који пролази кроз $M_0(x_0, y_0)$, а функција $v(x)$ партикуларни нитеграл једначине

$$\frac{dy}{dx}=f_2(x, y) \tag{4}$$

који пролази кроз $M_0(x_0, y_0)$.

Ако се претпостави да $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ не мења знак у области ω тј. да је за сваку тачку ове области $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$ или $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$, онда се, при познатом пару функција $u_n(x)$, $v_n(x)$ следећи пар функција u_{n+1}, v_{n+1} добија интеграцијом диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{f(x, v_n)-f(x, u_n)}{v_n-u_n}(y-u_n)+f(x, u_n),\\ \frac{dy}{dx}&=f_y'(x, u_n)\ (y-u_n)+f(x, u_n).\end{aligned} \tag{5}$$

Прва од једначина (5) даје функцију $v_{n+1}(x)$ ако је $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$, а функцију $u_{n+1}(x)$ ако је $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$.

Лузин је дао брзину конвергенције овог процеса неједнакошћу

$$v_n(x)-u_n(x)<\frac{C}{2^{2n}}, \tag{6}$$

где је C константа која не зависи од n.

I

Ако се уместо диференцијалних једначина $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ које се не могу решити помоћу квадратура (због таквих једначина се и стварају методе приближне интеграције), узимају једначине које се могу решити помоћу квадратура, примена Чаплигинове методе даје разне интересантне функционалне неједнакости које би се иначе тешко дале доказати. Избор функција $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ је произвољан и ова слобода њиховог избора пружа широке могућности за испитивање функционалних неједнакости. Иста чињеница претставља лошу страну Чаплигинове методе схваћене као методе приближне интеграције јер ма да је избором $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ одређен читав низ апроксимативних парова функција, тиме још увек није обезбеђена практична могућност интеграције одговарајућих линеарних једначина.

Следећи ставови које сам извео илуструју могућност добијања функционалних неједнакости применом Чаплигинове методе на обичне диференцијалне једначине првога реда које се могу решити помоћу квадратура.

Став 1. Нека је дата Бернулијева једначина:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,y + y^2, \tag{7}$$

при чему је $f(x)$ функција позитивна и непрекидна за свако x, а $y(x)$ партикуларни интеграл једначине (7) који пролази кроз координатни почетак. Тада је испуњена неједнакост

$$-\,thx < y(x) < tgx, \tag{8}$$

у области

$$-\frac{1}{f(x)} < y < \frac{1}{f(x)}, \quad 0 < x < x_0,$$

где x_0 зависи од $f(x)$ и не може бити $x_0 > \frac{\pi}{2}$.

(За функције $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ изабране су фунцкије $f_1 = y^2 - 1$ и $f_2 = y^2 + 1$, па је нађен пар функција $u(x)$, $v(x)$.)

Став 2. Нека је дата Бернулијева једначина

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,y^2 + y, \tag{10}$$

где је $f(x)$ функција позитивна и непрекидна за свако x, а $y(x)$ партикуларни интеграл једначине (10) који пролази кроз координатни почетак. Тада је испуњена неједнакост

$$1 - e^x < y(x) < e^x - 1, \tag{11}$$

у области

$$-\frac{1}{\sqrt{f(x)}} < y < +\frac{1}{\sqrt{f(x)}}, \quad 0 < x < x_0, \tag{12}$$

где x_0 зависи од $f(x)$.

(За $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ изабране су функције $f_1 = y - 1$ и $f_2 = y + 1$ па је нађен пар функција $(u(x), v(x))$.

Став 3. Нека је $z = f(y)$ непрекидна функција по y са коначним изводом f'_y и позитивним f''_y таква да је $y = 0$ унутрашња тачка интервала одређеног неједначином

$$0 < f(y) < 1. \tag{13}$$

Тада је, у области одређеној неједначином (13), за $x > 0$ испуњена неједнакост

$$0 < \frac{f(0)}{f'_y(0)}[e^{f_y'(0)x} - 1] < y(x) < \Psi(x) < x ,$$

где је $y = \Psi(x)$ партикуларни интеграл једначине

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - f(0)}{x} y + f(0) , \tag{15}$$

који пролази кроз координатни почетак, а $y = y(x)$ партикуларни интеграл једначине

$$\frac{dy}{dx} = f(y) , \tag{16}$$

који пролази кроз координатни почетак. (Тражени су парови кривих $[u, v]$, $[u_1, v_1]$ при $f_1 = 0$ и $f_2 = 1$).

Став 4. Нека је функција $f\left(\frac{y}{x}\right)$ таква да је тачка $M(1, 0)$ унутрашња тачка области ω одређене неједначином

$$0 < f\left(\frac{y}{x}\right) < 1 . \tag{17}$$

Ако је притом функција $f\left(\frac{y}{x}\right)$ у области ω непрекидна, коначног извода $\frac{\partial f}{\partial y}$ и позитивног $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, онда је, у области ω, за $x > 1$

$$0 < f(0)\, x \ln x < y(x) < \Psi(x) < x , \tag{18}$$

где је $y = y(x)$ партикуларни интеграл једначине

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{19}$$

који пролази кроз тачку $M(1, 0)$ а $y = \Psi(x)$ партикуларни интеграл једначине

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f\left(\frac{x-1}{x}\right) - f(0)}{x - 1} y + f(0) , \tag{20}$$

који пролази кроз тачку $M(1, 0)$.

II

Следећи пример илуструје могућност примене Чаплигинове методе при посматрању асимптотског понашања партикуларних интеграла.

Дата је Рикатијева диференцијална једначина

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{x^2}-ay^2 \quad a>0, \quad b>0 \tag{21}$$

Тада је испуњена неједнакост

$$\frac{1}{ax+C_0}<y(x)<\frac{C_0'+ax(ab+1)+2abC_0\ln x-\frac{bC_0}{x}}{(ax+C_0)^2}<C_0^*-\frac{b}{x}, \tag{22}$$

за $x>x_0>0$, где је $y=y(x)$ партикуларни интеграл који пролази кроз тачку $M_0(x_0,y_0)$ где су $x_0,y_0>0$ а C_0, C_0', C_0^* константе зависне од a,b,x_0,y_0 при чему је $C_0^*>0$.

На основу (22) можемо закључити да је $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$ при чему је $y(x)>0$ и $y(x)<C_0^*$.

Решавањем једначине (21) добија се партикуларни интеграл облика

$$y=y(x)=\frac{x-k}{x(u_1x-u_2k)}, \tag{23}$$

где су k,u_1,u_2 константе и то $k=k(a,b,x_0,y_0)>0$, $u_1=u_1(a,b)>0$, $u_2=u_2(a,b)<0$.

Израз (23) даје нам исти закључак о асимптотском понашању партикуларног интеграла. (За функције $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ овде су узете функције $f_1(y)=-ay^2$ и $f_2(x)=\frac{b}{x^2}$ па су тражене функције $u(x)$, $v(x)$ и $v_1(x)$).

Дaћемо неколико посебних примера функционалних неједнакости које важе у коначним деловима равни, а наведене су наведеном методом.

а) Полазећи од $x(y+1)<(y+1)^2$ добија се $e^{\frac{x^2}{2}}-1<\frac{x}{1-x}$ за $0<x<1$.

б) Полазећи од $0<(y-x)^2<(y-1)^2$ добија се $\frac{e^{2x}(x-1)+1}{e^{2x}+1}<\frac{x}{x+1}$ за $0<x\leqslant 1$.

в) Релација $0<y^2+1<(x-1)^2+1$ даје $\operatorname{tg}x<\frac{x^3}{3}-x^2+2x$ за $0<x<x_0$ где је x_0 решење једначине $\operatorname{tg}x=1-x$.

г) Полазећи од $0 < \sqrt{1+y^2} < y^2+k, k > 1$ добија се $0 < x < shx <$ $< \sqrt{k}\, tg \sqrt{k} x$ за $0 < x < \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$.

д) Полазећи од $0 < \frac{y^2}{x} < 1$ добија се $\frac{x}{4}\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{2 - lnx}$ у резултујућој области, за $x > 1$.

ђ) Полазећи од $0 < y^2 e^x < e^x$ добија се у области $-1 < y < 1$, $x > 0$ неједнакост $\frac{1}{4}[e^{e^x-1} + 1] < \frac{1}{3 - e^x}$.

е) Полазећи од $0 < e^{-y} < k, k > 1$ добија се, у резултујућој области за $x > 0$,

$$0 < 1 - e^{-x} < ln(x+1) < kx.$$

* * *

Пок. Михаило Петровић доста се бавио компаративним једначинама диференцијалних једначина и дао у овој области бројне резултате. Значајни су његови прилози у одређивању, компаративном методом кругова конвергенције интегралних редова диференцијалних једначина. Сем у овом смислу, Петровић је посматрао компаративне једначине у циљу уоквиравања интегралних кривих у одређене бројне размаке, користећи затим добијене резултате и за добијање асимптотских вредности интеграла. Петровић у наведену сврху користи квалитативне прве интеграле, но даје и друге, посебне методе за неке диференцијалне једначине. Овде ћемо навести две од више теорема датих у Петровићевим радовима, које омогућавају формирање компаративних једначина у циљу уоквиравања интегралних кривих диференцијалних једначина првог реда.

* * *

У расправи: *„Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre“* (Math. Ann. t. 54, 1899) изложена је следећа Петровићева теорема:

Нека је дата једначина $y' = F(x, y, f)$ где је f функција од x која фигурише у F. Нека је (x_0, y_0) тачка у којој су функција F и њен извод $\frac{\partial F}{\partial f}$ одређени, коначни, непрекидни и не мењају знак и за коју се овај парцијални извод не анулира. Увек се могу изабрати две функције $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ које испуњавају следеће услове:

1) Оне су одређене, коначне и непрекидне у неком довољно малом интервалу од $x = x_0 - a_1$ до $x = x_0 + a_2$ (a_1 и a_2 су две позитивне константе);

2) У овом је интервалу $\lambda(x) < f(x) < \mu(x)$;

Ако се са n и v означе интеграли једначина

$$u' = F(x, u, \lambda), \quad v' = F(x, v, \mu),$$

који за $x = x_0$ узимају вредност $u_0 = v_0 = y_0$, функције u и v су одређене, коначне и непрекидне у довољно малом интервалу од $x = x_0 - b_1$ до $x = x_0 + b_2$ (b_1 и b_2 су две позитивне константе).

Два интервала $(x_0 - a_1, x_0 + a_2)$ и $(x_0 - b_1, x_0 + b_2)$ имају увек један заједнички интервал $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ који је различит од нуле.

За сваку вредност x из интервала $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ интеграл y једначине $y' = F(x, y, f)$ који за $x = x_0$ узима вредност $y = y_0$ је одређен коначан, непрекидан и налази се између одговарајућих интеграла u и v.

Теорема уствари даје и практично упутство за формирање компаративних једначина.

* * *

У Петровићевој књизи: *„Рачунање са бројним размацима“*, Београд, 1932, наведена је, између осталих, следећа теорема, општија од претходне, а чији је садржај исти као код Чаплигинове теореме цитиране на почетку овога рада:

Нека су

$$y' = F(x, y), \tag{1}$$

$$u' = F_1(x, u), \tag{2}$$

$$v' = F_2(x, v), \tag{3}$$

три диференцијалне једначине првог реда. Функције двеју променљивих x и y

$$F(x, y) - F_1(x, y), \tag{4}$$

$$F(x, y) - F_2(x, y), \tag{5}$$

имаће, у равни XOY свака своју позитиввну и негативну област Означимо са:

Δ_1 и Δ_2 позитивну и негативну област функције (4);

Ω_1 и Ω_2 позитивну и негативну област функције (5);

$D_1, D_2 \ldots$ линије које ограничавају те области;

$E_1, E_2 \ldots$ линије које претстављају геометриска места сингуларитета функција F, F_1, F_2;

Π део равни који је заједнички за један па робласти Δ и Ω супротно означених, нпр., за области Δ_1 и Ω_2.

Нека је $M_0(x_0, y_0)$ једна тачка која не припада ни једној од линија D ни E, а која се налази у области Π.

На послетку, нека су y, u, v интеграли једначина (1), (2), (3) који за $x=x_0$ имају заједничку вредност $y=y_0$, $u=y_0$, $v=y_0$.

Тада ће, са једне и друге стране тачке $(x_0, 0)$ постојати на оси Ox један размак различит од нуле, например, од x_0-h_1 до (6) x_0+h_2 (h_1 и h_2 су два позитивна броја) који ће испуњавати ове услове:

а) док се x мења у размаку (6) интеграли u и v као и њихови први изводи су одређени, коначни и непрекидни;

б) контура Γ састављена од кривих u, v и двеју правих $x=x_0-h_1$ и $x=x_0+h_2$ садржана је у области Π и она не обухвата ни један део кривих D ни E нити се са којом од ових сече.

Тада се може доказати овај резултат:

Кад се x мења у размаку (6) интеграл y једначине (1) биће коначан и непрекидан, а налазиће се стално између u и v.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Лузин, *О методе приближённого интегрирования акад. С. А. Чаплыгина*, Успехи математических наук, Т. VI. Выпуск 6 (46)—1951.

[2] Н. Н. Лузин, *Интегральное исчисление*, — Советская наука — Москва, 1949.

[3] Михаило Петровић, *Рачунање са бројним размацима*, Београд, 1932.

[4] Michel Petrovitch, *Intégration qualitative des équations différentielles*, Gauthier — Villars, 1931, Paris.

QUELQUES INÉGALITÉS FONCTIONNELLES RÉSULTANT DE LA MÉTHODE DE TCHAPLYGIN ET COMPARAISON AVEC LES RESULTATS DE M. PETROVITCH

par MILORAD BERTOLINO, BEOGRAD

Résumé

L'auteur applique la méthode de l'intégration approximative des équations différentielles du premier ordre de Tchaplygin aux équations qu'on peut résoudre à l'aide des quadratures, pour donner quelques inéquations fonctionnelles. Il souligne la difficulté de faire leur preuve de n'importe quelle autre manière. Dans l'exemple II il montre la possibilité de l'application de cette méthode à la recherche du comportement asymptotique des intégraux particuliers des équations différentielles du premier ordre. Enfin, il illustre la méthode par quelques exemples particuliers. Il cite aussi les résultats de M. Petrovitch dans le domaine des recherches des équations de comparaison.