*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1–2 (1957), Beograd
Yougoslavie*

О АПСТРАКТНОМ РАЗМАКУ И УНИФОРМНИМ СТРУКТУРАМА

ЗЛАТКО МАМУЗИЋ, БЕОГРАД

Овај чланак претставља *Увод* из докторске дисертације *„Айстрактни размак и униформне структуре“* коју је аутор одбранио 28 јуна 1955 године на Природно-математичком факултету у Загребу пред комисијом коју су сачињавали професори Универзитета у Загребу: Д-р инг. Данило Блануша, Д-р Ђуро Курепа, Д-р Жељко Марковић, Д-р Владимир Вранић и Д-р Радован Верниђ.

Изузев наслова, Увод тезе објављује се без икаквих измена. Уколико је што додато, унето је као фуснота са ознаком [д. а.] што значи „додао аутор“. Остали делови тезе публиковани су под следећим насловима:

Део I: *Тополошке структуре произведене на скупу E пресликавањем* $f(E\times E)\subset M$ *и структурама на скупу M*, Зборник Машинског факултета, 1954/55, Београд, стр. 1–18.

Део II: *Оператори* $E[M]$, $D[M]$ *и тополошке структуре на скупу E*, Весник Друштва мат. и физ. НРС, VII, 1–2 (1955), Београд, стр. 41–72.

Део III: *О разним тополошким [униформним] структурама произведеним на скупу E пресликавањем* $f(E\times E)\subset M$ *у уређени [било који] скуп M*, Весник Друштва мат. и физ. НРС, VII, 3–4 (1955), Београд, стр. 185–216.

Резултати изложени у приложеном раду уско су повезани са развитком Топологије, односно, — њене посебне гране — Теорије апстрактних простора, за последњих двадесетак година и непосредно се надовезују на извесна постигнућа у овој области Математике из тог интервала времена. Зато ћемо се ограничити да из обимне литературе о развитку Топологије овде истакнемо само оно што је дало повода разматрању проблема у овом раду и што се, углавном, односи на поменуто време*.

Као што је добро познато и често цитирано, према M. Fréchet-у ([1], стр. 214, 61, 164, 170; [2], стр. 772–774; [3], стр. 1–74), класа $(\mathfrak{D})$

* Дефиниције и појмови којима смо се користили у Уводу, или су познати као већ класични, или су објашњени у даљем тексту.

раздаљинских (дистанцијалних или, према терминологији коју је увео F. Hausdorff, [1], стр. 211, — метричких) простора специјалан је случај класе ($\mathfrak{C}$) која, опет, није ништа друго до специјалан случај класа ($\mathfrak{L}$) простора (E, $\mathfrak{T}_E$) чија се топологија $\mathfrak{T}_E$, уз извесне услове, може тако дефинисати да се за основни појам *(terme primitif)* узме појам конвергенције низа $a_0, a_1, a_2, \dots,$ тачака $a_n \in E$. Простор (E, $\mathfrak{T}_E$) је класе ($\mathfrak{C}$) ако постоји функција ρ, једнозначно дефинисана на скупу $E \times E$, са вредностима у скупу свих реалних бројева $\geqslant 0$ тако да су испуњени ови услови:

1° $[\rho(a, b) = 0] \Longleftrightarrow a = b$, *за свако* $a, b \in E$.

2° $\rho(a, b) = \rho(b, a)$, *за свако* a, $b \in E$.

3° *За свако* $a \in E$ *и свако* $F \subset E$, *важи релација*[1]: $a \mathfrak{T}_E F \Longleftrightarrow$ [*постоји низ* $a_n \in F$, $n = 0, 1, 2, \dots$, *са својством* $\rho(a, a_n) \to 0$, *кад* $n \to \infty$].

4° *Ако* $\rho(a, b_n) \to 0$, *кад* $n \to \infty$, *и* $b \neq a$, *не може у исти мах бити* $\rho(b, b_n) \to 0$.

Простор ($E, \mathfrak{T}_E$) је раздаљински (дистанцијалан, метричан или, боље, — ако се већ одлучимо за галицизам — дистанцијабилан, метризабилан) ако је, поред 1°, 2° и 3°, испуњен било који од следећа два услова:

5° (Неједначина троугла). *За свако* $a, b, c \in E$ *је*

$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, c) + \rho(c, b).$$

6° (Услов регуларности). *Постоји функција* $\varphi(x)$ *дефинисана на скупу свих реалних бројева* > 0, *са вредностима у том скупу и својством* $\varphi(x) \to 0$, *кад* $x \to 0$, *тако да за било које три тачке* $a, b, c \in E$ *и свако* $x > 0$ *из* $\rho(a, c) < x$ *и* $\rho(c, b) < x$ *следи* $\rho(a, b) < \varphi(x)$.

Јер, као што је показао E. W. Chittenden (1917 год.; вид. M. Fréchet, [1], стр. 219), услови 5° и 6° су са тополошког гледишта еквивалентни (доказ исте чињенице ефективном конструкцијом раздаљинске функције, дала је A. H. Frink 1937 год.; вид. Appert-Ку-Fan, [1]. стр. 71) а услов 4° је испуњен чим је испуњен услов 5° или услов 6°. Додајмо још да се услов 3° може изразити и у облику:

3° **bis.** *Да буде* $a \mathfrak{T}_E F$, *потребно је и довољно да за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $b \in F$ *тако да је* $\rho(a, b) < \varepsilon$.

Поред опште познате чињенице да раздаљински простори заузимају једно од централних места у савременој анализи, њихов даљи

[1] [д. а]. Означавање $a \mathfrak{T}_E F$ је суштински еквивалентно често коришћеном означавању $a \in \overline{F}$.

развитак кретао се углавном у два правца: 1) увођењем накнадних услова, било у вези са самом раздаљинском функцијом ρ било са структуром самог носиоца простора, тј. скупа E, дефинисане су класе простора специјалније природе од раздаљинских и 2) настојања да се дистанцијални простори карактеришу чисто тополошки, без посредовања раздаљинске функције ρ, довела су до неколико њихових значајних генерализација, о којима ћемо говорити нешто ниже.

Од спецификација дистанцијалних простора поменућемо овде једну од најважнијих тј. векторске ($\mathfrak{V}$) просторе: то су наиме простори који поседују тополошку структуру дистанцијалних простора и носиоци су поља апстрактних вектора (детаљније о томе вид. напр. M. Fréchet, [1], стр. 123–147); простори S. Banach-а су њихов специјални случај. Као пример дистанцијалних простора специјалније природе који се добијају кад се поставе строжи услови о функцији ρ, поменућемо δ-раздаљинске просторе које је недавно дефинисао P. Papić ([1], стр. 26): то су простори који верификују услове 1^0, 3^0 *bis* и један услов аналоган услову регуларности 6^0, кад се у овом место $\rho(c, b)$ стави $\rho(b, c)$ и $\varphi(x) \equiv x$. Међу раздаљинским просторима се δ-раздаљински простори карактеришу тиме што поседују разврстано уређену базу околина (напр. Baire-ов простор).

Пре но што пређемо на разматрање генерализација дистанцијалних простора у више наговештеном смислу, напоменућемо да је Курепа ([9], стр. 1276), већ у једном од својих првих радова, прелазом са $\omega_0 = \omega$ и $\aleph_0$ на било који иницијалан редни број ω_α одн. кардинални број $\aleph_\alpha$, генералисао и одмах применио на дистанцијалне просторе неке основне појмове, као што су: извод, адхеренција, компактност, сепарабилност, конвергенција, и комплетност. У новије време једну генерализацију дистанцијалних простора извршио је Ky-Fan (Appert-Ky-Fan, [1], стр. 69—104): просторе који верификују услове 2^0, 3^0 *bis* и било који од услова 5^0 и 6^0, назива Ky-Fan квази-дистанцијалним. Ови простори поседују многа својства дистанцијалних простора али је ова врста генерализације потпуно различита од оних до којих се дошло решавањем проблема наведеног под 2).

С обзиром на чињеницу да раздаљински простори поседују својства аналогна својствима еуклидских простора — откуда им и значај у анализи — важно је било сазнати критеријуме на основу којих ће се одлучити да ли је неки простор $(E, \mathfrak{T}_E)$ дистанцијалан или није. Најнепосреднији састоји се у томе да се конструише функција ρ која верификује услове $1^0, 2^0, 3^0$ *bis* и било који од услова 5^0 и 6^0: то је тзв. проблем метризације простора. Ако таква функција ρ постоји, каже се да је она сагласна (компатибилна) са топологијом $\mathfrak{T}_E$ и да је $(E, \mathfrak{T}_E)$

дистанцибијалан (метризабилан) простор. Друго је проблем дистанцијације. Овај се наиме састоји у томе да се нађу чисто тополошка својства која карактеришу дистанцијалне просторе без посредног увођења раздаљинске функције ρ. Оба ова проблема била су предмет истраживања широког броја математичара (детаљније о томе вид. напр. Арр-Ку-Fan, loc. cit.) које је довело до низа резултата, данас класичних. Овде ћемо навести само један резултат P. Alexandroff-а и P. Urysohn-а ([1], стр. 1274), математичара московске школе који су се бавили проблемом метризације (нарочито Hausdorff-ових простора)[1]:

Став 1 (Alexandroff и Urysohn). *Да простор* $(E, \mathfrak{T}_E)$ *буде раздаљински, потребно је и довољно да верификује аксиом сепарације* M. Fréchet-а *и да постоји бесконачан низ прекривача простора, монотон и комплетан.*

Притом се прекривачем простора $(E, \mathfrak{T}_E)$ зове свака фамилија π скупова са својством да је свака тачка $a \in E$ садржана у бар једном скупу фамилије π. За низ прекривача π_n, $n=1, 2, \ldots$, простора каже се да је монотон, ако за сваки пар скупова $P, Q \in \pi_{n+1}$ са особином[2] $P \cap Q = v$, постоји $W \in \pi_n$ тако да је $W \supset P \cup Q$. Низ прекривача π_n простора $(E, \mathfrak{T}_E)$ је комплетан, ако је испуњен услов: да буде $a \mathfrak{T}_E F$, $a \in E$, $F \subset E$, потребно је и довољно да за свако n постоји скуп $V \in \pi_n$ у ком су садржане: тачка $a \in E$ и бар једна тачка $b \in F$.

Тополошку карактеризацију простора и класе $(\mathfrak{E})$ и класе $(\mathfrak{D})$ M. Fréchet-а, сасвим друге природе, дао је Курепа ([4], стр. 59—65, [5], стр. 124—132). За разлику од метода који су напр. применили P. Alexandroff и P. Urysohn, Курепин поступак, поред тога што је такође дао једно решење проблема дистанцијације, пружио је могућност генерализације поменутих класа у два правца: један је водио дефиницији класа $(\mathfrak{E}_\alpha)$ и $(\mathfrak{D}_\alpha)$, а други униформним просторима у смислу дефиниције A. Weil-а, [1]. Услови које је Курепа поставио у раду [4], гласе:

а) *Постоји фамилија скупова* $W_0, W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots, (n < \omega_0)$, *тако да је* $W_n \supseteq W_{n+1}$ *за свако* n *и да се пресек свих скупова те фамилије своди на само једну тачку* t.

---

[1] [д. а.] О решењима проблема дистанцијације тополошких простора, која се данас практично сматрају дефинитивним (Ю. М. Смирнов, J. Nagata, R. H. Bing), видети детаљније например у књизи: J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van. Nostrand Company, Inc. Toronto—New York—London, 1955, Стр. 124—130.

[2] [д. а.]. v = празан скуп.

б) *Постоји поступак којим се сваком пару тачака a, b простора* $(E, \mathfrak{T}_E)$ *придељује један одређени елемент уније* $W_0 = \bigcup\limits_{n<\omega_0} W_n$ *тако да су испуњени ови услови:*

1' $[(a, b) = t] \leftrightarrows a = b$;

2' $(a, b) = (b, a)$;

3_0 *да* $a \in E$ *буде тачка нагомилавања скупа* $F \subset E$, *потребно је и довољно да за свако* $n < \omega_0$ *постоји* $a_n \in F$, $a_n \neq a$, *са својством* $(a, a_n) \in W_n$;

$4_0'$ *bis: ако је* $a \in E$ *било која тачка и* $n < \omega_0$ *било који редни број и ако се са* $S(a, W_n)$ *означи скуп свих тачака* $b \in E$ *са својством* $(a, b) \in W_n$, *постоје два редна броја* $\varphi(n), \psi(n) < \omega_0$ *тако да је:*

$$[b \in S(a, W_{\varphi(n)})] \rightarrow S(b, W_{\psi(n)}) \subseteq S(a, W_n);$$

H_0: *за било које две тачке* $a, b \in E$, $a \neq b$, *постоји* $n < \omega_0$ *тако да је*

$$S(a, W_n) \cap S(b, W_n) = v.$$

Полазећи од наведених услова, Курепа (loc. cit.) је доказао ова два става:

Став 2 (Курепа). *Да простор* $(E, \mathfrak{T}_E)$ *буде простор класе* $(\mathfrak{E}_0) \equiv (\mathfrak{E})$, *потребно је и довољно да буду испуњени услови* a), 1', 2', 3_0 и H_0.

Став 3 (Курепа). *Да простор* $(E, \mathfrak{T}_E)$ *буде простор класе* $(\mathfrak{D}_0) \equiv (\mathfrak{D})$, *потребно је и довољно да буду испуњени услови* a), 1', 2', 3_0 и $4_0'$ *bis*.

Очигледно, ради довођења у везу са својим операторима $\mathfrak{E}[M]$ и $\mathfrak{D}[M]$, Курепа је у раду [5] уз услов *a*) поставио и овај: да тачка *t* буде тачка нагомилавања скупа $F \subset W_0$, потребно је и довољно да за свако $n < \omega_0$ постоји тачка $t_n \in F$, $t_n \neq t$, са својством $t_n \in W_n$. С обзиром на чињеницу да се овим условом, уствари, дефинише топологија елемента $t \in W_0$, а ова у нашим разматрањима, специјално оним у другом и трећем делу тезе игра значајну улогу, ми смо посебно истицали баш тај услов, тако да ће се на више цитиране ставове Курепе наићи у[1] § 2.4 нешто друкчије стилизоване. Додаћемо још да је, место услова $4_0'$ *bis*, Курепа поставио у раду [5] један услов аналоган услову регуларности 6° и у раду [4] показао да је тај услов увек испуњен чим је испуњен услов $4_0'$ *bis*.

Једна сасвим природна и непосредна генерализација и класе $(\mathfrak{E}_0)$ и класе $(\mathfrak{D}_0)$ добија се кад се поступак и услови Курепе тако

[1] [д. а.]. § 2.4 — значи: други део тезе, четврти одељак. Аналогно важи и за остале цитате, уколико се односе на тезу аутора.

уопште да се са ω_0 пређе на било који иницијалан редни број ω_α. На овај начин је Курепа и дефинисао класе $(\mathfrak{E}_\alpha)$ и $(\mathfrak{D}_\alpha)$ простора који поседују својства аналогна својствима оних из класа $(\mathfrak{E}_0)$ и $(\mathfrak{D}_0)$ M. Fréchet-a. Али је његов поступак значајан и по томе што готово непосредно води генерализацији дистанцијалних простора у правцу униформних простора, које је три године касније A. Weil (loc. cit.) дефинисао на други начин. Као што смо показали у § 2.3, једноставним прелазом на инверзно пресликавање f^{-1} скупа W_0 на скуп $E \times E$ (ако са f означимо пресликавање о ком је реч у услову *b*)), Курепини услови да простор $(E, \mathfrak{T}_E)$ буде класе $(\mathfrak{D}_\alpha)$ одређују униформну структуру на скупу E, сагласну (компатибилну) са топологијом $\mathfrak{T}_E$ простора $(E, \mathfrak{T}_E)$. Но претпостављена монотоност фамилије скупова W_n у услову *a*) има за последицу да је фундаменталан систем близина кореспондентне униформне структуре добро уређен с обзиром на релацију инклузије $\supset$, типа ω_α. Уопштењем услова *a*) у смислу да се семимултипликативност фамилије скупова W_λ, $\lambda \in \{\lambda\}$, сматра уопштењем својства монотоности (јер, свака фамилија скупова, тотално уређена с обзиром на релацију инклузије $\supset$, семимултипликативна је), у § 2.3 показали смо да Курепин поступак води карактеризацији униформних простора A. Weil-a, чију ћемо дифиницију сада навести.

A. Weil је у Топологију увео униформне просторе решавајући, уствари, такође проблем дистанцијације, али сасвим другим путем од онога којим су ишли претходни аутори. Инспирацију за то дала су му својства тополошких група, аналогна својствима дистанцијалних простора (о тополошким групама детаљније вид. напр. Курепа [2], стр. 328 и N. Bourbaki [4]; о њиховом уопштењу, вид. Appert-Ky-Fan, [1], стр. 117). Према A. Weil-у каже се да је на скупу E дефинисан униформан систем околина ако је сваком индексу α неког непразног скупа $\{\alpha\}$ индекса придељен скуп $V_\alpha(p)$, $p \in E$, који се зове околином тачке p индекса α, — тако да су испуњени ови услови*.

(U_{I}) *За свако* $p \in E$ *и сваки индекс* α *је* $p \in V_\alpha(p)$; *за сваки пар тачака* $p, q \in E$, $p \neq q$, *постоји индекс* α *тако да је* $p \notin V_\alpha(q)$.

(U_{II}) *За свако* $p \in E$ *и сваки пар индекса* α, β *постоји индекс* γ *тако да је*

$$V_\gamma(p) \subset V_\alpha(p) \cap V_\beta(p).$$

(U_{III}) *За сваки индекс* α *постоји индекс* β *тако да из* $p \in V_\beta(r)$ *и* $q \in V_\beta(r)$ *следи* $q \in V_\alpha(p)$.

---

* Те смо услове означили исто онако као и Weil; у § 1.7, истим ознакама означени су услови, различити од горњих, које је поставио N. Bourbaki.

Топологија дефинисана на скупу E системом околина који верификује неведене услове, идентична је тада топологији дефинисаној на истом скупу фамилијом делова — *шзв. ошворених скупова* — од E која испуњава ове услове:

(O_{I}) *Унија ошворених скупова је ошворен скуп.*

(O_{II}) *Пресек коначног броја ошворених скупова је ошворен скуп.*

(O_{III}) *Скуп* $E \setminus \{p\}$, $p \in E$, *је ошворен скуп.*

Притом се претпоставља да су околине $V_\alpha(p)$ тако дефинисане да свака од њих садржи неки отворен скуп у ком је садржана тачка $p \in E$. Додаћемо још да су услови (U_{I}) одн. (O_{III}) еквивалентни Fréchet-овом аксиому сепарације T_1.

Стављајући сада $V_\alpha = \{(p, q) \mid (p, q) \in E \times E,\ q \in V_\alpha(p)\}$, једноставним прелазом на делове скупа $E \times E$, вишенаведена два система аксиома могу се сменити следећим, њима еквивалентним:

(U'_{I}) $\bigcap\limits_{\alpha} V_\alpha = \Delta$, ($\Delta$ = дијагонала производа $E \times E$).

(U'_{II}) *За сваки пар индекса* α, β *посшоји индекс* γ *шако да је* $V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$.

(U'_{III}) *За сваки индекс* α *посшоји индекс* β *шако да је* $V_\beta \circ V_\beta^{-1} \subset V_\alpha$, *где је са* $\circ$ *означен ойерашор слагања делова од* $E \times E$.

Сваки део скупа $E \times E$ који садржи неки скуп V_α, назива Weil близином дијагонале Δ и фамилија свих близина дијагонале Δ не мења се ако се дата фамилија V_α, $\alpha \in \{\alpha\}$, смени неком фамилијом њој инклузивно еквивалентном. Каже се тада да оне дефинишу на E исту униформну структуру и сваки простор који се може дефинисати помоћу такве фамилије скупова V_α зове се *униформним йросшором.*

Као што је то одмах показао A. Weil, сваки простор класе ($\mathfrak{D}$) је униформан простор чији се систем близина V_α (α = реалан број > 0) може сменити инклузивно еквивалентном фамилијом која је пребројива: дистанцијални простори су специјалан случај униформних. У исти мах показао је да свака тополошка група поседује униформну структуру и доказао два става које је могућно стилизовати у облику овог:

Став 4 (Weil). *Да йросшор* $(E, \mathfrak{T}_E)$ *буде униформан, йошребно је и довољно да буде комйлешно регуларан.*

У време појаве Weil-ове књижице о униформним просторима (1938 год.), H. Cartan ([1], стр. 595 и 777) је објавио своју теорију о филтрима и у садашњој терминологији каже се да је фамилија близина, како их је дефинисао W e i l, филтар на скупу $E \times E$ који верификује услове (U'_{I}) и (U'_{III}). Стриктном применом теорије филтара, N. B o u r b a k i је униформне просторе дефинисао (вид. § 1.7) и испитивао нешто друкчије од W e i l-а. W e i l-ови униформни простори су сепарирани униформни простори у смислу дефиниције N. B o u r b a k i-a. Ми смо се у овом раду служили терминологијом и дефиницијама N. B o u r b a k i-a.

Униформним просторима водио је још један пут којим је Курепа пошао 1934 године и то различит од оног којим су тополошким карактерисане и истовремено генералисане класе ($\mathfrak{E}$) и ($\mathfrak{D}$) F r é c h e t-a. Наиме, у својој дефиницији псеудо-дистанцијалних простора Курепа ([7], стр. 1563) је уопштио раздаљинску функцију ρ: сваком пару $a, b \in E$ придељује се једнозначно одређен елемент неког тотално уређеног скупа (тзв. скале), тј. псеудо-размак тачака a и b не мора бити реалан број (вид. § 3.1). Ставивши себи у задатак да резултате A. W e i l-a добије генерализацијом раздаљинске функције а користећи се, уствари, Курепиним појмом апстрактног размака, M. F r é c h e t ([5], стр, 337; [4], стр. 121—131) је у својој анализи простора под називом *„espaces écartisés"* дошао до закључка да решењу постављеног задатка воде баш псеудо-дистанцијални простори како их је дефинисао Курепа. Приметићемо овде још да се генерализацијом раздаљинске функције бавио и K. M e n g e r ([1], стр. 142—145) али су његова разматрања у вези са другим проблемима и његове дефиниције нису еквивалентне Курепиним (например, услов регуларности M e n g e r није ни уводио већ се ограничио на неке примедбе у вези са неједначином троугла).

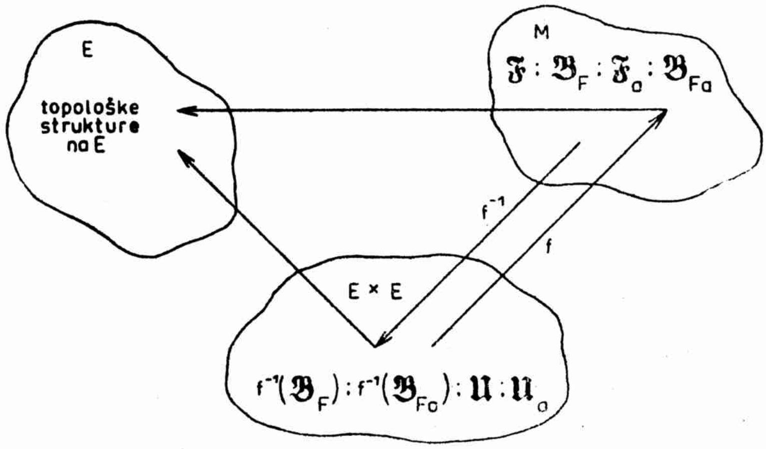
Да су псеудо-дистанцијални простори униформни простори у смислу дефиниције A. W e i l-a, M. F r é c h e t је доказао индиректно: показао је наиме да су то комплетно регуларни простори и зато униформни, према ставу 4. Но, псеудо-дистанцијални простори су класе ($\mathfrak{D}_\alpha$) и поседују дакле униформну структуру чији је фундаменталан систем близина тотално уређен (штавише, добро уређен) с обзиром на релацију инклузије $\supset$. Према томе, сепариране униформне просторе још увек није било могућно карактерисати класом псеудо-дистанцијалних простора. То се успело постићи кад се у генерализацији раздаљинске функције пошло и даље тако да је, место ње, размак двеју тачака простора био дефинисан елементом парцијално уређеног скупа. Такво уопштење извели су истовремено J. C o l m e z [1], [2] и A. A p p e r t [3] (вид. § 3.3 и § 3.5). Додаћемо овде да је A. A p p e r t, [2], генералисао и униформне просторе A. W e i l-a увођењем једног ширег броја аксиома и да је успоставио везу између тако генералисаних униформних простора и простора уопштеног размака из његовог рада [3], (вид. § 3.4 и § 3.5).

Поред већ поменутих аутора који су се бавили проблематиком инаугурисаном од стране Курепе 1934 године увођењем псеудо-дистанцијалних простора и поново покренутом од стране Fréchet-а 1945 године (откуда им још и назив „Kurepa–Fréchet-ови простори"), навешћемо овде још R. Doss-а [1], [2] и П. Папића [1], [2], [3]. R. Doss је, између осталог, доказао да је сваки псеудо-дистанцијалан простор комплетно нормалан да се услов регуларности за недистанцијалне псеудо-дистанцијалне просторе може поједноставити (вид. § 3.1, фуснота) и да такви простори поседују базу околина које су у исти мах и отворене и затворене. П. Папић је дефинисао једну класу (R) простора за које је показао да поседују разврстано уређену базу околина које су и отворене и затворене. То су комплетно нормални простори које Папић такође назива псеудо-дистанцијалним, иако су општији од Курепа — Fréchet-ових. И прве и друге, Папић је испитивао стриктном применом теорије гранастих скупова („*ensembles ramifiés*"; вид. Курепа, [6]) и на тај начин дошао до низа важних резултата који, у исти мах, могу послужити и као једна од значајних потврда корисног примењивања поменуте Курепине теорије.

Поред већ наведених двеју, Курепа ([3], стр. 1049; [1]) је извршио још једну генерализацију простора класа ($\mathfrak{E}$) и ($\mathfrak{D}$) M. Fréchet-а дефиницијом оператора $\mathfrak{E}[M]$ и $\mathfrak{D}[M]$ (вид. § 2.1 и § 2.3). Класе простора дефинисане овим операторима врло су опште и на идеју — која је и довела до резултата изложених у овом раду — дошли смо, уствари, проучавајући операторе $\mathfrak{E}[M]$ и $\mathfrak{D}[M]$. О томе ћемо сада такође рећи неколико речи.

Као што се из претходног да лако закључити, разни покушаји генерализације класа ($\mathfrak{E}$) и ($\mathfrak{D}$) M. Fréchet-а довели су до три јасно оцртане класе простора који се могу дефинисати помоћу: или тотално (парцијално) уређеног размака, или униформних структура, или операторима $\mathfrak{E}[M]$ и $\mathfrak{D}[M]$. У првом одн. трећем случају, тополошпе структуре на скупу E дефинишу се пресликавањем f скупа $E \times E$ у тотално (парцијално) уређен скуп одн. у било који простор M. У другом случају тополошке структуре на скупу E дефинишу се одређеним структурама на скупу $E \times E$ (например, филтрима на скупу уз накнадне услове). Међутим, између тих класа простора постоји извесна веза коју су разни аутори успостављали на различите начине. Природно је, дакле, било анализирати опште питање: ***ако је E неки йун скуй, йосйоји ли могућносй да се йресликавањем f скуйа E × E у йун скуй M йако сйарйује да се, йомоћу инверзног йресликавања f^{-1}, на скуйу***

$E \times E$ дефинишу структуре које ће на скупу E одређивати тополошке структуре идентичне оним које се добивају пресликавањем f? — Јасно је да се подесним избором функције f и структурама на скупу M, овим начином на скупу E могу дефинисати различите тополошке структуре. Први део тезе посвећен је управо разматрању и анализи горњег питања, па су у § 1.1 и § 1.2 изложена два различита поступка увођења тополошких структура у скуп E, тако да се на постављено питање може позитивно одговорити и то под доста општим условима. Идеја коју притом следимо једноставна је и може се укратко изожити у облику ове скице:



Значење ознака у горњој скици објашњено је у § 1.1 и § 1.2. У § 1.3 испитивани су услови под којима ће на овај начин дефинисани простори $(E, \mathfrak{T}_E)$ верификовати аксиом дистрибутивности D и аксиом α. У §§ 1.4, 1.5 и 1.6, анализирани су услови под којима ће бити испуњени аксиоми сепарације T_1, T_2 и T_3 (тј. аксиоми сепарације Fréchet-a, Hausdorff-a и Vietoris-a). У § 1.7 је дата једна нова карактеризација униформизабилних простора полазећи од класе простора дефинисаних у § 1.1, уз неке накнадне услове о функцији f. Одмах ћемо овде додати да је у § 3.4 одн. § 3.6 показано како се класом простора из § 1.1 могу карактерисати сви униформни простори у смислу дефиниције А. Appert-a, односно, како се у једној подкласи класе простора дефинисаних у § 1.2, могу добити све униформне структуре које је посматрао Т. Inagaki ([1], ст. 179—202). У § 1.8 постављен је један од довољних услова да простори класе $E(M_F)$ (вид. § 1.3) буду комплетно нормални. Појмови одн. ставови прецизирани одн. доказани у првом делу, мање-више су перманентно коришћени у другом и трећем делу тезе.

У другом делу разматрани су проблеми у вези са операторима $\mathfrak{E}[M]$ и $\mathfrak{D}[M]$. Ослањајући се на неке резултате које сам изложио у раду [1], у § 2.1 изведено је неколико ставова, врло корисних и често примењиваних у осталим параграфима, како овог тако и трећег дела. У § 2.2 разматрани су простори означени са $E(M_{\mathbf{V}_{\omega_\alpha}})$, а у § 2.3 анализирани су простори $\mathfrak{D}[M]$. Ту су дефинисане класе простора $\mathfrak{E}[(\mathbf{V})_{t\alpha}]$ и $\mathfrak{D}[(\mathbf{V})_{t\alpha}]$ одн. $\mathfrak{D}[(\mathbf{V})t_s]$ и показано да је сваки простор класе $\mathfrak{D}[(\mathbf{V})_{t\alpha}]$ униформан простор са фундаменталним системом близина униформне структуре који је добро уређен с обзиром на релацију инклузије $\supset$, типа ω_α и да је класа сепарираних униформних простора тополошки идентична класи простора $\mathfrak{D}[(\mathbf{V})_{ts}]$. § 2.4 посвећен је просторима класе $(\mathfrak{E}_\alpha)$ одн. $(\mathfrak{D}_\alpha)$ а у § 2.5 разматрани су услови под којима ће неки простор $(E, \mathfrak{T}_E)$ бити класе $\mathfrak{E}[(E, \mathfrak{T}_E)]$ одн. $\mathfrak{D}[(E, \mathfrak{T}_E)]$, што је одмах примењено на просторе $J(\omega_\alpha)$ и показано да је $J(\omega_\alpha) \in \mathfrak{D}[J(\omega_\alpha)] \cap O^{1'}$ за сваки иницијалан редни број ω_α, где је $O^{1'}$ услов континуитета Курепе (вид. § 2.1). На тај начин решен је и један проблем шири од оног који је Курепа поставио у раду [3] у вези са простором $J(\omega_1) \equiv (\Omega)$, ($(\Omega) =$ простор свих пребројивих редних бројева). У § 2.6 разматрани су T-простори при чему је, између осталог, доказано да су простори $(T, \mathfrak{T}_T)$ регуларни са базом околина које су и отворене и затворене и да се специјало, простори означени са $(T_{\omega_\alpha}, \mathfrak{T}_{T_{\omega_\alpha}})$ налазе у класи $\mathfrak{D}[M]$ где је $M = J(\omega_\alpha)$. R-простори испитивани су у § 2.7, а у § 2.8 поново су анализирани простори $(T, \mathfrak{T}_T)$ у вези са условом континуитета $O^{1'}$ и при томе је између осталог, дато једно решење Курепиног проблема[1] 4.1 из његовог рада [1]. Приметићемо овде да се у новије време све више обелодањује значајна улога услова $O^{1'}$, као што је показао Папић напр. у вези са R-просторима (вид. § 2.8).

Оно што је урађено у §§ 3.4 и 3.6, већ смо поменули. У осталим праграфима трећег дела анализиране су тополошке структуре произведене на скупу E пресликавањем f производа $E \times E$ у тотално или парцијално уређен скуп. § 3.1 посвећен су Курепиним псеудодистанцијалним просторима, у § 3.2 разматрани су Fréchet-ови *„espaces localement écartisés"* и *„espaces écartisés"*, а § 3.3 одн. 3.5 посвећен је просторима парцијално уређеног размака I и II типа J. Colmez-a, одн. уопштеног размака у смислу дефиниције A. Appert-a. Применом претходних резузтата показано је да су све то специјални случајеви простора дефинисаних и анализираних у прва два дела, при чему скуп M поседује урећајну структуру, тоталну или парцијалну и да при

[1] [д. а.]. О томе проблему и његовом решењу вид. такође: Z. Mamuzić, Sur la solution d'un problème concernant eT-espaces, Glasnik mat. fiz. i astr. Serija II, T. 11, Zagreb, № 2, str. 95—103.

томе једну од значајних улога и овде игра Курепин услов O^3. Прелазом на инверзно пресликавање f^{-1}, показана је на једноставан начин њихова уска веза са униформним просторима.

Завршавајући овај укратко скицирани увод, најсрдачније се захваљујем Д-р Ђури Курепи, свеучилишном професору у Загребу; његово стално интересовање, савети и морална подршка, много су ми помогли у мом раду, како за време мог боравка у Загребу у летњем семестру школске 1953/54 године, тако и после тога. Посебно му се захваљујем за труд и време које није жалио да ми се у свако доба стави на расположење ради дискусије о горњој проблематици, кадгод је то било потребно. Најсрдачнију захвалност дугујем исто тако Д-р Павлу Папићу и Д-р Виктору Седмаку, свеучилишним асистентима у Загребу с којима сам у плодним и често дугим дискусијама проматрао многе проблеме из области топологије, специјално, теорије апстрактних простора.

ЛИТЕРАТУРА

P. Alexandroff и Urysohn

[1] *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe* (*L*) *soit une classe* (*D*) Comptes rendus, 177, Paris, 1923.

A. Appert

[2] *Espaces uniformes généralisés*, Comptes rendus, 222, Paris, 1946.

[3] *Écart partiellement ordonné et uniformité*, Comptes rendus, 224, Paris, 1947.

A. Appert-Ky-Fan

[1] *Espaces topologiques intermédiaires*, Paris, 1951.

N Bourbaki

[4] *Topologie générale*, Livre III, Chap. III, Paris, 1951.

H. Cartan

[1] *Théorie des filtres*, Comptes rendus 205, Paris, 1937.

J. Colmez

[1] *Sur divers problèmes concernant les espaces topologiques. Les espaces à écarts. — Problème de Wiener sur les transformations continues*, Portugaliae Mathematica, Vol. 6, Fasc. 3–4, 1947.

Espaces à écart généralisé régulier, Comptes rendus, 224, Paris, 1947.

R. Doss

[1] *Sur la condition de régularité pour l'écart abstrait*, Comples rendus, 223, Paris, 1946

[2] *Sur les espaces où la topologie peut être définie à l'aide d'un écart abstrait symétrique et régulier*, Comptes rendus, 223, Paris, 1946.

M. Fréchet

[1] *Les espaces abstraits*, Paris, 1928.

[2] *La notion d'écart et le Calcul fonctionnel*, Comptes rendus, 140, Paris, 1905.

[3] *Sur quelques points du Calcul fonctionnel*, Thèse, Paris, 1906; или, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XXII, p. 1—74, 1906.

[4] *De l'écart numérique à l'écart abstrait*, Portugaliae Mathematica, Vol. V, 1946.

[5] *La notion d'uniformité et les écarts abstraits*, Comptes rendus, 221, Paris, 1945.

F. Hausdorff

[1] *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

T. Inagaki

[1] *Sur les espaces à structure uniforme*, Journ. of the Fak. of Scienc. Hokkaido Imperial University, Ser. 1, Vol. X, № 4, Sapporo, Japan.

C. Kuratowski

[1] *Sur l'apération $\bar{A}$ de l'Analysis situs*, Fund. Math. 3, 1922.

Dj. Kurepa

[1] *Sur l'écart abstrait* (u rukopisu[1]).

[2] *Teorija skupova*, 22+444, Zagreb, 1951.

[3] *Le problème de Suslin et les espaces abstraits*, Comptes rendus, 203, Paris, 1936.

[4] *Un critère de distanciabilité*, Mathematica, Vol. XIII, p. 59—65, Cluj, 1937.

[5] *Sur les classes (E) et (D)*, Publ. Math. Belgrade, T. V. p. 124—132, 1936.

[6] *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Thèse, p. 1—138, Paris, 1935; или, Publ. Math. Belgrade, T. IV, p. 1—138, 1935.

[7] *Tableaux ramifiés d'ensembes. Espaces pseudodistanciés*. Comptes rendus, 198, Paris, 134.

[9] *Sur les espaces distanciés séparables généraux*, Comptes rendus, 197, Paris 1933.

Z. Mamuzić

[1] *Sur la topologie transitive d'une classe d'espaces (V)*, Bull. Soc. Math. phys. RP de Serbie, VI, 1—2 (1954), Beograd.

K. Menger

[1] *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann. 100, стр. 75—163. (1928).

---

[1] [д. а.] Вид. Glasnik mat., fiz. i astr. Serija II, T. 11, Zagreb, № 2 (1956), strana 105—132.