Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie

О ВЕЗАМА ИЗМЕЂУ РАЗЛИЧИТИХ ВРСТА ИНТЕГРАЛА ЗА СИСТЕМЕ ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА II РЕДА У ИНВОЛУЦИЈИ DARBOUX-LIE-A

БОРИВОЈЕ РАШАЈСКИ, БЕОГРАД

Познато је да у теорији парцијалних једначина другог и вишег реда постоје различите врсте решења: општи интеграл, потпуни интеграл, мешовити, [1], и партикуларни интеграли. Ови последњи задовољавају унапред дате услове различитих особина. Основна разлика, која постоји између теорија парцијалних једначина првог и вишег реда, састоји се у томе да није уопште познат облик ткз. првобитних једначина помоћу којих се формирају парцијалне једначине чији је ред виши од првог. Поред тога за парцијалне једначине првог реда је радовима Lagrange-a и Jacobi-a разрађена општа теорија решења, као и веза између различитих врста решења. Оваква теорија и поменута веза не постоји за парцијалне једначине вишег реда. Шта више и неке дефиниције наведених врста решења су различите код појединих аутора. Као пример, поменимо да постоје различите дефиниције општег интеграла дате од стране Lagrange-a, Ampère-a и Darboux-a

Новија испитивања у теорији парцијалних једначина вишег реда напустила су класично гледиште и задатак изналажења општег интеграла тих једначина, јер је или тешко или немогуће добити општи интеграл, а пре свега и због тога што не постоје опште и погодне методе помоћу којих би се из општег интеграла добила одговарајућа партикуларна решења, која је захтевала пракса и теорија. Та испитивања су створила нове и разноврсне теорије потребне за проучавање одговарајућих партикуларних интеграла. Резултати тих теорија имали су велики значај за напредак модерне математике и пред исту поставиле обиље нових проблема и појмова. Али у исто време, пошто су истраживања била управљена у наведеном правцу, она нису дала опште методе за интеграљење парцијалних једначина вишег реда, па ни проучавала различите врсте интеграла и њихове међусобне везе. Зато је још и увек, иако је прошло доста времена, актуелно мишљење Moutard-a: „Тешкоће које до сада постоје у проблему интеграљења парцијалних једначина вишег реда, поред напора чувених геометара, чини ми се да се састоје у томе што нема синтетичке методе, која би дозволила да се формирају à priori сви могући обрасци интеграла, да се проуче различите врсте интеграла и поставе везе са одговарајућим парцијалним једначинама".

Предмет овога чланка биће испитивање веза између различитих врста интеграла за системе парцијалних једначина другог реда у инволуцији Darboux-Lie-a и њихово добијање помоћу потпуног интеграла таквих система. Lagrange, [2], је дао једну методу за добијање општег интеграла једне парцијалне једначине другог реда када је познат један потпуни интеграл те једначине, али она се показала као врло компликована у применама и на најпростије једначине. Идеје Lagrange-a и метод варијације констаната су коришћене и од других аутора и нарочито треба истаћи интересантна испитивања König-a [3] и Goursat-a, [4]. Од домаћих аутора поменимо да је К. Орлов, [5], проширио Lagrange-ову методу, али само на извесне врсте парцијалних једначина другог реда и да је Н. Салтиков дао у својим предавањима на Београдском универзитету дефиницију мешовитог општег интеграла парцијалних једначина другог реда и поступак за добијање општег интеграла систем парцијалних једначина другог рада у инволуцији Darboux-Lie-a помоћу општег интеграла одговарајућег система за карактеристике [1], [6].

Испитивања у овоме чланку имају за циљ да допринесу даљем упостављању аналогних особина између парцијалних једначина првог реда и система парцијалних једначина другог реда у инволуцији Darboux-Lie-a, а о чему је било речи и раније, [7].

1. Нека је дат систем парцијалних једначина другог реда у инволуцији Darboux-Lie-a

$$\left\{ \begin{aligned} & r+f(x,y,z,p,q,s)=0 \\ & t+\varphi(x,y,z,p,q,s)=0, \end{aligned} \right. \tag{1}$$

чији је потпуни интеграл:

$$z=V(x,y,C_1,C_2,C_3,C_4), \tag{2}$$

где су C_i произвољне константе. Потпуни интеграл задовољава услове, [7],

$$\Delta_{xy}\equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right)\neq 0 \tag{3}$$

$$\Delta_{x^2}\Delta_{y^2}-\Delta_{xy}^2=0, \tag{4}$$

где су уведене ознаке

$$\Delta_{x^2} \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{x^2}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right), \quad \Delta_{y^2} \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{y^2}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right).$$

Посматрајмо величине C_i као функције променљивих x и y. Да би образац (2) при том претпоставком и даље био решење система (1) функције $C(x, y)$ мора да задовољавају услове

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{lll} \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial x} = 0, & \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial x} = 0, & \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial x} = 0, \\ \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial y} = 0, & \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial y} = 0, & \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial y} = 0. \end{array}\right.$$

Уведимо ознаку

$$(i, j, k) \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y}{C_i, C_j, C_k}\right)$$

и претпоставимо да је $(i, j, k) \neq 0$, $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$, тада условима (5) можемо дати један од следећих облика

$$(6)\quad \frac{\partial C_1}{\partial x} = -\frac{(4,2,3)}{(1,2,3)}\frac{\partial C_4}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_2}{\partial x} = -\frac{(1,4,3)}{(1,2,3)}\frac{\partial C_4}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_3}{\partial x} = -\frac{(1,2,4)}{(1,2,3)}\frac{\partial C_4}{\partial x},$$

$$(7)\quad \frac{\partial C_1}{\partial x} = -\frac{(3,2,4)}{(1,2,4)}\frac{\partial C_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_2}{\partial x} = -\frac{(1,3,4)}{(1,2,4)}\frac{\partial C_4}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_4}{\partial x} = -\frac{(1,2,3)}{(1,2,4)}\frac{\partial C_3}{\partial x},$$

$$(8)\quad \frac{\partial C_1}{\partial x} = -\frac{(2,3,4)}{(1,3,4)}\frac{\partial C_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_3}{\partial x} = -\frac{(1,2,4)}{(1,3,4)}\frac{\partial C_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_4}{\partial x} = -\frac{(1,3,2)}{(1,3,4)}\frac{\partial C_2}{\partial x},$$

$$(9)\quad \frac{\partial C_2}{\partial x} = -\frac{(1,3,4)}{(2,3,4)}\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_3}{\partial x} = -\frac{(2,1,4)}{(2,3,4)}\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_4}{\partial x} = -\frac{(2,3,1)}{(2,3,4)}\frac{\partial C_1}{\partial x},$$

где овим једначинама треба додати и једначине које се добијају када се у овим последњим изводи $\frac{\partial C}{\partial x}$ смене са изводима $\frac{\partial C}{\partial y}$. Помоћу наведених једначина и познатих веза, [7],:

$$D\left(\frac{\alpha, \beta}{x, y}\right) = 0, \quad \Delta_{xy}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \Delta_{x^2}\frac{\partial \alpha}{\Upsilon y}, \quad \alpha \equiv \frac{(i, k, l)}{(i, j, k)}, \quad \beta \equiv \frac{(i, j, l)}{(i, j, k)}$$

долазимо до следећег хомогеног система Charpit-a

$$(10)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}\right]\frac{\partial C_i}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}\right]\frac{\partial C_i}{\partial y} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

по непознатим функцијама $C_i(x, y)$. Коефицијенти тог система, у општем случају, зависе од x, y, C_i. Пошто имамо одговарајући систем обичних диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}\right]} = -\frac{dy}{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}\right]} = \frac{dC_1}{0} = \cdots = \frac{dC_4}{0},$$

онда је општи интеграл Charpit-евог система (10) одређен једначинама

$$C_i = f_i\left[\frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}\right]^{1)}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

где су f_i произвољне функције назначеног аргумента. Функције f_i задовољавају системе (6), зато нпр. на основу (9) имамо следеће једначине

$$f_2' = -\frac{(1,3,4)}{(2,3,4)} f_1', \quad f_3' = -\frac{(2,1,4)}{(2,3,4)} f_1', \quad f_4' = -\frac{(2,3,1)}{(2,3,4)} f_1'.$$

Стављајући

(11) $$u \equiv \frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}$$

и узимајући у обзир да функције $\frac{(1,3,4)}{(2,3,4)}$, $\frac{(2,1,4)}{(2,3,4)}$, $\frac{(2,3,1)}{(2,3,4)}$ нису различите у односу на променљиве x, y, [7], последње једначине могу добити следећи облик

(12) $$f_2'(u) = a(u, f_i)\, f_1'(u), \; f_3'(u) = b(u, f_i)\, f_1'(u), \; f_4'(u) = -u\, f_1'(u).$$

Одавде се види да су четири функције f_i везане са три релације и да је према томе само једна од њих произвољна.

Дакле, решење система парцијалних једначина (1), које је одређено са

(13) $$z = V[x, y, f_1(u), f_2(u), f_3(u), f_4(u)]$$

и једначинама (11) и (12), садржи једну произвољну функцију и претставља општи интеграл тог система.

---

[1]) Систем (10) може се одмах сменити са $D\left(\frac{\frac{1,2,3}{2,3,4}, C_i}{x, y}\right) = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, а што је еквивалентно са тим општим интегралом.

Наведимо један пример.

Систем у инволуцији Darboux-Lie-a

$$(14)\qquad \begin{cases} s=-\dfrac{rx+r^2y}{y} \\[2mm] t=\dfrac{1}{3}r^3+r\left(\dfrac{x+yr}{y}\right)^2 \end{cases}$$

има потпуни интеграл $Z=C_1x+C_4y-\dfrac{1}{12y}(x+C_3y)^3-C_2$, који задовољава услов $\Delta_{x^2}\Delta_{y^2}=\Delta_{xy}^2$. Одговарајуће детерминанте трећег реда имају вредност

$$(1,2,3)=-\frac{C_3}{2}(x+C_3y),\qquad (1,2,4)=1,$$

$$(1,3,4)=-\frac{1}{4}(x+C_3y)^2,\quad (2,3,4)=\frac{1}{2}(x+C_3y)^2.$$

На основу система (9) закључујемо да произвољне функције f_i задовољавају услове

$$f_2'=\frac{1}{2}uf_1',\quad f_3'=\frac{2}{u}f_1',\quad f_4'=f_3f_1',\quad u\equiv x+f_3y$$

који заједно са

$$(15)\qquad z=f_1x+f_4y-\frac{1}{12y}u^3-f_2$$

одређују решење система (14) са једном произвољном финкцијом. Ако, нпр. изаберемо да је $f_1'=\dfrac{u}{2}$, тада је $f_1=\dfrac{u^2}{4}$, $f_2=\dfrac{1}{12}u^3$, $f_3=u$, $f_4=$ $=\dfrac{1}{6}u^3$, $u=\dfrac{x}{1-y}$ и одговарајуће партикуларно решење полазног система је $z=\dfrac{x^3}{12y(y-1)}$.

2. Претпоставимо да је $(2,3,4)=0$, а да су остале детерминанте трећег реда различите од нуле. Тада условима (5) можемо дати један од облика

$$(16_1)\qquad \frac{\partial C_1}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial C_2}{\partial x}=-\frac{(1,4,3)}{(1,2,3)}\frac{\partial C_4}{\partial x},\quad \frac{\partial C_3}{\partial x}=-\frac{(1,2,4)}{(1,2,3)}\frac{\partial C_4}{\partial x};$$

$$(16_2)\qquad \frac{\partial C_1}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial C_2}{\partial x}=-\frac{(1,3,4)}{(1,2,4)}\frac{\partial C_3}{\partial x},\quad \frac{\partial C_4}{\partial x}=-\frac{(1,2,3)}{(1,2,4)}\frac{\partial C_3}{\partial x},$$

$$(16_3)\qquad \frac{\partial C_1}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial C_3}{\partial x}=-\frac{(1,2,4)}{(1,3,4)}\frac{\partial C_2}{\partial x},\quad \frac{\partial C_4}{\partial x}=-\frac{(1,3,2)}{(1,3,4)}\frac{\partial C_2}{\partial x},$$

где овим једначинама треба додати и једначине, које се добијају када се у овим последњим изводи $\frac{\partial C}{\partial x}$ смене са изводима $\frac{\partial C}{\partial y}$. У овом случају величина C_1 не зависи од x и y, а одговарајући Charpit-ev систем може се написати, нпр. у облику

$$(10') \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(1,2,4)}{(1,2,3)}\right]\frac{\partial C_{i+1}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1,2,4)}{(1,2,3)}\right]\frac{\partial C_{i+1}}{\partial y}, \quad (i=1,2,3).$$

Његов општи интеграл је

$$C_{i+1}=f_i\left[\frac{(1,2,4)}{(1,2,3)}\right], \quad (i=1,2,3),$$

где су f_i произвољне функције. Ове функције треба да задовољавају још један од система (16), нпр. систем (16_1), што даје услове

$$(17) \qquad f_1'(u)=a(C_1,u,f_i)\,f_3', \quad f_2'(u)=-u f_3', \quad u\equiv\frac{(1,2,4)}{(1,2,3)}.$$

Дакле, једна од функција остаје произвољна. Према томе једначина

$$z=V[x,y,C_1,f_1(u),f_2(u),f_3(u)]$$

са (17) одређује нам решење система (1), које садржи једну произвољну константу и једну произвољну функцију. Такво решење се зове, према предлогу *Н.* Салтикова, [1], тзв. мешовити општи интеграл система парцијалних једначина другог реда (1).

Као пример узмимо Ampère-ову једначину

$$(18) \qquad st+x(rt-s^2)^2=0,$$

која са једначином

$$(19) \qquad 2x(rt-s^2)=pt-qs$$

чини систем у инволуцији Darboux-Lie-a, [1]. Овај систем има потпуни интеграл

$$z=\frac{4}{3}C_1x^{3/2}+C_2(y-C_1^2x)^2+C_3(y-C_1^2x)+C_4$$

за који је $(2,3,4)=0$. Одговарајући Charpit-ев систем

$$\frac{\partial C_{i+1}}{\partial x}+C_1^2\frac{\partial C_{i+1}}{\partial y}=0, \quad (i=1,2,3), \quad C_1=\text{const}.$$

има општи интеграл

$$C_{i+1}=f_i(u), \quad (i=1,2,3), \quad u\equiv y-C_1^2x,$$

Функције f_i задовољавају услове

$$f_1' = -\frac{1}{2u} f_2', \; f_3' = -\frac{1}{2} u f_2'.$$

Стављајући $f_2' = u\,\alpha'''$, где је α произвољна функција назначеног аргумента u, и замењујући у потпуном интегралу величине C_{i+1} са функцијама f_i добијамо мешовити општи интеграл система (18)—(19)

$$z = \frac{4}{3} C_1 x^{3/2} - \alpha (y - C_1^2 x).$$

За други пример узмимо систем у инволуцији Darboux-Lie-a

$$(20) \qquad \begin{cases} s = \dfrac{p - xr}{y} \\ t = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 r - \dfrac{2}{y}(z - yq)\,. \end{cases}$$

За његов потпуни интеграл

$$z = C_1 (C_2 + C_3)\, y + C_4^2\, xy + C_3\, x^2 + C_2\, C_4\, y^2$$

ниједна од детерминаната трећег реда (i, j, k) није једнака нули. Међутим, ако следимо ростулак К. Орлова, [5], и уведемо нове константе a_i следећим везама

$$a_1 = C_1 (C_2 + C_3),\; C_2\, C_4 = a_2,\; C_3 = a_3,\; C_4^2 = a_4,$$

онда за потпуни интеграл

$$z = a_1\, y + a_4\, xy + a_3\, x^2 + a_2\, y^2$$

имамо

$$(1, 2, 3) = -2\, xy^2, \quad (1, 2, 4) = -y^3, \quad (1, 3, 4) = x^2 y, \quad (2, 3, 4) = 0$$

Charpit-ев систем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial a_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial a_{i+1}}{\partial y} = 0$$

има општи интеграл

$$a_{i+1} = f_i(u), \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad u \equiv \frac{y}{x}$$

Поред тога услови

$$f_1' = -\frac{1}{2u} f_3', \; f_2' = -\frac{1}{2} u f_3'$$

дају

$$f_1 = -\frac{1}{2}\alpha'', \quad f_2 = -\frac{1}{2}u^2\alpha'' + u\alpha' - \alpha, \quad f_3 = u\alpha'' - \alpha',$$

где је $\alpha(u)$ произвољна функција. Стављајући нађене изразе за функције f_i у други потпуни интеграл добијамо мешовити општи интеграл

$$z = a_1 y - x^2 \alpha\left(\frac{y}{x}\right)$$

са произвољном константом a_1 и произвољном функцијом α.

Напомињемо да до мешовитих општих интеграла, поред изложеног поступка варијације констаната, можемо доћи и помоћу одговарајућих посредних интеграла са једном произвољном константом.

3. Посматрајмо сада услове (5) као систем

$$(21) \quad \begin{cases} (1,2,3)\dfrac{\partial C_1}{\partial x} + (2,3,4)\dfrac{\partial C_4}{\partial x} = 0, & (1,2,3)\dfrac{\partial C_1}{\partial y} + (2,3,4)\dfrac{\partial C_4}{\partial y} = 0, \\ (1,2,4)\dfrac{\partial C_1}{\partial x} - (2,3,4)\dfrac{\partial C_3}{\partial x} = 0, & (1,2,4)\dfrac{\partial C_1}{\partial y} - (2,3,4)\dfrac{\partial C_3}{\partial y} = 0, \\ (1,3,4)\dfrac{\partial C_1}{\partial x} + (2,3,4)\dfrac{\partial C_2}{\partial x} = 0, & (1,3,4)\dfrac{\partial C_1}{\partial y} + (2,3,4)\dfrac{\partial C_2}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

који има шест једначина и хомоген је у односу на четири детерминанте трећег реда (i, j, k). Претпоставићемо да ниједна таква детерминанта није идентички једнака нули. Детерминанте четвртог реда формиране из матрице за систем (21) имају редом следеће вредности

$$(22) \quad \left(\frac{\partial C_1}{\partial x}\right)^2 (C_1, C_k), \quad \left(\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)^2 (C_1, C_k), \quad \frac{\partial C_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial y}(C_1, C_k), \ (k = 2, 3, 4), \quad 0,$$

где је уведена ознака:

$$(C_i, C_k) = D\left(\frac{C_i, C_k}{x, y}\right).$$

Да би систем (21) имао нетривијална решења у односу на непознате $(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)$ морају све поменуте детерминанте четвртог реда да буду једнаке нули. Пошто $\dfrac{\partial C_1}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial C_1}{\partial y}$ нису истовремено једнаки нули, онда имамо

$$(C_1, C_k) = 0, \quad (k = 2, 3, 4)$$

или

$$C_{i+1} = \varphi_i(C_1), \quad (i = 1, 2, 3).$$

У овом случају систем (5) прима следећи облик

$$\left[\frac{\partial V}{\partial C_1} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial C_{i+1}} \varphi_i'(C_1)\right] \frac{\partial C_1}{\partial a_j} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_1} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_{i+1}} \varphi_i'(C_1)\right] \frac{\partial C_1}{\partial a_j} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_1} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_{i+1}} \varphi_i'(C_1)\right] \frac{\partial C_1}{\partial a_j} = 0, \quad (j = 1, 2),$$

где смо увели ознаку $a_1 \equiv x, a_2 \equiv y$. У условима посматраног случаја последњи систем од шест једначина своди се на следеће три једначине

$$\text{(23)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial C_1} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial C_{i+1}} \varphi_i'(C_1) = 0, \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_1} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_{i+1}} \varphi_i'(C_1) = 0, \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_1} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_{i+1}} \varphi_i'(C_1) = 0. \end{aligned} \right.$$

Последње једначине можемо написати и овако

$$\text{(24)} \qquad \varphi_1' = -\frac{(1,3,4)}{(2,3,4)}, \quad \varphi_2' = -\frac{(2,1,4)}{(2,3,4)}, \quad \varphi_3' = -\frac{(1,2,3)}{(2,3,4)}.$$

Пошто количници на десним странама претстављају функције које нису различите у односу на промењљиве x и y, онда из (24) добијамо

$$\text{(25)} \qquad \varphi_i' = F_i(C_1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_3'), \quad (i = 1, 2).$$

Дакле, за три функције φ_i имамо свега две релације које оне треба да задовољавају и зато једна од њих остаје произвољна.

Општи интеграл у инволуцији Darboux-Lie-а одређен је са

$$z = V[x, y, C_1, \varphi_1(C_1), \varphi_2(C_1), \varphi_3(C_1)]$$

и једначинама (25) и једном од једначина (23) и садржи једну произвољну функцију. Аналоган резултат можемо наћи код E. Goursat-а [4], где су коришћена геометриска разматрања и систем једначина за карактеристике.

Када бар једна од вредности (22) није једнака нули, онда систем (21) има само тривијална решења

$$\text{(26)} \qquad (1,2,3) = 0, \quad (1,2,4) = 0, \quad (1,3,4) = 0, \quad (2,3,4) = 0.$$

Услови (26) постоје и када је $(C_i, C_k) \neq 0$. Ако из (26) можемо одредити величине C_i у функцији промењљивих x и y, онда једначине (2) и (26) нам одређују једно решење система (1), које би, по аналогији са теоријом парцијалних једначина првог реда, звали сингуларно решење тог система.

Као пример узмимо опет систем (20) и његов потпуни интеграл. Тада услови (26)

$$(1,2,3) \equiv -2\,C_4\,(C_2+C_3)\,xy^2=0\,,\quad (1,2,4) \equiv -2\,C_4^2\,(C_2+C_3)\,y^3=0\,,$$

$$(1,3,4) \equiv 2\,(C_2+C_3)\,(C_2\,y+C_4\,x)\,xy=0\,,$$

$$(2,3,4) \equiv 2\,C_1\,y\,(C_4\,x^2+C_2\,xy+C_4^2\,y^2)=0$$

дају $C_i=C_2=C_3=C_4=0$. У овом случају сингуларни интеграл система (20): $z=0$ је истовремено и партикуларни интеграл тога система.

4. Лако је показати и за систем (1) да се свако његово решење

$$z=\psi\,(x,y)\,,$$

где функција ψ има парцијалне изводе до другог реда, налази међу решењима која се добијају из потпуног интеграла (2) варијацијом константата. Поставимо једенакости

$$(27)\qquad \begin{cases} V\,(x,y,C_1,C_2,C_3,C_4)=\psi\,(x,y)\,, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}=\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\,, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y}=\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\,, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y}\,. \end{cases}$$

Под претпоставком (3) ове једнакости одређују C_i у функцији x и y. Пошто су V и ψ решења система (1), то имамо следеће индентичности за свако C_i

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+f\,(x,y,V,V_x,V_y,V_{xy})=0\,,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\varphi\,(x,y,V,V_x,V_y,V_{xy})=0\,,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+f\,(x,y,\psi,\psi_x,\psi_y,\psi_{xy})=0\,,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}+\varphi\,(x,y,\psi,\psi_x,\psi_y,\psi_{xy})=0\,,$$

које, због (27), дају

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \tag{28}$$

Диференцирањем три једнакости (27) по x и y добијамо

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

На основу (27) и (28) ове последње једнакости дају нам једнакости (5) што и доказује горње тврђење.

5. Наш следећи задатак је формирање општег интеграла система (1) помоћу општег интеграла одговарајућег система диференцијалних једначина за карактеристике. Овај задатак је решио Н. Салтиков [6] за случај када се пође од макојег општег интеграла карактеристика. Међутим, решавање овог проблема постаје нешто једноставније када се пође од потпуног интеграла (2) и помоћу њега формира општи интеграл карактеристика, [7],

$$\left\{\begin{aligned} z &= V(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4) \\ p &= V_x(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4) \\ q &= V_y(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4) \\ s &= V_{xy}(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4) \\ \alpha &\equiv \frac{(i, j, k)}{(i, l, k)} = C_5 . \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Због услова (3) општи интеграл (28) можемо написати

$$\left\{\begin{aligned} & f_i(x, y, z, p, q\ s) = C_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ & f \equiv \alpha(x, y, f_1, f_2, f_3, f_4) = C_5 \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Познато је, [6], да је систем дифиренцијалних једначина за карактеристике еквивалентан са следећим Charpit-евим системом

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\varphi_s}\frac{\partial z}{\partial y}-p-\frac{1}{\varphi_s}q=0, \qquad \frac{\partial r}{\partial x}+\frac{1}{\varphi_s}\frac{\partial r}{\partial y}+D_x f=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\varphi_s}\frac{\partial p}{\partial y}+f-\frac{1}{\varphi_s}s=0, \qquad \frac{\partial s}{\partial x}+\frac{1}{\varphi_s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{1}{\varphi_s}D_x\varphi=0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{1}{\varphi_s}\frac{\partial q}{\partial y}-s+\frac{1}{\varphi_s}\varphi=0, \qquad \frac{\partial t}{\partial x}+\frac{1}{\varphi_s}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{1}{\varphi_s}D_x\varphi=0,$$

онда интеграле (30) можемо посматрати као интеграле последњег система. Шта више општи интеграл Charpit-евог система је одређен са

$$f_i=\psi_i(f), \quad (i=1,2,3,4) \tag{31}$$
$$r+f=0, \quad t+\varphi=0.$$

Ставимо $f=u, f_i=u_i$, онда је $u_i=\psi_i(u)$. Решимо систем

$$\begin{cases} \alpha(x,y,u_1,u_2,u_3,u_4)=u, \\ f_i(x,y,z,p,q,s)=u_i, \end{cases}$$

по параметарским променљивим величинама y, z, p, q, s

$$\begin{cases} y=F_1(x,u,u_1,u_2,u_3,u_4), \\ z=V(x,F_1,u_1,u_2,u_3,u_4), \\ p=V_x(x,F_1,u_1,u_2,u_3,u_4), \\ q=V_y(x,F_1,u_1,u_2\,u_3,u_4), \\ s=V_{xy}(x,F_1,u_1,u_2,u_3,u_4). \end{cases} \tag{32}$$

Ове параметаске променљиве задовољавају и једначине

$$dz=pdx+qdy, \quad dp=rdx+sdy, \quad dq=sdx+tdy,$$

што даје услове

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial u_i}V[x,F_1(x,u,u_1,u_2,u_3,u_4),\ u_1,u_2,u_3,u_4]\,du_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial u_i}V[x,F_1(x,u,u_1,u_2,u_3,u_4),\ u_1,u_2,u_3,u_4]\,du_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial u_i}V[x,F_1(x,u,u_1,u_2,u_3,u_4),\ u_1,u_2,u_3,u_4]\,du_i=0,$$

где назначени изводи су узети директно, а не преко функције F_1. Због $u_i = \psi_i(u)$ имамо

$$
(33)\quad \begin{cases}
\sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial}{\partial u_i} V[x, F_1(x, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4), \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]\, \psi_i'(u) = 0\,, \\[2ex]
\sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial u_i} V[x, F_1(x, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4), \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]\, \psi_i'(u) = 0\,, \\[2ex]
\sum \dfrac{\partial^2}{\partial y\, \partial u_i} V[x, F_1(x, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4), \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]\, \psi_i'(u) = 0\,.
\end{cases}
$$

Интересантно је поменути да су услови (33) по структури аналогни са условима (5). Услове (33) можемо нпр. написати у облику

$$
(34)\qquad \begin{cases}
(1,2,3)\psi_1'(u) + (2,3,4)\psi_4'(u) = 0\,, \\
(1,2,4)\psi_1'(u) - (2,3,4)\psi_3'(u) = 0\,, \\
(1,3,4)\psi_1'(u) + (2,3,4)\psi_2'(u) = 0\,,
\end{cases}
$$

ако претпоставимо да су написане детерминанте трећег реда различите од нуле. Из услова (34) видимо да једна од функција ψ_i остаје произвољна. Према томе, после одређивања три од функција ψ_i, прве две једначине (32) одређују нам један интеграл са једном произвољном функцијом система (1).

RÉFÉRENCES

[1] N. Saltikov, *Teorija parcijalnih jednačina drugog reda*, Univerzitet u Beogradu, 1952.

[2] Lagrange, *Sur les intégrales particulières des équations différentielles*, OEuvres complètes, t. 4, p. 5—108.

[3] J. König, *Theorie der Partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln*, Mathematische Annalen XXIV, S. 465—536.

[4] E. Goursat *Leçons sur l'intégration aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, Paris 1898.

[5] C. Orloff, *Sur la formation de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, au moyen d'une integrale complète*, Journal de mathématiques pures et appliquées, t XVIII, 1939, fasc. 2;

Nalaženje opšteg integrala parcijalnih jednačina II reda koje nisu Monge-Ampère-ove, Posebno izdanje SAN, Beograd, 1948.