Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd Yougoslavie

РЕШЕЊЕ ПРОБЛЕМА I ОБЈАВЉЕНОГ У „ВЕСНИКУ" VII, 1—2 (1955)

Решење горњег проблема добија се следећим резоновањем. Нека је P скуп од n елемената и нека су $\Gamma_i \subset P$, $i=1, 2, \ldots, k$, потскупови од P који се састоје од по s_i елемената тако да је $\Gamma_i \cap \Gamma_j = v$ ($v =$ празан скуп) за $i \neq j$. Са p означимо број елемената скупа $S = P \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{i=k} \Gamma_i$. Тада је $\sum\limits_{i=1}^{k} s_i + p = n$. Посматрајмо оне пермутације елемената из P које имају особину да су елементи скупа Γ_i, $i=1, 2, \ldots, k$, заједно, без обзира на њихов међусобни поредак.

1° Поред горњег услова поставимо још један: нека у свим траженим пермутацијама потскупови Γ_i буду уређени по величини њихових индекса, т. ј.

$$\Gamma_1 < \Gamma_2 < \ldots < \Gamma_k. \tag{1}$$

Начин грађења ових пермутација је следећи. Начинимо све пермутације елемената из S и елемента 1 узетог k пута. У свакој овако добивеној пермутацији ставимо место k јединица скупове $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ узевши у обзир (1). Од сваке овако добивене пермутације можемо начинити $s_1!\, s_2! \ldots s_k!$ нових пермутујући елементе у Γ_i. Број P' свих тражених пермутација биће, према начину грађења,

$$P' = s_1!\, s_2! \ldots s_k! \frac{(p+k)!}{k!}. \tag{2}$$

2° Нека је $a+b+c=k$. Посматрајмо оне пермутације елемената скупа S и елемената потскупова Γ_i, $i=1, 2, \ldots, k$ код којих је испуњен услов да су елементи из Γ_i заједно и да су потскупови Γ_λ, $a+1 \leqslant \lambda \leqslant a+b$ између потскупова Γ_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant a$ и Γ_μ, $a+b+1 \leqslant \mu \leqslant k$. Да бисмо начинили овакве пермутације формирајмо поново све пермутације елемената скупа S и елемента 1 узетог k пута (обележимо те пермутације са (A)). Начинимо сада све пермутације елемената Γ_λ, $a+1 \leqslant \lambda \leqslant a+b$ (посматрајући сваки од ових потскупова као један елеменат), затим Γ_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant a$ и Γ_μ, $a+b+1 \leqslant \mu \leqslant k$. Од ових пермутација начинимо $a!\,b!\,c!$ пермутација од по k елемената Γ_λ, Γ_μ, Γ_ν код којих је

$$\Gamma_\nu < \Gamma_\lambda < \Gamma_\mu$$

и још $a!\,b!\,c!$ код којих је

$$\Gamma_\mu < \Gamma_\lambda < \Gamma_\nu,$$

(обележимо овај скуп пермутација од по k елемената са (B)). Ставимо сада место елемента 1 у сваку од пермутација (A) елементе сваке од пермутација (B) и од сваке од овако добијених пермутација начинимо $s_1!\,s_2!\ldots s_k!$ нових пермутујући елементе у Γ_ν, Γ_λ, Γ_μ. Број P' ових пермутација је

$$P'' = 2\, s_1!\, s_2! \ldots s_k!\, a!\, b!\, c! \frac{(p+k)!}{k!}. \tag{3}$$

Решимо сада позициони проблем а). Број P_n^{I} пермутација од n елемената које имају особину да су α елемената потскупа Γ_α (који је део скупа свих елемената) заједно, је према (2) за $s_1 = \alpha$, $s_2 = s_3 \ldots = s_k = 0$, $p = n - \alpha$,

$$P_n^{\mathrm{I}} = \alpha!\ (n - \alpha + 1)!.$$

За решење проблема (б) ставимо у (2)

$$s_1 = \alpha,\ s_2 = \beta,\ s_3 = s_4 = \ldots = s_k = 0,\ p = n - \alpha - \beta$$

тако да за број P_n^{II} пермутација елемената скупа P за $\Gamma_\alpha \subset P$, $\Gamma_\beta \subset P$, $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \nu$ које имају особину да су елементи из Γ_α испред елемената из Γ_β, добијамо

$$P_n^{\mathrm{II}} = \alpha!\ \beta! \frac{(n - \alpha - \beta + 2)!}{2}.$$

Број P_n^{III} пермутација елемената скупа P код којих је испуњен услов да су елементи из Γ_α, Γ_β, Γ_γ заједно и Γ_α испред Γ_β испред Γ_γ и $\Gamma_\alpha \subset P$, $\Gamma_\beta \subset P$, $\Gamma_\gamma \subset P$, $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \nu$, $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\gamma = \nu$, $\Gamma_\beta \cup \Gamma_\gamma = \nu$ износи према (2) за $s_1 = \alpha$, $s_2 = \beta$, $s_3 = \gamma$, $s_4 = s_5 \ldots s_k = 0$,

$$P_n^{\mathrm{III}} = \alpha!\ \beta!\ \gamma! \frac{(n - \alpha - \beta - \gamma + 3)!}{3!}$$

Број P_n^{IV} пермутација, код којих је Γ_β између Γ_α и Γ_γ, према (3) за $a=b=c=1$ износи

$$P_n^{\mathrm{IV}}=\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\frac{(n-\alpha-\beta-\gamma+3)!}{3}.$$

За решење „позиционих проблема" код којих се посматрају поједини елементи довољно је ставити $\alpha=\beta=\gamma=1$.

Решење проблема 1) налази се слично као у 2⁰ стављајући $s_1=s_2=s_3=1$, $s_m=0$ за $m=4, 5, \ldots, k$ тако да имамо да је

$$P_n^{\mathrm{V}}=\frac{n!}{3}$$

број пермутација таквих да је елемент a_p испред елемената a_q и a_r.

Решење проблема 2) лако добивамо ако у (2) ставимо $s_1=\alpha$, $s_2=\beta, \ldots, s_k=\theta$, $p=0$, одакле следи

$$p'=\alpha!\,\beta!\ldots\theta!$$

Примедба 1. На аналоган начин решава се и Проблем 1 изложен на стр. 29 у књизи: Dr Zlatko P. Mamuzić, *Kombinatorika*, Metematička biblioteka, № 6, изд. „Nolit" 1957, Beograd.

Примедба 2. До горњег поступкз за решење посматраног проблема дошли су независно један од другог: потписани, Д-р Д. Марковић и Д-р З. Мамузић.

Д. Аднађевић, Београд