Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd Yougoslavie

ОДРЕЂИВАЊЕ ТРАГОВА РАВНИ У ЧЕТВОРОДИМЕНЗИОНОМ ПРОСТОРУ И ТРАГОВА ($n-2$)-ДИМЕНЗИОНОГ ПРОСТОРА У n-ДИМЕНЗИОНОМ ПРОСТОРУ

ЗАГОРКА ШНАЈДЕР, БЕОГРАД

Увод

Познато је више начина претстављања објеката садржаних у четвородимензионом простору помоћу њихових пројекција на раван.

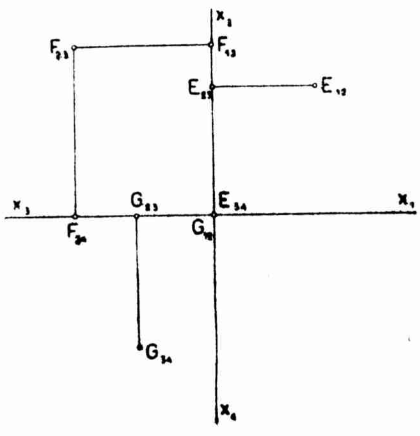
Нека су x_1, x_2, x_3 и x_4 осе које пролазе кроз исту тачку 0, узајамно су управне и одређују еуклидски четвородимензиони простор. Положај неког објекта је у овом простору потпуно одређен помоћу његових управних пројекција на три равни које не припадају истом тродимензионом потпростору. Управне пројекције објекта четвородимензионог простора могу се одредити на три осне равни $x_1 x_2$, $x_2 x_3$ и $x_3 x_4$ (Shoute, Mehrdim. Geom., 1905) или $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$ (J. Maurin, Géom. descr. à q. dim., 1948). У првом начину пројектовања, обртањем равни $x_1 x_2$ око осе x_2 док не падне у раван $x_2 x_3$, затим равни $x_3 x_4$ око осе x_3 док ова не падне у исту раван, доводе се ове три равни у једну исту раван, раван цртања. Пројекцијске равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$ такође се могу довести у једну исту раван цртања, раван $x_1 x_2$, обртањем равни $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$ око осе x_1.

Постоје и други начини пројектовања објеката четвородимензионог простора.

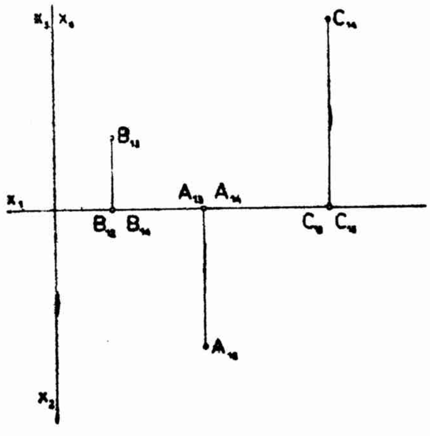
У овом чланку биће изложен извесан начин решавања једног од основних задатака нацртне геометрије у четвородимензионом и вишедимензионим просторима: одређивање трагова ($n-2$)-димензионог простора који је садржан у n-димензионом простору. У четвородимензионом простору користи се за решавање задатка Maurin-ов начин пројектовања који се лако проширује и за пројектовање објеката у вишедимензионим просторима. У четвородимензионом простору треба одредити трагове равни дате пројекцијама ма којих њених трију тачака. У четвородимензионом простору раван има са сваком пројекцијском равни по једну заједничку тачку која се, аналого нацртној геометрији тродимензионог простора, може назвати трагом равни. Показаћемо како се у решавању могу користити перспективно афини положај пројекција тачака равни на пројекцијске равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$, односно простори поклапања. Овакав начин решавања омогућава уопштење поступка и може се користити и за решавање аналогог задатка у вишедимензионим просторима. Тако је решен задатак: одредити трагове тродимензионог простора који је садржан у петодимензионом простору, где се под траговима тродимензионог простора подразумевају заједничке тачке тродимензионог простора и пројекцијских равни ($x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_1 x_4$ и $x_1 x_5$). Најзад, дат је поступак за одређивање трагова $(n-2)$-димензионог простора који је садржан у n-димензионом простору. При том се за трагове $(n-2)$-димензионог простора сматрају заједничке тачке $(n-2)$-димензионог простора са пројекцијским равнима ($x_1 x_2$, $x_1 x_3$, ..., $x_1 x_{n-1}$, $x_1 x_n$).

Одређивање трагова равни у четвородимензионом простору

Ма каква раван четвородимензионог простора може се преставити пројекцијама својих трију тачака. То могу бити ма које три тачке равни које не припадају истој правој или баш оне три тачке које



Сл. 1



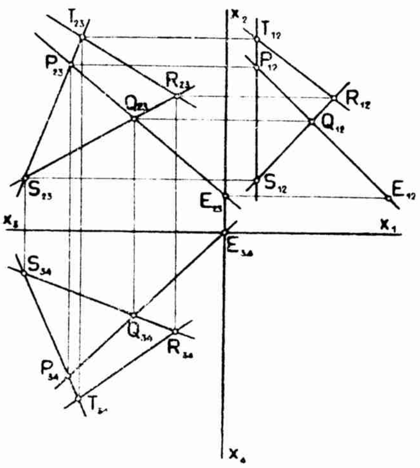
Сл. 2

дата раван има заједничке, по једну са сваком од пројекцијских равни, тј. трагови равни.

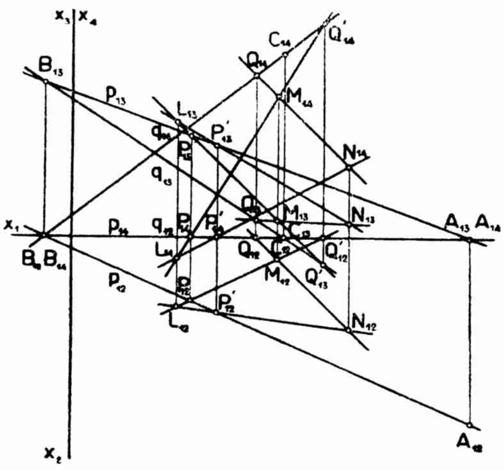
Пројекцију тачке на пројекцијској равни обележаваћемо истим великим словом којим је обележена тачка у простору и индексима који одговарају индексима оса којима је пројекцијска раван одређена. Напр., пројекцију тачке M на равни $x_1 x_3$ обележићемо M_{13}. Истим ознакама, само малим словима, обележаваћемо пројекције правих. Напр., m_{34} је пројекција праве m на равни $x_3 x_4$.

Трагови равни α, за први начин пројектовања на равни $x_1 x_2$, $x_2 x_3$ и $x_3 x_4$, нека су тачке E, F и G (сл. 1), а за други начин пројектовања на равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$, нека су трагови равни β тачке A, B и C (сл. 2).

Када је раван дата пројекцијама ма којих трију њених тачака може се захтевати да се одреде трагови равни, аналого задатку нацртне геометрије тродимензионог простора (где су трагови равни праве). Такав задатак решен је, за оба поменута начина пројектовања, на следећи начин.



Сл. 3

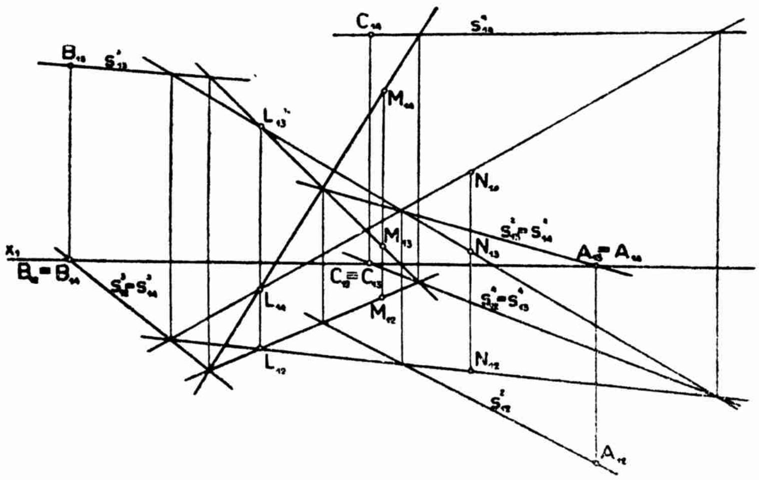


Сл. 4

На сл. 3 дате су пројекције ма којих трију тачака R, S и T неке равни μ на равни пројекција $x_1 x_2$, $x_2 x_3$ и $x_3 x_4$. Да би се одредио траг E равни μ у равни $x_1 x_2$, треба одредити ону тачку E равни μ која је у равни $x_1 x_2$, тј. тачку чија се пројекција E_{34} поклапа са тачком O, пресеком оса. Нека је $P_{34} Q_{34}$ пројекција произвољне праве PQ равни RST која пролази кроз O (тачке P и Q могу бити на странама ST и RS троугла RST). Тачка праве $P_{34} Q_{34}$ која се поклапа са O је E_{34}. Пошто се одреде остале пројекције $P_{23} Q_{23}$ и $P_{12} Q_{12}$ праве PQ добијају се на њима остале пројекције E_{23} и E_{12} тачке E. Слично се могу одредити пројекције трагова F и G. (На овај начин решен је задатак у Shoute, M. G.).

Трагови равни могу се одредити и на следећи начин. Одреди се прво права p по којој дата раван v сече један од тродимензионих потпростора, напр. $x_1 x_2 x_3$, а затим пресечна права q са још једним од осталих потпространа, напр. $x_1 x_3 x_4$. Продори правих p и q кроз пројекцијске равни јесу трагови равни v, јер су праве p и q праве у равни v.

Овако је решен задатак у сл. 4 где су дате пројекције равни v пројекцијама њених тачака L, M и N на равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$. (задатак се може на исти начин решити и помоћу првог начина пројектовања). Права p, пресек дате равни v и потпростора $x_1 x_2 x_3$, одређена је помоћу тачака P и P' чије се пројекције P_{14} и P'_{14} налазе на оси x_1, а одређене су у пресеку правих $L_{14} M_{14}$ и $L_{14} N_{14}$ са осом x_1. Права q, пресек равни v са потпростором $x_1 x_3 x_4$, одређена је помоћу тачака Q и Q' чије су пројекције Q_{12} и Q'_{12} пресечне тачке осе x_1 са правим $N_{12} M_{12}$ и $L_{12} M_{12}$. Продорне тачке A и B праве p кроз равни $x_1 x_2$ и $x_1 x_3$, и продорне тачке B и C праве q кроз равни $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$ јесу



Сл. 5

трагови равни v. (На овај начин решен је задатак у J. Maurin, G. d. à q. d., 1948).

Показаћемо како се у Maurin-овом начину пројектовања могу одредити трагови равни v на други начин, коришћењем перспективно афиног положаја ликова у равни цртања (сл. 5).

Троуглови $L_{13} M_{13} N_{13}$ и $L_{14} M_{14} N_{14}$ су перспективно афини, (одговарајућа темена налазе се на паралелним правим $L_{13} L_{14}$, $M_{13} M_{14}$ и $N_{13} N_{14}$) и имају осу афиности. Она је одређена пресечним тачкама правих $L_{13} M_{13}$ и $L_{14} M_{14}$, $L_{13} N_{13}$ и $L_{14} N_{14}$. Оса афиности је, дакле, права равни LMN на којој се, у равни цртања, поклапају пројекције тачака равни LMN на равни $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$. Пресечене тачке одређују, дакле, праву s_{13}^2 која се поклапа са правом s_{14}^2. Оса афиности s_{13}^2 у пресеку са осом x_1 одређује пројекције A_{13}, дакле и A_{14}, пројекције трага A равни v. Пошто се на оси афиности поклапају пројекције праве s^2 равни v на равни $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$, права s^2 налази се у простору $x_1 x_2 s$, где је s симетрала угла $x_3 x_4$. Простор $x_1 x_2 s$ може се сматрати симетралним простором поклапања за просторе $x_1 x_2 x_3$ и $x_1 x_2 x_4$ (или само простором поклапања или коинциденције) јер има особину да се пројекције свих објеката садржаних у њему на пројекцијске равни $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$ поклапају у равни цртања. Права s^2 претставља, дакле, пресек равни v са простором поклапања $x_1 x_2 s$.

Пошто се ординалама одреди и пројекција s_{12}^2 праве s^2, добија се на њој и трећа пројекција A_{12} трага A.

На сличан начин може се одредити оса афиности троуглова $L_{12} M_{12} N_{12}$ и $L_{14} M_{14} N_{14}$, тј. пројекција s_{12}^3, односно s_{14}^3, праве s^3 по којој раван v сече простор поклапања за просторе $x_1 x_2 x_3$ и $x_1 x_3 x_4$. Пројекције s_{12}^3 и s_{14}^3 се поклапају и пресек праве s_{12}^3 са осом x_1 даје пројекцију B_{12}, дакле и B_{14}, трага B равни v у равни $x_1 x_3$. Ординалама се одређују пројекција s_{13}^3 и на њој B_{13}.

Оса афиности троуглова $L_{12} M_{12} N_{12}$ и $L_{13} M_{13} N_{13}$, права s_{12}^4, односно s_{13}^4, је пројекција пресечне праве s^4 равни v и простора поклапања за просторе $x_1 x_2 x_4$ и $x_1 x_3 x_4$. Њен пресек са осом x_1 одређује пројекцију C_{12}, дакле и C_{13}. Тачка C је, према томе, траг равни v у равни $x_1 x_4$. На пројекцији s_{14}^4 одређује се и пројекција C_{14}.

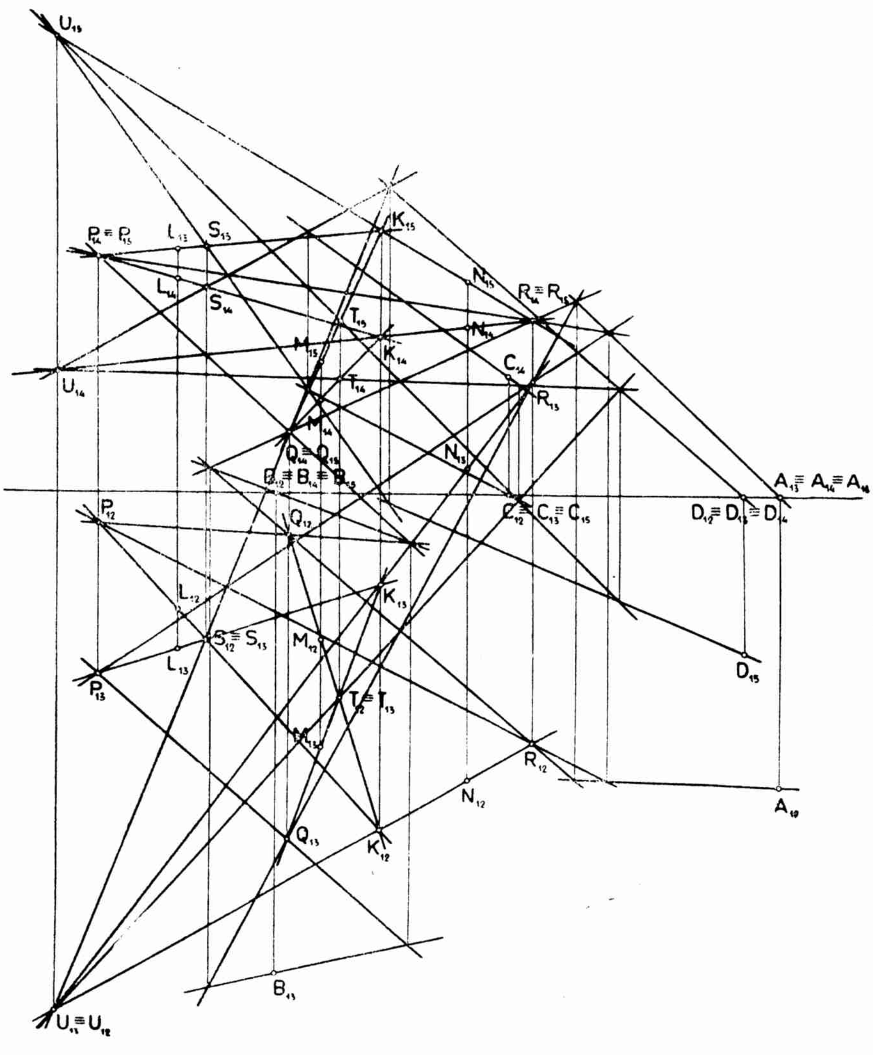
Трагови неке равни могу се одредити на овај начин само код пројектовања произвољне равни на равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_1 x_4$. У том се начину пројектовања две пројекције једне исте тачке поклапају на оси x_1 ако се тачка налази у једној од пројекцијских равни. Напр., ако је тачка C у равни $x_1 x_4$ пројекције C_{12} и C_{13} поклапају се на оси x_1. У случају пројектовања на равни $x_1 x_2$, $x_2 x_3$ и $x_3 x_4$ пројекције једнога трага равни су три разне тачке. Напр., на сл. 1, пројекције E_{12}, E_{23} и E_{34} су пројекције трага E у равни $x_1 x_2$.

Задатак је решен за случај када раван има општи положај према пројекцијским равнима, тј. има трагове у свим пројекцијским равнима.

Одређивање трагова тродимензионог простора у петодимензионом простору

Изложени начин решавања може се уопштити и применити на одређивање трагова тродимензионог простора који је садржан у петодимензионом простору. Нека је петодимензиони простор одређен осама

x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 које су узајамно управне и пролазе кроз тачку O. Положај објекта у овом простору одређен је управним пројекцијама на четири осне равни од којих се ма које три не налазе у једном истом тродимензионом потпростору, а све четири се не налазе у истом четвородимензионом потпростору. Изаберимо равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_1 x_4$ и $x_1 x_5$ за пројекцијске равни. Обртањем ових равни око осе x_1 могу се оне довести у једну исту раван, раван цртања.



Сл. 6

Аналого претходном, може се захтевати да се одреде трагови тродимензионог простора Σ_3 ако је он дат пројекцијама ма којих својих тачака $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}$ и N (сл. 6). Као што је познато, са сваком од пројекцијских равни дати тродимензиони простор Σ_3 има само по једну заједничку тачку,траг простора.

Чет供тородимензиони потпростори $x_1 x_2 x_3 x_4$ и $x_1 x_2 x_3 x_5$ имају простор поклапања одређен правим x_1, x_2, x_3 и правом s која поло ви угао $x_4 x_5$. Пројекције објекта, који је садржан у том простору, на равни $x_1 x_4$ и $x_1 x_5$ поклапају се у равни цртања. Пресек датог тродимензионог простора Σ_3 и овог потпростора поклапања је раван σ. Пошто се пројекције тачака равни σ на равни $x_1 x_4$ и $x_1 x_5$ поклапају, пројекције тачака P, Q и R равни σ могу се одредити у пресеку правих $K_{14} L_{14}$ и $K_{15} L_{15}$, $K_{14} M_{14}$ и $K_{15} M_{15}$, $K_{14} N_{14}$ и $K_{15} N_{15}$. Ординалама се одређују остале пројекције тачака P, Q и R на пројекцијама одговарајућих правих.

Раван σ садржана је у датом тродимензионом простору Σ_3 и зато су трагови равни σ трагови и простора Σ_3. Раван σ садржана је и у четвородимензионом простору $x_1 x_2 x_3 s$, па се трагови равни σ у пројекцијским равнима $x_1 x_2$ и $x_1 x_3$ одређују на напред изложени начин, користећи перспективно афини положај пројекција равни σ. Нека су то трагови A и B простора Σ_3.

Слично се може одредити пресек простора Σ_3 са простором поклапања $x_1 x_4 x_5 m$ потпростора $x_1 x_3 x_4 x_5$ и $x_1 x_2 x_4 x_5$, који је одређен правим x_1, x_4, x_5, и правом m, симетралом угла $x_2 x_3$. Пресек је раван μ. Пројекције равни μ на равни $x_1 x_2$ и $x_1 x_3$, као објекта простора поклапања, поклапају се у равни цртања. Пројекције тачака S, T и U равни μ одређују се у пресеку правих $K_{12} L_{12}$ и $K_{13} L_{13}$, $K_{12} M_{12}$ и $K_{13} M_{13}$, $K_{12} N_{12}$ и $K_{13} N_{13}$. Пројекције S_{12} и S_{13}, T_{12} и T_{13} U_{12} и U_{13} се поклапају, а остале пројекције ових тачака налазе се на осталим пројекцијама одговарајућих правих. Трагови равни μ, C у равни $x_1 x_4$ и D у равни $x_1 x_5$, су трагови простора Σ_3 и одређују се на изложени начин.

Одређивање трагова $(n-2)$-димензионог простора у n-димензионом простору

У простору R_n произвољног броја n димензија који је одређен правим $x_1, x_2, \ldots, x_n$ које пролазе кроз исту тачку 0 и свака од њих управна је на свима осталим, могу се за пројекцијске равни одабрати осне равни $x_1 x_2$, $x_1 x_3, \ldots, x_1 x_{n-1}$, $x_1 x_n$. Обртањем око осе x_1 доводе се оне у исту раван цртања. Положај неког објекта у n-димензионом простору одређен је $(n-1)$-ом пројекцијом на равни $x_1 x_2, x_1 x_3, \ldots, x_1 x_n$. Један $(n-2)$-димензиони простор $\Sigma_{(n-2)}$ може бити дат пројекцијама ма којих $(n-1)$ тачака $P^1, P^2, \ldots, P^{n-2}, P^{n-1}$. Простор $\Sigma_{(n-2)}$ има са сваком пројекцијском равни по једну заједничку тачку, траг простора $\Sigma_{(n-2)}$. Ако је простор дат тачкама P^i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ могу се одредити његови трагови.

У n-димензионом простору R_n дати простор $\Sigma_{(n-2)}$ сече простор поклапања $R^1_{(n-1)}$ за просторе $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_{n-2}\, x_{n-1}$ и $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_{n-2}\, x_n$, који је одређен осама $x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}, x_{n-2}$ и симетралом s^1 угла $x_{n-1}\, x_n$, по простору $\Sigma^1_{(n-3)}$. Пројекције простора $\Sigma^1_{(n-3)}$, као потпростора простора $R^1_{(n-1)}$, на равни $x_1\, x_{n-1}$ и $x_1\, x_n$ поклапају се у равни цртања. Према томе поклапају се пројекције $Q^1_{1,(n-1)}$ и $Q^1_{1,n}$, $Q^2_{1,(n-1)}$ и $Q^2_{1,n}, \ldots, Q^{n-2}_{1,(n-1)}$ и $Q^{n-2}_{1,n}$ тачака $Q^1, Q^2, \ldots, Q^{n-2}$ које одређују простор $\Sigma^1_{(n-3)}$. Зато се оне могу одредити у пресеку правих $P^1_{1,(n-1)}\, P^2_{1,(n-1)}$ и $P^1_{1,n}\, P^2_{1,n}$, $P^1_{1,(n-1)}\, P^3_{1,(n-1)}$ и $P^1_{1,n}\, P^3_{1,n}, \ldots, P^1_{1,(n-1)}\, P^{n-1}_{1,(n-1)}$ и $P^1_{1,n}\, P^{n-1}_{1,n}$. Трагови простора $\Sigma^1_{(n-3)}$ у равнима $x_1\, x_2, x_1\, x_3, \ldots, x_1\, x_{n-2}$ су и трагови простора $\Sigma_{(n-2)}$. Да би се одредили и трагови простора $\Sigma_{(n-2)}$ у равнима $x_1\, x_{n-1}$ и $x_1\, x_n$ треба, на сличан начин, одредити пресек датог простора $\Sigma_{(n-2)}$ са још једним од простора поклапања за који се пројекције на равни $x_1\, x_{n-1}$ и $x_1\, x_n$ у равни цртања не поклапају, напр. са простором поклапања $R^2_{(n-1)}$, тј, $s^2\, x_1\, x_4 \ldots\ldots x_n$, за просторе $x_1\, x_3\, x_4 \ldots\ldots x_n$ и $x_1\, x_2\, x_4\, x_5 \ldots\ldots x_n$, где је s^2 симетрала угла $x_2\, x_3$. Нека је то простор $\Sigma^2_{(n-3)}$. Трагови простора $\Sigma^2_{(n-3)}$ у равни $x_1\, x_{n-1}$ и $x_1\, x_n$ јесу и трагови простора $\Sigma_{(n-2)}$.

За одређивање трагова, у равнима $x_1\, x_2, x_1\, x_3, \ldots, x_1\, x_{n-2}$, простора $\Sigma^1_{(n-3)}$ који је садржан у простору $R^1_{(n-1)}$, поступак се понавља. Одређују се простори $\Sigma^1_{(n-4)}$ и $\Sigma^2_{(n-4)}$ по којима простор $\Sigma^1_{(n-3)}$ сече потпросторе поклапања $R^1_{(n-2)}$ и $R^2_{(n-2)}$ за $(n-2)$-димензионе потпросторе простора $R^1_{(n-1)}$. Потпростори поклапања $R^1_{(n-2)}$ и $R^2_{(n-2)}$ бирају се тако да се пројекција простора $\Sigma^1_{(n-4)}$ на раван $x_1\, x_{n-2}$ у равни цртања поклопи са пројекцијама на равни $x_1\, x_{n-1}$ и $x_1\, x_n$, а да се пројекција простора $\Sigma^2_{(n-4)}$ на раван $x_1\, x_{n-3}$ у равни цртања поклопи са пројекцијама на равни $x_1\, x_{n-1}$ и $x_1\, x_n$. Тиме се постиже да се помоћу простора $\Sigma^1_{(n-4)}$ добију трагови простора $\Sigma_{(n-2)}$ у равнима $x_1\, x_2, x_1\, x_3, \ldots, x_1\, x_{n-3}$, а помоћу простора $\Sigma^2_{(n-4)}$ траг у равни $x_1\, x_{n-2}$. За одређивање трагова у равни $x_1\, x_{n-1}$ и $x_1\, x_n$ поступак се наставља на тај начин што се одреди простор $\Sigma^3_{(n-4)}$ пресек простора $\Sigma^2_{(n-3)}$ са потпростором поклапања $R^3_{(n-2)}$ простора $R^2_{(n-1)}$ за који се пројекција на раван $x_1\, x_4$ у равни цртања поклапа са пројекцијама на равни $x_1\, x_2$ и $x_1\, x_3$.