*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie*

ИТЕРАЦИЈЕ НЕПРЕКИДНИХ ФУНКЦИЈА

ТАТЈАНА ПАРЕНТА, БЕОГРАД

Под итерацијом (итерираном функцијом) непрекидне функције подразумева се израз

(1) $$f_r(x)=\int_0^x f_{r-1}(t)\,dt, \quad r=1,2,3,3,\ldots$$

$$f_0(x)=f(x)$$

У овом раду доказаћемо следећи став за итерације непрекидних функција:

Став. 1. *Ако изчезавају све итерације непрекидне функције* $f(x)$ *у интервалу* $(0, a)$, *т. ј. ако је*

(2) $$f_r(a)=\int_0^a f_{r-1}(t)\,dt=0, \quad r=1,2,3,\ldots.$$

тада идентички изчезава непрекидна функција $f(x)$ *у интервалу* $(0, a)$, т. ј.

$$f_0(x)\equiv f(x)\equiv 0, \quad x\in(0, a).$$

Овај став еквивалентан је са Lerch-овим ставом који гласи: *ако једна у коначном интервалу* $a\leqslant x\leqslant b$ *дефинисана, непрекидна функција* $f(x)$ *има особину да су сви њени моменти једнаки нули, т. ј. ако је*

$$\int_a^b f(x)\,x^n\,dx=0, \quad n=0,1,2,\ldots$$

тада је $f(x)$ *идентички једнака нули* [1]. Доказ еквивалентности даћемо у тачци 2 овога рада.

Прегледности ради узећемо у даљем разматрању да је $a=1$. Доказ за произвољно коначно a је исти.

1. *Доказ става* 1. Функција $f_r(x)$ дата са (1) је очевидно непрекидна функција. Нека је $f_r(x)$ функција која не изчезава идентички у $(0, 1)$. Нека је ε произвољно мали број, тада скуп E_ε вредности $x \in (0, 1)$, за које је $|f_r(x)| < \varepsilon$, може се обухватити са коначно много дисјунктних интервала чија је мера мања од 1. [3, стр. 319].

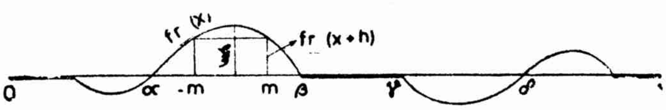
Под дисјунктним интервалима подразумевају се интервали без заједничких тачака.

Скуп E_ε, кад $\varepsilon \to 0$ не може да има меру која тежи 1 јер би тада $f_r(x)$ као непрекидна функција у $(0, 1)$ идентички изчезавала.

Претпоставимо супротно да је скуп E_ε састављен од бескраној много интервала. Можемо увек претпоставити да су они дусјунктни, јер ако је за (a, b) и (c, d) $|f_r(x)| < \varepsilon$ а $c < b$ тада ћемо место (a, b) и (c, d) посматрати $x \in (a, d)$, $|f_r(x)| < \varepsilon$.

Дисјунктни интервали у којима је $|f_r(x)| < \varepsilon$ ако их има бесконачно много у $(0, 1)$ морају имати тачке нагомилавања у $(0, 1)$. Како је $f_r(x)$ непрекидна функција то око сваке такве тачке нагомилавања можемо описати интервал у коме је опет $|f_r(x)| < \varepsilon$. Ако има бесконачно много ових интервала (јер може да има бесконачно много тачака нагомилавања) можемо наћи највише коначно много од њих који се не покривају. Ван ових интервала према претходном разматрању остало је још коначно много интервала где је $|f_r(x)| < \varepsilon$, и који се не покривају, па је скуп E_ε где је $|f_r(x)| < \varepsilon$ састављен од коначног броја дисјунктних интервала.

Облик непрекидне функције $f_r(x)$ претстављен је тада низом (и то коначним бројем) слика облика



$0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta < 1$

где је на пример за $x \in (\beta, \gamma)$, $|f_r(x)| < \varepsilon$.

Нека је ξ max. $|f_r(x)|$ за $x \in (\alpha, \beta)$. Како је $f_r(x)$ непрекидна функција постоји око ξ размак дужине m тако да је $|f_r(x+h)| > \xi/2$ за $-m < h < m$, ξ није једнако $k\varepsilon$ где је k коначно, јер би тада $f_r(x)$ било произвољно мало (мање од $k\varepsilon$) у (α, β).

Зато је

$$2m\frac{\xi}{2} > (\gamma - \beta)\varepsilon$$

тј.

$$m\xi > (\gamma-\beta)\,\varepsilon.$$

Сада је

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_r(x)\,dx > m\xi > (\gamma-\beta)\,\varepsilon > \int_{\beta}^{\gamma} f_r(x)\,dx$$

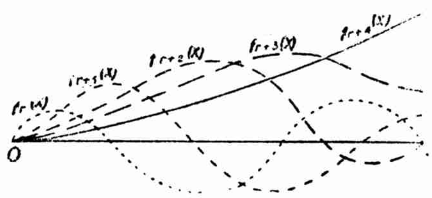
m и ξ су коначни као и $(\gamma-\beta)<1$, али је $(\gamma-\beta)\,\varepsilon$ произвољно мало због ε па је зато $\int_{\alpha}^{\gamma} = \int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{\gamma}$ коначан т. ј.

$$f_{r+1}(x) = \int_{\alpha}^{x} f_r(t)\,dt$$

ме може да пресече x осу за

$$\beta \leqslant x \leqslant \gamma.$$

На основу овог расуђивања, ако је функција $f_r(x)$ у интервалу $(0, 1)$ за скуп E_ε, $x \in (0, 1)$: $|f_r(x)| < \varepsilon$, а за скуп E_ε^* (скуп E_ε^* је комплеменат од E_ε у отвореном интервалу $(0, 1)$), $x \in (0, 1)$: $|f_r(x)| \geqslant \varepsilon$, односно ако функција $f_r(x)$ у скупу E_ε интервала $(\beta_i\,\gamma_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots n$, (мера ових интервала је мања од 1) има бесконачно много нула густо распоређених у овим интервалима а у скупу E_ε^* највише коначан број нула, тада функција $f_{r+1}(x)$ у интервалу $(0, 1)$ може да има највише коначан број k нула. Функција $f_{r+2}(x)$ имаће у интервалу $(0, 1)$ највише $k-1$ нула. Ово је последица чињеница да се између две узастопне нуле функције $f_{r+1}(x)$ може налазити највише једна нула функције $f_{r+2}(x)$. Аналогно, у целом интервалу $(0, 1)$ функција $f_{r+3}(x)$ имаће највише $k-2$ нуле, итд., функција $f_{r+k+1}(x)$ неће имати ни једне нуле у интервалу $(0, 1)$ а функција $f_{r+k+2}(x)$ биће монотоно растућа или монотоно опадајућа, супротно претпоставци да је $f_{r+k+2}(a) = 0$.



Из тога произлази да функција $f_{r+1}(x)$ не може да има у интервалу $(0, 1)$ коначан број k нула, јер је у том случају као што видимо $f_{r+k+2}(a)$ различито од нуле, противно претпоставци (2). Према томе функција $f_r(x)$ не може да има скуп E_ε, $x \in (0, 1)$ где је $|f_r(x)| < \varepsilon$ и скуп E_ε^*, $x \in (0, 1)$ где је $|f_r(x)| \geqslant \varepsilon$, већ је у целом интервалу $(0, 1)$: $|f_r(x)| < \varepsilon$ а у том случају је $f(x)$ идентички једнака нули за све $x \in (0, 1)$.

Тиме је наш став доказан.

Потпуно аналогно се доказује став:

Став 2. *Ако изчезавају све итерације непрекидне функције $f(x)$ чији индекси припадају једној аритметичкој прогресији тј. ако је:*

$$f_{c+rd}(a)=0, \quad r=1,2,3,\ldots$$

при чему су c и d утврђени бројеви; тада $f(x)$ идентички изчезава у $(0, a)$.

Остаје отворено питање које услове треба да задовољава парцијални низ индекса $r=1,2,3,\ldots$ да би и за те низове био задовољен став.

Аутор претпоставља да би став могао важити за сваки низ r_i за који $\sum \frac{1}{r_i}$ дивергира.

2. *Доказ еквивалентности става* 1 *и Lerch-овог става.* Из (1) произлази да је $f_r(x)$ за $r=1,2,3,\ldots$ такође непрекидна функција. Она има изводе до r-тог реда а извод r-тог реда интеграбилан је у интервалу $(0, a)$ па се $f_r(x)$ може изразити Маклореновим обрасцем, са Бернулијевим остатком, за $0 \leqslant x \leqslant a$

$$f_r(x)=f_r(o)+\frac{x}{1!}f_r'(o)+\frac{x^2}{2!}f_r''(o)+\cdots+\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}f_r^{r-1}(o)+ \tag{3}$$

$$+\frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} f_r^{(r)}(t)\,dt$$

даље, на основу (1) имамо да је

$$f_r^{(k)}(x)=f_{r-k}(x), \quad k=1,2,3,\ldots \tag{4}$$

те на основу тога (3) постаје:

$$f_r(x)=f_r(o)+\frac{x}{1!}f_{r-1}(o)+\frac{x^2}{2!}f_{r-2}(o)+\cdots+\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}f_1(o)+ \tag{5}$$

$$+\frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} f(t)\,dt$$

како је пак

$$f_r(o)=0; \quad r=1,2,3,\ldots \tag{6}$$

то (5) постаје

(7) $$f_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} f(t)\, dt.$$

На основу (7) и услова (2) имамо

$$f_r(a) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^a (a-t)^{r-1} f(t)\, dt = 0.$$

Узимајући за r редом бројеве $1, 2, 3, \ldots$ добијамо

$$f_1(a) = \int_0^a f(t)\, dt = 0$$

$$f_2(a) = \int_0^a (a-t) f(t)\, dt = -\int_0^a t f(t)\, dt = 0$$

$$f_3(a) = \frac{1}{2!}\int_0^a (a-t)^2 f(t)\, dt = \frac{1}{2!}\int_0^a t^2 f(t)\, dt = 0$$

. . . .

$$f_r(a) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^a \left[a^{r-1} - \binom{r-1}{1} a^{r-2} t + \binom{r-1}{2} a^{r-3} t^2 + \cdots + (-1)^{r-1} t^{r-1}\right] f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^a t^{r-1} f(t)\, dt = 0.$$

Одавде закључујемо: ако изчезавају све итерације функције $f(x)$ у интервалу $(0, a)$ тј. ако је

(8) $$f_r(a) = \int_0^a f_{r-1}(t)\, dt = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^a (a-t)^{r-1} f(t)\, dt = 0, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

изчезаваће и сви моменти функције $f(x)$ у интервалу $(0, a)$ тј.

(9) $$\int_0^a t^{r-1} f(t)\, dt = 0, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

Исто тако обратно, ако изчезавају сви моменти, изчезаваће и све итерације функције $f(x)$ у интервалу $(0, a)$. А у том случају према Lerch-овом ставу биће: $f(x) \equiv 0$ у интервалу $(0, a)$