défini par le système de voisinages* (1) *correspondant vérifie l'axiome de séparation T_2.*

En effet, la supposition (3) équivaut au fait que $\bigcap_{X \in F} W_X(a) = \{a\}$, pour chaque point $a \in E$. D'après la proposition 6 on aura

$$[\bigcap_{X \in F} W_X(a) = \{a\}] \rightleftarrows [\bigcap_{X \in F} \overline{W_X(a)} = \{a\}], \quad a \in E,$$

c'est-à-dire

$$[b \neq a] \rightrightarrows [b \in' \bigcap_{X \in F} \overline{W_X(a)}];$$

donc, il existe $Y \in F$ tel que $b \in' \overline{W_Y(a)}$, c. à. d. il existe $Z \in F$ tel que $W_Z(a) \cap W_Y(a) = v$, c. q. f. d.

D'autre part, si la famille F est semi-multiplicative (ou un filtre sur M) on peut prouver ([3], p. 14) que la simultanéité des conditions (e) et (s) équivaut à la condition:

---

[1] La famille d'ensembles Φ est inclusive dans un ensemble P si l'on a l'implication suivante:

$$[\varphi \in \Phi \,\&\, P \supset \psi \supset \varphi] \rightrightarrows [\psi \in \Phi].$$

(u) *Pour tout triplet de points a, b, c de E et pour tout $X \in F$ il existe $Y \in F$ tel que*

$$[f(a, b) \in Y \,\&\, f(a, c) \in Y] \rightrightarrows [f(b, c) \in X].$$

Avant de voir quelques conséquences des résultats précédents remarquons encore que dans [4], p. 201, nous avons caractérisé les espaces semi-uniformes de A. Appert ([1], p. 133) par la classe[1] des espaces définis par le système de voisinages (1) vérifiant les conditions (e) et (s). Si de plus la famille F est semi-multiplicative (ou un filtre sur M) et si par $E(M_F)$ on désigne la classe des espaces définis par les systèmes de voisinages (1) correspondants, on peut caractériser ([5], p. 4—6) les espaces uniformisables (et separés) au sens de la définition de N. Bourbaki ([2], p. 156) par la classe d'espaces $E(M_F)$ vérifiant la condition (u) (et la condition (3)).

Une conséquence des considérations précédentes et la suivante. D'après le théorème 1, les conditions (e) et (s) entraînent l'axiome de séparation T_3, c. à. d. que dans ce cas on obtient un espace $(V_{\alpha T_3})$. Si de plus la condition (3) est satisfaite on aura un espace $(V_{\alpha\, T_1\, T_3})$, c. à. d. d'après le théorème 2, un espace $(V_{\alpha\, T_2\, T_3})$. Si l'on y suppose encore que la famille F est semi-multiplicative, ce qui implique l'axiome de distributivité D (si $S_1 \subset E, S_2 \subset E$, alors $\overline{S_1 \cup S_2} \subset \overline{S}_1 \cup \overline{S}_2$), on aura un espace $(V_{\alpha\, D\, T_2\, T_3})$, c. à. d. un espace topologique régulier. Mais, d'après la remarque précédente les espaces uniformisables et séparés peuvent être caractérisés dans ce cas par la classe des espaces $E(M_F)$ vérifiant les conditions (e), (s) et (3). Puisqu'au moyen des collections U, définies au début de cet article, on peut passer aux structures uniformes, on voit bien d'où provient la proposition intéressante dûe à N. Bourbaki ([2], p. 142): *Pour que la topologie d'un espace uniforme soit séparée, il faut que sa structure uniforme soit séparée; inversement, tout espace uniforme dont la structure uniforme est séparée est régulier.* En effet, elle provient des conditions (e), (s) et (3) (c. à. d. de leurs équivalents exprimés au moyen d'éléments de la collection U), la propriété de F d'être semi-multiplicative n'impliquant que l'axiome de distributivité D et offrant une possibilité d'introduire la condition (u) au lieu de (e) et (s). Si la famille F est semi-multiplicative et inclusive dans M c. à. d. si F est un filtre sur M, les théorèmes 1, 2, 3 et 4 montrent que, dans ce cas, on obtient les mêmes conséquences de deux côtés à la fois.

Comme une autre conséquence des résultats présentés plus haut notons encore ici que par le théorème 1 nous avons démontré un résultat déjà entrevu par nous ([4], p. 202) et obtenu comme suit. A. Appert a

[1] Autrement dit, la classe des espaces semi-uniformes est topologiquement identique à la classe des espaces définis par les systèmes de voisinages (1) vérifiant les conditions (e) et (s).

démontré ([1], p. 133—134) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace topologique généralisé soit topologiquement identique à au moins un espace semi-uniforme, est la suivante:

C. Si un point n'est pas contigu à un ensemble S, c. à. d. si* $a \in' \overline{S}$, *il existe une fonctionelle à la fois semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement sur tout l'espace, égale à* 0 *en a, égale à* 1 *en tout point de S et ayant toutes ses valeurs dans l'intervalle* [0,1].

De plus, le même auteur a prouvé que si la condition C^* est satisfaite l'axiome de transitivité α et l'axiome de séparation T_3 sont vérifiés à la fois. Puisque les conditions (e) et (s) suffisent pour caractériser la classe des espaces semi-uniformes par la classe des espaces définis par le système de voisinages (1), nous en avons déduit qu'alors les conditions (e) et (s) doivent impliquer l'axiome de séparation T_3. Dans [4], p. 202, nous avons déduit d'une façon analogue les propositions 3.4.15 et 3.4.16 qui ne sont autres que des conséquences immédiates des considérations précédentes.

RÉFÉRENCES

[1] A. Appert et Ky-Fan, *Espaces topologiques intermédiaires*, Hermann & C-ie, 1951, Paris.

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. II, Hermann & C-ie, 1951, Paris.

[3] Z. Mamuzić, *Structures topologiques définies sur un ensemble E par des structures sur un ensemble M et par application* $f(E \times E) \subset M$, Zbornik Mašinskog fakulteta, 1954—55, Beograd.

[4] Z. Mamuzić, *Structures topologiques [uniformes] diverses définies sur un ensemble E par application* $f(E \times E) \subset M$, *dans un ensemble ordonné [quelconque] M*, Bull. de la Soc. des math. et phys. de la R. P. de Serbie, VII, 3—4 (1955), Beograd.

[5] Z. Mamuzić, *Sur la caractérisation des espaces uniformisables*, Publ. de la Faculté d'Eléctrotechnique de l'Univ. à Belgrade, № 9, 1956.

НЕКЕ ПРИМЕДБЕ О АКСИОМИМА СЕПАРАЦИЈЕ T_1, T_2, T_3 У ЈЕДНОЈ КЛАСИ ПРОСТОРА ОПШТЕ ТОПОЛОГИЈЕ

ЗЛАТКО МАМУЗИЋ, БЕОГРАД

Садржај

Класу простора дефинисаних системима околина (1) као и услове (e) и (s) разматрао је аутор у раду [3] а овде доказује следеће ставове (за појмове, дефиниције и ознаке вид. поменути рад [3]):

1. Ако су испуњени услови (e) и (s), за сваки пар тачака a, b у E и свако $X \in F$ постоје Y_0, X_0 у F тако да из $f(b, a) \in Y_0^i$ следи $f(a, b) \in X_0^i$.

2. Ако је испуњен услов (s) и ако је $a \in' S$, $a \in E$, $S \subset E$, за сваку тачку $x \in S$ постоји $X \in F$ тако да $a \in' W_X(x)$.

3. Ако су испуњени услови (e) и (s) и ако $a \in' \overline{S}$, $a \in E$, $S \subset E$, тада постоји бар један елемент X_a у F тако да околина $W_{X_a^i}(a)$ нема ниједне тачке за једничке са скупом $H = \bigcup_{x \in S} W_{Z_x^i}(x)$, $Z_x \in F$.

Из ставова 1, 2, 3 следи:

4. Ако су испуњени услови (e) и (s), сваки простор дефинисан кореспондентним системом околина (1) *верификује аксиом сепарације T_3.*

5. Ако су испуњени услови (e), (s) и (3), *сваки простор дефинисан кореспондентним системом околина* (1) *верификује аксиом сепарације T_2.*

Наведене ставове, њихове доказе и остале резултате изложене у овом раду, користи аутор у извођењу закључака како о значајној улози услова (3), (*e*) и (*s*) за верификовање аксиома сепарације T_1, T_2, T_3 у класи простора дефинисаних системима околина (1) тако и њиховим последицама у вези неких ранијих резултата N. Bourbaki-а, A. Appert-а и аутора.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie

ELTROVADO DE LA VEKTORAJ ELEMENTOJ DE PLANEDET-ORBITO EL DU OBSERVOJ KAJ LA MOVIĜDIREKTO I (TEORIO)

BOŽ. POPOVIĆ, SARAJEVO

1) La problemo kaj la solvo-principo

Ekzistas granda nombro de planedetoj observitaj nur dufoje (aŭ plurfoje, sed kun tiel malgranda tempodistanco ke oni ne povas per la ekzistantaj metodoj kalkuli la orbitelementojn). Se krome, por unu el la du observoj, estas signita sufiĉe precize ankaŭ la moviĝdirekto laŭ la postsigno sur la fotoplako, aŭ se ni havas la eblecon eltiri ĝin el du (aŭ pluraj) proksimaj observoj, tiam tamen oblas trovi la vojet-elementojn. Pro malpli precizaj donoj pri la moviĝdirekto kaj pro malpligranda tempodistanco, ĉi tiuj elementoj estos malpli certaj ol tiuj kiujn ni trovus el tri preskaŭ egaldistancaj observoj, sed tamen ili ne estas forĵetendaj, ĉar ili povas servi por la unua venanta opozicio kaj ebligi denovan trovon de la planedeto — kiome ĝiaj brilo kaj pozicio ne malebligas la observon dum tiu opozicio. Povas okazi ankaŭ ke la planedeto estis observata en la antaŭa opozicio, same tiel nesufiĉe, kaj la elementoj, respektive efemerido kalkulita baze je tiuj elementoj, ebligus la identigon. Pro tio oni bezonas havi metodon kiu ebligus relative facile eltiri de la donitaj observoj eblan maksimumon koncerne eltrovon de la planedet-elementoj, nome: trovi la orbiton kiu tute kongruos la faritajn observojn (kompreneble en la limoj de la observo-precizeco).

Solvo de la problemo principe jam ekzistas (ekz. [1], p. 177), sed ĝi ankoraŭ ne estis detaligita tiom ke oni povus efektive atingi la starigitan celon. Por la praktika efektivigo de la solvo oni devis prilabori tute novan metodon, ĉar la ekzistantaj metodoj ne povas helpi. Dum la metodoj de *Gauss*-tipo uzas nur pozici-vektorojn, kaj la *Laplace*-tipaj (metodoj) uzas eltiratan akcelon, ĉi tie oni ja devas utiligi eltiratan rapidon.

La nova metodo ekiras de la sama ekvacio kiu pere de rapido ligas du najbarajn poziciojn, de kiu ekiras ankaŭ *Lagrange* [4] en sia metodo· Sed *Lagrange* eliminas la rapidon kaj per tio li faligas sian metodon al la *Gauss*-tipo. *Andoyer* [1] kaj aliaj kiuj provas revivigi *Lagrange*-metodon, ekz. [2], [3], [6]) ne eliminas la rapidon, tamen preninte proksimumaĵojn por f kaj g li denove faligas la metodon al *Gauss*-tipo. Sed por solvi ĉi tiun problemon, kiam du el tri observoj estas proksimaj, oni nepre devas konservi la rapidon, t. s. doni tute novan metodon.

Por ke ĉi tiu metodo (kiun oni povas same prilabori en diversaj variantoj) donus utilajn rezultatojn, t. e. maksimumon eltireblan de la haveblaj donoj, oni bezonis plenumi tri taskojn: 1) trovi la proceдon por plejeble preciza kalkulo de la moviĝdirekto (kio estas farita en la artikolo [9]), 2) efektivigi praktikan kaj certan vojon por precize kalkuli f kaj g (kio estas jam farita en la artikolo [10]) kaj 3) detale prilabori la metodon mem (kio estas enhavo de ĉi tiu verketo). Solvinte ĉi tiujn tri problemojn, mi opinias ke estas verkita nova metodo, principe egalrajta al la metodoj de aliaj tipoj, kun avantaĝa apliko nur en la okazoj kiam ni havas du (aŭ pli) prokcimajn, kaj unu iom pli malproksiman, observojn.

De speciala intereso ĉi-rilate estas la metodo de Väisälä [12]. Ĝi estas iusence metodo de transira tipo inter Gauss-a kaj nova tipo, ĉar ĝi ne eliminas suncentran rapidon, sed ankaŭ ne uzas tercentran rapidon (t. e. la derivon de la tercentra observodirekto). Pro neuzo de la unua derivo, forfalas la unua de tri supre menciitaj taskoj, sed aliflanke tio malebligas la uzadon de la metodo por la celo kiun ni pritraktas: eltrovo de la elementoj el konataj du observoj kaj la moviĝdirekto. Estu permesata mencii ĉi tie ke la efikeco de la Väisälä-metodo plikreskus se oni por f kaj g uzus la menciitajn tabelojn el mia artikolo [10].

Antaŭ ol transiri al la detaloj, mi montru ĉefajn signaĵojn kaj la solvoprincipon — nur ĝenerale.

La observodirektojn de la planedeto en la momentoj t kaj t_1 ni signu per $\bar{e}$ kaj $\bar{e}_1$, iliajn tercentrajn (aŭ pli bone baricentrajn) distancojn per ρ kaj ρ_1, per $\bar{R}$ kaj $\bar{R}_1$ la respektivajn poziciojn de la Suno, per $\bar{e}'$, ρ' kaj $\bar{V}$ la derivojn de ĉi tiuj kvantoj por la momento t. Kun tiaj signaĵoj ni havos por la suncentraj pozicioj ($\bar{r}$, $\bar{r}_1$) kaj por la rapido ($\bar{v}$) de planedeto:

(1) $$\bar{r}=-\bar{R}+\rho\,\bar{e},\quad \bar{r}_1=-\bar{R}_1+\rho_1\,\bar{e}_1\,,$$

(2) $$\bar{v}=-\bar{V}+\rho\,\bar{e}'+\rho'\,\bar{e}.$$

Ci tiuj vektoroj devas esti ligitaj per

(3) $$\bar{r}_1=f\,\bar{r}+\tau\,g\,\bar{v},$$

kie $\tau = k(t_1 - t)$ kaj f, g estas la kvantoj dependaj de $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$, precize kalkuleblaj laŭ la vojo donita en la verketo [10]. Anstataŭiginte (1) kaj (2) en (3) ni ricevas la vektorekvacion

$$-\bar{R}_1 + \rho_1 \bar{e}_1 = f(-\bar{R} + \rho \bar{e}) + \tau g(-\bar{V} + \rho \bar{e}' + \rho' \bar{e}), \tag{4}$$

en kiu la nekonatoj estas ρ, ρ' kaj ρ_1. La solvo de ĉi tiu ekvacio estas ankaŭ la solvo de la problemo, ĉar tiam de (1) kaj (2) ni trovas $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$, kaj de ili tuj la *vektorajn elementojn*:

$$\bar{C} = [\bar{r}\ \bar{v}], \quad \bar{D} = [\bar{v}\ \bar{C}] - \bar{r}/r, \quad T = t - E^{-3}(u_0 - D \sin u_0)$$

kun

$$E^2 C^2 = 1 - D^2, \quad D \sin u_0 = E(\bar{r}.\ \bar{v})$$
$$D \cos u_0 = r \cdot v^2 - 1.$$

(Pli detale pri la vektoraj elementoj v. ekz. en [5], [8] aŭ [11]).

La solvo estas ebla nur en popaŝaj alproksimiĝoj, ĉar f kaj g dependas de la nekonataj $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$, t. e. de ρ kaj ρ'. Detaligo de la procedo por solvi la ekvacion (4), konsiderante samtempe la aberacion kaj la paralakson, same kiel la neprecizecon de la preparkalkulo de la vektoro $\bar{e}'$, estas la enhavo de ĉi tiu verketo. En ĝi mi donos du variantojn de ĉi tiu vektora metodo: la „unuan metodon", en kiu τ troviĝas malkaŝe kaj por f, g estas uzotaj la Tabeloj I aŭ II (de la artikolo [10]) kaj „la duan metodon", en kiu τ eniras tuj en la esprimon por la rapido, kaj sekve estas utiligota por f, g la Tabelo III.

2) Aberacia influo al la kalkulita moviĝdirekto

La aberacian influon oni kutime eliminas korektante la obsevomomentojn por $-\alpha\rho$, kie α estas la aberacia konstanto, kaj ρ la tercentra distanco. Sed tion oni povas apliki nur se oni konas ρ sufiĉe ĝuste, kio enportas postan ŝanĝon ĉe iuj jam kalkulitaj kvantoj. Krome ni ne bezonas korekti la observomomentojn mem, sed nur la tempodistancojn. Malgrandajn intervalojn (pli ĝuste: kiam estas malgranda diferenco inter tercentraj distancoj je la limoj de la intervalo) ni korektas pro la aberacia influo multiplikante ilin per la faktoro $1 - \alpha\rho'$ (*Poincaré* [7]). Ĉe pli grandaj tempointervaloj ĉi tio ne sufiĉas, sed tiam oni tamen povas ofte fari la konkludojn konsiderante tuj la aberacian influon, tiel ke la ricevitaj formuloj estas rigoraj, kaj la aplikon de la formuloj dum la kalkulado ni faras pli-malpli rigore — laŭ la ĝustecgrado kiun ni jam atingis kaj kiun ni deziras atingi.

Mi unue haltos ĉe la okazo de eltrovo de la moviĝdirekto el nur tri observoj, el kiuj du proksimas unu al la alia kaj la tria malproksimas ($\tau > 10\tau_0$), por tuj apliki la aberacian influon. Mi montros ke por tia okazo, t. e. por tre neegaldistancaj observoj, sufiĉas apliko de la faktoro (de *Poincaré*) $1+\alpha\rho'$, per kiu oni devas ĉi tie dividi la kalkulitan valoron $\bar{e}'$.

Se la intervalon de la elektita ekira (meza) observo ĝis la pli proksima observo ni signos per τ_0, kaj de ĝi ĝis la malpli proksima per τ, kaj se ni vole-nevole limiĝos je membroj de la dua grado ni havos por la momento t_0

$$\bar{e}_0 = \bar{e} + \tau_0 \bar{e}' + \frac{\tau_0^2}{2} \bar{e}'',$$

kaj por la momento t_1

$$\bar{e}_1 + \bar{e} + \tau \bar{e}' + \frac{\tau^2}{2} \bar{e}'',$$

El tiuj du ekvacioj ni facile eltrovas

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \bar{e}' = q_0 (\bar{e}_0 - \bar{e}) + q_1 (\bar{e}_1 - \bar{e}), \\ & q_0 = \frac{\tau}{\tau_0(\tau - \tau_0)}, \quad q_1 = \frac{-\tau_0}{\tau(\tau - \tau_0)}. \end{aligned} \right.$$

La aberacian konstanton ni jam signis per α, kaj la ŝanĝojn devenantaj de la aberaci-apliko ni signu per Δ (en la senco „vera — observa valoro", akceptante ke en la antaŭaj ekvacioj la valoroj τ estas observaj). Ni havos simple

$$\frac{\Delta q_0}{q_0} = \frac{\Delta \tau}{\tau} - \frac{\Delta \tau_0}{\tau_0} - \frac{\Delta\tau - \Delta\tau_0}{\tau - \tau_0} = q_1 \Delta\tau - \left(q_0 - \frac{2}{\tau - \tau_0}\right) \Delta\tau_0,$$

$$\frac{\Delta q_1}{q_1} = \frac{\Delta(-\tau_0)}{-\tau_0} - \frac{\Delta \tau}{\tau} - \frac{\Delta\tau - \Delta\tau_0}{\tau - \tau_0} = q_0 \Delta\tau_0 - \left(q_1 + \frac{2}{\tau - \tau_0}\right) \Delta\tau,$$

kaj sekve estos

$$\Delta(\bar{e}') = q_0 (\bar{e}_0 - \bar{e}) \left[q_1 \alpha (\rho_1 - \rho) - \left(q_0 - \frac{2}{\tau - \tau_0}\right) \alpha (\rho_0 - \rho) \right] +$$

$$+ q_1 (\bar{e}_1 - \bar{e}) \left[q_0 \alpha (\rho_0 - \rho) - \left(q_1 + \frac{2}{\tau - \tau_0}\right) \alpha (\rho_1 - \rho) \right].$$

Pro malgrandaj koeficientoj ni povas preni

$$\rho_0 = \rho + \tau_0 \rho', \quad \rho_1 = \rho + \tau \rho',$$

kaj plue ni havos

$$\Delta(\bar{e}') = \alpha\, q_0(\bar{e}_0 - \bar{e})\left[\rho' \frac{-\tau_0}{\tau-\tau_0} - \rho' \frac{\tau - 2\tau_0}{\tau-\tau_0}\right] + \alpha\, q_1(\bar{e}_1 - \bar{e})\left[\rho' \frac{\tau}{\tau-\tau_0} - \rho' \frac{\tau_0 + 2\tau}{\tau-\tau_0}\right] =$$

$$= -\alpha\rho' [q_0(\bar{e}_0 - \bar{e}) + q_1(\bar{e}_1 - \bar{e})].$$

Sekve, konsiderante (5), ni ricevas

$$\Delta(\bar{e}') = -\alpha\rho' \cdot \bar{e}', \tag{6}$$

kie montras ke la kalkulitan kvanton $\bar{e}'$ ni devas multipliki per $1-\alpha\rho'$ por trovi la veran valoron (liberigita de la aberacia influo). Per tio la aserto estas pruvita. Kiam ni prenas la tempounuon k^{-1} tagoj tiam la grandec-ordo de (6) estas 10^{-6}, do la sama kiel la influo de observo-eraroj al $\bar{e}'$. Pro tio oni devas apliki la aberacian korektaĵon, por plejeble izoli la influon de la observoeraroj.

Se la observoj estas iom pli egaldistancaj, ni ne povas tute uzi la supran rezonadon. Sed la diferencoj estos tiom malgrandaj ke ankaŭ ĉi tie utilos apliki dekomence la ekvacion (6), konsideronte tion poste per la rigora korekto de la tempointervaloj.

En la okazo de eltrovo de moviĝdirekto el pluraj observoj, la esenco de la supra rezonado restas senŝanĝa. Por tion pruvi ni devas ekiri de la solvo (35) el [9], simila al la formo (5). La kvantoj $(\bar{e}_i - \bar{e}_s) : \tau_i$ ne povas multe diferenci de la unua derivo. El eksplicaj esprimoj de la koeficientoj q_i, kiujn mi donis en [9] kiel (34'), (34''), ktp., oni povas vidi ke la mezaj q_i estas plej grandaj (iliaj denominatoroj estas pli grandaj kaj la numeratoroj pli malgrandaj ol ĉe aliaj) kaj ke aliaj q_i rapide dekreskas irante al la randoj, certe kun la supozo ke la observoj estas numerigitaj kronologie. Plue ni vidas ke pro la samaj kaŭzoj (simile al la supra kalkulo) log q_i estas sumo de la logaritmoj de diversaj tempointervaloj, kies ŝanĝoj (pro la aberacia influo) estas malgrandaj kvantoj. Ĉar ĉi tiujn malgrandajn kvantojn oni devas multipliki per q_i, pro $\Delta(\log q_i) = \Delta q_i / q_i$, la beracia influo estas same plej granda ĉe la mezaj membroj, kaj multe pli malgranda ĉe la randoj. Kaj ĉar tiuj kvantoj estas malgrandaj, ni povas fari la samajn proksimumigojn kiel en la rezonado por 3 observoj kaj trovi ke ankaŭ ĉi tie valoras proksimuma ekvacio (6).

Per (6) estus iom korektita la valoro de la unua derivo, t. e. de la eltrovita moviĝdirekto, sed restas ankoraŭ la korekto pro la neglektitaj membroj. Bedaŭrinde ni ne povas scii ĝin kaj pro tio ni ne konsideros ĝin (oni povas fari tion nur en la procedo por pliĝustigo de la rapido, pri kiu oni ankoraŭ parolos en ĉi tiu verketo). Pro tio la rilato (13) el [9] (inter la suncentra kaj la lokocentra pozicioj) fariĝas

$$\bar{r}' = -\bar{V}_b - \delta\bar{R}' + \rho\bar{e}'(1-\alpha\rho') + \rho'\bar{e}.$$

Konsiderinte ĉion tion, kaj krome la fakton ke ni ankoraŭ ne scias la ĝustan valoron de la intervalo τ (al kiu ni devas aldoni la korekton $\Delta\tau$), la ekvacio (4) havas la ĝustan formon

$$(7)\quad -\bar{R}_1' + \rho_1'\bar{e}_1' = f(-\bar{R}_b - \delta\bar{R} + \rho\bar{e}) + g\left(-\bar{V}_b - \delta\bar{R}' + \frac{\rho}{1+\alpha\rho'}\bar{e}' + \rho'\bar{e}'\right)(\tau+\Delta\tau).$$

Ĉe tio maldekstre restis la lokocentraj valoroj, ĉar tie oni ne bezonas transiron al la baricentraj (aŭ tercentraj) valoroj, kiel estis la okazo dekstraflanke — pro la bezono por kiom eble pli ĝusta kalkulo de la derivo $\bar{e}'$.

3) La unua metodo

Eku de la ekvacio (7). Pro pli simpla skribo ni donu al ĝi la formon

$$(8)\qquad -\bar{R}_1 + \rho_1\bar{e}_1 = f(-\bar{R} + \rho\bar{e}) + \tau g(-\bar{V} + s\bar{e}' + \rho'\bar{e})\cdot\left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right),$$

ĉe kio ni ne devas forgesi ke la kvantoj maldekstre estas la lokocentraj, $\bar{e}$ same lokocentra, ke $\bar{R}$ kaj $\bar{V}$ enhavas la aldonaĵojn eltrovitajn laŭ la procedo el [9] (t. e. $-\bar{R} = -\bar{R}_b - \bar{b}$, $-\bar{V} = -\bar{V}_b - \delta\bar{R}'$), ke ρ, ρ', estas la baricentraj kvantoj kaj

$$(9)\qquad s = \rho : (1 + \alpha\rho').$$

El ĉi tiu ekvacio oni povas trovi la nekonatajn ρ, ρ' kaj ρ_1, prenonte f kaj g ĉiam pli ĝuste per alproksimiĝprocedo, konsidere ke en la komenco de la laboro oni prenas $s = \rho$ kaj ke ĝusta kalkulado de s, kaj uzo de la kvanto $\frac{\Delta\tau}{\tau}$, komenciĝas nur post kelkaj alproksimiĝoj.

Multiplikinte ambaŭ partojn de la ekvacio (8) skalare per $[\bar{e}\bar{e}_1]$, $[\bar{e}_1\bar{e}']$ kaj $[\bar{e}\bar{e}']$ oni trovas

$$-(\bar{R}_1\bar{e}\bar{e}_1) = -f(\bar{R}\bar{e}\bar{e}_1) - \tau g[(\bar{V}\bar{e}\bar{e}_1) - s(\bar{e}\bar{e}_1\bar{e}')]\left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

$$-(\bar{R}_1\bar{e}_1\bar{e}') = -f(\bar{R}\bar{e}_1\bar{e}') + f\rho(\bar{e}\bar{e}_1\bar{e}') - \tau g[(\bar{V}\bar{e}_1\bar{e}') - \rho'(\bar{e}\bar{e}_1\bar{e}')]\left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

$$-(\bar{R}_1\bar{e}\bar{e}') = \rho_1(\bar{e}\bar{e}_1\bar{e}') = -f(\bar{R}\bar{e}\bar{e}') - \tau g(\bar{V}\bar{e}\bar{e}')\left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right).$$

Ĉi tiujn ekvaciojn oni povas skribi pli simple enkondukante signaĵojn:

$$
(10)\quad \begin{cases}
C = \overline{ee_1}\,\overline{e'}, & f' = 1-f, & g' = 1-g, \\[4pt]
A = \dfrac{\overline{Ree_1}}{\tau C}, & A' = \dfrac{\overline{Re_1}\,\overline{e'}}{C}, & A'' = \dfrac{\overline{Ree'}}{C}, \\[4pt]
A_1 = \dfrac{\overline{R_1}\,\overline{ee_1}}{\tau C} - A, & A'_1 = \dfrac{\overline{R_1}\overline{e_1}\overline{e'}}{C} - A', & A''_1 = \dfrac{\overline{R_1}\,\overline{ee'}}{C} - A'', \\[4pt]
\rho_0 = \dfrac{\overline{Vee_1}}{C} - A_1, & n_0 = \dfrac{\tau(\overline{Vee_1})}{C} - A'_1, & B = \dfrac{\tau(\overline{Vee'})}{C}.
\end{cases}
$$

Tiam la supraj ekvacioj fariĝas

$$-A_1 = f'A - g(\rho_0 + A_1 - s)\left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

$$-A'_1 = f'A' + f\rho - g(n_0 + A'_1 - \tau\rho')\left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

$$-A''_1 = f'A'' + \rho_1 - gB\left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right).$$

El la unua ekvacio ni trovas s, poste el la dua ρ', kaj el la tria ρ_1, nome

$$s = \rho_0 + A_1 - \frac{A_1 + f'A}{g} + (\rho_0 + A_1 - s)\cdot\frac{\Delta\tau}{\tau}$$

$$(\tau + \Delta\tau)\,\rho' = n_0 + A'_1 - \frac{A'_1 + f'A' + f\rho}{g} + (n_0 + A'_1)\cdot\frac{\Delta\tau}{\tau}$$

$$\rho_1 = gB - f'A'' - A''_1 - gB\,\frac{\Delta\tau}{\tau}.$$

Plua simpligo de la solvoj, kun la signaĵoj

$$
(11)\quad \begin{cases}
\Delta\rho_0 = (\rho_0 + A_1 - s)\cdot\dfrac{\Delta\tau}{\tau} \\[6pt]
\Delta n_0 = (n_0 + A'_1)\cdot\dfrac{\Delta\tau}{\tau},
\end{cases}
$$

donas la definitivajn valorojn

$$
(12)\quad \begin{cases}
s = \rho_0 - \dfrac{f'A + g'A_1}{g} + \Delta\rho_0 \\[6pt]
(\tau + \Delta\tau)\,\rho' = n_0 - \dfrac{f'A' + g'A'_1 + f\rho}{g} + \Delta n_0
\end{cases}
$$

$$(13)\qquad \rho_1 = gB\left(1+\frac{\Delta\tau}{\tau}\right) - f' A'' = A_1''.$$

Ĉar ni ĝenerale ne scias eĉ proksimumajn valorojn de ρ kaj ρ', ni prenos unue ke $\Delta\rho_0=0$, $\Delta n_0=0$, $\Delta\tau=0$, $s\to\rho$, kaj krome ni alproksimigos f' kaj g' per la konataj esprimoj $f'=3g'$, $g'=\tau^2/(6r^3)$, kiamaniere ni eltrovos proksimume

$$(14)\qquad \begin{cases} \rho=\rho_0-\dfrac{\tau^2(3A+A_1)}{6r^3-\tau^2}=\rho_0-\dfrac{l}{r^3-\tau'}, \quad \tau'=\dfrac{\tau^2}{6}, \\ \tau\rho'=n_0-\rho-\dfrac{\tau^2(3A'+A_1'-2\rho}{6r^3-\tau^2}=n_0-\rho-\dfrac{l'-2\rho\tau'}{r^3-\tau'} \\ l=\tau'\cdot(3A+A_1), \quad l'=\tau'(3A'+A_1'). \end{cases}$$

Solvonte la ekvaciojn

$$\rho=\rho_0-1/(r^3-\tau'), \quad r^2=(\rho-\overline{Re})^2+w \quad (\text{v. (16)}),$$

ni eltrovas la unuan proksimuman valoron de ρ, kaj tuj el la dua ekvacio (14) ankaŭ la unuan proksimuman valoron de ρ'.

La ekvacioj (12) estas la fundamentaj ekvacioj de la metodo. Post la eltrovo de la proksimumaj valoroj por ρ kaj ρ' oni bezonas trovi f' kaj g', t. e. f kaj g, kion ni povas precize fari pere de tabeloj el la artikolo [10]. Nome el

$$(15)\qquad \bar r=-\bar R+\rho\bar e, \quad \bar v=-\bar V+s\bar e'+\rho'\bar e,$$

ni havos

$$\bar r^2=(\rho-\overline{Re})^2+R^2-(\overline{Re})^2$$

$$\overline{rv}=\overline{RV}-s\overline{Re'}-\rho\overline{Ve}-\rho'\overline{Re}+\rho\rho'=\overline{RV}-s(\overline{Re'}+\overline{Ve})+\rho'(\rho-\overline{Re})-s\alpha\rho'\,\overline{Ve}$$

$$\bar v^2=\bar V^2+s^2\bar e'^2+\rho'^2-2s(\overline{Ve'})-2\rho'(\overline{Ve}).$$

Se ni servus nin per la signaĵoj

$$(16)\qquad \begin{cases} \rho-\overline{Re}=x \\ \bar R^2-(\overline{Re})^2=[\overline{Re}]^2=w \end{cases}$$

$$(17)\qquad -(\overline{Re'}+\overline{Ve})-\alpha\rho'(\overline{Ve})=y=-(\overline{Re'}+\overline{Ve})-\alpha\rho'\,y''/2$$

$$(18)\qquad -2\overline{Ve'}=y', \quad -2\,\overline{Ve}=y'',$$

ni havos mallonge skribita

$$(19)\qquad \bar r^2=x^2+w$$

(20) $$\overline{rv} = \overline{RV} + sy + \rho' x$$

(21) $$\overline{v^2} = \overline{V^2} + s^2 \overline{e'^2} + \rho'^2 + sy' + \rho' y'',$$

de kie ni facile kalkulas la esprimoja bezonatajn por f kaj g:

(22) $$\varepsilon = \tau/(r\sqrt{r}) = \sqrt{\tau^2/r^3}, \quad \eta = \overline{rv}/\sqrt{r}, \quad \zeta = r\overline{v^2} - 1.$$

Kalkulante ε ni uzos τ tian kian ni konas ĝin, kaj kiam ni estos trovintaj $\Delta\tau$ tiam ni uzos la korektitan valoron τ.

Kun ε, η, ζ, kaj la Tabelo I (el la artikolo [10]) ni trovos f kaj g. Se la angulo ε ne estas granda (en la kadro de la unua duono de la ĉefa Tabelo), tiom pli se ni ne disponas la tabelojn por $\sin\varepsilon/\varepsilon$, ni povas preni proksimume $\sin\varepsilon/\varepsilon = (2 + \cos\varepsilon):3$, kion oni kalkulas pli rapide ol $\sin\varepsilon/\varepsilon$, kaj kio ne deflankiĝas pli ol oni rajtas (seriigo montras ke tio estas ĉiam malpli ol $\varepsilon^4/180$). Mi menciu ankoraŭ ke ni povas, por uzi la Tabelon II, tuj esprimi ε en la gradoj, se ni tuj en la komenco de la laboro elkalkulas $\tau^0 = \tau^d \cdot k \cdot 1\,R = \tau^d \cdot 0{,}98560767 = \tau^d : 1{,}0146025$.

Kun la trovitaj valoroj f kaj g, kaj kun antaŭe trovitaj valoroj (10), ni kalkulos s el la unua ekvacio (12) — sen $\Delta\rho_0$ —, poste ρ' el la dua ekvacio — sen Δn_0 kaj $\Delta\tau$. Tio ebligos pli proksime determini ε, η kaj ζ — pere de (19), (20), (21) kaj (22), kaj poste denove kalkuli f kaj g. Post 3—4 alproksimiĝoj, proksimume kiam la dua decimalo en s restas neŝanĝita, ni trovos ρ_1 pere de la ekvacio (13) — sen $\Delta\tau/\tau$ — kaj tiam ni havos

(23) $$\Delta\tau = \alpha\rho_1 - \alpha\rho = \alpha\,(\rho_1 - \rho).$$

Nun ni povas kalkuli $\Delta\tau/\tau$, kaj tiam $\Delta\rho_0$, Δn_0 el la formuloj (11), kaj poste aplikadi la kompletajn ekvaciojn (12), prenonte ankoraŭ — laŭ (9) — ke $\rho = s\,(1 + \alpha\rho')$ kaj korektonte la antaŭan valoron y por aldona valoro $-\alpha y''/2$. Malpligrandigo de la uzota nombro de la alproksimiĝoj dependos de la kalkulspertoj de la kalkulanto.

Ni daŭrigos la alproksimiĝojn ĝis kiam la solvado havos la sencon, kio dependos de la kvantoj A, A_1, A', A_1', same de f, g. Se intertempe ekestas pli grandaj ŝanĝoj en f kaj g, kio ofte okazos, ni denove kalkulos ρ_1 el (13) kaj $\Delta\tau$ el (23) kaj ni ripetos la proceduron. Ni devas kontentiĝi per 3—4 ĝustaj decimaloj. La trovitaj valoroj s (respektive ρ) kaj ρ' donos $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$ — pere de (15).

Per tio la tasko estas solvita, ĉar la eltrovo de la vektoraj elementoj donas neniajn malfacilaĵojn — ĝi konsistas en simpla kalkulo de la esprimoj kiujn mi metos ĉe la fino de la punkto 6) de ĉi tiu verketo. Sed konsiderinde la punkton 5) ni ne devas tuj trovi la elementojn, sed unue korekti la trovitajn valorojn $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$.

4) La dua metodo

La dua metodo estas fakte la dua varianto, bazita sur la sama principo. Ĉefa en ĝi estas ke ni tuj enportas τ en la kvantojn $\overline{V}$, $\overline{e}'$ kaj ρ', nome ni kalkulas ĉi tiujn kvantojn nek por tempounuo de 1 tago nek por k^{-1} tagoj, sed por la tempo τ, respektive ρ' por la korektita tempointervalo $\tau_c = \tau + \Delta\tau$. En la esprimo por $\overline{V}$ tio enportas esencan ŝanĝon ĉe elkalkulado, ĉar la trovitan tagan velociton ni devas multipliki per τ (en tagoj), anstataŭ per k^{-1}. Por $\delta \overline{R}'$ kaj $\overline{e}'$ oni devas fakte, kiel ni vidas el la esprimoj (30) de la artikolo [9], trovi la kvantojn

$$
(24) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\tau_3 \, \delta \overline{R}' &= \frac{-\tau_3^2}{\tau_1 \tau_{13}} (\overline{b}_2 - \overline{b}_1) + \frac{-\tau_1}{\tau_{13}} (\overline{b}_3 - \overline{b}_2) \\
\tau_3 \overline{e}' &= \frac{-\tau_3^2}{\tau_1 \tau_{13}} (\overline{e}_2 - \overline{e}_1) + \frac{-\tau_1}{\tau_{13}} (\overline{e}_3 - \overline{e}_2),
\end{aligned}
\right.
$$

kaj la unuan el ili aldoni al $\overline{V}$ kaj la duan preni anstataŭ $\overline{e}'$. Nenia esenca ŝanĝo estas ankaŭ en la okazo de pli ol tri observoj, sed la avantaĝo de ĉi tiu metodo povas esti kiam ni havas nur tri observojn (aliigitaj al du kaj al la moviĝdirekto), ĉar τ eniras en la esprimojn (22) kaj ni devus ilin aparte kalkuli por ĉiu plia observo.

Kun tiel preparitaj valoroj de $\overline{V}$ kaj $\overline{e}'$, kaj preninte por la nekonataj ρ kaj

$$
(25) \qquad n = \tau \rho',
$$

la ekvacio (8) ricevos evidente pli simplan aspekton

$$
(26) \qquad -\overline{R}_1 + \rho_1 \overline{e}_1 = f(-\overline{R} + \rho \overline{e}) + g(-\overline{V} + \rho \overline{e}' + n\overline{e}) \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right).
$$

Oni devas mencii ke la faktoro $1 + \alpha\rho'$ forfalis ĉi tie ĉar, en la ekvacioj (24), la tempointervaloj aperas la saman fojon en la numeratoro kiel en la denominatoro. Se ni enkondukus la signaĵojn

$$
(27) \qquad \left\{
\begin{array}{lll}
C = (\overline{e}\overline{e}_1\overline{e}') & f' = 1 - f, & g' = 1 - g. \\[2mm]
A = \dfrac{(\overline{R}\overline{e}\overline{e}_1)}{C}, & A' = \dfrac{(\overline{R}\overline{e}_1\overline{e}')}{C}, & A'' = \dfrac{(\overline{R}\overline{e}\overline{e}')}{C}, \\[2mm]
A_1 = \dfrac{(\overline{R}_1\overline{e}\overline{e}_1)}{C} - A, & A_1' = \dfrac{(\overline{R}_1\overline{e}_1\overline{e}')}{C} - A', & A_1'' = \dfrac{(\overline{R}_1\overline{e}\overline{e}')}{C} - A'', \\[2mm]
\rho_0 = \dfrac{(\overline{V}\overline{e}\overline{e}_1)}{C} - A_1, & n_0 = \dfrac{(\overline{V}\overline{e}_1\overline{e}')}{C} - A_1', & B = \dfrac{(\overline{V}\overline{e}\overline{e}')}{C},
\end{array}
\right.
$$

kaj se ni multiplikus ambaŭ flankojn de la ekvacio (26), laŭvice, skalare per $[\overline{ee_1}]$, $[\overline{e_1 e'}]$, $[\overline{ee'}]$, ni ricevus same kiel en antaŭa metodo tri skalarajn ekvaciojn

$$-A_1-A=-fA-g(\rho_0+A_1-\rho)\left(1+\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

$$-A_1'-A'=-f(A'-\rho)-g(n_0+A_1'-n)\left(1+\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

$$-A_1''-A''-\rho_1=-fA''-gB\left(1+\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

Ilia solvado estas simpla, kiel antaŭe, kaj ni rapide trovas

(28) $$\rho=\rho_0-\frac{Af'+A_1g'}{g}+(\rho_0+A_1-\rho)\cdot\frac{\Delta\tau}{\tau}$$

(29) $$n=n_0-\frac{f'A'+g'A_1'+f\rho}{g}+(n_0+A_1'-n)\cdot\frac{\Delta\tau}{\tau}$$

(30) $$\rho_1=gB\left(1+\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)-f'A''-A_1''.$$

Ĉar ni ĝenerale ne konas eĉ unuajn proksimumajn valorojn por ρ kaj n, al ĉi tiuj formuloj ni donos la proksimuman formon

$$\rho=\rho_0-\frac{l}{r^3-\tau'},\quad n=n_0-\rho-\frac{l'-2\tau'\rho}{r^3-\tau'}$$

kaj trovi unue ρ el la unua ekvacio kaj el la esprimo por r^2, kaj poste n el la dua ekvacio — entute same kiel en la unua metodo.

La procedo por efektiva elkalkulo de la valoroj (28), (29) kaj (30) estas fakte la sama kiel en la unua metodo, sed, tamen en kelkaj esprimoj dum la laboro estas grandetaj ŝanĝoj. Antaŭ ĉio por la suncentra velocito oni ankaŭ devas preni por la tempounuo la tempointervalon τ. Tiam, laŭ la signaĵoj en ĉi tiu metodo, ni havos

(31) $$\begin{cases}\overline{r}=-\overline{R}+\rho\overline{e}\\ \overline{v}=-\overline{V}+\rho\overline{e}'+n\overline{e},\end{cases}$$

pro kio estas

$$r^2=(\rho-\overline{Re})^2+\overline{R}^2-(\overline{Re})^2$$

$$\overline{rv}=\overline{RV}-\rho(\overline{Re'}+\overline{Ve})+n(\rho-\overline{Re})$$

$$\overline{v}^2=\overline{V}^2+\rho^2\overline{e}'^2+n^2-2\rho\overline{Ve'}-2n\overline{Ve},$$

respektive

$$(32)\qquad \begin{cases} r^2 = x^2 + w, & \overline{rv} = \overline{RV} + \rho y + nx \\ \overline{v}^2 = \overline{V}^2 + \rho^2 e'^2 + n^2 + \rho y' + ny'' \end{cases}$$

kun la signaĵoj

$$(33)\qquad \begin{cases} \rho - \overline{Re} = x, \quad \overline{R}^2 - (\overline{Re})^2 = [\overline{Re}]^2 = w, \\ -(\overline{Re'} + \overline{Ve}) = y, \quad -2\,\overline{Ve'} = y', \quad -2\,\overline{Ve} = y''. \end{cases}$$

Ĉar ĉi tie τ jam eniris $\overline{v}$, anstataŭ la esprimojn (22) ni havos

$$(34)\qquad \varepsilon^2 = \frac{(\tau + \Delta\tau)^2}{r^3}, \quad \eta = \frac{\overline{rv}}{r^2} \cdot 10 \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right), \quad \zeta = \left[\frac{\overline{v}^2}{r^2} \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2 - \varepsilon^2\right] \cdot 10$$

kaj pere de la Tabelo III el la artikolo [10] ni facile trovos f kaj g, Estas aplikeblaj ankaŭ la Tabeloj I kaj II, sed tiam ni devus preni

$$\eta = \frac{\overline{rv}}{\tau \sqrt{r}}, \qquad \zeta = r \cdot \frac{\overline{v}^2}{\tau^2} - 1.$$

La plua procedo estas en ĉio la sama kiel en la unua metodo, kun la sola escepto ke fine, post kiam ni trovis $\overline{r}$ kaj $\overline{v}$, por kalkuli la vektorajn elementojn, ni devas preni $\overline{v}/\tau$ anstataŭ $\overline{v}$.

5) Pozici-kaj rapid-korekto

Foje trovitaj la pozicio kaj la rapido de planedeto, per la solvo de la ekvacioj (8) aŭ (26), plejmulte ne kontentigos, ĉar ni ellasis altgradajn membrojn kalkulinte $\overline{e}'$. Por forigi tiun mankon, kaj trovi elementojn de la orbito kiu, en la limoj de la observeraroj, tute kongruos almenaŭ la observojn kiujn ni disponas, ni serĉu la korektaĵojn por la tercentra distanco kaj la rapido de la planedeto. Por la momentoj t_0 kaj t_1 ni havos

$$(\rho\overline{e})_0 = f_0\,\overline{r} + \tau_0\, g_0\, \overline{v} + \overline{R}_0', \qquad \tau_0 = k\,(t_0 - t),$$
$$(\rho\overline{e})_1 = f_1\,\overline{r} + \tau_1\, g_1\, \overline{v} + \overline{R}_1', \qquad \tau_1 = k\,(t_1 - t).$$

La lokocentrajn distancojn kalkulitajn de ĉi tie multipliku per la observaj unuovektoroj, kaj la diferencon $(O-K)$ signu per $\Delta(\rho_0\,\overline{e}_0)$, $\Delta(\rho_1\,\overline{e}_1)$, t. s. metu

$$(35)\qquad \Delta(\rho_0\,\overline{e}_0) = \rho_0\overline{e}_0 - (\rho\,\overline{e})_0, \qquad \Delta(\rho_1\,\overline{e}_1) = \rho_1\,\overline{e}_1 - (\rho\,\overline{e})_1.$$

Se ni nun korektas $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$ por $\bar{e}\cdot\Delta\rho$ kaj $\Delta\bar{v}$, ni devus ricevi :

$$(\rho_0+\Delta\rho_0)\bar{e}_0=(\rho\bar{e})_0+\Delta f_0\bar{r}+f_0\Delta\rho\cdot\bar{e}+\tau_0\Delta g_0\bar{v}+\tau_0 g_0\Delta\bar{v}$$

$$(\rho_1+\Delta\rho_1)\bar{e}_1=(\rho\bar{e})_1+\Delta f_1\bar{r}+f_1\Delta\rho\cdot\bar{e}+\tau_1\Delta g_1\bar{v}+\tau_1 g_1\Delta\bar{v}\,.$$

En ĉi tiuj ekvacioj ni povas fari iujn neglektojn kiuj malpligrandigos laborĝustecon, sed kiuj ebligos trovi el ili la nekonatajn $\Delta\rho$, $\Delta\rho_0$, $\Delta\rho_1$, $\Delta\bar{v}$. Unue en la esprimoj por Δf_0, Δg_0, Δf_1, Δg_1, oni povas neglekti ŝanĝojn kaŭzontaj de negravaj ŝanĝoj de la kvantoj η, ζ, kaj de iliaj koeficientoj — negravaj kompare kun ŝanĝoj de la ĉefaj kvantoj en la esprimoj por f kaj g el [10], nome $\cos\varepsilon$ kaj $\sin\varepsilon/\varepsilon$. Ja ankaŭ en ĉi tiuj korektoj haltiĝu nur ĉe la duagradaj ŝanĝoj de la koeficientoj nome prenu

$$\Delta f_0=-\varepsilon_0\,\Delta\varepsilon_0=3\Delta g_0\,,\quad \Delta f_1=-\varepsilon_1\Delta\varepsilon_1=3\Delta g_1\,.$$

Konsidere ke

$$\varepsilon^2=\tau^2:r^3,\quad r^2=x^2+w,\quad x=\rho-\overline{Re},$$

la korektaĵoj (sen la apudsignoj) fariĝas

$$\Delta g=\tau^2\frac{\Delta r}{2r^4}=\tau^2 x\cdot\Delta\rho/(2r^5)\sim\frac{\varepsilon^2}{2r}\cdot\Delta\rho,$$

kaj, konsiderante ankoraŭ (35), ni havos

$$\text{(36)}\quad\left\{\begin{aligned}\Delta(\rho_0\bar{e}_0)+\Delta\rho_0\bar{e}_0&=\left(\bar{r}+\frac{\tau_0}{3}\bar{v}\right)\cdot\frac{3\varepsilon_0^2}{2r}\Delta\rho+f_0\bar{e}\Delta\rho+\tau_0 g_0\Delta\bar{v}\\ \Delta(\rho_1\bar{e}_1)+\Delta\rho_1\bar{e}_1&=\left(\bar{r}+\frac{\tau_1}{3}\bar{v}\right)\cdot\frac{3\varepsilon_1^2}{2r}\Delta\rho+f_1\bar{e}\Delta\rho+\tau_1 g_1\Delta\bar{v}.\end{aligned}\right.$$

Elimino de la vektor-korektaĵo $\Delta\bar{v}$ donas ekvacion por eltrovi $\Delta\rho$, $\Delta\rho_0$, $\Delta\rho_1$. Tiucele ni uzu por la malgranda vektoro, kalkulebla tuj el $(O-K)$, la signaĵon

$$\text{(37)}\qquad \bar{d}=\tau_1 g_1\,\Delta(\rho_0\bar{e}_0)-\tau_0 g_0\,\Delta(\rho_1\bar{e}_1),$$

kaj la elimino, kun iomete da kalkulo, donos

$$\bar{d}=(\tau_1 g_1 f_0-\tau_0 g_0 f_1)\bar{e}\Delta\rho+\bar{r}(\tau_0 g_1-\tau_1 g_0)\cdot\frac{3\varepsilon_0\varepsilon_1}{2r}\Delta\rho+\bar{v}(\tau_0^2 g_1-\tau_1^2 g_0)\frac{3\varepsilon_0\varepsilon_1}{2r}\Delta\rho-$$

$$-\tau_1 g_1\bar{e}_0\Delta\rho_0+\tau_0 g_0\bar{e}_1\Delta\rho_1\,.$$

La esprimojn en la parentezoj ni proksimumigos prenante 1 por ĉiu f kaj g, kio malmulte influos la valoron de la diferencoj sed grave simpligos la ekvacion, ĉar ĝi fariĝos

$$(38)\qquad \bar{d}=\tau_{01}\,\bar{e}\,\Delta\rho+\tau_0\,g_0\,\bar{e}_1\,\Delta\rho_1-\tau_1\,g_1\,\bar{e}_0\,\Delta\rho_0-\left[\bar{r}+\frac{\tau_0+\tau_1}{3}\,\bar{v}\right]\frac{3\,\tau_{01}\,\varepsilon_0\,\varepsilon_1}{2\,r}\,\Delta\rho.$$

$$\tau_{01}=k\,(t_1-t_0)=\tau_1-\tau_0.$$

Sekve de malgranda valoro de la produto $\varepsilon_0\,\varepsilon_1$ oni povas preskaŭ ĉiam malzorgi la lastan membron (kompare kun la antaŭaj) tiel ke la laŭvica multiplikado per $[\bar{e}_0\,\bar{e}_1]$, $[\bar{e}\bar{e}_1]$, $[\bar{e}\bar{e}_0]$, donas

$$(39)\qquad \begin{cases} \Delta\rho=\dfrac{(\bar{d},[\bar{e}_0\,\bar{e}_1])}{\tau_{01}\,(\bar{e}\bar{e}_0\,\bar{e}_1)}, \\[2ex] \Delta\rho_1=\dfrac{(\bar{d}\,\bar{e}\,\bar{e}_0)}{\tau_0\,g_0\,\bar{e}\bar{e}_0\,\bar{e}_1}, \\[2ex] \Delta\rho_0=\dfrac{(\bar{d}\,\bar{e}\,\bar{e}_1)}{\tau_1\,g_1\,\bar{e}\bar{e}_0\,\bar{e}_1}. \end{cases}$$

Oni ne bezonas kalkuli ĉiujn tri korektaĵojn, sed nur $\Delta\rho$ kaj unu el aliaj du. Enigonte tiujn du korektaĵojn en unu el la ekvacioj (43), kiam ni denove povas malzorgi la membron kun $\bar{r}$, ni ricevos $\Delta\,\bar{v}$.

Per tio la problemo estas solvita ĝenerale. Sed pro malzorgoj faritaj dum la laboro oni devos ripeti la proceduron, ĉar denove aperos $(O-K)$, sed nun kompreneble malpligrandaj. Dum la nova procedo la malzorgoj estos eĉ pli permesataj, ĉar unue la ŝanĝoj de η kaj ζ estos minimumaj, kaj poste pro pli malgrandaj valoroj de $\Delta\rho$ estos pli libere malzorgi la membron kun $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$ en la ekvacio (38). Sed se la diferenco inter antaŭaj kaj nunaj $O-K$ ne estas granda, signas ke tiomajn malzorgojn oni ne rajtas fari, precipe ne la membron kun $\bar{r}$, $\bar{v}$, kaj en la sekvanta alproksimiĝo ni konsideros ankaŭ tiun membron — aŭ ni estos pretaj fari pli multajn alproksimiĝojn (ĝis oni atingos kontentigan rezultaton, $O-K$ ĉe $\bar{\rho}e$ estu $< 1.10^{-6}$). Oni bezonas plurfoje ripeti la procedon ankaŭ kiam la ekiraj valoroj $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$ estas grave eraraj, ĉu pro granda deflankiĝo de la vera je la kalkulita valoro $\bar{e}'$, ĉu pro nesufiĉaj antaŭaj alproktimiĝoj, ĉu fine pro malgrandeta (kaj tial nerimarkita) eraro dum la kalkuloj.

Ne malzorgante la membron kun $\bar{r}$ kaj $\bar{v}$, ni signu per

$$\bar{r}'=\left(\bar{r}+\frac{\tau_0+\tau_1}{3}\,\bar{v}\right)\cdot\frac{3\,\varepsilon_0\,\varepsilon_1}{2\,r},$$

kaj multiplikinte skalare kun $[\bar{e}_0 \bar{e}_1]$ kaj $[\overline{ee_1}]$ ni trovos

$$\Delta\rho \cdot \left(1 - \frac{\bar{r}'\bar{e}_0\bar{e}_1}{\bar{e}\,\bar{e}_0\,\bar{e}_1}\right) = \frac{(\overline{de_0}\,\bar{e}_1)}{\tau_{01}\,(\overline{ee_0}\,\bar{e}_1)}$$

$$\Delta\rho_0 = \frac{(\overline{dee_1})}{\tau_1 g_1 (\overline{ee_0}\,\bar{e}_1)} + \frac{\bar{r}'\,\bar{e}\,\bar{e}_1}{\overline{ee_0}\,\bar{e}_1} \cdot \frac{\tau_{01}}{\tau_1 g_1}\,\Delta\rho.$$

Enigo de ĉi tiuj valoroj en la unuan ekvacion (36) donas ankaŭ la serĉatan korektaĵon $\Delta\bar{v}$. En tia okazo oni povis tuj preni la unuan ekvacion (36) ĉar ni estas antaŭcertaj ke la koeficiciento antaŭ $\Delta\bar{v}$ ne estas tro malgranda, ĉar ni ekiris de la okazo kiam oni ne rajtas malzorgi la membron kun $\bar{r}$, $\bar{v}$, kaj tio signifas de la okazo kiam $\tau_0\tau_1$ havas ne tro malgrandan valoron.

Fine haltiĝu ĉe unu okazo en kiu la tuta laboro ankoraŭ pli simpliĝas, kaj kiu en la praktiko ne estas malofta, ĉar ĝi apartenas al la okazoj kiam neniu alia metodo estas eĉ boneta por eltrovo de la orbitelementoj. Temas pri la okazo kiam la tempointervalo τ_0 estas tre malgranda kompare kun la intervalo τ ($\tau > 20\,\tau_0$). Tiam en la unua ekvacio (36) oni povas certe forĵeti la membron kun $\bar{r}$, $\bar{v}$. Sed krom tio oni povas forĵeti, ankaŭ la membrojn $\Delta\rho_0\,e_0$ kaj $f_0\,e\,\Delta\rho$, ĉar ili havas proksimume kontraŭajn valorojn. Tiam la ekvacio ricevas ege simplan formon-solvon:

$$\Delta\bar{v} = \frac{\Delta(\rho_0\,\bar{e}_0)}{\tau_0\,g_0}. \tag{40}$$

Pro malgranda τ_0 ĉi tiu korektaĵo povas esti grandeta, sed ĝi estas efektiva, ĉar tiam — pro malzorgita $\rho \cdot \Delta\bar{e}'$ — estas grave malpliigita ĝusteco de la valoro trovita por $\bar{v}$.

Kiam ni estas korektintaj la rapidon ni povas kalkuli $\Delta\rho$ el (39). Sed ĉar efektive $\Delta\bar{v} = -\Delta\bar{V}$, ni povas reveni al la antaŭaj alproksimiĝoj, korektante la tieajn konstantojn ρ_0 kaj n_0 ankoraŭ por

$$-(\Delta\,\overline{Vee_1}):C, \qquad -\tau\,(\Delta\,\bar{V}\bar{e}_1\,\bar{e}'):C\ -$$

pro la ligaĵoj (10) kaj (27). Post ripetita solvo de la ekvacioj (12), respektive (28), (29), ni denove trovos $(O-K)$ kaj aplikos (40). Se $O-K$ montras nesenteblan malpligrandiĝon, tio povas signi nur ke ekzistas iu eraro en la konstantoj por la fundamenta ekvacio, kaj tiam estas plej bone apliki la plenajn ekvaciojn (36), respektive trovi la kvantojn (37) kaj (39).

Se finfine τ_0 estas malgranda ne nur kompare kun τ, sed absolute (du observoj dum la sama vespero), tiam oni ne povas trovi la korektaĵon ΔV, sed tiam ni povas esti certaj ke ĝi estas malgranda, ĉar estas tre malgrandaj la membroj malzorgitaj dum la kalkulo de $\bar{e}'$ — pro la proksimeco de ĉi tiuj du observoj. Tiuokaze ni havas nur la duan ekvacion (43), el kiu — malzorginte $\Delta \bar{v}$ — oni povas kalkuli

$$(41) \qquad \Delta\rho \cdot \left(f_1 + \frac{\overline{r''}\,\bar{e}_1\,\bar{e}'}{e\bar{e}_1\,\bar{e}'}\right) = \frac{(\Delta(\rho_1\,\bar{e}_1),\bar{e}_1\,\bar{e}')}{e\bar{e}_1\,\bar{e}'}, \qquad r'' = \left(\bar{r} + \frac{\tau_1}{3}\,\bar{v}\right)\cdot\frac{3\,\varepsilon_1^2}{2\,r}.$$

LA MENCIITA LITERATURO

[1] Andoyer H., *Cours de Mécanique céleste*, I, Paris 1923, G. Villars.

[2] Charlier C. L., *The analytical Solution of te Problem of Orbits*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, London 1911, LXXI, pp. 606—609.

[3] Innes R. T. A., *A Method adapted to Calculating Machines for finding the Pats of Comets and Minor Planets from Short Arcs*, Monthly Notices of the R. Astr. Society London, 1929, LXXXIX, pp. 422—450.

[4] Lagrange, *Sur un problème de la détermination des orbites des comètes d'après trois observations*, Oeuvres IV, p. 439 — kun malgrandaj ŝanĝoj ripetita en „Mécanique analytique, II" (Oeuvres XII), kie mi konatiĝis kun la enhavo de la verkaĵo.

[5] Milankovitch M., *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem*, Editions speciales, Tome CXXXIII, de l'Académie serbe des sciences, Beograd 1941.

[6] Moulton F. R., *Memoir on the Theory of Determining Orbits*, Astronomical Journal XXVIII, p. 103.

[7] Poincaré H., *Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace*, Bulletin astronomique 23, Paris 1906, pp. 161—187.

[8] Popović B., *Les équations nouvelles des perturbations dans le mouvement des planètes*, Bullettin de l'Académie serbe des sciences, Tome V_1, Beograd 1952, p. 123—126 aŭ Glas CXCVIII, 129—139.

[9] Popović B., *Plipreciziĝoj de eltrovataj rapidoj de planedetoj*, Bulletin XXI, 1—2, de l'Observatoire astronomique, Beograd 1956, pp. 11—22.

[10] Popović B., *Nove formule i tablice za f i g*, Rasprave, II odjel, I_7, de Jugoslavia akademino por sciencoj kaj artoj, Zagreb 1955.

[11] Popović B., *Nouvelle méthode pour obtenir les équations des perturbations des éléments elliptiques*, Mémoires V de l'Observatoire astronomique, Beograd 1949, p. 11—25.

[12] Väisälä Y., *Eine einfache Methode der Bahnbestimmung*, Mitteilung der Sternwarte der Universität Turku, № 1, Helsinki 1939.

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ВЕКТОРСКИХ ЕЛЕМЕНАТА ПУТАЊЕ МАЛЕ ПЛАНЕТЕ ИЗ ДВА ПОСМАТРАЊА И ДНЕВНОГ КРЕТАЊА I (ТЕОРИЈА)

БОЖ. ПОПОВИЋ, САРАЈЕВО

1, 2) За случај када је мала планета недовољно посматрана, али тако да имамо употребљива два посматрања и да се за једно од њих може довољно прецизно извести правац кретања, аутор даје методу помоћу које се могу одредити елементи путање (и то у две сличне варијанте).

У моментима t и t_1 нека су правци у којима је планета посматрана, њена даљина од Земље, њен хелиоцентрични положај и геоцентрични положај Сунца означени са $\overline{e}$, $\overline{e}_1$, ρ, ρ_1, $\overline{r}$, $\overline{r}_1$, $\overline{R}$, $\overline{R}_1$, а нека су $\overline{e}'$, ρ', $\overline{v}$ и $\overline{V}$ изводи ових величина за тренутак t. Ове су величине везане односима (1) — (4). Одређивање извода $\overline{e}'$ из посматрачких података је везано и са проблемом отклањања паралаксе, а за овакво тражење путање потребно је да се $\overline{e}'$ одреди што је могуће тачније још одмах у почетку рада. Аутор је тај проблем решио у раду [9], па овде користи резултате тог рада, као и слично отклањање утицаја аберације (обрађено овде под тач. **2**), те једнакост (4) пише у облику (7) — односно краће у облику (8), при чему је $\tau = k\,(t_1 - t)$, $\Delta\tau$ поправка услед аберације, а $\overline{R}$, $\overline{V}$ садрже и корекције нађене по поступку из [9], док $\overline{R}_1$ садржи само топоцентрични додатак.

3) По првој методи решава се директно векторска једначина (8), скаларним множењем са $[\overline{e}\overline{e}_1]$, $[\overline{e}_1\overline{e}']$, $[\overline{e}\overline{e}']$ те се уз ознаке (10) и (11) добијају решења (12), (13). Прва апроксимација се добија узимајући $\Delta\tau = 0$, $s = \rho$, $g' = \tau^2/(6\,r^3)$, $f' = 3\,g'$, што даје (14). Са нађеним ρ, ρ', у првој апроксимацији, рачунају се величине (19) — (22), уз ознаке (16) — (18), па се са величинама (22) користе таблице из рада [10] да би се нашло f и g и применила решења (12). Овај се поступак понавља, успут се употреби и решење (13) да би се по (23) нашло $\Delta\tau$. По завршеном поступку имамо одмах $\overline{r}$ и $\overline{v}$ из (15), што нам омогућује брзо израчунавање векторских елемената путање.

4) Друга варијанта ове методе се одликује тиме што τ одмах улази у изводе (тј. ови се израчунавају не за k^{-1} дана већ за време τ), дакле $\overline{V}$ се множи са τ, а у тражењу извода се употребе изрази (24) (при чему је треће посматрање врло блиско једном од остала два — подручје предности ове методе). Тада једнакост (7) добија облик (26) а одговарајућа решења су (28) — (30). После прве апроксимације се користе формуле (32) — (34) и Таблица III из рада [10].

5) Услед занемаривања виших степена при налажењу $\bar{e}'$ нађене хелиоцентричне вредности неће потпуно задовољити преостала посматрања (која су послужила при одређивању извода). Зато аутор даје посебни поступак за поправку хелиоцентричног положаја и брзине на бази $O-C$ из три посматрања, применљив и на случајеве у којима се користи ова метода. Поступак се састоји у израчунавању $O-C$ у векторском облику (35) и решавању једначина (36) које морају задовољавати корекције $\Delta\rho$, $\Delta\bar{v}$. Елиминацијом $\Delta\bar{v}$ добија се једначина (38), а њеним скаларним множењем добијају се корекције (39), од којих треба рачунати само две, а $\bar{d}$ је дато изразом (37). Тада нам једна од једначина (36) даје корекцију $\Delta\bar{v}$. Аутор у даљем тексту третира неке посебне случајеве из подручја примене ове методе.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie

NOTE ON A FORMULA ON FACTORIALS

by ZLATKO MAMUZIĆ, BEOGRAD

Consider s kinds of objects there being α_j objects of the j-th kind, $1 \leqslant j \leqslant s$, so that $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s = n$, where n is a natural. Then the number of all permutations of these objects amounts to

$$x = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s)\,!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!} = \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!}\,.$$

If an arbitrary object of the j-th kind is denoted simply by j and if we take the permutation

$$p_1 = \underbrace{1\ldots1}_{\alpha_1}\underbrace{2\ldots2}_{\alpha_2}\underbrace{3\ldots3}_{\alpha_3}\ldots\underbrace{j\ldots j}_{\alpha_j}\ldots\underbrace{s\ldots s}_{\alpha_s}$$

as a first one in the lexicographic order of all permutations, then p_i is the permutation standing on the i-th place from left to right.

Obviously we have

$$p_x = \underbrace{s\ldots s}_{\alpha_s}\ldots\underbrace{j\ldots j}_{\alpha_j}\ldots\underbrace{3\ldots3}_{\alpha_3}\underbrace{2\ldots2}_{\alpha_2}\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_1}\,.$$

Applying the general method of finding the index i, $1 \leqslant i \leqslant x$, of a given permutation (s. for example [1], pp. 16—27) a formula on factorials can be derived by which the number x is decomposed in a sum in the following manner.

It is evident that before the permutation

$$s\,\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_1}\underbrace{2\ldots2}_{\alpha_2}\underbrace{3\ldots3}_{\alpha_3}\ldots\underbrace{j\ldots j}_{\alpha_j}\ldots\underbrace{s\ldots s}_{\alpha_s-1}$$

there is

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{s-1}) \cdot \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s - 1)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!} = x_1$$

permutations. Continuing this process we have: before the permutation

$$ss\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_1}\underbrace{2\ldots2}_{\alpha_2}\underbrace{3\ldots3}_{\alpha_3}\ldots\underbrace{j\ldots j}_{\alpha_j}\ldots\underbrace{s\ldots s}_{\alpha_s-2}$$

there is

$$x_1+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{s-1})\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s-2)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots(\alpha_s-1)!}=x_1+x_2$$

permutations, and so on; before the permutation

$$\underbrace{s\ldots s}_{\alpha_s}\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_1}\underbrace{2\ldots2}_{\alpha_2}\underbrace{3\ldots3}_{\alpha_3}\ldots\underbrace{j\ldots j}_{\alpha_j}\ldots\underbrace{\overline{s-1}\,\overline{s-1}\ldots\overline{s-1}}_{\alpha_{s-1}}$$

there is

$$x_1+x_2+\ldots+x_{\alpha_s-1}+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{s-1})\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{s-1})!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{s-1}!\,1!}=$$

$$=x_1+x_2+\ldots+x_{\alpha_s-1}+x_{\alpha_s}$$

permutations; before the permutation

$$\underbrace{s\ldots s}_{\alpha_s}\overline{s-1}\,\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_1}\underbrace{2\ldots2}_{\alpha_2}\underbrace{3\ldots3}_{\alpha_3}\ldots\underbrace{j\ldots j}_{\alpha_j}\ldots\underbrace{\overline{s-1}\ldots\overline{s-1}}_{\alpha_{s-1}-1}$$

there is

$$x_1+x_2+\ldots x_{\alpha_s}+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{s-2})\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{s-1}-1)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{s-1}!}=$$

$$=x_1+x_2+\ldots+x_{\alpha_s}+x_{\alpha_s+1}$$

permutations, and so on; before the permutation

$$\underbrace{s\ldots s}_{\alpha_s}\underbrace{\overline{s-1}\ldots\overline{s-1}}_{\alpha_{s-1}}\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_1}\underbrace{2\ldots2}_{\alpha_2}\underbrace{33\ldots3}_{\alpha_3}\ldots\underbrace{j\ldots j}_{\alpha_j}\ldots$$

there is

$$x_1+x_2+\ldots+x_{\alpha_s+\alpha_{s-1}-1}+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{s-2})\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{s-2})!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{s-2}!\,1!}=$$

$$=x_1+x_2+\ldots+x_{\alpha_s+\alpha_{s-1}-1}+x_{\alpha_s+\alpha_{s-1}}$$

permutations and so on; before the permutation

$$\underbrace{s\ldots s}_{\alpha_s}\underbrace{\overline{s-1}\ldots\overline{s-1}}_{\alpha_{s-1}}\ldots\underbrace{j\ldots j}_{\alpha_j}\ldots\underbrace{3\ldots3}_{\alpha_3}\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_1}\underbrace{2\ldots2}_{\alpha_2}$$

there is

$$x_1+x_1+\ldots+x_{\alpha_s+\alpha_{s-1}+\ldots+\alpha_3-1}+(\alpha_1+\alpha_2)\frac{(\alpha_1+\alpha_2)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!}=$$

$$=x_1+x_2+\ldots+x_{\alpha_s+\alpha_{s-1}+\ldots+\alpha_3-1}+x_{\alpha_s+\alpha_{s-1}+\ldots+\alpha_3}$$

permutations; at the and we have: before the permutation

$$\underbrace{s\ldots s}_{\alpha_s}\;\underbrace{\overline{s-1}\ldots\overline{s-1}}_{\alpha_{s-1}}\ldots\underbrace{j\ldots j}_{\alpha_j}\ldots\underbrace{3\ldots 3}_{\alpha_3}\underbrace{2\ldots 2}_{\alpha_2}\underbrace{1\ldots 1}_{\alpha_1}$$

there is

$$x_1+x_2+\ldots+x_{\alpha_s+\alpha_{s-1}+\ldots+\alpha_2-1}+\alpha_1\cdot\frac{\alpha_1!}{\alpha_1!}=x_1+x_2+\ldots+x_{\alpha_s+\alpha_{s-1}+\ldots+\alpha_2}$$

permutations.

But it is evident that

$$x=1+x_{\alpha_s+\alpha_{s-1}+\ldots+\alpha_3+\alpha_2}+x_{\alpha_s+\alpha_{s-1}+\ldots+\alpha_3+\alpha_2-1}+\ldots+x_3+x_2+x_1$$

and, in view of the preceding results, we obtain[1]

$$(1)\qquad \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!}=1+\alpha_1\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=\alpha_2}\frac{(\alpha_1+\alpha_2-\nu)!}{\alpha_1!\,(\alpha_2-\nu+1)!}+$$

$$+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=\alpha_3}\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\nu)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,(\alpha_3-\nu+1)!}+\ldots$$

$$\ldots+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{s-1})\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=\alpha_s}\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s-\nu)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{s-1}!\,(\alpha_s-\nu+1)!}.$$

In the special case when $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_s=1$ therefrom we obtain the well-known formula (s. [2])

$$(2)\qquad n!=1+1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+(n-1)\cdot(n-1)!\,.$$

If we remark that using the gamma function Γ the formula (2) can be deduced by means of that function, it would be of some interest to see how could be also obtained the formula (1) by means either of the function Γ or of the function beta B. Moreover, it is obvious that $\Gamma(n+1)=n!$ so that $\Gamma(n+1)$ can be interpreted as an ordinal number according to the interpretation given to the formulae (1) and (2) in this note. Thus we have

---

[1] I dont know wether the formula (1) has been derived somewhere but, to the best of my knowledge, in publications about the subject I found only the special case (2), although (1) is a consequence of lexigraphic orderings of permutatuons in an analogous way as it is the case with the formula (2) too.

a map $\Gamma(n+1)$ of the set of finite cardinal numbers to the set of finite ordinal numbers and it may be also of some interest to see the meaning of the function gamma as a, so to say, an „ordering-function“.

BIBLIOGRAPHY

[1] Z. Mamuzić, *Kombinatorika*, „Matematička biblioteka“, № 6, izd. „Nolit“, Beograd, 1957.

[2] E. Netto, *Lehrbuch der Kombinatorik*, Berlin 1927.

О ЈЕДНОЈ ФОРМУЛИ О ФАКТОРИЈЕЛИМА

ЗЛАТКО МАМУЗИЋ, БЕОГРАД

Садржај

У чланку је изведена формула (1) где су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ природни бројеви. У специјалном случају када је $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 1$ из формуле (1) добија се позната формула (2). Како се формула (2) може извести и помоћу гама функције, било би интересантно видети како се може извести и формула (1) било помоћу гама функције било помоћу бета функције. Штавише, према интерпретацији која је у овом чланку дата функцији $\Gamma(n+1)$, ова претставља једно пресликавање скупа коначних кардиналних бројева у скуп коначних редних бројева па би, вероватно, било интересантно испитати и значење гама функције као „уређајне функције“.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie

НАПОМЕНЕ УЗ ЈЕДАН ЕЛЕМЕНТАРНИ ПРОБЛЕМ ИЗ ПЕРМУТАЦИЈА

ДРАГОЉУБ МАРКОВИЋ, БЕОГРАД

У „Веснику Друштва математичара и физичара НРС“ (VII, 1—2, 1955) поставио сам неколико сродних проблема за пермутације*. Они посматрају скуп оних пермутација код којих се на известан, унапред прописан начин, води рачуна о месту, — положају, — једног елемента у односу на неки други одређени елеменат, или у односу на више других елемената. Уопштење наведених тзв. „позиционих проблема“ из пермутација предвиђа проблематику положаја не само за поједине елементе, већ и за извесне одређене скупове елемената.

У овој ноти започећу конкретно један начин теориске обраде једног од таквих проблема, а исто тако указаћу на могућност и правац даље обраде. Мислим да ова врста проблема из пермутација има посебног интереса и у примени.

I. *Дефиниција. За два елеменйа* α *и* β *једне йермуйације* P *од* m *елеменаша каже се да су раздвојени са* p *елеменаша, ако у йорейку рeђања један од њих не долази за другим нейосредно, већ шек йосле* p *других елеменаша исше йермушације.*

У йосебном случају кад је $p=0$*, казаћемо да су* α *и* β *заједно или да су суседни.*

Кад је пермутација P написана на уобичајени начин, тј. кад настаје размештајем њених елемената, ствар је очевидна. Али пошто се пермутације пишу и у облику циклуса, онда је потребно знати да ли дата пермутација у облику циклуса припада проблему чији је тип одређен горњом дефиницијом или не.

* Вид. чланак Д. Аднађевића „Решење проблема ...“ у овом броју „Весника“.

Напишимо дакле пермутације P и Q код којих су α и β раздво јени са p елемената

$$P=\begin{pmatrix}1\dots k, & k+1\dots k+p, & k+p+1\dots m\\ \dots\alpha & \dots & \beta\ \dots\end{pmatrix} \tag{1}$$

или

$$Q=\begin{pmatrix}1\dots k, & k+1\dots k+p, & k+p+1\dots m\\ \dots\beta & \dots & \alpha\ \dots\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Одавде као услов излази

$$k\rightarrow\alpha \quad \text{и} \quad k+p+1\rightarrow\beta \tag{3}$$

или

$$k\rightarrow\beta \quad \text{и} \quad k+p+1\rightarrow\alpha \tag{3a}$$

$$k=1, 2, 3, \dots, \quad m-p-1.$$

И обрнуто је исто тако очевидно.

Из претходног излази да постоје два смера раздвојености један $\alpha\dots\beta$, а други $\beta\dots\alpha$. Природан број p може узимати вредности

$$p=1, 2, 3, \dots, \quad m-2$$

што значи да су α и β раздвојени са једним, односно два, три, односно највише са $m-2$ елемента. Прошири ли се p и на $p=0$, тј. поред појма раздвојених и на појам суседних елемената, онда излази да услов (3), односно (3a) важи и за

$$p=0, 1, 2, \dots, \quad m-2.$$

Пример за два суседна елеменӣа.

1°. За симетричну групу S_4 услов да су два елемента 1 и 2 суседна гласи

$$k\rightarrow 1 \quad \text{и} \quad k+1\rightarrow 2$$

тј.

$$\begin{matrix} 1\rightarrow 1 & & 2\rightarrow 1 & & 3\rightarrow 1\\ 2\rightarrow 2 & \text{или} & 3\rightarrow 1 & \text{или} & 4\rightarrow 2. \end{matrix}$$

То су ове пермутације

$$1=1234, \quad (132)=3124, \quad (13)\ (24)=3412,$$

$$(34)=1243, \quad (1432)=4123, \quad (1423)=4312.$$

Претходни услови и њима ооговарајуће пермутације важе за смер 12. Обрнуто, за смер 21 услов би гласио

$$k\rightarrow 2 \quad \text{и} \quad k+1\rightarrow 1,$$

тј.

$$\begin{matrix} 1\to 2 & & 2\to 2 & & 3\to 2 \\ 2\to 1 & \text{или} & 3\to 1 & \text{или} & 4\to 1. \end{matrix}$$

Њима одговарају пермутације

$$(12)=2134, \quad (13)=3214, \quad (1324)=3421,$$
$$(12)\,(34)=2143, \quad (143)=4213, \quad (14)\,(23)=4321.$$

2°. Циклична група од пет елемената има само четири такве пермутације и то само са смером 12. То су

$$1=12345, \quad (13524)=34512, \quad (14523)=45123, \quad (15432)=51234.$$

Интересантно је приметити да код цикличне групе могу бити суседни само 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5, 5 и 1 и то само у смеру основног циклуса (12345).

Оба услова (3) и 3а) могу бита претстављени и шематски помоћу пресликавања једне матрице на другу, тј.

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ \vdots & \vdots \\ m-1 & m \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Збиља, слично множењу оваквих матрица било би

$$(4a) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ m-1 & m \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,\alpha+2\,\beta & 1\,\beta+2\,\alpha \\ 2\,\alpha+3\,\beta & 2\,\beta+3\,\alpha \\ \cdot & \cdot \\ \overline{m-1}\,\alpha+m\,\beta & \overline{m-1}\,\beta+m\,\alpha \end{bmatrix},$$

при чему $k\,\alpha$ краће означава $k\to\alpha$, а знак + означава да пресликавање $k\to\alpha$ повлачи истовремено и $k+1\to\beta$. Према томе, елеменат $k\,\alpha+\overline{k+1}\,\beta$ пресликане матрице означава да кад $k\to\alpha$ онда и $k+1\to\beta$.

За цикличне групе пермутација услов суседности два елемента α и β има шематски облик

$$(5) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ m-1 & m \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

3°. Услов да код симетричне групе S_4 елементи 1 и 2 буду раздвојени са једним елементом (3 или 4) гласи

$$\begin{matrix} k \to 1 & & k \to 2 \\ k+2 \to 2 & \text{или} & k+2 \to 1, \end{matrix}$$

односно

$$\begin{matrix} 1 \to 1 & & 2 \to 1 & & 1 \to 1 & & 2 \to 2 \\ 3 \to 2 & \text{или} & 4 \to 2 & \text{или} & 3 \to 2 & \text{или} & 4 \to 1. \end{matrix}$$

Њима одговарају пермутације

$$\begin{matrix} (23) = 1324 & (1342) = 3142 & (123) = 2314 & (134) = 3241 \\ (243) = 1423 & (142) = 4132 & (1243) = 2413 & (14) = 4231. \end{matrix}$$

Услов раздвојености α и β са p елемената, могао би, слично претходном, шематски бити приказан

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2+p \\ 2 & 3+p \\ \vdots & \vdots \\ m-p-1 & m \end{matrix}\right] \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{6}$$

II. Интересантне особине показује и комбинација по два суседна елемента тј. скуп пермутација којих су не само α и β суседни него исто тако и γ и δ ($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$). Услови да једна таква пермутација P припада наведеном скупу гласе

$$\begin{matrix} k \to \alpha & & k' \to \gamma \\ k+1 \to \beta & & k'+1 \to \delta \end{matrix}$$

при чему k и k' пролазе кроз све природне бројеве $1, 2, \ldots, m$ уз услов $k \neq k'$, $k+1 \neq k'$ и $k \neq k'+1$.

Тако нпр. за $m=4$ имамо за сваку пермутацију по четири услова

$$\begin{matrix} 1 \to \alpha & & 3 \to \alpha \\ 2 \to \beta & & 4 \to \beta \\ 3 \to \gamma & & 1 \to \gamma \\ 4 \to \delta & \text{или} & 2 \to \delta. \end{matrix}$$

Поред ових, имамо још и све оне случајеве који настају кад се елементи α, β, γ, δ, у сваком ступцу пермутују на ова четири начина

$$H = 1 + (\alpha\beta) + (\gamma\delta) + (\alpha\beta)(\gamma\delta).$$

Исти услови могли би очевидније бити приказани као

$$(7) \qquad \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,4\,1\,2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}\alpha & \beta & \alpha & \beta\\ \beta & \alpha & \beta & \alpha\\ \gamma & \gamma & \delta & \delta\\ \delta & \delta & \gamma & \gamma\end{bmatrix}.$$

III. Најважније питање које се може поставити састоји се у томе, да се испита шта претставља скуп таквих пермутација. Уопше узев, скуп пермутација, код којих су два одређена елемента њена суседна или по два различита одређена елемента суседна, не чини групу. Међутим, има примера, тј. посебних случајева да скуп таквих пермутација чини групу. Тако нпр. скуп пермутација од четири елемента 1, 2, 3, 4 код којих су 1, 2 суседна а тако исто и 3, 4 чини групу идентичну са групом познате функције

$$(8) \qquad x_1\,x_2 + x_3\,x_4.$$

Исто тако нпр. групу

$$(9) \qquad 1, \quad (12)\,(34), \quad (13)\,(24), \quad (14)\,(23)$$

односно

$$1234, \quad 2143, \quad 3412, \quad 4321$$

чини, за поменута четири елемента, и скуп оних пермутација код којих су истовремено оба пара 1, 2 и 3, 4 или у истом смеру суседна, или у супротном.

Али иако скуп таквих пермутација уопште не чини групу, има примера да показују неке особине сличне особинама група.

Тако нпр. скуп H оних пермутација од 1, 2, 3, 4 код којих су 1, 2 суседни елементи, као што смо видели, гласи

$$1=1234, \quad (34)=1243, \quad (132)=3124, \quad (1432)=4123, \quad (13)\,(24)=3412,$$
$$(1423)=4312, \quad (12)=2134, \quad (12)\,(34)=2143,$$
$$(13)=3214, \quad (143)=4213, \quad (1324)=3421 \quad \text{и} \quad (14)\,(23)=4321.$$

Скуп H не чини групу, јер иако садржи јединичну пермутацију производ два његова члана

$$(132)\cdot(1432)=(1243)=\begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}=2413$$

даје пермутацију која не припада скупу H.

Али ако се скуп H подели на два подскупа H^+ и H^-, при чему H^+ претставља све оне пермутације код којих су 1, 2 суседни у смеру 12, а H^- пермутације са смером суседности 21, онда се H^+ може написати

$$H^+ = I + t_1 I + t_2 I. \tag{10}$$

I означава групу

$$I = 1 + (34), \tag{11}$$

а t_1 и t_2 две које било пермутације из H^+ али изван I. Тиме је скуп H^+ репродукован помоћу I, t_1 и t_2, односно разложен по модулу I, који је група у скупу H^+.

Исто тако може се разложити и скуп H. Група која овде служи као модуо гласи

$$I = 1 + (12) + (34) + (12)\ (34), \tag{12}$$

а само разлагање има облик

$$H = I + s\,I + t\,I, \quad s, t \in H;\ s, t \in' I. \tag{13}$$

Оба резултата су општи. Уочимо скуп H оних пермутација од m цифара код којих су 1, 2 суседни у смеру 12. Таквих пермутација има $(m-1)!$ тј. то су све оне које настају размештајем

$$(12)\,345\ldots m,$$

при чему се (12) са истим смером рачуна као јединствен елеменат. Модуо I по коме се H^+ разлаже састоји се из свих пермутација које се могу начинити од елемената $3, 4, \ldots, m$ и чији је број $(m-2)!$ Зато је број комплекса

$$\frac{(m-1)!}{(m-2)!} = m - 1.$$

Према томе је

$$H^+ = I + t_1 I + t_2 I + \cdots + t_{m-2} I. \tag{14}$$

Разлагање скупа H, тј. скупа пермутација код којих су 1, 2 суседни у оба смера има исту особину, само модулу I треба, поред наведених пермутација, додати и транспозицију (12) као и оне, које се комбинују помоћу (12) и групе пермутација које су служиле као модуо у разлагању H^+.

Оваква особина скупова H^+ и H одговара тзв. Mischgruppe*, а подскуп I језгру (Kern) једног таквог скупа.

---

* Група настала мешањем, распоређивањем.

Изгледа да овакву особину разлагања (својство Mischgruppe) имају само они проблеми о суседности два елемента који у своме решењу садрже јединичну пермутацију. Али ову претпоставку треба потврдити. Исто тако остаје да се испита:

1) да ли и какав облик разлагања имају остали скупови који не садрже јединичну пермутацију, али претстављају решење проблема о суседности два елемента;

2) да ли слично својство показује и скуп пермутација, код код којих су два елемента раздвојена једним или са више елемената;

3) да ли се могу пронаћи и нека друга својства и законитости између елемената наведених скупова.

REMARQUES SUR UN PROBLÈME ÉLÉMENTAIRE DES SUBSTITUTIONS

par D. MARKVITCH, BEOGRAD

Résumé

Dans l'article précédent j'ai fait quelques remarques sur les bases théoriques d'un des problèmes que j'ai posés dans Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie (VII, 1—2, 1955). Concrètement, il s'agit du problème qu'on peut définir:

Pour deux éléments α et β d'une substitution P de m éléments on dit qu'ils sont séparés lorsque, en ordonnant tous les éléments de P, α ne suit pas immédiatement β, et inversement. On peut distinguer les cas ou α respectivement β, est séparé par p d'autres éléments de P. Dans le cas spéciale où $p=0$, on dit que α et β sont voisins.

On donne d'abord les critères (3) ou (3a) pour réconnaitre si une substitution P (resp. Q) en cycles appartient au problème. On distingue deux sens: $\alpha \ldots \beta$ ($\alpha < \beta$) sont séparés, resp. $\alpha\beta$ sont voisins, au sens direct; le sens contraire est évident. Les exemples 1° et 2° donnent les critères et les ensembles de substitutions ou 1 et 2 sont voisins dans le groupe symétrique S_4 et dans le groupe cyclique de 1, 2, 3, 4, 5. De même, l'exemple (3°) donne les criterès pour que 1 et 2 soient séparés par un élément dans le groupe S_4. Les mêmes critères (3) et (3a) peuvent être représentés en forme des matrices, comme (4), (4a), (5) et (6). L'ensemble de substitutions où sont voisins non seulement α et β, mais aissi γ et δ, comme l'exemple pour S_4, sont traités dans (II).

La question la plus intéressante qui peut se poser est, si l'ensemble de substitutions, qui corréspond au problème posé, répresente un groupe. Qoique il existe les ensembles (8) et (9) qui corréspondent aux groupes connus, ce n'est pas le cas général. Mais tout de même, une classe des ensembles (qui contient la substitution identique) montre les propriétés semblables aux celles de groupe.

En effet, si l'on considère l'ensemble de substitutions H où sont par ex. 1 et 2 voisins, on peut le diviser en deux ensembles H^+ et H^-. H^+ répresente l'ensemble de substitutions au sens 12, et H^- au sens contraire 21. Envisageons dans H^+ l'ensemble I des substitutions formées des 3, 4, ..., m qui font le groupe. Alors, il suit la décomposition (14). La décomposition semblable pour H est valable aussi. Le groupe I dans H^+ ou bien dans H constitue le noyau de H^+, resp. H. Les exemples (10), (11), (12), (13) mettent en évidence la décomposition et le noyau de H^+, resp. H, dans le groupe symétrique S_4 sous la condition que 1 et 2 soient voisins.

Donc les propriétés des ensembles de substitutions envisagés corréspondent aux „*Mischgruppe*“.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1–2 (1957), Beograd
Yougoslavie

О ВЕЗАМА ИЗМЕЂУ РАЗЛИЧИТИХ ВРСТА ИНТЕГРАЛА ЗА СИСТЕМЕ ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА II РЕДА У ИНВОЛУЦИЈИ DARBOUX-LIE-А

БОРИВОЈЕ РАШАЈСКИ, БЕОГРАД

Познато је да у теорији парцијалних једначина другог и вишег реда постоје различите врсте решења: општи интеграл, потпуни интеграл, мешовити, [1], и партикуларни интеграли. Ови последњи задовољавају унапред дате услове различитих особина. Основна разлика, која постоји између теорија парцијалних једначина првог и вишег реда, састоји се у томе да није уопште познат облик ткз. првобитних једначина помоћу којих се формирају парцијалне једначине чији је ред виши од првог. Поред тога за парцијалне једначине првог реда је радовима Lagrange-а и Jacobi-а разрађена општа теорија решења, као и веза између различитих врста решења. Оваква теорија и поменута веза не постоји за парцијалне једначине вишег реда. Шта више и неке дефиниције наведених врста решења су различите код појединих аутора. Као пример, поменимо да постоје различите дефиниције општег интеграла дате од стране Lagrange-а, Ampère-а и Darboux-а

Новија испитивања у теорији парцијалних једначина вишег реда напустила су класично гледиште и задатак изналажења општег интеграла тих једначина, јер је или тешко или немогуће добити општи интеграл, а пре свега и због тога што не постоје опште и погодне методе помоћу којих би се из општег интеграла добила одговарајућа партикуларна решења, која је захтевала пракса и теорија. Та испитивања су створила нове и разноврсне теорије потребне за проучавање одговарајућих партикуларних интеграла. Резултати тих теорија имали су велики значај за напредак модерне математике и пред исту поставиле обиље нових проблема и појмова. Али у исто време, пошто су истраживања била управљена у наведеном правцу, она нису дала опште методе за интеграљење парцијалних једначина вишег реда, па ни проучавала различите врсте интеграла и њихове међусобне везе. Зато је још и увек, иако је прошло доста времена, актуелно мишљење Moutard-a: „Тешкоће које до сада постоје у проблему интеграљења парцијалних једначина вишег реда, поред напора чувених геометара, чини ми се да се састоје у томе што нема синтетичке методе, која би дозволила да се формирају à priori сви могући обрасци интеграла, да се проуче различите врсте интеграла и поставе везе са одговарајућим парцијалним једначинама".

Предмет овога чланка биће испитивање веза између различитих врста интеграла за системе парцијалних једначина другог реда у инволуцији Darboux-Lie-a и њихово добијање помоћу потпуног интеграла таквих система. Lagrange, [2], је дао једну методу за добијање општег интеграла једне парцијалне једначине другог реда када је познат један потпуни интеграл те једначине, али она се показала као врло компликована у применама и на најпростије једначине. Идеје Lagrange-a и метод варијације констаната су коришћене и од других аутора и нарочито треба истаћи интересантна испитивања König-a [3] и Goursat-a, [4]. Од домаћих аутора поменимо да је К. Орлов, [5], проширио Lagrange-ову методу, али само на извесне врсте парцијалних једначина другог реда и да је Н. Салтиков дао у својим предавањима на Београдском универзитету дефиницију мешовитог општег интеграла парцијалних једначина другог реда и поступак за добијање општег интеграла систем парцијалних једначина другог рада у инволуцији Darboux-Lie-a помоћу општег интеграла одговарајућег система за карактеристике [1], [6].

Испитивања у овоме чланку имају за циљ да допринесу даљем упостављању аналогних особина између парцијалних једначина првог реда и система парцијалних једначина другог реда у инволуцији Darboux-Lie-a, а о чему је било речи и раније, [7].

1. Нека је дат систем парцијалних једначина другог реда у инволуцији Darboux-Lie-a

$$\begin{cases} r+f(x,y,z,p,q,s)=0 \\ t+\varphi(x,y,z,p,q,s)=0, \end{cases} \tag{1}$$

чији је потпуни интеграл:

$$z=V(x,y,C_1,C_2,C_3,C_4), \tag{2}$$

где су C_i произвољне константе. Потпуни интеграл задовољава услове, [7],

$$\Delta_{xy}\equiv D\left(\frac{V,V_x,V_y,V_{xy}}{C_1,C_2,C_3,C_4}\right)\neq 0 \tag{3}$$

$$\Delta_{x^2}\Delta_{y^2}-\Delta_{xy}^2=0, \tag{4}$$

где су уведене ознаке

$$\Delta_{x^2} \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{x^2}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right), \quad \Delta_{y^2} \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{y^2}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right).$$

Посматрајмо величине C_i као функције променљивих x и y. Да би образац (2) при том претпоставком и даље био решење система (1) функције $C(x, y)$ мора да задовољавају услове

$$(5)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial x} = 0, & \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial x} = 0, & \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial x} = 0, \\ \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial y} = 0, & \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial y} = 0, & \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Уведимо ознаку

$$(i, j, k) \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y}{C_i, C_j, C_k}\right)$$

и претпоставимо да је $(i, j, k) \neq 0$, $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$, тада условима (5) можемо дати један од следећих облика

$$(6)\quad \frac{\partial C_1}{\partial x} = -\frac{(4,2,3)}{(1,2,3)}\frac{\partial C_4}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_2}{\partial x} = -\frac{(1,4,3)}{(1,2,3)}\frac{\partial C_4}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_3}{\partial x} = -\frac{(1,2,4)}{(1,2,3)}\frac{\partial C_4}{\partial x},$$

$$(7)\quad \frac{\partial C_1}{\partial x} = -\frac{(3,2,4)}{(1,2,4)}\frac{\partial C_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_2}{\partial x} = -\frac{(1,3,4)}{(1,2,4)}\frac{\partial C_4}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_4}{\partial x} = -\frac{(1,2,3)}{(1,2,4)}\frac{\partial C_3}{\partial x},$$

$$(8)\quad \frac{\partial C_1}{\partial x} = -\frac{(2,3,4)}{(1,3,4)}\frac{\partial C_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_3}{\partial x} = -\frac{(1,2,4)}{(1,3,4)}\frac{\partial C_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_4}{\partial x} = -\frac{(1,3,2)}{(1,3,4)}\frac{\partial C_2}{\partial x},$$

$$(9)\quad \frac{\partial C_2}{\partial x} = -\frac{(1,3,4)}{(2,3,4)}\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_3}{\partial x} = -\frac{(2,1,4)}{(2,3,4)}\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_4}{\partial x} = -\frac{(2,3,1)}{(2,3,4)}\frac{\partial C_1}{\partial x},$$

где овим једначинама треба додати и једначине које се добијају када се у овим последњим изводи $\frac{\partial C}{\partial x}$ смене са изводима $\frac{\partial C}{\partial y}$. Помоћу наведених једначина и познатих веза, [7],:

$$D\left(\frac{\alpha, \beta}{x, y}\right) = 0, \quad \Delta_{xy}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \Delta_{x^2}\frac{\partial \alpha}{\gamma y}, \quad \alpha \equiv \frac{(i, k, l)}{(i, j, k)}, \quad \beta \equiv \frac{(i, j, l)}{(i, j, k)}$$

долазимо до следећег хомогеног система Charpit-a

$$(10)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}\right]\frac{\partial C_i}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}\right]\frac{\partial C_i}{\partial y} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

по непознатим функцијама $C_i(x, y)$. Коефицијенти тог система, у оштем случају, зависе од x, y, C_i. Пошто имамо одговарајући систем обичних диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}\right]} = -\frac{dy}{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}\right]} = \frac{dC_1}{0} = \cdots = \frac{dC_4}{0},$$

онда је општи интеграл Charpit-евог система (10) одређен једначинама

$$C_i = f_i\left[\frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}\right],^{1)} \quad (i=1,2,3,4)$$

где су f_i произвољне функције назначеног аргумента. Функције f_i задовољавају системе (6), зато нпр. на основу (9) имамо следеће једначине

$$f_2' = -\frac{(1,3,4)}{(2,3,4)}f_1', \quad f_3' = -\frac{(2,1,4)}{(2,3,4)}f_1', \quad f_4' = -\frac{(2,3,1)}{(2,3,4)}f_1'.$$

Стављајући

(11) $$u \equiv \frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}$$

и узимајући у обзир да функције $\frac{(1,3,4)}{(2,3,4)}, \frac{(2,1,4)}{(2,3,4)}, \frac{(2,3,1)}{(2,3,4)}$ нису различите у односу на променљиве x, y, [7], последње једначине могу добити следећи облик

(12) $$f_2'(u) = a(u, f_i)\, f_1'(u), \quad f_3'(u) = b(u, f_i)\, f_1'(u), \quad f_4'(u) = -u\, f_1'(u).$$

Одавде се види да су четири функције f_i везане са три релације и да је према томе само једна од њих произвољна.

Дакле, решење система парцијалних једначина (1), које је одређено са

(13) $$z = V[x, y, f_1(u), f_2(u), f_3(u), f_4(u)]$$

и једначинама (11) и (12), садржи једну произвољну функцију и претставља општи интеграл тог система.

---

[1]) Систем (10) може се одмах сменити са $D\left(\frac{\frac{1,2,3}{2,3,4}, C_i}{x, y}\right) = 0$ $(i=1,2,3,4)$, а што је еквивалентно са тим општим интегралом.

Наведимо један пример.

Систем у инволуцији Darboux-Lie-a

$$(14)\qquad \begin{cases} s=-\dfrac{rx+r^2y}{y} \\ t=\dfrac{1}{3}r^3+r\left(\dfrac{x+yr}{y}\right)^2 \end{cases}$$

има потпуни интеграл $Z=C_1x+C_4y-\dfrac{1}{12y}(x+C_3y)^3-C_2$, који задовољава услов $\Delta_{x^2}\Delta_{y^2}=\Delta_{xy}^2$. Одговарајуће детерминанте трећег реда имају вредност

$$(1,2,3)=-\frac{C_3}{2}(x+C_3y),\qquad (1,2,4)=1,$$

$$(1,3,4)=-\frac{1}{4}(x+C_3y)^2,\quad (2,3,4)=\frac{1}{2}(x+C_3y)^2.$$

На основу система (9) закључујемо да произвољне функције f_i задовољавају услове

$$f_2'=\frac{1}{2}u\,f_1',\quad f_3'=\frac{2}{u}f_1',\quad f_4'=f_3\,f_1',\quad u\equiv x+f_3\,y$$

који заједно са

$$(15)\qquad z=f_1\,x+f_4\,y-\frac{1}{12y}u^3-f_2$$

одређују решење система (14) са једном произвољном финкцијом. Ако, нпр. изаберемо да је $f_1'=\dfrac{u}{2}$, тада је $f_1=\dfrac{u^2}{4}$, $f_2=\dfrac{1}{12}u^3$, $f_3=u$, $f_4=$ $=\dfrac{1}{6}u^3$, $u=\dfrac{x}{1-y}$ и одговарајуће партикуларно решење полазног система је $z=\dfrac{x^3}{12\,y\,(y-1)}$.

2. Претпоставимо да је $(2,3,4)=0$, а да су остале детерминанте трећег реда различите од нуле. Тада условима (5) можемо дати један од облика

$$(16_1)\qquad \frac{\partial C_1}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial C_2}{\partial x}=-\frac{(1,4,3)}{(1,2,3)}\frac{\partial C_4}{\partial x},\quad \frac{\partial C_3}{\partial x}=-\frac{(1,2,4)}{(1,2,3)}\frac{\partial C_4}{\partial x};$$

$$(16_2)\qquad \frac{\partial C_1}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial C_2}{\partial x}=-\frac{(1,3,4)}{(1,2,4)}\frac{\partial C_3}{\partial x},\quad \frac{\partial C_4}{\partial x}=-\frac{(1,2,3)}{(1,2,4)}\frac{\partial C_3}{\partial x},$$

$$(16_3)\qquad \frac{\partial C_1}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial C_3}{\partial x}=-\frac{(1,2,4)}{(1,3,4)}\frac{\partial C_2}{\partial x},\quad \frac{\partial C_4}{\partial x}=-\frac{(1,3,2)}{(1,3,4)}\frac{\partial C_2}{\partial x},$$

где овим једначинама треба додати и једначине, које се добијају када се у овим последњим изводи $\frac{\partial C}{\partial x}$ смене са изводима $\frac{\partial C}{\partial y}$. У овом случају величина C_1 не зависи од x и y, а одговарајући Charpit-ev систем може се написати, нпр. у облику

$$(10') \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(1,2,4)}{(1,2,3)}\right]\frac{\partial C_{i+1}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1,2,4)}{(1,2,3)}\right]\frac{\partial C_{i+1}}{\partial y}, \quad (i=1,2,3).$$

Његов општи интеграл је

$$C_{i+1}=f_i\left[\frac{(1,2,4)}{(1,2,3)}\right], \quad (i=1,2,3),$$

где су f_i произвољне функције. Ове функције треба да задовољавају још један од система (16), нпр. систем (16_1), што даје услове

$$(17) \qquad f_1'(u)=a(C_1,u,f_i)\,f_3', \quad f_2'(u)=-u\,f_3', \quad u\equiv\frac{(1,2,4)}{(1,2,3)}.$$

Дакле, једна од функција остаје произвољна. Према томе једначина

$$z=V[x,y,C_1,f_1(u),f_2(u),f_3(u)]$$

са (17) одређује нам решење система (1), које садржи једну произвољну константу и једну произвољну функцију. Такво решење се зове, према предлогу *Н.* Салтикова, [1], тзв. мешовити општи интеграл система парцијалних једначина другог реда (1).

Као пример узмимо Ampère-ову једначину

$$(18) \qquad st+x(rt-s^2)^2=0,$$

која са једначином

$$(19) \qquad 2x(rt-s^2)=pt-qs$$

чини систем у инволуцији Darboux-Lie-a, [1]. Овај систем има потпуни интеграл

$$z=\frac{4}{3}C_1x^{3/2}+C_2(y-C_1^2x)^2+C_3(y-C_1^2x)+C_4$$

за који је $(2,3,4)=0$. Одговарајући Charpit-ев систем

$$\frac{\partial C_{i+1}}{\partial x}+C_1^2\frac{\partial C_{i+1}}{\partial y}=0, \quad (i=1,2,3), \quad C_1=\text{const.}$$

има општи интеграл

$$C_{i+1}=f_i(u), \quad (i=1,2,3), \quad u\equiv y-C_1^2x,$$

Функције f_i задовољавају услове

$$f_1' = -\frac{1}{2u} f_2', \quad f_3' = -\frac{1}{2} u f_2'.$$

Стављајући $f_2' = u\,\alpha'''$, где је α произвољна функција назначеног аргумента u, и замењујући у потпуном интегралу величине C_{i+1} са функцијама f_i добијамо мешовити општи интеграл система (18)—(19)

$$z = \frac{4}{3} C_1 x^{3/2} - \alpha (y - C_1^2 x).$$

За други пример узмимо систем у инволуцији Darboux-Lie-a

$$(20) \qquad \begin{cases} s = \dfrac{p - xr}{y} \\[2mm] t = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 r - \dfrac{2}{y}(z - yq). \end{cases}$$

За његов потпуни интеграл

$$z = C_1 (C_2 + C_3)\, y + C_4^2\, xy + C_3\, x^2 + C_2\, C_4\, y^2$$

ниједна од детерминаната трећег реда (i, j, k) није једнака нули. Међутим, ако следимо ростулак К. Орлова, [5], и уведемо нове константе a_i следећим везама

$$a_1 = C_1 (C_2 + C_3), \quad C_2\, C_4 = a_2, \quad C_3 = a_3, \quad C_4^2 = a_4,$$

онда за потпуни интеграл

$$z = a_1\, y + a_4\, xy + a_3\, x^2 + a_2\, y^2$$

имамо

$$(1, 2, 3) = -2\, xy^2, \quad (1, 2, 4) = -y^3, \quad (1, 3, 4) = x^2 y, \quad (2, 3, 4) = 0$$

Charpit-ев систем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) \frac{\partial a_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) \frac{\partial a_{i+1}}{\partial y} = 0$$

има општи интеграл

$$a_{i+1} = f_i(u), \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad u \equiv \frac{y}{x}$$

Поред тога услови

$$f_1' = -\frac{1}{2u} f_3', \quad f_2' = -\frac{1}{2} u f_3'$$

дају

$$f_1 = -\frac{1}{2}\alpha'', \quad f_2 = -\frac{1}{2}u^2\alpha'' + u\alpha' - \alpha, \quad f_3 = u\alpha'' - \alpha',$$

где је $\alpha(u)$ произвољна функција. Стављајући нађене изразе за функције f_i у други потпуни интеграл добијамо мешовити општи интеграл

$$z = a_1 y - x^2 \alpha\left(\frac{y}{x}\right)$$

са произвољном константом a_1 и произвољном функцијом α.

Напомињемо да до мешовитих општих интеграла, поред изложеног поступка варијације констаната, можемо доћи и помоћу одговарајућих посредних интеграла са једном произвољном константом.

3. Посматрајмо сада услове (5) као систем

$$(21)\quad \begin{cases} (1,2,3)\dfrac{\partial C_1}{\partial x} + (2,3,4)\dfrac{\partial C_4}{\partial x} = 0, & (1,2,3)\dfrac{\partial C_1}{\partial y} + (2,3,4)\dfrac{\partial C_4}{\partial y} = 0, \\ (1,2,4)\dfrac{\partial C_1}{\partial x} - (2,3,4)\dfrac{\partial C_3}{\partial x} = 0, & (1,2,4)\dfrac{\partial C_1}{\partial y} - (2,3,4)\dfrac{\partial C_3}{\partial y} = 0, \\ (1,3,4)\dfrac{\partial C_1}{\partial x} + (2,3,4)\dfrac{\partial C_2}{\partial x} = 0, & (1,3,4)\dfrac{\partial C_1}{\partial y} + (2,3,4)\dfrac{\partial C_2}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

који има шест једначина и хомоген је у односу на четири детерминанте трећег реда (i, j, k). Претпоставићемо да ниједна таква детерминанта није идентички једнака нули. Детерминанте четвртог реда формиране из матрице за систем (21) имају редом следеће вредности

$$(22)\quad \left(\frac{\partial C_1}{\partial x}\right)^2 (C_1, C_k), \quad \left(\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)^2 (C_1, C_k), \quad \frac{\partial C_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial y}(C_1, C_k), \ (k = 2, 3, 4), \quad 0,$$

где је уведена ознака:

$$(C_i, C_k) = D\left(\frac{C_i, C_k}{x, y}\right).$$

Да би систем (21) имао нетривијална решења у односу на непознате $(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)$ морају све поменуте детерминанте четвртог реда да буду једнаке нули. Пошто $\dfrac{\partial C_1}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial C_1}{\partial y}$ нису истовремено једнаки нули, онда имамо

$$(C_1, C_k) = 0, \quad (k = 2, 3, 4)$$

или

$$C_{i+1} = \varphi_i(C_1), \quad (i = 1, 2, 3).$$

У овом случају систем (5) прима следећи облик

$$\left[\frac{\partial V}{\partial C_1} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial C_{i+1}} \varphi_i'(C_1)\right] \frac{\partial C_1}{\partial a_j} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_1} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_{i+1}} \varphi_i'(C_1)\right] \frac{\partial C_1}{\partial a_j} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_1} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_{i+1}} \varphi_i'(C_1)\right] \frac{\partial C_1}{\partial a_j} = 0, \quad (j=1,2),$$

где смо увели ознаку $a_1 \equiv x$, $a_2 \equiv y$. У условима посматраног случаја последњи систем од шест једначина своди се на следеће три једначине

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial C_1} + \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial V}{\partial C_{i+1}} \varphi_i'(C_1) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_1} + \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_{i+1}} \varphi_i'(C_1) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_1} + \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_{i+1}} \varphi_i'(C_1) = 0. \end{cases}$$

Последње једначине можемо написати и овако

$$(24) \qquad \varphi_1' = -\frac{(1,3,4)}{(2,3,4)}, \quad \varphi_2' = -\frac{(2,1,4)}{(2,3,4)}, \quad \varphi_3' = -\frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}.$$

Пошто количници на десним странама претстављају функције које нису различите у односу на променљиве x и y, онда из (24) добијамо

$$(25) \qquad \varphi_i' = F_i(C_1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_3'), \quad (i=1,2).$$

Дакле, за три функције φ_i имамо свега две релације које оне треба да задовољавају и зато једна од њих остаје произвољна.

Општи интеграл у инволуцији Darboux-Lie-а одређен је са

$$z = V[x, y, C_1, \varphi_1(C_1), \varphi_2(C_1), \varphi_3(C_1)]$$

и једначинама (25) и једном од једначина (23) и садржи једну произвољну функцију. Аналоган резултат можемо наћи код E. Goursat-а [4], где су коришћена геометриска разматрања и систем једначина за карактеристике.

Када бар једна од вредности (22) није једнака нули, онда систем (21) има само тривијална решења

$$(26) \qquad (1,2,3) = 0, \quad (1,2,4) = 0, \quad (1,3,4) = 0, \quad (2,3,4) = 0.$$

Услови (26) постоје и када је $(C_i, C_k) \neq 0$. Ако из (26) можемо одредити величине C_i у функцији промењљивих x и y, онда једначине (2) и (26) нам одређују једно решење система (1), које би, по аналогији са теоријом парцијалних једначина првог реда, звали сингуларно решење тог система.

Као пример узмимо опет систем (20) и његов потпуни интеграл. Тада услови (26)

$$(1, 2, 3) \equiv -2\, C_4 (C_2 + C_3)\, xy^2 = 0\,, \quad (1, 2, 4) \equiv -2\, C_4^2 (C_2 + C_3)\, y^3 = 0\,,$$

$$(1, 3, 4) \equiv 2\, (C_2 + C_3)\, (C_2\, y + C_4\, x)\, xy = 0\,,$$

$$(2, 3, 4) \equiv 2\, C_1\, y\, (C_4\, x^2 + C_2\, xy + C_4^2\, y^2) = 0$$

дају $C_i = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. У овом случају сингуларни интеграл система (20): $z = 0$ је истовремено и партикуларни интеграл тога система.

4. Лако је показати и за систем (1) да се свако његово решење

$$z = \psi (x, y)\,,$$

где функција ψ има парцијалне изводе до другог реда, налази међу решењима која се добијају из потпуног интеграла (2) варијацијом констаната. Поставимо једенакости

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} & V (x, y, C_1, C_2, C_3, C_4) = \psi (x, y)\,, \\ & \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\,, \\ & \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,, \\ & \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y}\,. \end{aligned} \right.$$

Под претпоставком (3) ове једнакости одређују C_i у функцији x и y. Пошто су V и ψ решења система (1), то имамо следеће индентичности за свако C_i

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f (x, y, V, V_x, V_y, V_{xy}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \varphi (x, y, V, V_x, V_y, V_{xy}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f (x, y, \psi, \psi_x, \psi_y, \psi_{xy}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \varphi (x, y, \psi, \psi_x, \psi_y, \psi_{xy}) = 0\,,$$

које, због (27), дају

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \tag{28}$$

Диференцирањем три једнакости (27) по x и y добијамо

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

На основу (27) и (28) ове последње једнакости дају нам једнакости (5) што и доказује горње тврђење.

5. Наш следећи задатак је формирање општег интеграла система (1) помоћу општег интеграла одговарајућег система диференцијалних једначина за карактеристике. Овај задатак је решио Н. Салтиков [6] за случај када се пође од макојег општег интеграла карактеристика. Међутим, решавање овог проблема постаје нешто једноставније када се пође од потпуног интеграла (2) и помоћу њега формира општи интеграл карактеристика, [7],

$$\begin{cases} z = V(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4) \\ p = V_x(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4) \\ q = V_y(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4) \\ s = V_{xy}(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4) \\ \alpha \equiv \dfrac{(i, j, k)}{(i, l, k)} = C_5 . \end{cases} \tag{29}$$

Због услова (3) општи интеграл (28) можемо написати

$$\begin{cases} f_i(x, y, z, p, q\ s) = C_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ f \equiv \alpha(x, y, f_1, f_2, f_3, f_4) = C_5 \end{cases} \tag{30}$$

Познато је, [6], да је систем дифиренцијалних једначина за карактеристике еквивалентан са следећим Charpit-евим системом

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\varphi_s}\frac{\partial z}{\partial y}-p-\frac{1}{\varphi_s}q=0, \qquad \frac{\partial r}{\partial x}+\frac{1}{\varphi_s}\frac{\partial r}{\partial y}+D_x f=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\varphi_s}\frac{\partial p}{\partial y}+f-\frac{1}{\varphi_s}s=0, \qquad \frac{\partial s}{\partial x}+\frac{1}{\varphi_s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{1}{\varphi_s}D_x\varphi=0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{1}{\varphi_s}\frac{\partial q}{\partial y}-s+\frac{1}{\varphi_s}\varphi=0, \qquad \frac{\partial t}{\partial x}+\frac{1}{\varphi_s}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{1}{\varphi_s}D_x\varphi=0,$$

онда интеграле (30) можемо посматрати као интеграле последњег система. Шта више општи интеграл Charpit-евог система је одређен са

$$\begin{gathered} f_i=\psi_i(f), \quad (i=1,2,3,4) \\ r+f=0, \quad t+\varphi=0. \end{gathered} \tag{31}$$

Ставимо $f=u, f_i=u_i$, онда је $u_i=\psi_i(u)$. Решимо систем

$$\begin{cases} \alpha(x,y,u_1,u_2,u_3,u_4)=u, \\ f_i(x,y,z,p,q,s)=u_i, \end{cases}$$

по параметарским промењивим величинама y, z, p, q, s

$$\begin{cases} y=F_1(x,u,u_1,u_2,u_3,u_4), \\ z=V(x,F_1,u_1,u_2,u_3,u_4), \\ p=V_x(x,F_1,u_1,u_2,u_3,u_4), \\ q=V_y(x,F_1,u_1,u_2\,u_3,u_4), \\ s=V_{xy}(x,F_1,u_1,u_2,u_3,u_4). \end{cases} \tag{32}$$

Ове параметаске промењиве задовољавају и једначине

$$dz=pdx+qdy, \quad dp=rdx+sdy, \quad dq=sdx+tdy,$$

што даје услове

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial u_i}V[x,F_1(x,u,u_1,u_2,u_3,u_4), \; u_1,u_2,u_3,u_4]\,du_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial u_i}V[x,F_1(x,u,u_1,u_2,u_3,u_4), \; u_1,u_2,u_3,u_4]\,du_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial u_i}V[x,F_1(x,u,u_1,u_2,u_3,u_4), \; u_1,u_2,u_3,u_4]\,du_i=0,$$

где назначени изводи су узети директно, а не преко функције F_1. Због $u_i = \psi_i(u)$ имамо

$$
(33)\quad \begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{4} \dfrac{\partial}{\partial u_i} V[x, F_1(x, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4), \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]\, \psi_i'(u) = 0, \\[2ex]
\sum\limits_{i=1}^{4} \dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial u_i} V[x, F_1(x, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4), \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]\, \psi_i'(u) = 0, \\[2ex]
\sum \dfrac{\partial^2}{\partial y\, \partial u_i} V[x, F_1(x, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4), \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]\, \psi_i'(u) = 0.
\end{cases}
$$

Интересантно је поменути да су услови (33) по структури аналогни са условима (5). Услове (33) можемо нпр. написати у облику

$$
(34)\qquad \begin{cases}
(1,2,3)\psi_1'(u) + (2,3,4)\,\psi_4'(u) = 0, \\
(1,2,4)\psi_1'(u) - (2,3,4)\,\psi_3'(u) = 0, \\
(1,3,4)\psi_1'(u) + (2,3,4)\,\psi_2'(u) = 0,
\end{cases}
$$

ако претпоставимо да су написане детерминанте трећег реда различите од нуле. Из услова (34) видимо да једна од функција ψ_i остаје произвољна. Према томе, после одређивања три од функција ψ_i, прве две једначине (32) одређују нам један интеграл са једном произвољном функцијом система (1).

RÉFÉRENCES

[1] N. Saltikov, *Teorija parcijalnih jednačina drugog reda*, Univerzitet u Beogradu, 1952.

[2] Lagrange, *Sur les intégrales particulières des équations différentielles*, OEuvres complètes, t. 4, p. 5—108.

[3] J. König, *Theorie der Partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln*, Mathematische Annalen XXIV, S. 465—536.

[4] E. Goursat *Leçons sur l'intégration aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, Paris 1898.

[5] C. Orloff, *Sur la formation de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, au moyen d'une integrale complète*, Journal de mathématiques pures et appliquées, t XVIII, 1939, fasc. 2;

Nalaženje opšteg integrala parcijalnih jednačina II reda koje nisu Monge-Ampère-ove, Posebno izdanje SAN, Beograd, 1948.

[6] N. Saltikov, *Metode integraljenja parcijalnih jednačina II reda sa jednom nepoznatom funkcijom*, Glas SAN, CXCVIII, Beograd, 1950.

[7] B. Rašajsky, *Théorème de Jacobi pour le système d'équations en involution de Darboux-Lie*, Bulletin, de la Société des math. et phys. de la R. P de Serbie, VIII, 1—2, Beograd, 1956;

Sistemi parcijalnih jednačina drugog reda, Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije, VII, 1—2, 1955.

NOTE SUR LES RELATIONS ENTRE LES INTÉGRALES DES ESPÈCES DIFFÉRENTES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS EN INVOLUTION DE DARBOUX-LIE

par B. RACHAJSKY, BEOGRAD

Les recherches dans cet article ont pour but de contribuer à l'éteblissement des propriétés nouvelles des systèmes d'équations en involution de Darboux-Lie qui sont analogues à celles des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

En utilisant les propriétés connues, [7], de l'intégrale complète des systèmes dits, on considère plusieurs procédés pour obtenir l'intégrale générale: 1) en partant de l'intégrale complète on done deux procédés réalisés par la méthode de la variation des constantes; 2) en partant d'une intégrale générale de forme canonique des équations correspodantes des caractéristiques on resout le problème analogue posé par Lagrange dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Aussi on donne un precédé pour obtenir une intégrale mixte, à l'aide de l'intégrale complète et par la méthode de la variation des constantes.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie

ИТЕРАЦИЈЕ НЕПРЕКИДНИХ ФУНКЦИЈА

ТАТЈАНА ПАРЕНТА, БЕОГРАД

Под итерацијом (итерираном функцијом) непрекидне функције подразумева се израз

(1) $$f_r(x)=\int_0^x f_{r-1}(t)\,dt, \quad r=1, 2, 3, 3, \ldots$$

$$f_0(x)=f(x)$$

У овом раду доказаћемо следећи став за итерације непрекидних функција:

Став. 1. *Ако изчезавају све итерације непрекидне функције* $f(x)$ *у интервалу* $(0, a)$, *т. ј. ако је*

(2) $$f_r(a)=\int_0^a f_{r-1}(t)\,dt=0, \quad r=1, 2, 3, \ldots.$$

тада идентички изчезава непрекидна функција $f(x)$ *у интервалу* $(0, a)$, т. ј.

$$f_0(x)\equiv f(x)\equiv 0, \quad x\in(0, a).$$

Овај став еквивалентан је са Lerch-овим ставом који гласи: *ако једна у коначном интервалу* $a\leqslant x\leqslant b$ *дефинисана, непрекидна функција* $f(x)$ *има особину да су сви њени моменти једнаки нули, т. ј. ако је*

$$\int_a^b f(x)\,x^n\,dx=0, \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

тада је $f(x)$ *идентички једнака нули* [1]. Доказ еквивалентности даћемо у тачци 2 овога рада.

Прегледности ради узећемо у даљем разматрању да је $a=1$. Доказ за произвољно коначно a је исти.

1. *Доказ става* 1. Функција $f_r(x)$ дата са (1) је очевидно непрекидна функција. Нека је $f_r(x)$ функција која не изчезава идентички у $(0, 1)$. Нека је ε произвољно мали број, тада скуп E_ε вредности $x \in (0, 1)$, за које је $|f_r(x)| < \varepsilon$, може се обухватити са коначно много дисјунктних интервала чија је мера мања од 1. [3, стр. 319].

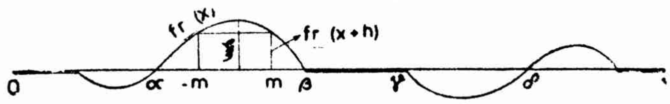
Под дисјунктним интервалима подразумевају се интервали без заједничких тачака.

Скуп E_ε, кад $\varepsilon \to 0$ не може да има меру која тежи 1 јер би тада $f_r(x)$ као непрекидна функција у $(0, 1)$ идентички изчезавала.

Претпоставимо супротно да је скуп E_ε састављен од бескраној много интервала. Можемо увек претпоставити да су они дусјунктни, јер ако је за (a, b) и (c, d) $|f_r(x)| < \varepsilon$ а $c < b$ тада ћемо место (a, b) и (c, d) посматрати $x \in (a, d)$, $|f_r(x)| < \varepsilon$.

Дисјунктни интервали у којима је $|f_r(x)| < \varepsilon$ ако их има бесконачно много у $(0, 1)$ морају имати тачке нагомилавања у $(0, 1)$. Како је $f_r(x)$ непрекидна функција то око сваке такве тачке нагомилавања можемо описати интервал у коме је опет $|f_r(x)| < \varepsilon$. Ако има бесконачно много ових интервала (јер може да има бесконачно много тачака нагомилавања) можемо наћи највише коначно много од њих који се не покривају. Ван ових интервала према претходном разматрању остало је још коначно много интервала где је $|f_r(x)| < \varepsilon$, и који се не покривају, па је скуп E_ε где је $|f_r(x)| < \varepsilon$ састављен од коначног броја дисјунктних интервала.

Облик непрекидне функције $f_r(x)$ претстављен је тада низом (и то коначним бројем) слика облика



$$0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta < 1$$

где је на пример за $x \in (\beta, \gamma)$, $|f_r(x)| < \varepsilon$.

Нека је ξ max. $|f_r(x)|$ за $x \in (\alpha, \beta)$. Како је $f_r(x)$ непрекидна функција постоји око ξ размак дужине m тако да је $|f_r(x+h)| > \xi/2$ за $-m < h < m$, ξ није једнако $k\varepsilon$ где је k коначно, јер би тада $f_r(x)$ било произвољно мало (мање од $k\varepsilon$) у (α, β).

Зато је

$$2m\frac{\xi}{2} > (\gamma - \beta)\varepsilon$$

тј.

$$m\xi > (\gamma - \beta)\varepsilon.$$

Сада је

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_r(x)\,dx > m\xi > (\gamma-\beta)\varepsilon > \int_{\beta}^{\gamma} f_r(x)\,dx$$

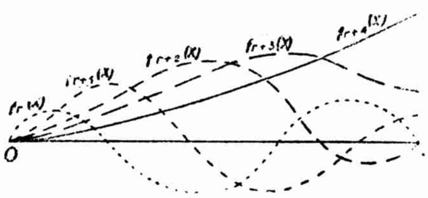
m и ξ су коначни као и $(\gamma-\beta) < 1$, али је $(\gamma-\beta)\varepsilon$ произвољно мало због ε па је зато $\int_{\alpha}^{\gamma} = \int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{\gamma}$ коначан т. ј.

$$f_{r+1}(x) = \int_{\alpha}^{x} f_r(t)\,dt$$

ме може да пресече x осу за

$$\beta \leqslant x \leqslant \gamma.$$

На основу овог расуђивања, ако је функција $f_r(x)$ у интервалу $(0, 1)$ за скуп E_ε, $x \in (0, 1)$: $|f_r(x)| < \varepsilon$, а за скуп E_ε^* (скуп E_ε^* је комплеменат од E_ε у отвореном интервалу $(0, 1)$), $x \in (0, 1)$: $|f_r(x)| \geqslant \varepsilon$, односно ако функција $f_r(x)$ у скупу E_ε интервала $(\beta_i \gamma_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots n$, (мера ових интервала је мања од 1) има бесконачно много нула густо распоређених у овим интервалима а у скупу E_ε^* највише коначан број нула, тада функција $f_{r+1}(x)$ у интервалу $(0, 1)$ може да има највише коначан број k нула. Функција $f_{r+2}(x)$ имаће у интервалу $(0, 1)$ највише $k-1$ нула. Ово је последица чињеница да се нзмеђу две узастопне нуле функције $f_{r+1}(x)$ може налазити највише једна нула функције $f_{r+2}(x)$. Аналогно, у целом интервалу $(0, 1)$ функција $f_{r+3}(x)$ имаће највише $k-2$ нуле, итд., функција $f_{r+k+1}(x)$ неће имати ни једне нуле у интервалу $(0, 1)$ а функција $f_{r+k+2}(x)$ биће монотоно растућа или монотоно опадајућа, супротно претпоставци да је $f_{r+k+2}(a) = 0$.



Из тога произлази да функција $f_{r+1}(x)$ не може да има у интервалу $(0, 1)$ коначан број k нула, јер је у том случају као што видимо $f_{r+k+2}(a)$ различито од нуле, противно претпоставци (2). Према томе функција $f_r(x)$ не може да има скуп E_ε, $x \in (0, 1)$ где је $|f_r(x)| < \varepsilon$ и скуп E_ε^*, $x \in (0, 1)$ где је $f_r(x)| \geqslant \varepsilon$, већ је у целом интервалу $(0, 1)$: $|f_r(x)| < \varepsilon$ а у том случају је $f(x)$ идентички једнака нули за све $x \in (0, 1)$.

Тиме је наш став доказан.

Потпуно аналогно се доказује став:

Став 2. *Ако изчезавају све итерације непрекидне функције $f(x)$ чији индекси припадају једној аритметичкој прогресији тј. ако је:*

$$f_{c+rd}(a)=0, \quad r=1,2,3,\ldots$$

при чему су c и d утврђени бројеви; тада $f(x)$ идентички изчезава у $(0, a)$.

Остаје отворено питање које услове треба да задовољава парцијални низ индекса $r=1,2,3,\ldots$ да би и за те низове био задовољен став.

Аутор претпоставља да би став могао важити за сваки низ r_i за који $\sum\frac{1}{r_i}$ дивергира.

2. *Доказ еквивалентности става* 1 *и Lerch-овог става.* Из (1) произлази да је $f_r(x)$ за $r=1,2,3,\ldots$ такође непрекидна функција. Она има изводе до r-тог реда а извод r-тог реда интеграбилан је у интервалу $(0,a)$ па се $f_r(x)$ може изразити Маклореновим обрасцем, са Бернулијевим остатком, за $0\leqslant x\leqslant a$

$$f_r(x)=f_r(o)+\frac{x}{1!}f_r'(o)+\frac{x^2}{2!}f_r''(o)+\cdots+\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}f_r^{r-1}(o)+ \tag{3}$$

$$+\frac{1}{(r-1)!}\int_0^x(x-t)^{r-1}f_r^{(r)}(t)\,dt$$

даље, на основу (1) имамо да је

$$f_r^{(k)}(x)=f_{r-k}(x), \quad k=1,2,3,\ldots \tag{4}$$

те на основу тога (3) постаје:

$$f_r(x)=f_r(o)+\frac{x}{1!}f_{r-1}(o)+\frac{x^2}{2!}f_{r-2}(o)+\cdots+\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}f_1(o)+ \tag{5}$$

$$+\frac{1}{(r-1)!}\int_0^x(x-t)^{r-1}f(t)\,dt$$

како је пак

$$f_r(o)=0; \quad r=1,2,3,\ldots \tag{6}$$

то (5) постаје

$$f_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} f(t)\, dt. \tag{7}$$

На основу (7) и услова (2) имамо

$$f_r(a) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^a (a-t)^{r-1} f(t)\, dt = 0.$$

Узимајући за r редом бројеве $1, 2, 3, \ldots$ добијамо

$$f_1(a) = \int_0^a f(t)\, dt = 0$$

$$f_2(a) = \int_0^a (a-t) f(t)\, dt = -\int_0^a t f(t)\, dt = 0$$

$$f_3(a) = \frac{1}{2!}\int_0^a (a-t)^2 f(t)\, dt = \frac{1}{2!}\int_0^a t^2 f(t)\, dt = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_r(a) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^a \left[a^{r-1} - \binom{r-1}{1} a^{r-2} t + \binom{r-1}{2} a^{r-3} t^2 + \cdots + (-1)^{r-1} t^{r-1}\right] f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^a t^{r-1} f(t)\, dt = 0.$$

Одавде закључујемо: ако изчезавају све итерације функције $f(x)$ у интервалу $(0, a)$ тј. ако је

$$f_r(a) = \int_0^a f_{r-1}(t)\, dt = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^a (a-t)^{r-1} f(t)\, dt = 0, \quad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

изчезаваће и сви моменти функције $f(x)$ у интервалу $(0, a)$ тј.

$$\int_0^a t^{r-1} f(t)\, dt = 0, \quad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Исто тако обратно, ако изчезавају сви моменти, изчезаваће и све итерације функције $f(x)$ у интервалу $(0, a)$. А у том случају према Lerch-овом ставу биће: $f(x) \equiv 0$ у интервалу $(0, a)$

Lerch je поменути став доказао помоћу познате Weierstrass-ове теореме да се свака непрекидна функција $f(x)$ може униформно апроксимирати низом полинома.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Polya und Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*, str. 65 Berlin, 1925, Bd. 1.

[2] M. Lerch, *Sur un point de la théorie des functions génératrices d'Abel*, Acta Mathematica 1903, T. 27 p. 339–352.

[3] E. C. Titchmarsh, *The theorie of functions*, Oxford, 1952.

SUR LES ITÉRATIONS DES FONCTIONS CONCTINUES

par TATJANA PARENTA, BEOGRAD

Résumé

Etant donné une fonction continue $f(x)$ dans $(0, a)$ on entend dans cette note, par l'iteration de $f(x)$, les fonctions continues donneés par (1). On démontre alors par une voie indépendente de la théorie d'approximation (particulierement, indépendente du théorème de Weierstrass) le résultat suivant:

Si toutes itérations de $f(x)$ s'annulent dans $(0, a)$ c. à. d. si l'on a (2)*, alors on a*

$$f(x) \equiv 0.$$

L'auteur démontre que ce théorème équivaut au théorème connu de M. Lerch [1], [2].

On peut démontrer avec les méthodes analogues aussi le théorème:

Si toutes les itérations de $f(x)$ formant une progression arithmétique s'annulent dans $(0, a)$, on a $f(x) \equiv 0$, $x \in (0, a)$.

Il serait intéressent de voir, quelles sont les suites plus générales que les progréssions arithmétiques, pour lesqulles le résultat analogue subsiste encore.

(La conjecture de l'auteur est que ceci a lieu pour toute suite r_i telle que $\sum \frac{1}{r_i}$ diverge).

Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie

НЕКЕ ФУНКЦИОНАЛНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ ДОБИЈЕНЕ ПРИМЕНОМ ЧАПЛИГИНОВЕ МЕТОДЕ И УПОРЕЂИВАЊЕ СА РЕЗУЛТАТИМА М. ПЕТРОВИЋА

МИЛОРАД БЕРТОЛИНО, БЕОГРАД

Чаплигинова метода приближне интеграције објављена је први пут у Москви 1919 год. у Чаплигиновом чланку: „Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений." Она се, укратко, састоји у следећем:

Нека је дата диференцијална једначина:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{1}$$

где је $f(x, y)$ функција непрекидна по обе променљиве и коначног парцијалног извода $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ у некој области ω равни XOY.

Тада кроз сваку тачку $M_0(x_0, y_0)$ области ω пролази једна и само једна интегрална крива једначине (1), непозната у општем случају. Чаплигинова метода приближне интеграције диференцијалних једначина првог реда даје низ парова функција $[u(x),\ v(x)], \ldots, [u_n(x),\ v_n(x)]$ које све пролазе кроз тачку $M_0(x_0, y_0)$ при чему су криве $u_i(x)$ испод криве $y=y(x)$, а криве $v_i(x)$ изнад ове криве у посматраној области, а сваки следећи пар је обухваћен претходним. Први пар функција $u(x),\ v(x)$ бира се произвољно на основу следеће Чаплигинове теореме:

Нека је, у области ω,

$$f_1(x, y)<f(x, y)<f_2(x, y). \tag{2}$$

Тада је функција $u(x)$ партикуларни интеграл једначине

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x, y) \tag{3}$$

који пролази кроз $M_0(x_0, y_0)$, а функција $v(x)$ партикуларни нитеграл једначине

$$\frac{dy}{dx}=f_2(x, y) \tag{4}$$

који пролази кроз $M_0(x_0, y_0)$.

Ако се претпостави да $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ не мења знак у области ω тј. да је за сваку тачку ове области $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$ или $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$, онда се, при познатом пару функција $u_n(x)$, $v_n(x)$ следећи пар функција u_{n+1}, v_{n+1} добија интеграцијом диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{f(x, v_n)-f(x, u_n)}{v_n-u_n}(y-u_n)+f(x, u_n), \\ \frac{dy}{dx} &= f_y'(x, u_n)\ (y-u_n)+f(x, u_n). \end{aligned} \tag{5}$$

Прва од једначина (5) даје функцију $v_{n+1}(x)$ ако је $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$, а функцију $u_{n+1}(x)$ ако је $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$.

Лузин је дао брзину конвергенције овог процеса неједнакошћу

$$v_n(x)-u_n(x)<\frac{C}{2^{2n}}, \tag{6}$$

где је C константа која не зависи од n.

I

Ако се уместо диференцијалних једначина $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ које се не могу решити помоћу квадратура (због таквих једначина се и стварају методе приближне интеграције), узимају једначине које се могу решити помоћу квадратура, примена Чаплигинове методе даје разне интересантне функционалне неједнакости које би се иначе тешко дале доказати. Избор функција $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ је произвољан и ова слобода њиховог избора пружа широке могућности за испитивање функционалних неједнакости. Иста чињеница претставља лошу страну Чаплигинове методе схваћене као методе приближне интеграције јер ма да је избором $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ одређен читав низ апроксимативних парова функција, тиме још увек није обезбеђена практична могућност интеграције одговарајућих линеарних једначина.

Следећи ставови које сам извео илуструју могућност добијања функционалних неједнакости применом Чаплигинове методе на обичне диференцијалне једначине првога реда које се могу решити помоћу квадратура.

Став 1. Нека је дата Бернулијева једначина:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, y + y^2, \tag{7}$$

при чему је $f(x)$ функција позитивна и непрекидна за свако x, а $y(x)$ партикуларни интеграл једначине (7) који пролази кроз координатни почетак. Тада је испуњена неједнакост

$$-\,thx < y(x) < tgx, \tag{8}$$

у области

$$-\frac{1}{f(x)} < y < \frac{1}{f(x)}, \quad 0 < x < x_0,$$

где x_0 зависи од $f(x)$ и не може бити $x_0 > \frac{\pi}{2}$.

(За функције $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ изабране су фунцкије $f_1 = y^2 - 1$ и $f_2 = y^2 + 1$, па је нађен пар функција $u(x)$, $v(x)$.)

Став 2. Нека је дата Бернулијева једначина

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, y^2 + y, \tag{10}$$

где је $f(x)$ функција позитивна и непрекидна за свако x, а $y(x)$ партикуларни интеграл једначине (10) који пролази кроз координатни почетак. Тада је испуњена неједнакост

$$1 - e^x < y(x) < e^x - 1, \tag{11}$$

у области

$$-\frac{1}{\sqrt{f(x)}} < y < +\frac{1}{\sqrt{f(x)}}, \quad 0 < x < x_0, \tag{12}$$

где x_0 зависи од $f(x)$.

(За $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ изабране су функције $f_1 = y - 1$ и $f_2 = y + 1$ па је нађен пар функција $(u(x), v(x))$.

Став 3. Нека је $z = f(y)$ непрекидна функција по y са коначним изводом f'_y и позитивним f''_y таква да је $y = 0$ унутрашња тачка интервала одређеног неједначином

$$0 < f(y) < 1. \tag{13}$$

Тада је, у области одређеној неједначином (13), за $x > 0$ испуњена неједнакост

$$0 < \frac{f(0)}{f'_y(0)}\left[e^{f_y'(0)x} - 1\right] < y(x) < \Psi(x) < x,$$

где је $y = \Psi(x)$ партикуларни интеграл једначине

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - f(0)}{x} y + f(0), \tag{15}$$

који пролази кроз координатни почетак, а $y = y(x)$ партикуларни интеграл једначине

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \tag{16}$$

који пролази кроз координатни почетак. (Тражени су парови кривих $[u, v]$, $[u_1, v_1]$ при $f_1 = 0$ и $f_2 = 1$).

С т а в 4. Нека је функција $f\left(\frac{y}{x}\right)$ таква да је тачка $M(1, 0)$ унутрашња тачка области ω одређене неједначином

$$0 < f\left(\frac{y}{x}\right) < 1. \tag{17}$$

Ако је притом функција $f\left(\frac{y}{x}\right)$ у области ω непрекидна, коначног извода $\frac{\partial f}{\partial y}$ и позитивног $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, онда је, у области ω, за $x > 1$

$$0 < f(0)\, x \ln x < y(x) < \Psi(x) < x, \tag{18}$$

где је $y = y(x)$ партикуларни интеграл једначине

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{19}$$

који пролази кроз тачку $M(1, 0)$ а $y = \Psi(x)$ партикуларни интеграл једначине

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f\left(\frac{x-1}{x}\right) - f(0)}{x - 1} y + f(0), \tag{20}$$

који пролази кроз тачку $M(1, 0)$.

II

Следећи пример илуструје могућност примене Чаплигинове методе при посматрању асимптотског понашања партикуларних интеграла.

Дата је Рикатијева диференцијална једначина

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{x^2}-ay^2 \quad a>0, \quad b>0 \tag{21}$$

Тада је испуњена неједнакост

$$\frac{1}{ax+C_0}<y(x)<\frac{C_0'+ax(ab+1)+2abC_0\ln x-\frac{bC_0}{x}}{(ax+C_0)^2}<C_0^*-\frac{b}{x}, \tag{22}$$

за $x>x_0>0$, где је $y=y(x)$ партикуларни интеграл који пролази кроз тачку $M_0(x_0,y_0)$ где су $x_0,y_0>0$ а C_0, C_0', C_0^* константе зависне од a,b,x_0,y_0 при чему је $C_0^*>0$.

На основу (22) можемо закључити да је $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$ при чему је $y(x)>0$ и $y(x)<C_0^*$.

Решавањем једначине (21) добија се партикуларни интеграл облика

$$y=y(x)=\frac{x-k}{x(u_1x-u_2k)}, \tag{23}$$

где су k,u_1,u_2 константе и то $k=k(a,b,x_0,y_0)>0$, $u_1=u_1(a,b)>0$, $u_2=u_2(a,b)<0$.

Израз (23) даје нам исти закључак о асимптотском понашању партикуларног интеграла. (За функције $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ овде су узете функције $f_1(y)=-ay^2$ и $f_2(x)=\frac{b}{x^2}$ па су тражене функције $u(x)$, $v(x)$ и $v_1(x)$).

Даћемо неколико посебних примера функционалних неједнакости које важе у коначним деловима равни, а наведене су наведеном методом.

а) Полазећи од $x(y+1)<(y+1)^2$ добија се $e^{\frac{x^2}{2}}-1<\frac{x}{1-x}$ за $0<x<1$.

б) Полазећи од $0<(y-x)^2<(y-1)^2$ добија се $\frac{e^{2x}(x-1)+1}{e^{2x}+1}<\frac{x}{x+1}$ за $0<x\leqslant 1$.

в) Релација $0<y^2+1<(x-1)^2+1$ даје $\operatorname{tg}x<\frac{x^3}{3}-x^2+2x$ за $0<x<x_0$ где је x_0 решење једначине $\operatorname{tg}x=1-x$.

г) Полазећи од $0 < \sqrt{1+y^2} < y^2+k, k > 1$ добија се $0 < x < shx < \sqrt{k}\, tg \sqrt{k}\, x$ за $0 < x < \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$.

д) Полазећи од $0 < \frac{y^2}{x} < 1$ добија се $\frac{x}{4}\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{2 - ln x}$ у резултујућој области, за $x > 1$.

ђ) Полазећи од $0 < y^2 e^x < e^x$ добија се у области $-1 < y < 1$, $x > 0$ неједнакост $\frac{1}{4}[e^{e^x-1} + 1] < \frac{1}{3 - e^x}$.

е) Полазећи од $0 < e^{-y} < k, k > 1$ добија се, у резултујућој области за $x > 0$,

$$0 < 1 - e^{-x} < ln(x+1) < kx.$$

* * *

Пок. Михаило Петровић доста се бавио компаративним једначинама диференцијалних једначина и дао у овој области бројне резултате. Значајни су његови прилози у одређивању, компаративном методом кругова конвергенције интегралних редова диференцијалних једначина. Сем у овом смислу, Петровић је посматрао компаративне једначине у циљу уоквиравања интегралних кривих у одређене бројне размаке, користећи затим добијене резултате и за добијање асимптотских вредности интеграла. Петровић у наведену сврху користи квалитативне прве интеграле, но даје и друге, посебне методе за неке диференцијалне једначине. Овде ћемо навести две од више теорема датих у Петровићевим радовима, које омогућавају формирање компаративних једначина у циљу уоквиравања интегралних кривих диференцијалних једначина првог реда.

* * *

У расправи: *„Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre"* (Math. Ann. t. 54, 1899) изложена је следећа Петровићева теорема:

Нека је дата једначина $y' = F(x, y, f)$ где је f функција од x која фигурише у F. Нека је (x_0, y_0) тачка у којој су функција F и њен извод $\frac{\partial F}{\partial f}$ одређени, коначни, непрекидни и не мењају знак и за коју се овај парцијални извод не анулира. Увек се могу изабрати две функције $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ које испуњавају следеће услове:

1) Оне су одређене, коначне и непрекидне у неком довољно малом интервалу од $x = x_0 - a_1$ до $x = x_0 + a_2$ (a_1 и a_2 су две позитивне константе);

2) У овом је интервалу $\lambda(x) < f(x) < \mu(x)$;

Ако се са n и v означе интеграли једначина

$$u' = F(x, u, \lambda), \quad v' = F(x, v, \mu),$$

који за $x = x_0$ узимају вредност $u_0 = v_0 = y_0$, функције u и v су одређене, коначне и непрекидне у довољно малом интервалу од $x = x_0 - b_1$ до $x = x_0 + b_2$ (b_1 и b_2 су две позитивне константе).

Два интервала $(x_0 - a_1, x_0 + a_2)$ и $(x_0 - b_1, x_0 + b_2)$ имају увек један заједнички интервал $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ који је различит од нуле.

За сваку вредност x из интервала $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ интеграл y једначине $y' = F(x, y, f)$ који за $x = x_0$ узима вредност $y = y_0$ је одређен коначан, непрекидан и налази се између одговарајућих интеграла u и v.

Теорема уствари даје и практично упутство за формирање компаративних једначина.

* * *

У Петровићевој књизи: *„Рачунање са бројним размацима“*, Београд, 1932, наведена је, између осталих, следећа теорема, општија од претходне, а чији је садржај исти као код Чаплигинове теореме цитиране на почетку овога рада:

Нека су

$$y' = F(x, y), \tag{1}$$

$$u' = F_1(x, u), \tag{2}$$

$$v' = F_2(x, v), \tag{3}$$

три диференцијалне једначине првог реда. Функције двеју променљивих x и y

$$F(x, y) - F_1(x, y), \tag{4}$$

$$F(x, y) - F_2(x, y), \tag{5}$$

имаће, у равни XOY свака своју позитиввну и негативну област Означимо са:

Δ_1 и Δ_2 позитивну и негативну област функције (4);

Ω_1 и Ω_2 позитивну и негативну област функције (5);

$D_1, D_2 \ldots$ линије које ограничавају те области;

$E_1, E_2 \ldots$ линије које претстављају геометриска места сингуларитета функција F, F_1, F_2;

Π део равни који је заједнички за један па робласти Δ и Ω супротно означених, нпр., за области Δ_1 и Ω_2.

Нека је $M_0(x_0, y_0)$ једна тачка која не припада ни једној од линија D ни E, а која се налази у области Π.

На послетку, нека су y, u, v интеграли једначина (1), (2), (3) који за $x = x_0$ имају заједничку вредност $y = y_0$, $u = y_0$, $v = y_0$.

Тада ће, са једне и друге стране тачке $(x_0, 0)$ постојати на оси Ox један размак различит од нуле, например, од $x_0 - h_1$ до (6) $x_0 + h_2$ (h_1 и h_2 су два позитивна броја) који ће испуњавати ове услове:

а) док се x мења у размаку (6) интеграли u и v као и њихови први изводи су одређени, коначни и непрекидни;

б) контура Γ састављена од кривих u, v и двеју правих $x = x_0 - h_1$ и $x = x_0 + h_2$ садржана је у области Π и она не обухвата ни један део кривих D ни E нити се са којом од ових сече.

Тада се може доказати овај резултат:

Кад се x мења у размаку (6) интеграл y једначине (1) биће коначан и непрекидан, а налазиће се стално између u и v.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Лузин, *О методе приближённого интегрирования акад. С. А. Чаплыгина*, Успехи математических наук, Т. VI. Выпуск 6 (46)—1951.

[2] Н. Н. Лузин, *Интегральное исчисление*, — Советская наука — Москва, 1949.

[3] Михаило Петровић, *Рачунање са бројним размацима*, Београд, 1932.

[4] Michel Petrovitch, *Intégration qualitative des équations différentielles*, Gauthier — Villars, 1931, Paris.

QUELQUES INÉGALITÉS FONCTIONNELLES RÉSULTANT DE LA MÉTHODE DE TCHAPLYGIN ET COMPARAISON AVEC LES RESULTATS DE M. PETROVITCH

par MILORAD BERTOLINO, BEOGRAD

Résumé

L'auteur applique la méthode de l'intégration approximative des équations différentielles du premier ordre de Tchaplygin aux équations qu'on peut résoudre à l'aide des quadratures, pour donner quelques inéquations fonctionnelles. Il souligne la difficulté de faire leur preuve de n'importe quelle autre manière. Dans l'exemple II il montre la possibilité de l'application de cette méthode à la recherche du comportement asymptotique des intégraux particuliers des équations différentielles du premier ordre. Enfin, il illustre la méthode par quelques exemples particuliers. Il cite aussi les résultats de M. Petrovitch dans le domaine des recherches des équations de comparaison.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie

ОДРЕЂИВАЊЕ ТРАГОВА РАВНИ У ЧЕТВОРОДИМЕНЗИОНОМ ПРОСТОРУ И ТРАГОВА $(n-2)$-ДИМЕНЗИОНОГ ПРОСТОРА У n-ДИМЕНЗИОНОМ ПРОСТОРУ

ЗАГОРКА ШНАЈДЕР, БЕОГРАД

Увод

Познато је више начина претстављања објеката садржаних у четвородимензионом простору помоћу њихових пројекција на раван.

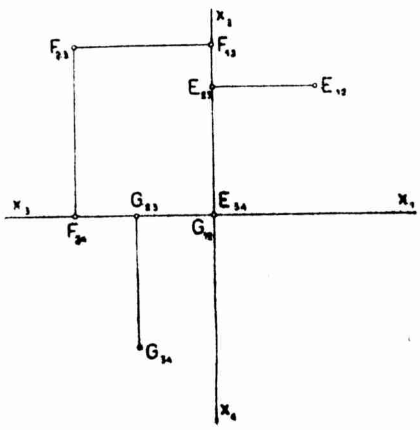
Нека су x_1, x_2, x_3 и x_4 осе које пролазе кроз исту тачку 0, узајамно су управне и одређују еуклидски четвородимензиони простор. Положај неког објекта је у овом простору потпуно одређен помоћу његових управних пројекција на три равни које не припадају истом тродимензионом потпростору. Управне пројекције објекта четвородимензионог простора могу се одредити на три осне равни $x_1 x_2$, $x_2 x_3$ и $x_3 x_4$ (Shoute, Mehrdim. Geom., 1905) или $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$ (J. Maurin, Géom. descr. à q. dim., 1948). У првом начину пројектовања, обртањем равни $x_1 x_2$ око осе x_2 док не падне у раван $x_2 x_3$, затим равни $x_3 x_4$ око осе x_3 док ова не падне у исту раван, доводе се ове три равни у једну исту раван, раван цртања. Пројекцијске равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$ такође се могу довести у једну исту раван цртања, раван $x_1 x_2$, обртањем равни $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$ око осе x_1.

Постоје и други начини пројектовања објеката четвородимензионог простора.

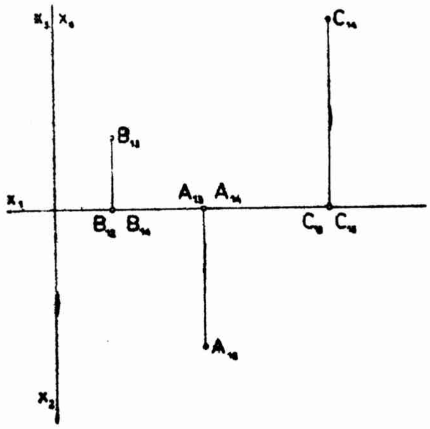
У овом чланку биће изложен извесан начин решавања једног од основних задатака нацртне геометрије у четвородимензионом и вишедимензионим просторима: одређивање трагова $(n-2)$-димензионог простора који је садржан у n-димензионом простору. У четвородимензионом простору користи се за решавање задатка Maurin-ов начин пројектовања који се лако проширује и за пројектовање објеката у вишедимензионим просторима. У четвородимензионом простору треба одредити трагове равни дате пројекцијама ма којих њених трију тачака. У четвородимензионом простору раван има са сваком пројекцијском равни по једну заједничку тачку која се, аналого нацртној геометрији тродимензионог простора, може назвати трагом равни. Показаћемо како се у решавању могу користити перспективно афини положај пројекција тачака равни на пројекцијске равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$, односно простори поклапања. Овакав начин решавања омогућава уопштење поступка и може се користити и за решавање аналогог задатка у вишедимензионим просторима. Тако је решен задатак: одредити трагове тродимензионог простора који је садржан у петодимензионом простору, где се под траговима тродимензионог простора подразумевају заједничке тачке тродимензионог простора и пројекцијских равни ($x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_1 x_4$ и $x_1 x_5$). Најзад, дат је поступак за одређивање трагова $(n-2)$-димензионог простора који је садржан у n-димензионом простору. При том се за трагове $(n-2)$-димензионог простора сматрају заједничке тачке $(n-2)$-димензионог простора са пројекцијским равнима ($x_1 x_2$, $x_1 x_3$, . . . , $x_1 x_{n-1}$, $x_1 x_n$) .

Одређивање трагова равни у четвородимензионом простору

Ма каква раван четвородимензионог простора може се преставити пројекцијама својих трију тачака. То могу бити ма које три тачке равни које не припадају истој правој или баш оне три тачке које



Сл. 1



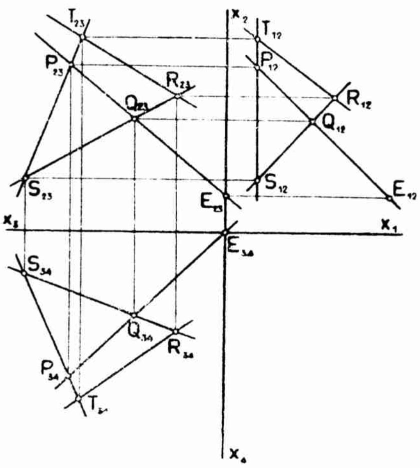
Сл. 2

дата раван има заједничке, по једну са сваком од пројекцијских равни, тј. трагови равни.

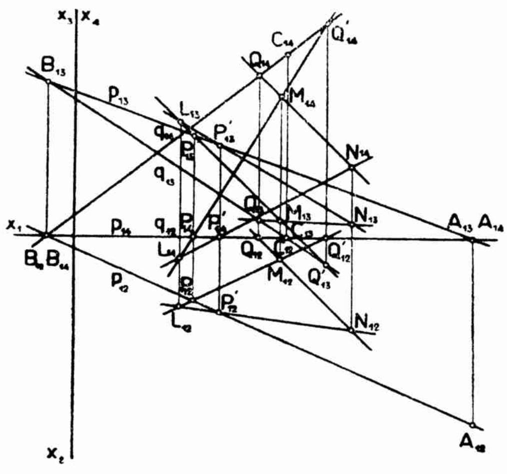
Пројекцију тачке на пројекцијској равни обележаваћемо истим великим словом којим је обележена тачка у простору и индексима који одговарају индексима оса којима је пројекцијска раван одређена. Напр., пројекцију тачке M на равни $x_1 x_3$ обележићемо M_{13}. Истим ознакама, само малим словима, обележаваћемо пројекције правих. Напр., m_{34} је пројекција праве m на равни $x_3 x_4$.

Трагови равни α, за први начин пројектовања на равни $x_1 x_2$, $x_2 x_3$ и $x_3 x_4$, нека су тачке E, F и G (сл. 1), а за други начин пројектовања на равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$, нека су трагови равни β тачке A, B и C (сл. 2).

Када је раван дата пројекцијама ма којих трију њених тачака може се захтевати да се одреде трагови равни, аналого задатку нацртне геометрије тродимензионог простора (где су трагови равни праве). Такав задатак решен је, за оба поменута начина пројектовања, на следећи начин.



Сл. 3

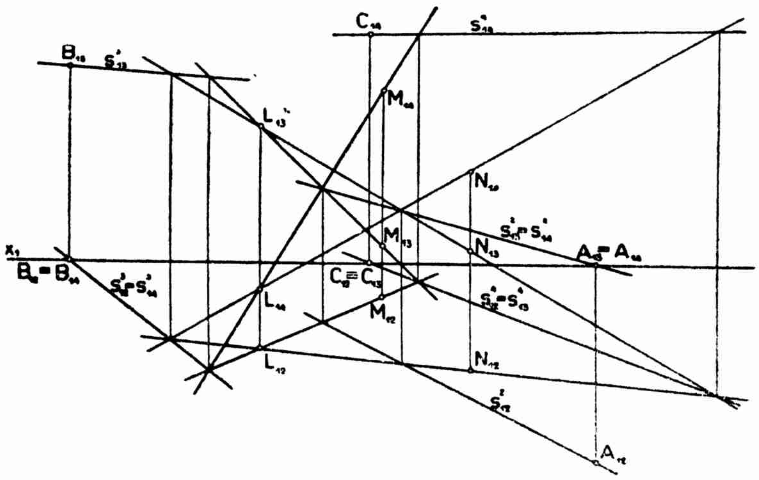


Сл. 4

На сл. 3 дате су пројекције ма којих трију тачака R, S и T неке равни μ на равни пројекција $x_1 x_2$, $x_2 x_3$ и $x_3 x_4$. Да би се одредио траг E равни μ у равни $x_1 x_2$, треба одредити ону тачку E равни μ која је у равни $x_1 x_2$, тј. тачку чија се пројекција E_{34} поклапа са тачком O, пресеком оса. Нека је $P_{34} Q_{34}$ пројекција произвољне праве PQ равни RST која пролази кроз O (тачке P и Q могу бити на странама ST и RS троугла RST). Тачка праве $P_{34} Q_{34}$ која се поклапа са O је E_{34}. Пошто се одреде остале пројекције $P_{23} Q_{23}$ и $P_{12} Q_{12}$ праве PQ добијају се на њима остале пројекције E_{23} и E_{12} тачке E. Слично се могу одредити пројекције трагова F и G. (На овај начин решен је задатак у Shoute, M. G.).

Трагови равни могу се одредити и на следећи начин. Одреди се прво права p по којој дата раван v сече један од тродимензионих потпростора, напр. $x_1 x_2 x_3$, а затим пресечна права q са још једним од осталих потпростора, напр. $x_1 x_3 x_4$. Продори правих p и q кроз пројекцијске равни јесу трагови равни v, јер су праве p и q праве у равни v.

Овако је решен задатак у сл. 4 где су дате пројекције равни v пројекцијама њених тачака L, M и N на равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$. (задатак се може на исти начин решити и помоћу првог начина пројектовања). Права p, пресек дате равни v и потпростора $x_1 x_2 x_3$, одређена је помоћу тачака P и P' чије се пројекције P_{14} и P'_{14} налазе на оси x_1, а одређене су у пресеку правих $L_{14} M_{14}$ и $L_{14} N_{14}$ са осом x_1. Права q, пресек равни v са потпростором $x_1 x_3 x_4$, одређена је помоћу тачака Q и Q' чије су пројекције Q_{12} и Q'_{12} пресечне тачке осе x_1 са правим $N_{12} M_{12}$ и $L_{12} M_{12}$. Продорне тачке A и B праве p кроз равни $x_1 x_2$ и $x_1 x_3$, и продорне тачке B и C праве q кроз равни $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$ јесу



Сл. 5

трагови равни v. (На овај начин решен је задатак у J. Maurin, G. d. à q. d., 1948).

Показаћемо како се у Maurin-овом начину пројектовања могу одредити трагови равни v на други начин, коришћењем перспективно афиног положаја ликова у равни цртања (сл. 5).

Троуглови $L_{13} M_{13} N_{13}$ и $L_{14} M_{14} N_{14}$ су перспективно афини, (одговарајућа темена налазе се на паралелним правим $L_{13} L_{14}$, $M_{13} M_{14}$ и $N_{13} N_{14}$) и имају осу афиности. Она је одређена пресечним тачкама правих $L_{13} M_{13}$ и $L_{14} M_{14}$, $L_{13} N_{13}$ и $L_{14} N_{14}$. Оса афиности је, дакле, права равни LMN на којој се, у равни цртања, поклапају пројекције тачака равни LMN на равни $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$. Пресечене тачке одређују, дакле, праву s_{13}^2 која се поклапа са правом s_{14}^2. Оса афиности s_{13}^2 у пресеку са осом x_1 одређује пројекције A_{13}, дакле и A_{14}, пројекције трага A равни v. Пошто се на оси афиности поклапају пројекције праве s^2 равни v на равни $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$, права s^2 налази се у простору $x_1 x_2 s$, где је s симетрала угла $x_3 x_4$. Простор $x_1 x_2 s$ може се сматрати симетралним простором поклапања за просторе $x_1 x_2 x_3$ и $x_1 x_2 x_4$ (или само простором поклапања или коинциденције) јер има особину да се пројекције свих објеката садржаних у њему на пројекцијске равни $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$ поклапају у равни цртања. Права s^2 претставља, дакле, пресек равни v са простором поклапања $x_1 x_2 s$.

Пошто се ординалама одреди и пројекција s_{12}^2 праве s^2, добија се на њој и трећа пројекција A_{12} трага A.

На сличан начин може се одредити оса афиности троуглова $L_{12} M_{12} N_{12}$ и $L_{14} M_{14} N_{14}$, тј. пројекција s_{12}^3, односно s_{14}^3, праве s^3 по којој раван v сече простор поклапања за просторе $x_1 x_2 x_3$ и $x_1 x_3 x_4$. Пројекције s_{12}^3 и s_{14}^3 се поклапају и пресек праве s_{12}^3 са осом x_1 даје пројекцију B_{12}, дакле и B_{14}, трага B равни v у равни $x_1 x_3$. Ординалама се одређују пројекција s_{13}^3 и на њој B_{13}.

Оса афиности троуглова $L_{12} M_{12} N_{12}$ и $L_{13} M_{13} N_{13}$, права s_{12}^4, односно s_{13}^4, је пројекција пресечне праве s^4 равни v и простора поклапања за просторе $x_1 x_2 x_4$ и $x_1 x_3 x_4$. Њен пресек са осом x_1 одређује пројекцију C_{12}, дакле и C_{13}. Тачка C је, према томе, траг равни v у равни $x_1 x_4$. На пројекцији s_{14}^4 одређује се и пројекција C_{14}.

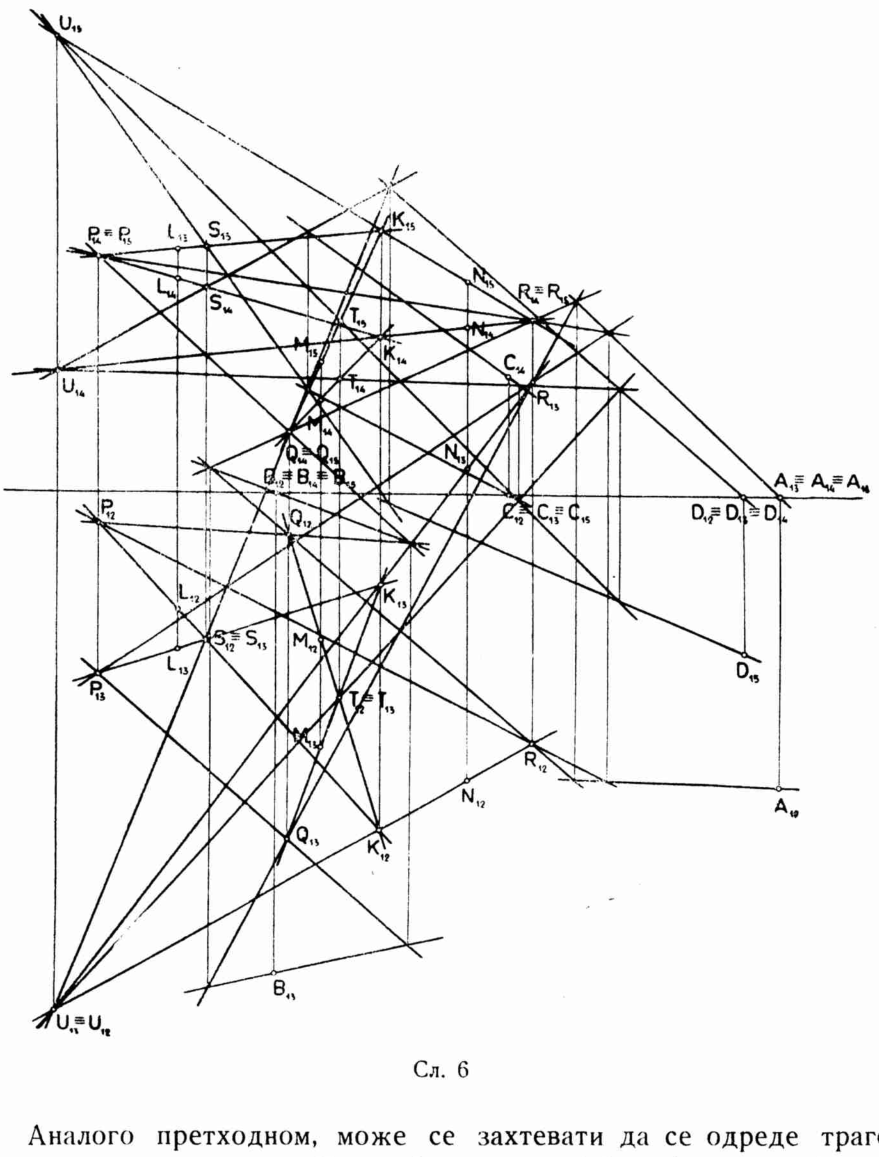
Трагови неке равни могу се одредити на овај начин само код пројектовања произвољне равни на равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$. У том се начину пројектовања две пројекције једне исте тачке поклапају на оси x_1 ако се тачка налази у једној од пројекцијских равни. Напр., ако је тачка C у равни $x_1 x_4$ пројекције C_{12} и C_{13} поклапају се на оси x_1. У случају пројектовања на равни $x_1 x_2$, $x_2 x_3$ и $x_3 x_4$ пројекције једнога трага равни су три разне тачке. Напр., на сл. 1, пројекције E_{12}, E_{23} и E_{34} су пројекције трага E у равни $x_1 x_2$.

Задатак је решен за случај када раван има општи положај према пројекцијским равнима, тј. има трагове у свим пројекцијским равнима.

Одређивање трагова тродимензионог простора у петодимензионом простору

Изложени начин решавања може се уопштити и применити на одређивање трагова тродимензионог простора који је садржан у петодимензионом простору. Нека је петодимензиони простор одређен осама

x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 које су узајамно управне и пролазе кроз тачку O. Положај објекта у овом простору одређен је управним пројекцијама на четири осне равни од којих се ма које три не налазе у једном истом тродимензионом потпростору, а све четири се не налазе у истом четвородимензионом потпростору. Изаберимо равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_1 x_4$ и $x_1 x_5$ за пројекцијске равни. Обртањем ових равни око осе x_1 могу се оне довести у једну исту раван, раван цртања.



Сл. 6

Аналого претходном, може се захтевати да се одреде трагови тродимензионог простора Σ_3 ако је он дат пројекцијама ма којих својих тачака $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}$ и N (сл. 6). Као што је познато, са сваком од пројекцијских равни дати тродимензиони простор Σ_3 има само по једну заједничку тачку,траг простора.

Четвородимензиони потпростори $x_1 x_2 x_3 x_4$ и $x_1 x_2 x_3 x_5$ имају простор поклапања одређен правим x_1, x_2, x_3 и правом s која поло ви угао $x_4 x_5$. Пројекције објекта, који је садржан у том простору, на равни $x_1 x_4$ и $x_1 x_5$ поклапају се у равни цртања. Пресек датог тродимензионог простора Σ_3 и овог потпростора поклапања је раван σ. Пошто се пројекције тачака равни σ на равни $x_1 x_4$ и $x_1 x_5$ поклапају, пројекције тачака P, Q и R равни σ могу се одредити у пресеку правих $K_{14} L_{14}$ и $K_{15} L_{15}$, $K_{14} M_{14}$ и $K_{15} M_{15}$, $K_{14} N_{14}$ и $K_{15} N_{15}$. Ординалама се одређују остале пројекције тачака P, Q и R на пројекцијама одговарајућих правих.

Раван σ садржана је у датом тродимензионом простору Σ_3 и зато су трагови равни σ трагови и простора Σ_3. Раван σ садржана је и у четвородимензионом простору $x_1 x_2 x_3 s$, па се трагови равни σ у пројекцијским равнима $x_1 x_2$ и $x_1 x_3$ одређују на напред изложени начин, користећи перспективно афини положај пројекција равни σ. Нека су то трагови A и B простора Σ_3.

Слично се може одредити пресек простора Σ_3 са простором поклапања $x_1 x_4 x_5 m$ потпростора $x_1 x_3 x_4 x_5$ и $x_1 x_2 x_4 x_5$, који је одређен правим x_1, x_4, x_5, и правом m, симетралом угла $x_2 x_3$. Пресек је раван μ. Пројекције равни μ на равни $x_1 x_2$ и $x_1 x_3$, као објекта простора поклапања, поклапају се у равни цртања. Пројекције тачака S, T и U равни μ одређују се у пресеку правих $K_{12} L_{12}$ и $K_{13} L_{13}$, $K_{12} M_{12}$ и $K_{13} M_{13}$, $K_{12} N_{12}$ и $K_{13} N_{13}$. Пројекције S_{12} и S_{13}, T_{12} и T_{13} U_{12} и U_{13} се поклапају, а остале пројекције ових тачака налазе се на осталим пројекцијама одговарајућих правих. Трагови равни μ, C у равни $x_1 x_4$ и D у равни $x_1 x_5$, су трагови простора Σ_3 и одређују се на изложени начин.

Одређивање трагова $(n-2)$-димензионог простора у n-димензионом простору

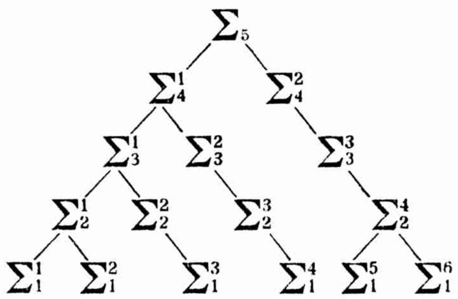
У простору R_n произвољног броја n димензија који је одређен правим $x_1, x_2, \ldots, x_n$ које пролазе кроз исту тачку 0 и свака од њих управна је на свима осталим, могу се за пројекцијске равни одабрати осне равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3, \ldots, x_1 x_{n-1}$, $x_1 x_n$. Обртањем око осе x_1 доводе се оне у исту раван цртања. Положај неког објекта у n-димензионом простору одређен је $(n-1)$-ом пројекцијом на равни $x_1 x_2, x_1 x_3, \ldots, x_1 x_n$. Један $(n-2)$-димензиони простор $\Sigma_{(n-2)}$ може бити дат пројекцијама ма којих $(n-1)$ тачака $P^1, P^2, \ldots, P^{n-2}, P^{n-1}$. Простор $\Sigma_{(n-2)}$ има са сваком пројекцијском равни по једну заједничку тачку, траг простора $\Sigma_{(n-2)}$. Ако је простор дат тачкама P^i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ могу се одредити његови трагови.

У n-димензионом простору R_n дати простор $\Sigma_{(n-2)}$ сече простор поклапања $R^1_{(n-1)}$ за просторе $x_1 x_2 \ldots\ldots x_{n-2} x_{n-1}$ и $x_1 x_2 \ldots\ldots x_{n-2} x_n$, који је одређен осама $x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}, x_{n-2}$ и симетралом s^1 угла $x_{n-1} x_n$, по простору $\Sigma^1_{(n-3)}$. Пројекције простора $\Sigma^1_{(n-3)}$, као потпростора простора $R^1_{(n-1)}$, на равни $x_1 x_{n-1}$ и $x_1 x_n$ поклапају се у равни цртања. Према томе поклапају се пројекције $Q^1_{1,(n-1)}$ и $Q^1_{1,n}$, $Q^2_{1,(n-1)}$ и $Q^2_{1,n}, \ldots, Q^{n-2}_{1,(n-1)}$ и $Q^{n-2}_{1,n}$ тачака $Q^1, Q^2, \ldots, Q^{n-2}$ које одређују простор $\Sigma^1_{(n-3)}$. Зато се оне могу одредити у пресеку правих $P^1_{1,(n-1)}$ $P^2_{1,(n-1)}$ и $P^1_{1,n}$ $P^2_{1,n}$, $P^1_{1,(n-1)}$ $P^3_{1,(n-1)}$ и $P^1_{1,n}$ $P^3_{1,n}, \ldots, P^1_{1,(n-1)}$ $P^{n-1}_{1,(n-1)}$ и $P^1_{1,n}$ $P^{n-1}_{1,n}$. Трагови простора $\Sigma^1_{(n-3)}$ у равнима $x_1 x_2, x_1 x_3, \ldots, x_1 x_{n-2}$ су и трагови простора $\Sigma_{(n-2)}$. Да би се одредили и трагови простора $\Sigma_{(n-2)}$ у равнима $x_1 x_{n-1}$ и $x_1 x_n$ треба, на сличан начин, одредити пресек датог простора $\Sigma_{(n-2)}$ са још једним од простора поклапања за које се пројекције на равни $x_1 x_{n-1}$ и $x_1 x_n$ у равни цртања не поклапају, напр. са простором поклапања $R^2_{(n-1)}$, тј, $s^2 x_1 x_4 \ldots\ldots x_n$, за просторе $x_1 x_3 x_4 \ldots\ldots x_n$ и $x_1 x_2 x_4 x_5 \ldots\ldots x_n$, где је s^2 симетрала угла $x_2 x_3$. Нека је то простор $\Sigma^2_{(n-3)}$. Трагови простора $\Sigma^2_{(n-3)}$ у равни $x_1 x_{n-1}$ и $x_1 x_n$ јесу и трагови простора $\Sigma_{(n-2)}$.

За одређивање трагова, у равнима $x_1 x_2, x_1 x_3, \ldots, x_1 x_{n-2}$, простора $\Sigma^1_{(n-3)}$ који је садржан у простору $R^1_{(n-1)}$, поступак се понавља. Одређују се простори $\Sigma^1_{(n-4)}$ и $\Sigma^2_{(n-4)}$ по којима простор $\Sigma^1_{(n-3)}$ сече потпросторе поклапања $R^1_{(n-2)}$ и $R^2_{(n-2)}$ за $(n-2)$-димензионе потпросторе простора $R^1_{(n-1)}$. Потпростори поклапања $R^1_{(n-2)}$ и $R^2_{(n-2)}$ бирају се тако да се пројекција простора $\Sigma^1_{(n-4)}$ на раван $x_1 x_{n-2}$ у равни цртања поклопи са пројекцијама на равни $x_1 x_{n-1}$ и $x_1 x_n$, а да се пројекција простора $\Sigma^2_{(n-4)}$ на раван $x_1 x_{n-3}$ у равни цртања поклопи са пројекцијама на равни $x_1 x_{n-1}$ и $x_1 x_n$. Тиме се постиже да се помоћу простора $\Sigma^1_{(n-4)}$ добију трагови простора $\Sigma_{(n-2)}$ у равнима $x_1 x_2, x_1 x_3, \ldots, x_1 x_{n-3}$, а помоћу простора $\Sigma^2_{(n-4)}$ траг у равни $x_1 x_{n-2}$. За одређивање трагова у равни $x_1 x_{n-1}$ и $x_1 x_n$ поступак се наставља на тај начин што се одреди простор $\Sigma^3_{(n-4)}$ пресек простора $\Sigma^2_{(n-3)}$ са потпростором поклапања $R^3_{(n-2)}$ простора $R^2_{(n-1)}$ за који се пројекција на раван $x_1 x_4$ у равни цртања поклапа са пројекцијама на равни $x_1 x_2$ и $x_1 x_3$.

На наведени начин одређују се простори мањег броја димензија док се не добију праве $\Sigma_1^1, \Sigma_1^2, \ldots, \Sigma_1^{n-1}$ чији су трагови трагови датог простора $\Sigma_{(n-2)}$. Пројекције праве Σ_1^1 су у равни цртања две праве од којих је једна пројекција на раван $x_1 x_2$, а на другој се поклапају све остале пројекције праве на равнима $x_1 x_3, x_1 x_4, \ldots, x_1 x_n$. Траг ове праве у равни $x_1 x_2$, тачка T^1, има пројекцију T_{12}^1 на правој $(\Sigma_1^1)_{12}$, а остале пројекције се поклапају на оси x_1. Траг T^1 праве Σ_1^1 је и траг простора $\Sigma_{(n-2)}$ у равни $x_1 x_2$. Слично се помоћу осталих правих одређују остали трагови простора $\Sigma_{(n-2)}$.

Изведени поступак за одређивање трагова простора може се претставити шемом:



Горња шема одговара поступку одређивања трагова петодимензионог простора који је садржан у седмодимензионом простору.

SPURENBESTIMMUNG DER EBENE IM VIERDIMENSIONALEN RAUME UND DES $(n-2)$-DIMENSIONALEN RAUMES IM n-DIMENSIONALEN RAUME

von ZAGORKA ŠNAJDER, BEOGRAD

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird gezeigt, wie man nach der Maurinschen Darstellungsmethode des vierdimensionalen Raumes die Spuren einer Ebene in den drei Projektionsebenen $(x_1 x_2, x_1 x_3, x_1 x_4)$ mittels der Affinität, die zwischen den Projektionen der Ebene herrscht und unter Anwendung der Koinzidenzräume, bestimmen kann (Abb. 5).

Indem die Maurinsche Darstellung auf mehrdimensionale Räume ausgedehnt wird, zeigt der Verfasser, wie man die Spuren eines dreidi-

mensionalen Raumes Σ_3 im fünfdimensionalen Raume R_5 (Abb. 6) und die Spuren eines $(n-2)$-dimensionalen Raumes $\Sigma_{(n-2)}$ im n-dimensionalen Raume R_n bestimmen kann.

Das Verfahren der Spurenbestimmung besteht darin, dass man die Aufgabe im Raume R_n mittels der Koinzidenzräume auf die entsprechende Aufgabe des Raumes R_{n-1} zurückführt usw., bis man, zuletzt, $(n-1)$ Geraden Σ_1^i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ bekommt, dessen Spuren auch die Spuren des betrachteten Raumes $\Sigma_{(n-2)}$ sind. Die Spuren eines Raumes $\Sigma_{(n-2)}$ im Raume R_n sind Punkte welche dem Raume $\Sigma_{(n-2)}$ und den Projektionsebenen $(x_1 x_2, x_1 x_3, \ldots, x_1 x_n)$ gemeinsam sind.

*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1–2 (1957), Beograd
Yougoslavie*

О АПСТРАКТНОМ РАЗМАКУ И УНИФОРМНИМ СТРУКТУРАМА

ЗЛАТКО МАМУЗИЋ, БЕОГРАД

Овај чланак претставља *Увод* из докторске дисертације „*Айсшракшни размак и униформне сшрукшуре*" коју је аутор одбранио 28 јуна 1955 године на Природно-математичком факултету у Загребу пред комисијом коју су сачињавали професори Универзитета у Загребу: Д-р инг. Данило Блануша, Д-р Ђуро Курепа, Д-р Жељко Марковић, Д-р Владимир Вранић и Д-р Радован Вернић.

Изузев наслова, Увод тезе објављује се без икаквих измена. Уколико је што додато, унето је као фуснота са ознаком [д. а.] што значи „додао аутор". Остали делови тезе публиковани су под следећим насловима:

Део I: *Тойолошке сшрукшуре йроизведене на скуйу E йресликавањем* $f(E \times E) \subset M$ *и сшрукшурама на скуйу M*, Зборник Машинског факултета, 1954/55, Београд, стр. 1–18.

Део II: *Ойерашори* $E[M]$, $D[M]$ *и шойолошке сшрукшуре на скуйу E*, Весник Друштва мат. и физ. НРС, VII, 1–2 (1955), Београд, стр. 41–72.

Део III: *О разним шойолошким [униформним] сшрукшурама йроизведеним на скуйу E йресликавањем* $f(E \times E) \subset M$ *у уређени [било који] скуй M*, Весник Друштва мат. и физ. НРС, VII, 3–4 (1955), Београд, стр. 185–216.

Резултати изложени у приложеном раду уско су повезани са развитком Топологије, односно, — њене посебне гране — Теорије апстрактних простора, за последњих двадесетак година и непосредно се надовезују на извесна постигнућа у овој области Математике из тог интервала времена. Зато ћемо се ограничити да из обимне литературе о развитку Топологије овде истакнемо само оно што је дало повода разматрању проблема у овом раду и што се, углавном, односи на поменуто време*.

Као што је добро познато и често цитирано, према M. Fréchet-у ([1], стр. 214, 61, 164, 170; [2], стр. 772–774; [3], стр. 1–74), класа $(\mathfrak{D})$

* Дефиниције и појмови којима смо се користили у Уводу, или су познати као већ класични, или су објашњени у даљем тексту.

раздаљинских (дистанцијалних или, према терминологији коју је увео F. Hausdorff, [1], стр. 211, — метричких) простора специјалан је случај класе ($\mathfrak{E}$) која, опет, није ништа друго до специјалан случај класа ($\mathfrak{L}$) простора (E, $\mathfrak{T}_E$) чија се топологија $\mathfrak{T}_E$, уз извесне услове, може тако дефинисати да се за основни појам *(terme primitif)* узме појам конвергенције низа $a_0, a_1, a_2, \ldots$, тачака $a_n \in E$. Простор (E, $\mathfrak{T}_E$) је класе ($\mathfrak{E}$) ако постоји функција ρ, једнозначно дефинисана на скупу $E \times E$, са вредностима у скупу свих реалних бројева $\geqslant 0$ тако да су испуњени ови услови:

1° $[\rho(a, b) = 0] \Longleftrightarrow a = b$, *за свако* $a, b \in E$.

2° $\rho(a, b) = \rho(b, a)$, *за свако* a, $b \in E$.

3° *За свако* $a \in E$ *и свако* $F \subset E$, *важи релација*[1]: $a \mathfrak{T}_E F \Longleftrightarrow$ [*постоји низ* $a_n \in F$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *са својством* $\rho(a, a_n) \to 0$, *кад* $n \to \infty$].

4° *Ако* $\rho(a, b_n) \to 0$, *кад* $n \to \infty$, *и* $b \neq a$, *не може у исти мах бити* $\rho(b, b_n) \to 0$.

Простор (E, $\mathfrak{T}_E$) је раздаљински (дистанцијалан, метричан или, боље, — ако се већ одлучимо за галицизам — дистанцијабилан, метризабилан) ако је, поред 1°, 2° и 3°, испуњен било који од следећа два услова:

5° (Неједначина троугла). *За свако* $a, b, c \in E$ *је*

$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, c) + \rho(c, b).$$

6° (Услов регуларности). *Постоји функција* $\varphi(x)$ *дефинисана на скупу свих реалних бројева* > 0, *са вредностима у том скупу и својством* $\varphi(x) \to 0$, *кад* $x \to 0$, *тако да за било које три тачке* $a, b, c \in E$ *и свако* $x > 0$ *из* $\rho(a, c) < x$ *и* $\rho(c, b) < x$ *следи* $\rho(a, b) < \varphi(x)$.

Јер, као што је показао E. W. Chittenden (1917 год.; вид. M. Fréchet, [1], стр. 219), услови 5° и 6° су са тополошког гледишта еквивалентни (доказ исте чињенице ефективном конструкцијом раздаљинске функције, дала је A. H. Frink 1937 год.; вид. Appert-Ky-Fan, [1]. стр. 71) а услов 4° је испуњен чим је испуњен услов 5° или услов 6°. Додајмо још да се услов 3° може изразити и у облику:

3° **bis.** *Да буде* $a \mathfrak{T}_E F$, *потребно је и довољно да за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $b \in F$ *тако да је* $\rho(a, b) < \varepsilon$.

Поред опште познате чињенице да раздаљински простори заузимају једно од централних места у савременој анализи, њихов даљи

[1] [д. а]. Означавање $a \mathfrak{T}_E F$ је суштински еквивалентно често коришћеном означавању $a \in \overline{F}$.

развитак кретао се углавном у два правца: 1) увођењем накнадних услова, било у вези са самом раздаљинском функцијом ρ било са структуром самог носиоца простора, тј. скупа E, дефинисане су класе простора специјалније природе од раздаљинских и 2) настојања да се дистанцијални простори карактеришу чисто тополошки, без посредовања раздаљинске функције ρ, довела су до неколико њихових значајних генерализација, о којима ћемо говорити нешто ниже.

Од спецификација дистанцијалних простора поменућемо овде једну од најважнијих тј. векторске ($\mathfrak{V}$) просторе: то су наиме простори који поседују тополошку структуру дистанцијалних простора и носиоци су поља апстрактних вектора (детаљније о томе вид. напр. M. Fréchet, [1], стр. 123 – 147); простори S. Banach-а су њихов специјални случај. Као пример дистанцијалних простора специјалније природе који се добијају кад се поставе строжи услови о функцији ρ, поменућемо δ-раздаљинске просторе које је недавно дефинисао P. Papić ([1], стр. 26): то су простори који верификују услове 1^0, 3^0 *bis* и један услов аналоган услову регуларности 6^0, кад се у овом место $\rho(c, b)$ стави $\rho(b, c)$ и $\varphi(x) \equiv x$. Међу раздаљинским просторима се δ-раздаљински простори карактеришу тиме што поседују разврстано уређену базу околина (напр. Baire-ов простор).

Пре но што пређемо на разматрање генерализација дистанцијалних простора у више наговештеном смислу, напоменућемо да је Курепа ([9], стр. 1276), већ у једном од својих првих радова, прелазом са $\omega_0 = \omega$ и $\aleph_0$ на било који иницијалан редни број ω_α одн. кардинални број $\aleph_\alpha$, генералисао и одмах применио на дистанцијалне просторе неке основне појмове, као што су: извод, адхеренција, компактност, сепарабилност, конвергенција, и комплетност. У новије време једну генерализацију дистанцијалних простора извршио је Ky-Fan (Appert-Ky-Fan, [1], стр. 69—104): просторе који верификују услове 2^0, 3^0 *bis* и било који од услова 5^0 и 6^0, назива Ky-Fan квази-дистанцијалним. Ови простори поседују многа својства дистанцијалних простора али је ова врста генерализације потпуно различита од оних до којих се дошло решавањем проблема наведеног под 2).

С обзиром на чињеницу да раздаљински простори поседују својства аналогна својствима еуклидских простора — откуда им и значај у анализи — важно је било сазнати критеријуме на основу којих ће се одлучити да ли је неки простор $(E, \mathfrak{T}_E)$ дистанцијалан или није. Најнепосреднији састоји се у томе да се конструише функција ρ која верификује услове $1^0, 2^0, 3^0$ *bis* и било који од услова 5^0 и 6^0: то је тзв. проблем метризације простора. Ако таква функција ρ постоји, каже се да је она сагласна (компатибилна) са топологијом $\mathfrak{T}_E$ и да је $(E, \mathfrak{T}_E)$

дистанцибијалан (метризабилан) простор. Друго је проблем дистанцијације. Овај се наиме састоји у томе да се нађу чисто тополошка својства која карактеришу дистанцијалне просторе без посредног увођења раздаљинске функције ρ. Оба ова проблема била су предмет истраживања широког броја математичара (детаљније о томе вид. напр. Арр-Ку-Fan, loc. cit.) које је довело до низа резултата, данас класичних. Овде ћемо навести само један резултат P. Alexandroff-а и P. Urysohn-а ([1], стр. 1274), математичара московске школе који су се бавили проблемом метризације (нарочито Hausdorff-ових простора)[1]:

Став 1 (Alexandroff и Urysohn). *Да простор* $(E, \mathfrak{T}_E)$ *буде раздаљински, потребно је и довољно да верификује аксиом сепарације* M. Fréchet-а *и да постоји бесконачан низ прекривача простора, монотон и комплетан.*

Притом се прекривачем простора $(E, \mathfrak{T}_E)$ зове свака фамилија π скупова са својством да је свака тачка $a \in E$ садржана у бар једном скупу фамилије π. За низ прекривача π_n, $n = 1, 2, \ldots$, простора каже се да је монотон, ако за сваки пар скупова $P, Q \in \pi_{n+1}$ са особином[2] $P \cap Q = v$, постоји $W \in \pi_n$ тако да је $W \supset P \cup Q$. Низ прекривача π_n простора $(E, \mathfrak{T}_E)$ је комплетан, ако је испуњен услов: да буде $a \mathfrak{T}_E F$, $a \in E$, $F \subset E$, потребно је и довољно да за свако n постоји скуп $V \in \pi_n$ у ком су садржане: тачка $a \in E$ и бар једна тачка $b \in F$.

Тополошку карактеризацију простора и класе $(\mathfrak{E})$ и класе $(\mathfrak{D})$ M. Fréchet-а, сасвим друге природе, дао је Курепа ([4], стр. 59—65, [5], стр. 124—132). За разлику од метода који су напр. применили P. Alexandroff и P. Urysohn, Курепин поступак, поред тога што је такође дао једно решење проблема дистанцијације, пружио је могућност генерализације поменутих класа у два правца: један је водио дефиницији класа $(\mathfrak{E}_\alpha)$ и $(\mathfrak{D}_\alpha)$, а други униформним просторима у смислу дефиниције A. Weil-а, [1]. Услови које је Курепа поставио у раду [4], гласе:

a) *Постоји фамилија скупова* $W_0, W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots, (n < \omega_0)$, *тако да је* $W_n \supseteq W_{n+1}$ *за свако* n *и да се пресек свих скупова те фамилије своди на само једну тачку* t.

[1] [д. а.] О решењима проблема дистанцијације тополошких простора, која се данас практично сматрају дефинитивним (Ю. М. Смирнов, J. Nagata, R. H. Bing), видети детаљније например у књизи: J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van. Nostrand Company, Inc. Toronto—New York—London, 1955, Стр. 124—130.

[2] [д. а.]. v = празан скуп.

б) *Постоји поступак којим се сваком пару тачака a, b простора* $(E, \mathfrak{T}_E)$ *придељује један одређени елемент уније* $W_0 = \bigcup_{n<\omega_0} W_n$ *тако да су испуњени ови услови:*

1′ $[(a, b) = t] \rightleftarrows a = b$;

2′ $(a, b) = (b, a)$;

3_0 *да* $a \in E$ *буде тачка нагомилавања скупа* $F \subset E$, *потребно је и довољно да за свако* $n < \omega_0$ *постоји* $a_n \in F$, $a_n \neq a$, *са својством* $(a, a_n) \in W_n$;

$4_0'$ *bis: ако је* $a \in E$ *било која тачка и* $n < \omega_0$ *било који редни број и ако се са* $S(a, W_n)$ *означи скуп свих тачака* $b \in E$ *са својством* $(a, b) \in W_n$, *постоје два редна броја* $\varphi(n), \psi(n) < \omega_0$ *тако да је:*

$$[b \in S(a, W_{\varphi(n)})] \rightarrow S(b, W_{\psi(n)}) \subseteq S(a, W_n);$$

H_0: *за било које две тачке* $a, b \in E$, $a \neq b$, *постоји* $n < \omega_0$ *тако да је*

$$S(a, W_n) \cap S(b, W_n) = v.$$

Полазећи од наведених услова, Курепа (loc. cit.) је доказао ова два става:

С т а в 2 (Курепа). *Да простор* $(E, \mathfrak{T}_E)$ *буде простор класе* $(\mathfrak{E}_0) \equiv (\mathfrak{E})$, *потребно је и довољно да буду испуњени услови a*), 1′, 2′, 3_0 и H_0.

С т а в 3 (Курепа). *Да простор* $(E, \mathfrak{T}_E)$ *буде простор класе* $(\mathfrak{D}_0) \equiv (\mathfrak{D})$, *потребно је и довољно да буду испуњени услови a*), 1′, 2′, 3_0 и $4_0'$ *bis*.

Очигледно, ради довођења у везу са својим операторима $\mathfrak{E}[M]$ и $\mathfrak{D}[M]$, Курепа је у раду [5] уз услов *a*) поставио и овај: да тачка t буде тачка нагомилавања скупа $F \subset W_0$, потребно је и довољно да за свако $n < \omega_0$ постоји тачка $t_n \in F$, $t_n \neq t$, са својством $t_n \in W_n$. С обзиром на чињеницу да се овим условом, уствари, дефинише топологија елемента $t \in W_0$, а ова у нашим разматрањима, специјално оним у другом и трећем делу тезе игра значајну улогу, ми смо посебно истицали баш тај услов, тако да ће се на више цитиране ставове Курепе наићи у[1] § 2.4 нешто друкчије стилизоване. Додаћемо још да је, место услова $4_0'$ *bis*, Курепа поставио у раду [5] један услов аналоган услову регуларности 6^0 и у раду [4] показао да је тај услов увек испуњен чим је испуњен услов $4_0'$ *bis*.

Једна сасвим природна и непосредна генерализација и класе $(\mathfrak{E}_0)$ и класе $(\mathfrak{D}_0)$ добија се кад се поступак и услови Курепе тако

---

[1] [д. а.]. § 2.4 — значи: други део тезе, четврти одељак. Аналогно важи и за остале цитате, уколико се односе на тезу аутора.

уопште да се са ω_0 пређе на било који иницијалан редни број ω_α. На овај начин је Курепа и дефинисао класе $(\mathfrak{E}_\alpha)$ и $(\mathfrak{D}_\alpha)$ простора који поседују својства аналогна својствима оних из класа $(\mathfrak{E}_0)$ и $(\mathfrak{D}_0)$ M. Fréchet-a. Али је његов поступак значајан и по томе што готово непосредно води генерализацији дистанцијалних простора у правцу униформних простора, које је три године касније A. Weil (loc. cit.) дефинисао на други начин. Као што смо показали у § 2.3, једноставним прелазом на инверзно пресликавање f^{-1} скупа W_0 на скуп $E\times E$ (ако са f означимо пресликавање о ком је реч у услову *b*)), Курепини услови да простор $(E, \mathfrak{T}_E)$ буде класе $(\mathfrak{D}_\alpha)$ одређују униформну структуру на скупу E, сагласну (компатибилну) са топологијом $\mathfrak{T}_E$ простора $(E, \mathfrak{T}_E)$. Но претпостављена монотоност фамилије скупова W_n у услову *a*) има за последицу да је фундаменталан систем близина кореспондентне униформне структуре добро уређен с обзиром на релацију инклузије $\supset$, типа ω_α. Уопштењем услова *a*) у смислу да се семимултипликативност фамилије скупова W_λ, $\lambda\in\{\lambda\}$, сматра уопштењем својства монотоности (јер, свака фамилија скупова, тотално уређена с обзиром на релацију инклузије $\supset$, семимултипликативна је), у § 2.3 показали смо да Курепин поступак води карактеризацији униформних простора A. Weil-a, чију ћемо дифиницију сада навести.

A. Weil је у Топологију увео униформне просторе решавајући, уствари, такође проблем дистанцијације, али сасвим другим путем од онога којим су ишли претходни аутори. Инспирацију за то дала су му својства тополошких група, аналогна својствима дистанцијалних простора (о тополошким групама детаљније вид. напр. Курепа [2], стр. 328 и N. Bourbaki [4]; о њиховом уопштењу, вид. Appert-Ky-Fan, [1], стр. 117). Према A. Weil-у каже се да је на скупу E дефинисан униформан систем околина ако је сваком индексу α неког непразног скупа $\{\alpha\}$ индекса придељен скуп $V_\alpha(p)$, $p\in E$, који се зове околином тачке p индекса α, — тако да су испуњени ови услови*.

(U_{I}) *За свако $p\in E$ и сваки индекс α је $p\in V_\alpha(p)$; за сваки пар тачака $p, q\in E$, $p\neq q$, постоји индекс α тако да је $p\notin V_\alpha(q)$.*

(U_{II}) *За свако $p\in E$ и сваки пар индекса α, β постоји индекс γ тако да је*

$$V_\gamma(p)\subset V_\alpha(p)\cap V_\beta(p).$$

(U_{III}) *За сваки индекс α постоји индекс β тако да из $p\in V_\beta(r)$ и $q\in V_\beta(r)$ следи $q\in V_\alpha(p)$.*

---

* Те смо услове означили исто онако као и Weil; у § 1.7, истим ознакама означени су услови, различити од горњих, које је поставио N. Bourbaki.

Топологија дефинисана на скупу E системом околина који верификује неведене услове, идентична је тада топологији дефинисаној на истом скупу фамилијом делова — *тзв. отворених скупова* — од E која испуњава ове услове:

(O_{I}) *Унија отворених скупова је отворен скуп.*

(O_{II}) *Пресек коначног броја отворених скупова је отворен скуп.*

(O_{III}) *Скуп* $E \setminus \{p\}$, $p \in E$, *је отворен скуп.*

Притом се претпоставља да су околине $V_\alpha(p)$ тако дефинисане да свака од њих садржи неки отворен скуп у ком је садржана тачка $p \in E$. Додаћемо још да су услови (U_{I}) одн. (O_{III}) еквивалентни Fréchet-овом аксиому сепарације T_1.

Стављајући сада $V_\alpha = \{(p, q) \mid (p, q) \in E \times E,\ q \in V_\alpha(p)\}$, једноставним прелазом на делове скупа $E \times E$, вишенаведена два система аксиома могу се сменити следећим, њима еквивалентним:

(U'_{I}) $\bigcap\limits_{\alpha} V_\alpha = \Delta$, ($\Delta$ = дијагонала производа $E \times E$).

(U'_{II}) *За сваки пар индекса* α, β *постоји индекс* γ *тако да је* $V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$.

(U'_{III}) *За сваки индекс* α *постоји индекс* β *тако да је* $V_\beta \circ V_\beta^{-1} \subset V_\alpha$, *где је са* $\circ$ *означен оператор слагања делова од* $E \times E$.

Сваки део скупа $E \times E$ који садржи неки скуп V_α, назива Weil близином дијагонале Δ и фамилија свих близина дијагонале Δ не мења се ако се дата фамилија V_α, $\alpha \in \{\alpha\}$, смени неком фамилијом њој инклузивно еквивалентном. Каже се тада да оне дефинишу на E исту униформну структуру и сваки простор који се може дефинисати помоћу такве фамилије скупова V_α зове се *униформним простором.*

Као што је то одмах показао A. Weil, сваки простор класе ($\mathfrak{D}$) је униформан простор чији се систем близина V_α (α = реалан број > 0) може сменити инклузивно еквивалентном фамилијом која је пребројива: дистанцијални простори су специјалан случај униформних. У исти мах показао је да свака тополошка група поседује униформну структуру и доказао два става које је могућно стилизовати у облику овог:

Став 4 (Weil). *Да простор* $(E, \mathfrak{T}_E)$ *буде униформан, потребно је и довољно да буде комплетно регуларан.*

У време појаве Weil-ове књижице о униформним просторима (1938 год.), H. Cartan ([1], стр. 595 и 777) је објавио своју теорију о филтрима и у садашњој терминологији каже се да је фамилија близина, како их је дефинисао Weil, филтар на скупу $E \times E$ који верификује услове (U'_{I}) и (U'_{III}). Стриктном применом теорије филтара, N. Bourbaki је униформне просторе дефинисао (вид. § 1.7) и испитивао нешто друкчије од Weil-a. Weil-ови униформни простори су сепарирани униформни простори у смислу дефиниције N. Bourbaki-a. Ми смо се у овом раду служили терминологијом и дефиницијама N. Bourbaki-a.

Униформним просторима водио је још један пут којим је Курепа пошао 1934 године и то различит од оног којим су тополошким карактерисане и истовремено генералисане класе $(\mathfrak{E})$ и $(\mathfrak{D})$ Fréchet-a. Наиме, у својој дефиницији псеудо-дистанцијалних простора Курепа ([7], стр. 1563) је уопштио раздаљинску функцију ρ: сваком пару $a, b \in E$ придељује се једнозначно одређен елемент неког тотално уређеног скупа (тзв. скале), тј. псеудо-размак тачака a и b не мора бити реалан број (вид. § 3.1). Ставивши себи у задатак да резултате A. Weil-a добије генерализацијом раздаљинске функције а користећи се, уствари, Курепиним појмом апстрактног размака, M. Fréchet ([5], стр, 337; [4], стр. 121—131) је у својој анализи простора под називом *„espaces écartisés"* дошао до закључка да решењу постављеног задатка воде баш псеудо-дистанцијални простори како их је дефинисао Курепа. Приметићемо овде још да се генерализацијом раздаљинске функције бавио и K. Menger ([1], стр. 142—145) али су његова разматрања у вези са другим проблемима и његове дефиниције нису еквивалентне Курепиним (например, услов регуларности Menger није ни уводио већ се ограничио на неке примедбе у вези са неједначином троугла).

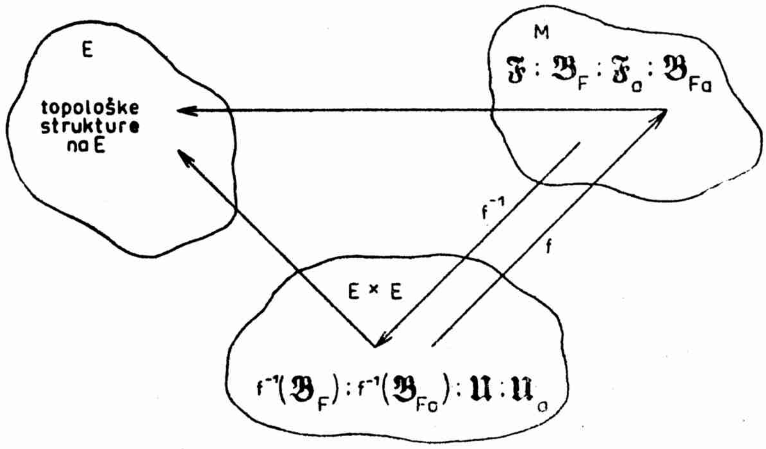
Да су псеудо-дистанцијални простори униформни простори у смислу дефиниције A. Weil-a, M. Fréchet је доказао индиректно: показао је наиме да су то комплетно регуларни простори и зато униформни, према ставу 4. Но, псеудо-дистанцијални простори су класе $(\mathfrak{D}_\alpha)$ и поседују дакле униформну структуру чији је фундаменталан систем близина тотално уређен (штавише, добро уређен) с обзиром на релацију инклузије $\supset$. Према томе, сепариране униформне просторе још увек није било могућно карактерисати класом псеудо-дистанцијалних простора. То се успело постићи кад се у генерализацији раздаљинске функције пошло и даље тако да је, место ње, размак двеју тачака простора био дефинисан елементом парцијално уређеног скупа. Такво уопштење извели су истовремено J. Colmez [1], [2] и A. Appert [3] (вид. § 3.3 и § 3.5). Додаћемо овде да је A. Appert, [2], генералисао и униформне просторе A. Weil-a увођењем једног ширег броја аксиома и да је успоставио везу између тако генералисаних униформних простора и простора уопштеног размака из његовог рада [3], (вид. § 3.4 и § 3.5).

Поред већ поменутих аутора који су се бавили проблематиком инаугурисаном од стране Курепе 1934 године увођењем псеудо-дистанцијалних простора и поново покренутом од стране Fréchet-a 1945 године (откуда им још и назив „Kurepa–Fréchet-ови простори"), навешћемо овде још R. Doss-a [1], [2] и П. Папића [1], [2], [3]. R. Doss je, између осталог, доказао да је сваки псеудо-дистанцијалан простор комплетно нормалан да се услов регуларности за недистанцијалне псеудо-дистанцијалне просторе може поједноставити (вид. § 3.1, фуснота) и да такви простори поседују базу околина које су у исти мах и отворене и затворене. П. Папић је дефинисао једну класу (R) простора за које је показао да поседују разврстано уређену базу околина које су и отворене и затворене. То су комплетно нормални простори које Папић такође назива псеудо-дистанцијалним, иако су општији од Курепа — Fréchet-ових. И прве и друге, Папић је испитивао стриктном применом теорије гранастих скупова („*ensembles ramifiés*"; вид. Курепа, [6]) и на тај начин дошао до низа важних резултата који, у исти мах, могу послужити и као једна од значајних потврда корисног примењивања поменуте Курепине теорије.

Поред већ наведених двеју, Курепа ([3], стр. 1049; [1]) је извршио још једну генерализацију простора класа $(\mathfrak{E})$ и $(\mathfrak{D})$ M. Fréchet-a дефиницијом оператора $\mathfrak{E}[M]$ и $\mathfrak{D}[M]$ (вид. § 2.1 и § 2.3). Класе простора дефинисане овим операторима врло су опште и на идеју — која је и довела до резултата изложених у овом раду — дошли смо, уствари, проучавајући операторе $\mathfrak{E}[M]$ и $\mathfrak{D}[M]$. О томе ћемо сада такође рећи неколико речи.

Као што се из претходног да лако закључити, разни покушаји генерализације класа $(\mathfrak{E})$ и $(\mathfrak{D})$ M. Fréchet-a довели су до три јасно оцртане класе простора који се могу дефинисати помоћу: или тотално (парцијално) уређеног размака, или униформних структура, или операторима $\mathfrak{E}[M]$ и $\mathfrak{D}[M]$. У првом одн. трећем случају, тополошпе структуре на скупу E дефинишу се пресликавањем f скупа $E \times E$ у тотално (парцијално) уређен скуп одн. у било који простор M. У другом случају тополошке структуре на скупу E дефинишу се одређеним структурама на скупу $E \times E$ (например, филтрима на скупу уз накнадне услове). Међутим, између тих класа простора постоји извесна веза коју су разни аутори успостављали на различите начине. Природно је, дакле, било анализирати опште питање: *ако је E неки пун скуп, постоји ли могућност да се пресликавањем f скупа $E \times E$ у пун скуп M тако стартује да се, помоћу инверзног пресликавања f^{-1}, на скупу*

$E\times E$ дефинишу структуре које ће на скупу E одређивати тополошке структуре идентичне оним које се добивају пресликавањем f? — Јасно је да се подесним избором функције f и структурама на скупу M, овим начином на скупу E могу дефинисати различите тополошке структуре. Први део тезе посвећен је управо разматрању и анализи горњег питања, па су у § 1.1 и § 1.2 изложена два различита поступка увођења тополошких структура у скуп E, тако да се на постављено питање може позитивно одговорити и то под доста општим условима. Идеја коју притом следимо једноставна је и може се укратко изожити у облику ове скице:



Значење ознака у горњој скици објашњено је у § 1.1 и § 1.2. У § 1.3 испитивани су услови под којима ће на овај начин дефинисани простори $(E, \mathfrak{T}_E)$ верификовати аксиом дистрибутивности D и аксиом α. У §§ 1.4, 1.5 и 1.6, анализирани су услови под којима ће бити испуњени аксиоми сепарације T_1, T_2 и T_3 (тј. аксиоми сепарације Fréchet-a, Hausdorff-a и Vietoris-a). У § 1.7 је дата једна нова карактеризација униформизабилних простора полазећи од класе простора дефинисаних у § 1.1, уз неке накнадне услове о функцији f. Одмах ћемо овде додати да је у § 3.4 одн. § 3.6 показано како се класом простора из § 1.1 могу карактерисати сви униформни простори у смислу дефиниције A. Appert-a, односно, како се у једној подкласи класе простора дефинисаних у § 1.2, могу добити све униформне структуре које је посматрао T. Inagaki ([1], ст. 179—202). У § 1.8 постављен је један од довољних услова да простори класе $E(M_F)$ (вид. § 1.3) буду комплетно нормални. Појмови одн. ставови прецизирани одн. доказани у првом делу, мање-више су перманентно коришћени у другом и трећем делу тезе.

У другом делу разматрани су проблеми у вези са операторима $\mathfrak{E}[M]$ и $\mathfrak{D}[M]$. Ослањајући се на неке резултате које сам изложио у раду [1], у § 2.1 изведено је неколико ставова, врло корисних и често примењиваних у осталим параграфима, како овог тако и трећег дела. У § 2.2 разматрани су простори означени са $E(M_{\mathbf{V}\omega_\alpha})$, а у § 2.3 анализирани су простори $\mathfrak{D}[M]$. Ту су дефинисане класе простора $\mathfrak{E}[(\mathbf{V})_{t\alpha}]$ и $\mathfrak{D}[(\mathbf{V})_{t\alpha}]$ одн. $\mathfrak{D}[(\mathbf{V})t_s]$ и показано да је сваки простор класе $\mathfrak{D}[(\mathbf{V})_{t\alpha}]$ униформан простор са фундаменталним системом близина униформне структуре који је добро уређен с обзиром на релацију инклузије $\supset$, типа ω_α и да је класа сепарираних униформних простора тополошки идентична класи простора $\mathfrak{D}[(\mathbf{V})_{ts}]$. § 2.4 посвећен је просторима класе $(\mathfrak{E}_\alpha)$ одн. $(\mathfrak{D}_\alpha)$ а у § 2.5 разматрани су услови под којима ће неки простор $(E, \mathfrak{T}_E)$ бити класе $\mathfrak{E}[(E, \mathfrak{T}_E)]$ одн. $\mathfrak{D}[(E, \mathfrak{T}_E)]$, што је одмах примењено на просторе $J(\omega_\alpha)$ и показано да је $J(\omega_\alpha) \in \mathfrak{D}[J(\omega_\alpha)] \cap O^{1'}$ за сваки иницијалан редни број ω_α, где је $O^{1'}$ услов континуитета Курепе (вид. § 2.1). На тај начин решен је и један проблем шири од оног који је Курепа поставио у раду [3] у вези са простором $J(\omega_1) \equiv (\Omega)$, ($(\Omega)$ = простор свих пребројивих редних бројева). У § 2.6 разматрани су T-простори при чему је, између осталог, доказано да су простори $(T, \mathfrak{T}_T)$ регуларни са базом околина које су и отворене и затворене и да се специјало, простори означени са $(T_{\omega_\alpha}, \mathfrak{T}_{T_{\omega_\alpha}})$ налазе у класи $\mathfrak{D}[M]$ где је $M = J(\omega_\alpha)$. R-простори испитивани су у § 2.7, а у § 2.8 поново су анализирани простори $(T, \mathfrak{T}_T)$ у вези са условом континуитета $O^{1'}$ и при томе је између осталог, дато једно решење Курепиног проблема[1] 4.1 из његовог рада [1]. Приметићемо овде да се у новије време све више обелодањује значајна улога услова $O^{1'}$, као што је показао Папић напр. у вези са R-просторима (вид. § 2.8).

Оно што је урађено у §§ 3.4 и 3.6, већ смо поменули. У осталим праграфима трећег дела анализиране су тополошке структуре произведене на скупу E пресликавањем f производа $E \times E$ у тотално или парцијално уређен скуп. § 3.1 посвећен су Курепиним псеудодистанцијалним просторима, у § 3.2 разматрани су Fréchet-ови *„espaces localement écartisés"* и *„espaces écartisés"*, а § 3.3 одн. 3.5 посвећен је просторима парцијално уређеног размака I и II типа J. Colmez-а, одн. уопштеног размака у смислу дефиниције A. Appert-а. Применом претходних резузтата показано је да су све то специјални случајеви простора дефинисаних и анализираних у прва два дела, при чему скуп M поседује уређајну структуру, тоталну или парцијалну и да при

[1] [д. а.]. О томе проблему и његовом решењу вид. такође: Z. Mamuzić, Sur la solution d'un problème concernant eT-espaces, Glasnik mat. fiz. i astr. Serija II, T. 11, Zagreb, № 2, str. 95—103.

томе једну од значајних улога и овде игра Курепин услов O^3. Прелазом на инверзно пресликавање f^{-1}, показана је на једноставан начин њихова уска веза са униформним просторима.

Завршавајући овај укратко скицирани увод, најсрдачније се захваљујем Д-р Ђури Курепи, свеучилишном професору у Загребу; његово стално интересовање, савети и морална подршка, много су ми помогли у мом раду, како за време мог боравка у Загребу у летњем семестру школске 1953/54 године, тако и после тога. Посебно му се захваљујем за труд и време које није жалио да ми се у свако доба стави на расположење ради дискусије о горњој проблематици, кадгод је то било потребно. Најсрдачнију захвалност дугујем исто тако Д-р Павлу Папићу и Д-р Виктору Седмаку, свеучилишним асистентима у Загребу с којима сам у плодним и често дугим дискусијама проматрао многе проблеме из области топологије, специјално, теорије апстрактних простора.

ЛИТЕРАТУРА

P. Alexandroff и Urysohn

[1] *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe* (*L*) *soit une classe* (*D*) Comptes rendus, 177, Paris, 1923.

A. Appert

[2] *Espaces uniformes généralisés*, Comptes rendus, 222, Paris, 1946.

[3] *Écart partiellement ordonné et uniformité*, Comptes rendus, 224, Paris, 1947.

A. Appert-Ky-Fan

[1] *Espaces topologiques intermédiaires*, Paris, 1951.

N Bourbaki

[4] *Topologie générale*, Livre III, Chap. III, Paris, 1951.

H. Cartan

[1] *Théorie des filtres*, Comptes rendus 205, Paris, 1937.

J. Colmez

[1] *Sur divers problèmes concernant les espaces topologiques. Les espaces à écarts. — Problème de Wiener sur les transformations continues*, Portugaliae Mathematica, Vol. 6, Fasc. 3–4, 1947.

Espaces à écart généralisé régulier, Comptes rendus, 224, Paris, 1947.

R. D o s s

[1] *Sur la condition de régularité pour l'écart abstrait*, Comples rendus, 223, Paris, 1946

[2] *Sur les espaces où la topologie peut être définie à l'aide d'un écart abstrait symétrique et régulier*, Comptes rendus, 223, Paris, 1946.

M. F r é c h e t

[1] *Les espaces abstraits*, Paris, 1928.

[2] *La notion d'écart et le Calcul fonctionnel*, Comptes rendus, 140, Paris, 1905.

[3] *Sur quelques points du Calcul fonctionnel*, Thèse, Paris, 1906; или, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XXII, p. 1—74, 1906.

[4] *De l'écart numérique à l'écart abstrait*, Portugaliae Mathematica, Vol. V, 1946.

[5] *La notion d'uniformité et les écarts abstraits*, Comptes rendus, 221, Paris, 1945.

F. H a u s d o r f f

[1] *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

T. I n a g a k i

[1] *Sur les espaces à structure uniforme*, Journ. of the Fak. of Scienc. Hokkaido Imperial University, Ser. 1, Vol. X, № 4, Sapporo, Japan.

C. K u r a t o w s k i

[1] *Sur l'apération $\overline{A}$ de l'Analysis situs*, Fund. Math. 3, 1922.

Dj. K u r e p a

[1] *Sur l'écart abstrait* (u rukopisu[1]).

[2] *Teorija skupova*, 22+444, Zagreb, 1951.

[3] *Le problème de Suslin et les espaces abstraits*, Comptes rendus, 203, Paris, 1936.

[4] *Un critère de distanciabilité*, Mathematica, Vol. XIII, p. 59—65, Cluj, 1937.

[5] *Sur les classes (E) et (D)*, Publ. Math. Belgrade, T. V. p. 124—132, 1936.

[6] *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Thèse, p. 1—138, Paris, 1935; или, Publ. Math. Belgrade, T. IV, p. 1—138, 1935.

[7] *Tableaux ramifiés d'ensembes. Espaces pseudodistanciés.* Comptes rendus, 198, Paris, 134.

[9] *Sur les espaces distanciés séparables généraux*, Comptes rendus, 197, Paris 1933.

Z. M a m u z i ć

[1] *Sur la topologie transitive d'une classe d'espaces (V)*, Bull. Soc. Math. phys. RP de Serbie, VI, 1—2 (1954), Beograd.

K. M e n g e r

[1] *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann. 100, стр. 75—163. (1928).

---

[1] [д. а.] Вид. Glasnik mat., fiz. i astr. Serija II, T. 11, Zagreb, № 2 (1956), strana 105—132.

P. Papić

[1] *Pseudo-distancijalni prostori* (теза[1]).

[2] *O prostorima sa razvrstano uređenom bazom okolina*, Glasnik mat. fiz. i astr. T. 8. № 1, str. 30—40, Zagreb, 1953.

[3] *Sur une classe d'espaces abstraits*, Comptes rendus, 236, Paris, 1953.

A. Weil

[1] *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Paris, 1937,

SUR L'ÉCART ABSTRAIT ET LES STRUCTURES UNIFORMES

par ZLATKO MAMUZIĆ, BEOGRAD

Résumé

Éxposé du développement historique des notions d'écart abstrait et des structures uniformes en topologie générale avec les problèmes conduisant à ceux qui ont été traités par l'auteur dans sa thèse „Écart abstrait et structures uniformes", soutenue à la Faculté des Sciences de l'Université à Zagreb le 28. 6. 1955. L'article présent n'est autre que l'introduction de la thèse dont les trois parties ont été déjà publiées (v. le début de cet article).

---

[1] [д. а.] Депонована у свеучилишној књижници у Загребу. Нешто модификована објављена је под насловима: *Sur une classe d'espaces abstraits* и *Sur les espaces pseudo-distanciés* у Гласнику мат., физ. и астр. Серија II, Т. 9, Загреб, № 3—4 (1954) стр, 197—228.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie

O FLUORESCENCIJI I NAKNADNOM SVETLJENJU KADMIJUMOVIH HALOGENA AKTIVIRANIH MANGANOM

ŽIVOTIJE TOPALAC, BEOGRAD

Ispitivano je naknadno svetljenje kadmijumovih halogena aktiviranih manganom. Fosfori dobijeni metodom kristalizacije do temperature od 200°C pokazuju kvalitativno druge osobine od onih fosfora dobijenih topljenjem komponenata. Istaknuta je ta razlika i u pogledu fluorescencije koja se pri tome dobija.

1. Uvod

Poznato je da je mangan jedan od najefektivnijih aktivatora kod kristalnih fosfora, među kojima su CaS, BaS, SrS, ZnS, $ZnSCdS$, neki silikati, zatim sulfati cinka i kadmijuma, oksid, halogeni i drugi, sa velikim intervalom koncentracije aktivatora. I Kutzelnig [1] je 1936 god. upotrebio prvo mangan za aktiviranje fluorescencije kod kadmijumovih halogena. Najpogodniji bio je CdJ_2 kao najtipičniji pretstavnik slojevite strukture rešetke. Autor navodi da, kada se CdJ_2 pripremi sa mangan-hloridom, preparat fluorescira sjajno skerlet-crvenom bojom. Pripremanje fosfora vršeno je na više načina (1. topljenjem smeše, 2. isparavanjem pomešanih rastvora, 3. snažnim mlevenjem komponenata u avanu). Isparavanjem rastvora CdJ_2 sa $MnCl_2$ dobija se produkt koji prvo ne fluorescira. Fluorescencija nastupa tek kada se preparat zagreva za kratko vreme na 150—200°C. Autor ovo objašnjava time što samo $MnCl_2$ koji je izgubio vodu, može da bude ugrađen u rešetku i sposoban za aktivaciju.

I $CdCl_2$ do istom autoru, može da bude pogodan kao osnovni materijal ali je tada fluorescencija slabija. Optimalna koncentracija aktivatora za sistem $CdCl_2 - MnCl_2$ kreće se od 2,5—5%. Kod $CdJ_2 - MnCl_2$—fosfora fluorescencija znatno manje zavisi od koncentracije.

U jednom docnijem radu Kutzelnig daje nove podatke [2]. Kvalitativno je ispitivao uticaj temperature na intenzitet fluorescencije i navodi da se na nižim temperaturama (do tečnog vazduha) fluorescencija CdJ_2 sa mangan-hloridom gubi. Nasuprot tome, na višim temperaturama, i do 200°C, svetljenje je još uvek snažno.

Randall [3] nalazi da i čist kadmijumovi halogeni na niskim temperaturama pokazuju fluorescenciju. Izuzetak čini CdF_2. Autor nije siguran da to nije posledica izvesnih prisutnih nečistoća.

Da bi se konačno videlo koliko su manganovi joni (dvovalentni mangan) stvarno odgovorni za fluorescenciju u fosforima koje aktiviraju, Randall [4] je preduzeo ispitivanja fluorescencije čistih manganovih halogena koja se javlja na niskim temperaturama. Najupadljivija karakteristika fluorescencije čistih halogena sastoji se u tome što je kod svih emisionih spektara dominantna traka u crvenom. Takođe i sva poznata jedinjenja aktivirana manganom daju crvenu fluorescenciju. Randall je detaljno ispitivao ponašanje fluorescencije na niskim temperaturama kod više od 25 fosfora, aktiviranih manganom. Svaki fosfor je davao crvenu fluorescenciju sa manjim varijantama, tako da se može uzeti da je dvovalentni mangan nosilac fluorescencije. Tome ide u prilog i činjenica da čisti manganovi halogeni daju fluorescenciju u istoj traci.

Aljavdin, Levšin i Fedorov [5] proučavaju opadanje kod CdJ sa $MnCl_2$, posle prekidanja ekscitacionog zračenja na sobnoj temperaturi. Opadanje je teklo po eksponencijalnom zakonu sa $\tau = 5{,}8.10^{-4}$ sec. Pored toga, data je kriva zavisnosti fluorescencije od temperature u domenu od sobne do skoro 150°C.

Balin [6] je 1949 detaljnije ispitivao naknadno svetljenje istog preparata ali na niskim temperaturama. Na sobnoj temperaturi CdJ_2 sa manganhloridom ne daje naknadno svetljenje pa ga prethodni autori nisu ni mogli da otkriju. Međutim, poznato je da energetska izolovanost centara svetljenja gradi pogodne uslove za pojavu luminescencije. Sa snižavanjem temperature moglo se očekivati da će ta izolacija biti pojačana, usled čega može da se pojavi naknadno svetljenje. Na osnovu te konstatacije Balin je stvarno otkrio naknadno svetljenje na temperaturi tečnog vazduha. Rezultat je bio da je svetljenje relativno dugotrajno a kriva opadanja hiperbolična. Sa snižavanjem i ovde dolazi do slabljenja intenziteta fluorescencije.

Šlezingerova u dva maha [7] pominje $CdBr_2$ sa manganom koji daje oranž-fluorescenciju i koristi njegovo temperatursko ponašanje na višim temperaturama da dokaže opravdanost svoje teze o luminescentnim centrima kao kvazimolekulima.

Sledeća tabela daće pregled dosada proučenog materijala: (dobijenog topljenjem komponenata)

Tabela 1.

Osnovni materijal	Aktivator	Boja fluorescencije	Opadanje svetljenja posle prekida akscitacije	
			na sobnoj tem.	na −186°C
CdJ_2	$MnCl_2$	skerlet-crvena	eksponencijalno t 5,8.10—⁴ sec.	hiperbolično dugotrajno—rel.
$CdBr_2$	"	oranž-crvena	nije otkriveno naknadno svetljenje	
$CdCl_2$	"	slaba crvena	" "	" "
CdF_2	nije ispitivano			

Iz tabele 1 u kojoj su skupljeni dosada poznati rezultati o fluorescenciji kadmijumovih halogena aktiviranih $MnCl_2$, može se videti da izvesni važni podaci o fluorescenciji ovih fosfora, kao što su naknadno svetljenje $CdBr_2$ sa manganom i razni načini dobijanja fosfora, nisu bili ispitivani, ili čak ni zapaženi.*)

Nedavno je izišao iz štampe rad Klementa i njegovih saradnika pod naslovom „Uticaj gasova na procese pojavljivanja nekih kristalnih fosfora" [8], u kome se između ostalog pominju i $CdBr_2$ i $CdCl_2$ aktivirani manganom.

Toliko je radova i činjenica bilo i štampano do danas. U ovom radu iznose se neke nove činjenice zapažene kod kadmijumovih fosfora. Tu se u prvom redu misli na nove mogućnosti dobijanja fluorescencije i naknadnog svetljenja koje do danas nisu primećene. Na pr. u dosadašnjim radovima nigde se ne spominje naknadno svetljenje $CdBr_2$ sa manganom, koje je znatnog trajanja i velikog intenziteta. Nema, takođe, podataka da se gornji materijal može dobiti kristalizacijom do 100°C. Pronađeno je, dalje, da CdF_2 sa manganom daje intenzivnu i kratkotrajnu fosforescenciju svetlo-zelene boje. Pojava je uočena kod materijala sa većim koncentracijama mangana. $CdCl_2$ takođe pokazuje fosforescenciju bilo da je aktiviran *Mn*-hloridom bilo *Mn*-sulfatom.

2. **Naknadno svetljenje**

Kutzelnig [1] u zaključku svoga rada kaže da kod ispitivanih materijala nije bilo fosforescencije. Naša merenja u Instititutu slažu se sa pomenutom tvrdnjom u slučaju kada se $CdBr_2$ *topi* sa manganom, kako je Kutzelnig i radio. Ako se međutim, preparat dobije putem kristalizacije na temperaturama do 200°C, kako smo mi radili, dobija se intenzivno naknadno svetljenje sa relativno dugim trajanjem posle prekida ekscitacije. Topljenjem istog materijala na 570—600°C, takvo naknadno svetljenje se gubi. Dobijanje materijala — fosfora — putem kristalizacije do 200°C pretstavlja ujedno novi metod spravljanja pomenutih fosfora sa kvalitetno novim luminescentnim osobinama. Takav se fosfor priprema na sledeći način: rastvori osnovnog materijala i aktivatora pomešaju se u odgovarajućim odnosima i isparavaju u sušnici na temperaturi od oko 100°C, u toku 20—30 časova. Zatim se kraće vreme preparat drži na temperaturi od 180—200°C. U tom slučaju dobija se relativno bolja fluorescencija nego sušenjem samo do 100°C. Ni kasniji radovi (posle Kutzelniga) nisu pominjali naknadno svetljenje kod $CdCl_2$ i $CdBr_2$ aktiviranih manganom.

---

*) Kutzelnig [1] tvrdi da „fosforescentna sposobnost nije utvrđena ni kod jednog ispitivanog fosfora".

Ako za osnovni materijal umesto $CdBr_2$ uzmemo $CdCl_2$ i aktiviramo *Mn*-hloridom ili *Mn*-sulfatom, dobija se svetlo-zelena fosforescencija. Način dobijanja fosfora je isti kao i kod $CdBr_2$ (kristalizacijom do 200°C.). Fluorescencija je oranž boje slabog intenziteta kod prvog (sa $MnCl_2$), *a slabo plava kod drugog fosfora* (sa *Mn*-sulfatom.).

Kad se CdF_2 pomeša, putem rastvora, na $MnCl_2$ i ispari na temperaturi oko 100°C, pod ozračivanjem U. V.-zračenja dobija se jaka zeleno-žuta fosforescencija koja traje relativno kratko — oko 0,3 sec. Preparati sa nižim koncentracijama aktivatora nisu dali nikakvu fosforescenciju. Zamena $MnCl_2$ sulfatom pokazuje slabije efekte.

Naknadno svetljenje je, kao i fosforescencija kod gore pomenutih preparata, bilo ispitivano u vezi sa uticajem koncentracije, temperature i uslova pripremanja fosfora.

2.1. Uticaj koncentracije aktivatora na trajanje naknadnog svetljenja

Ogledi su vršeni sa primercima $CdBr_2$ aktiviranim mangan-hloridom. Pokazalo se da manganov sadržaj utiče na trajanje naknadnog svetljenja. Rezultati su izneti u sledećoj tabeli:

Uticaj koncentracije mangana na trajanje naknadnog svetljenja kod $CdBr_2$ sa $MnCl_2$ (vreme je u sekundama)

Tabela 2.

Molarna koncentracija aktivatora	10%	20%	30%	40%	50%
Vreme trajanja nakn. svetljenja	3,11	4,37	5,42	6,08	5,46

Kako se iz tabele 2 vidi, najduže naknadno svetljenje dobija se sa 40% aktivatore koncentracije. Ispod nje postoji linearan odnos, naime, sa opadanjem koncentracije smanjuje se i trajanje naknadnog svetljenja. To nije slučaj sa preparatom CdJ_2 sa $MnCl_2$ (Balin, 6), gde je svetljenje nezavisno od manganovog sadržaja.

U slučaju $CdBr_2$ sa *Mn*-sulfatom dobija se takođe oranž-fluorescencija samo sa slabijim intenzitetima Poređenja radi uzete su iste koncentracije mangana kao i kod $MnCl_2$. Rezultati merenja daju ovde drugu sliku. Naime, sa povećanjem koncentracije aktivatora vreme trajanja svetljenje opada.

Zavisnost vremena trajanja svetljenja od koncentracije aktivatora kod $CdBr_2$ aktiviranog Mn-sulfatom

Tabela 3.

Molarna koncentracija aktivatora	10%	20%	30%	40%	50%
Vreme trajanja nakn. svetljenja (u sec.).	1,86	1,72	1,55	1,3	1,1

Ozračivanje sa ultraljubičastim zračenjem trajalo je 1 minut pre prekida ekscitacije tako da su merenja vršena pod istim uslovima.

I kod $CdCl_2$ sa $MnCl_2$ i $MnSO_4$ imamo novih efekata u odnosu na Kutzelniga [1]. Ako se fluorescentni materijal dobije kristalizacijom do 150°C, a ne topljenjem, pri ozračivanju sa kvarz-lampom (maksim. Intenzitet na 3650 A), javlja se svetlo-zelena fosforescencija jakog intenziteta. Posle onakvih rezultata kod $CdBr_2$, ispitivan je i ovde uticaj koncentracije aktivatora u oba slučaja. Preparat je pre svakog merenja trajanja svetljenja bio ozračivan u toku jednog minuta. Tako su stvoreni isti uslovi za sva merenja i sve preparate. Rezultati su sledeći:

$CdCl_2$ sa Mn-hloridom i Mn-sulfatom.*)

Tabela 4.

aktivator	$MnSO_4$				$MnCl_2$			
Molarna koncetracija aktivatora	1%	3%	5%	12%	5%	10%	20%	30%
Vreme trajanja naknadnog svetljenja	1,32	1,34	1,32	1,33	1,03	0,93	0,94	0,92 se

Kao što se iz datih merenja vidi otstupanja su neznatna. Još kada se uzme u obzir da je to vizuelna fotometrija, i da greške mogu da budu veće od 1/10 sec. onda je konstantnost očigledna. Jer, ovde, uglavnom, razlika nije veća od 1/10 secunde. To, dalje, znači, da trajanje fosforescencije ne zavisi od koncentracije aktivatora. Dakle, ponaša se različito od $CdBr_2$. Iz direktnih posmatranja vidi se da $CdCl_2$ daje istu, svetlozelenu fosforescenciju bilo da se aktivira sulfatom bilo hloridom mangana. Odatle izlazi zaključak da se kod $CdBr_2$ i $CdCl_2$ radi izgleda o različitim zračenjima.

*) Svaki rezultat dat u navedenim tabelama pretstavlja srednju vrednost više merenja vremena trajanja svetljenja.

2.2. Uticaj temperature na trajanje naknadnog svetljenja

Pokazalo se da temperatura utiče na vreme trajanja naknadnog svetljenja. Efekti su bili najjači opet kod $CdBr_2$ sa $MnCl_2$. Tako, na pr., na 150°C preparat ne daje nikakvo svetljenje posle prekida ekscitacije, koje bi se moglo golim okom zapaziti. Sva ispitivanja, iz tehničkih razloga, samo su kvalitativne prirode. Stoga će ovde biti samo pobrojana.

Preparat $CdBr_2$ sa $MnCl_2$ na temperaturi tečnog vazduha daje kratko naknadno svetljenje čije vreme trajanja ne prelazi 0,3 sec. Ali, ako takav preparat duvamo toplim vazduhom iz usta pojavljuje se vrlo intenzivno naknadno svetljenje koje traje i više od 50 sec. Svetljenje se produžava i preko jednog minuta ako ponovimo duvanje.

Kod CdF_2 sa $MnCl_2$ stvar stoji drukčije. Fosforescencija duže traje na temperaturi tečnog vazduha ($t = 1{,}9$ sec.) nego na sobnoj temperaturi ($t = 0{,}3$ sec.). Na višoj temperaturi (100°C), fosforescencija je jedva mogla da bude uočena golim okom — bila je vrlo kratka.

2.3. Uticaj temperature prethodnog zagrevanja na trajanje naknadnog svetljenja

I od temperature prethodnog zagrevanja zavisi trajanje *naknadnog svetljenja. I uopšte, kvalitet* fosfora u mnogome zavisi od načina njegovog spravljanja što danas pretstavlja predmet naučnog ispitivanja (9).

Kutzelnig je topio preparate i naknadno svetljenje nije našao. Znači, postoji efekt temperature prethodnog zagrevanja. Stoga je i ovde izvršeno nekoliko ogleda da se vidi to dejstvo ako se menja temperatura isparavanja, odnosno kristalizacije. Merenja su izvršena sa fosforima ($CdBr_2$ sa $MnCl_2$) koji su bili zagrevani, odnosno pripremani prvo na 100, 200 a onda i na 300°C. Upotrebljavani su preparati sa 30% molarne koncentracije $MnCl_2$. Rezultati su bili sledeći:

Tabela 5.

Temperatura prethodnog zagrevanje	100°C	200°C	300°C
Vreme trajanja naknadnog svetljenja	2,72	3,75	0,94 (u secundama),

Fluorescencija kontinuirano prelazi u crvenu od oranž-boje kada povišavamo temperaturu prethodnog zagrevanja i jača je po intenzitetu. U isto vreme, sa prethodnim zagrevanjem od 300°C, naknadno svetljenje je znatno kraće (0,94 sec.).

3. Uticaj načina spravljanja fosfora na njihovu fluorescenciju

U ovom paragrafu biće ukratko reči o onoj fluorescenciji koja se javlja kod preparata dobijenih putem kristalizacije a ne topljenjem, jer se u nekim slučajevima sreće razlika u ponašanju. Očigledno se primećuje da se boja fluorescencije pomera ka oranž (za slučaj $CdBr_2 \times MnCl_2$) u odnosu na onu fluorescenciju koju je dobio Kutzelnig. To je slučaj kod svih preparata bez obzira na koncentraciju mangana. Dalje, vizuelno posmatrano, intenzitet takve oranž-fluorescencije slabiji je od one kod topljenih primeraka.

Sa snižavanjem temperature fluorescencija gubi u svom intenzitetu. Sa povišenjem, pak, temperature fluorescencija ne slabi. Tako, na pr., čak i na 200°C intenzitet fluorescencije nije primetno ništa manji od fluorescencije na sobnoj temperaturi.

Gore navedeni efekti izraziti su samo u slučaju kada se preparati ispituju u toku nekoliko časova posle spravljanja fosfora. Izgleda da dolazi do raspadanja kristalne strukture i vlaženja. No, to će se kasnije ispitivati.

Zaključak

Pronađen je novi način dobijanja luminescentnih materijala sa osnovom kadijumovih halogena aktiviranih manganom, putem kristalizacije iz rastvora komponenata do temperature od 200°C. Tako dobijeni fosfori karakteristični su po svom relativno dugotrajnom naknadnom svetljenju koga nije bilo kada se fosfor dobijao topljenjem komponenata. Po Kutzelnigu, Aljavdinu i Balinu CdJ_2 sa $MnCl_2$ ne daje nikakvo naknadno svetljenje na sobnoj temperaturi (1, 2, 5, 6).

Kod $CdBr_2$ sa $MnCl_2$ javlja se naknadno svetljenje iste boje kao i fluorescencija, a $CdCl_2$ (sa $MnCl_2$ *)) daje posle prekida ekscitacije svetlozelenu fosforescenciju.

Iz dobijenih rezultata može se izvući zaključak da postoji izvestna razlika u svetljenju $CdBr_2$ s jedne i $CdCl_2$ i CdF_2 sa manganom s druge strane. Sledeća tabela daje pregled rezultata:

---

*) i $MnSO_4$

Tabela 6.

Osnovni materijal	Aktivator	Uticaj koncentracije aktivatora na trajanje naknadnog svetljenja	Trajanje naknadnog svetljenja na raznim temperaturama		
			na sobnoj	na $-186^{\circ}C$	na plus $100^{\circ}C$
$CdBr_2$	$MnCl_2$	trajanje raste sa koncentracijom	oko 5 sec.	oko 0,3 sec. (trajanje opada)	vrlo kratko ali intenzivno nak. svetljenja
„	$MnSO_4$	trajanje opada sa koncentracijom	oko 1,25 „	oko 0,3 sec.	„ „ „
$CdCl_2$	$MnCl_2$	koncentracija nema uticaja	„ 0,95 „	fosforescencija duže traje	vrlo kratko svetljenje
„	$MnSO_4$	„	„ 1,33 „	„	„

Zakonitost opadanja svetljenja posle prekida ekscitacije zasada nije proučavana. To, kao i kritički pregled u vezi sa nosiocima luminescencije kod manganom aktiviranih fosfora, biće docnije objavljeno. Pojavljivanje relativno dugog naknadnog svetljenja navodi na pretpostavku da ovde može da dođe do efektivnijeg vezivanja Mn^{2+}-jona sa rešetkom osnovnog materijala.

I ovoga puta koristim priliku da se zahvalim svome profesoru Dr. Sretenu Šljiviću na ukazivanoj pomoći i interesu za rad.

LITERATURA

[1] K u t z e l n i g, *Angewandte Chemie*, 49, 267 (1936).

[2] „ „ „ 50, 366 (1937).

[3] R a n d a l l, Trans. Faraday Soc. 35, 2 (1939).

[4] „ Proced. Roy. Soc. A, 170, 272 (1939).

[5] A l j a v d i n, L e v š i n i F e d o r o v, Dokl. A. N. SSSR. 25, 106 (1939). Izvod uzet iz Chem. Abstr. 34, 3593 (1940).

[6] B a l i n, Dokl. A. N. SSSR, 66, 33 (1949).

[7] Š l e z i n g e r o v a, Ž. E. T. F., 21, 2, 252 (1951); Izvestija A. N. ser. fiz. 15, 730 (1951).

[8] K l e m e n t i drugi, Trudi Inst. fiz. i astr. Estonskoj A. N. SSSR, 4, 36 (1956).

[9] „ Izvestija Eston. A. N., 1, 3 (1956).

ФЛУОРЕСЦЕНЦИЯ И ПОСЛЕСВЕЧЕНИЕ *Cd*-ГАЛОИДНЫХ КРИСТАЛОФОСФОРОВ АКТИВИРОВАННЫХ МАРГАНЦЕМ

ЖИВОТИЈЕ ТОПОЛАЦ, БЕОГРАД

Выводы

Открыт новый способ получения люминисцентных материаллов с основой *Cd*-галоидов, активиранных марганцем, путем кристаллизации вещества из растворов при температуре в 200°C. Фосфоры, полу ченные этим способом, отличаются своим относительно продолжительным послесвечением, каковое не наблюдалось при получении фосфора сплавлением веществ. По Кутцельнигу, Алявдину и Балину CdJ_2 с $MnCl_2$ не дают никакого послесвечения при комнатной температуре (1, 2, 5, 6).

При $CdBr_2$ с $MnCl_2$ возникает послесвечение того же цвета как и флюоресценция, а $CdCl_2$ (с $MnCl_2$) дает после прекращения возбуждения светло-зеленую фосфоресценцию.

На основании полученных результатов можно прийти к выводу, что существует известная разница в свечении $CdBr_2$ с одной, и $CdCl_2$ и CdF_2 с марганцем с другой стороны. Данные об этом приведены в следующей таблице:

Основной материал	Активатор	Влияние концетрации активатора на продолжительность послесвечения	Продолжительность послесвечения при разных температурах		
			комнатная	186°C	100°C
$CdBr_2$	$NnCl_2$	продолжительность увеличения с концентрацией	около 5 секунд	около 0,3 сек. продолжительность сокращается	очень непродолжительное, но интензивное послесвечение
"	$NnSO_4$	продолжительность сокращается с концентрацией	около 1,52 сек.	около 0,3 сек.	" "
$CdCl_2$	$MnCl_2$	Концентрация не влияает	около 0,95 сек.	фосфоресценция долго продолжается	очень не продолжительное свечение
"	$MnSO_4$		около 1,35 сек.	"	"

Закономерность затухания излучения света после прекращения возбуждения до сих пор еще не изучалась. Это затухание а также критический обзор носителей люминисценции у фосфоров, активираных марганцеи, будут опубликованы позже. Появление сравнительно продолжительного послесвечения вызывает предположение, что в данном случае может наступить более эффективное соединение Mn^{2+}-иона с решеткой основного материала.

*Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R.P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie*

РЕШЕЊЕ ПРОБЛЕМА I ОБЈАВЉЕНОГ У „ВЕСНИКУ" VII, 1—2 (1955)

Решење горњег проблема добија се следећим резоновањем. Нека је P скуп од n елемената и нека су $\Gamma_i \subset P$, $i=1, 2, \ldots, k$, потскупови од P који се састоје од по s_i елемената тако да је $\Gamma_i \cap \Gamma_j = v$ (v = празан скуп) за $i \neq j$. Са p означимо број елемената скупа $S = P \setminus \bigcup_{i=1}^{i=k} \Gamma_i$. Тада је $\sum_{i=1}^{k} s_i + p = n$. Посматрајмо оне пермутације елемената из P које имају особину да су елементи скупа Γ_i, $i=1, 2, \ldots, k$, заједно, без обзира на њихов међусобни поредак.

1° Поред горњег услова поставимо још један: нека у свим траженим пермутацијама потскупови Γ_i буду уређени по величини њихових индекса, т. ј.

$$\Gamma_1 < \Gamma_2 < \ldots < \Gamma_k. \tag{1}$$

Начин грађења ових пермутација је следећи. Начинимо све пермутације елемената из S и елемента 1 узетог k пута. У свакој овако добивеној пермутацији ставимо место k јединица скупове $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ узевши у обзир (1). Од сваке овако добивене пермутације можемо начинити $s_1!\, s_2! \ldots s_k!$ нових пермутујући елементе у Γ_i. Број P' свих тражених пермутација биће, према начину грађења,

$$P' = s_1!\, s_2! \ldots s_k! \, \frac{(p+k)!}{k!}. \tag{2}$$

2° Нека је $a+b+c=k$. Посматрајмо оне пермутације елемената скупа S и елемената потскупова Γ_i, $i=1, 2, \ldots, k$ код којих је испуњен услов да су елементи из Γ_i заједно и да су потскупови Γ_λ, $a+1 \leqslant \lambda \leqslant a+b$ између потскупова Γ_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant a$ и Γ_μ, $a+b+1 \leqslant \mu \leqslant k$. Да бисмо начинили овакве пермутације формирајмо поново све пермутације елемената скупа S и елемента 1 узетог k пута (обележимо те пермутације са (A)). Начинимо сада све пермутације елемената Γ_λ, $a+1 \leqslant \lambda \leqslant a+b$ (посматрајући сваки од ових потскупова као један елеменат), затим Γ_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant a$ и Γ_μ, $a+b+1 \leqslant \mu \leqslant k$. Од ових пермутација начинимо $a!\,b!\,c!$ пермутација од по k елемената Γ_λ, Γ_μ, Γ_ν код којих је

$$\Gamma_\nu < \Gamma_\lambda < \Gamma_\mu$$

и још $a!\,b!\,c!$ код којих је

$$\Gamma_\mu < \Gamma_\lambda < \Gamma_\nu,$$

(обележимо овај скуп пермутација од по k елемената са (B)). Ставимо сада место елемента 1 у сваку од пермутација (A) елементе сваке од пермутација (B) и од сваке од овако добијених пермутација начинимо $s_1!\,s_2!\dots s_k!$ нових пермутујући елементе у Γ_ν, Γ_λ, Γ_μ. Број P' ових пермутација је

$$P'' = 2\, s_1!\, s_2! \dots s_k!\, a!\, b!\, c!\, \frac{(p+k)!}{k!}. \tag{3}$$

Решимо сада позициони проблем а). Број P_n^{I} пермутација од n елемената које имају особину да су α елемената потскупа Γ_α (који је део скупа свих елемената) заједно, је према (2) за $s_1 = \alpha$, $s_2 = s_3 \dots =$ $= s_k = 0$, $p = n - \alpha$,

$$P_n^{\mathrm{I}} = \alpha!\ (n-\alpha+1)!.$$

За решење проблема (б) ставимо у (2)

$$s_1 = \alpha,\ s_2 = \beta,\ s_3 = s_4 = \dots = s_k = 0,\ p = n - \alpha - \beta$$

тако да за број P_n^{II} пермутација елемената скупа P за $\Gamma_\alpha \subset P$, $\Gamma_\beta \subset P$, $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \nu$ које имају особину да су елементи из Γ_α испред елемената из Γ_β, добијамо

$$P_n^{\mathrm{II}} = \alpha!\ \beta!\, \frac{(n-\alpha-\beta+2)!}{2}.$$

Број P_n^{III} пермутација елемената скупа P код којих је испуњен услов да су елементи из Γ_α, Γ_β, Γ_γ заједно и Γ_α испред Γ_β испред Γ_γ и $\Gamma_\alpha \subset P$, $\Gamma_\beta \subset P$, $\Gamma_\gamma \subset P$, $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \nu$, $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\gamma = \nu$, $\Gamma_\beta \cup \Gamma_\gamma = \nu$ износи према (2) за $s_1 = \alpha$, $s_2 = \beta$, $s_3 = \gamma$, $s_4 = s_5 \dots s_k = 0$,

$$P_n^{\mathrm{III}} = \alpha!\ \beta!\ \gamma!\, \frac{(n-\alpha-\beta-\gamma+3)!}{3!}$$

Број P_n^{IV} пермутација, код којих је Γ_β између Γ_α и Γ_γ, према (3) за $a=b=c=1$ износи

$$P_n^{\mathrm{IV}}=\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\frac{(n-\alpha-\beta-\gamma+3)!}{3}.$$

За решење „позиционих проблема" код којих се посматрају поједини елементи довољно је ставити $\alpha=\beta=\gamma=1$.

Решење проблема 1) налази се слично као у 2^0 стављајући $s_1=s_2=s_3=1$, $s_m=0$ за $m=4, 5, \dots, k$ тако да имамо да је

$$P_n^{\mathrm{V}}=\frac{n!}{3}$$

број пермутација таквих да је елемент a_p испред елемената a_q и a_r.

Решење проблема 2) лако добивамо ако у (2) ставимо $s_1=\alpha$, $s_2=\beta, \dots, s_k=\theta$, $p=0$, одакле следи

$$p'=\alpha!\,\beta!\dots\theta!$$

Примедба 1. На аналоган начин решава се и Проблем 1 изложен на стр. 29 у књизи: Dr Zlatko P. Mamuzić, *Kombinatorika*, Metematička biblioteka, № 6, изд. „Nolit" 1957, Beograd.

Примедба 2. До горњег поступкз за решење посматраног проблема дошли су независно један од другог: потписани, Д-р Д. Марковић и Д-р З. Мамузић.

Д. Аднађевић. Београд

ERRATA

Страна и ред

8^{10} стоји $4x_1$ треба $4x_1^2$

8 У обрасцима (19) место R_1 и R_2 треба да стоји R

8_3 стоји $\frac{p_1}{x_1}(p_1 + \ldots)$ треба $\frac{p_1}{x_1}(x_1 p_1 + \ldots)$

8 Место једначине која се налази у задњем реду ове стране, треба да стоји:

$$z = b_1 \log \frac{x_2}{x_1} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 + m x_1^2} \pm \frac{b_1}{4} \log \frac{\sqrt{b_1^2 + m x_1^2} - b_1}{\sqrt{b_1^2 + m x_1^2} + b_1} + b_2, \quad m = 4(1 + C),$$

где су b_1 и b_2 две произвољне константе.

65^{14}	стоји	MARKVITCH	треба	MARKOVITCH
119^{8}	„	TOPALAC	„	TOPOLAC
127_4	„	$NnCl_2$	„	$MnCl_2$
127_3	„	$NnSO_4$	„	$MnSO_4$