Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. IX, 1—2 (1957), Beograd
Yougoslavie

НАПОМЕНЕ УЗ ЈЕДАН ЕЛЕМЕНТАРНИ ПРОБЛЕМ ИЗ ПЕРМУТАЦИЈА

ДРАГОЉУБ МАРКОВИЋ, БЕОГРАД

У „Веснику Друштва математичара и физичара НРС" (VII, 1—2, 1955) поставио сам неколико сродних проблема за пермутације*. Они посматрају скуп оних пермутација код којих се на известан, унапред прописан начин, води рачуна о месту, — положају, — једног елемента у односу на неки други одређени елеменат, или у односу на више других елемената. Уопштење наведених тзв. „позиционих проблема" из пермутација предвиђа проблематику положаја не само за поједине елементе, већ и за извесне одређене скупове елемената.

У овој ноти започећу конкретно један начин теориске обраде једног од таквих проблема, а исто тако указаћу на могућност и правац даље обраде. Мислим да ова врста проблема из пермутација има посебног интереса и у примени.

I. *Дефиниција. За два елеменӣа* α *и* β *једне ӣермуӣације* P *од* m *елеменаӣа каже се да су раздвојени са* p *елеменаӣа, ако у ӣореӣку ређања један од њих не долази за другим неӣосредно, већ ӣек ӣосле* p *других елеменаӣа исӣе ӣермуӣације.*

У ӣосебном случају кад је $p=0$, *казаћемо да су* α *и* β *заједно или да су суседни.*

Кад је пермутација P написана на уобичајени начин, тј. кад настаје размештајем њених елемената, ствар је очевидна. Али пошто се пермутације пишу и у облику циклуса, онда је потребно знати да ли дата пермутација у облику циклуса припада проблему чији је тип одређен горњом дефиницијом или не.

* Вид. чланак Д. Аднађевића „Решење проблема..." у овом броју „Весника".

Напишимо дакле пермутације P и Q код којих су α и β раздво јени са p елемената

(1) $$P=\begin{pmatrix} 1\ldots k, & k+1\ldots k+p, & k+p+1\ldots m \\ \ldots\alpha & \ldots & \beta\ \ldots \end{pmatrix}$$

или

(2) $$Q=\begin{pmatrix} 1\ldots k, & k+1\ldots k+p, & k+p+1\ldots m \\ \ldots\beta & \ldots & \alpha\ \ldots \end{pmatrix}.$$

Одавде као услов излази

(3) $$k\to\alpha \quad \text{и} \quad k+p+1\to\beta$$

или

(3a) $$k\to\beta \quad \text{и} \quad k+p+1\to\alpha$$

$$k=1, 2, 3, \ldots, \quad m-p-1.$$

И обрнуто је исто тако очевидно.

Из претходног излази да постоје два смера раздвојености један $\alpha\ldots\beta$, а други $\beta\ldots\alpha$. Природан број p може узимати вредности

$$p=1, 2, 3, \ldots, \quad m-2$$

што значи да су α и β раздвојени са једним, односно два, три, односно највише са $m-2$ елемента. Прошири ли се p и на $p=0$, тј. поред појма раздвојених и на појам суседних елемената, онда излази да услов (3), односно (3a) важи и за

$$p=0, 1, 2, \ldots, m-2.$$

Пример за два суседна елемента.

1°. За симетричну групу S_4 услов да су два елемента 1 и 2 суседна гласи

$$k\to 1 \quad \text{и} \quad k+1\to 2$$

тј.

$$\begin{matrix} 1\to 1 & & 2\to 1 & & 3\to 1 \\ 2\to 2 & \text{или} & 3\to 1 & \text{или} & 4\to 2. \end{matrix}$$

То су ове пермутације

$$1=1234, \quad (132)=3124, \quad (13)\ (24)=3412,$$

$$(34)=1243, \quad (1432)=4123, \quad (1423)=4312.$$

Претходни услови и њима ооговарајуће пермутације важе за смер 12. Обрнуто, за смер 21 услов би гласио

$$k\to 2 \quad \text{и} \quad k+1\to 1,$$

тј.

$$\begin{matrix} 1\to 2 & & 2\to 2 & & 3\to 2 \\ 2\to 1 & \text{или} & 3\to 1 & \text{или} & 4\to 1. \end{matrix}$$

Њима одговарају пермутације

$$(12)=2134,\quad (13)=3214,\quad (1324)=3421,$$
$$(12)\ (34)=2143,\quad (143)=4213,\quad (14)\ (23)=4321.$$

2°. Циклична група од пет елемената има само четири такве пермутације и то само са смером 12. То су

$$1=12345,\quad (13524)=34512,\quad (14523)=45123,\quad (15432)=51234.$$

Интересантно је приметити да код цикличне групе могу бити суседни само 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5, 5 и 1 и то само у смеру основ ног циклуса (12345).

Оба услова (3) и 3а) могу бита претстављени и шематски помоћу пресликавања једне матрице на другу, тј.

$$(4)\qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ \vdots & \vdots \\ m-1 & m \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Збиља, слично множењу оваквих матрица било би

$$(4a)\qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ m-1 & m \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,\alpha+2\,\beta & 1\,\beta+2\,\alpha \\ 2\,\alpha+3\,\beta & 2\,\beta+3\,\alpha \\ \cdot & \cdot \\ \overline{m-1}\,\alpha+m\,\beta & \overline{m-1}\,\beta+m\,\alpha \end{bmatrix},$$

при чему $k\alpha$ краће означава $k\to\alpha$, а знак + означава да пресликавање $k\to\alpha$ повлачи истовремено и $k+1\to\beta$. Према томе, елеменат $k\,\alpha+\overline{k+1}\,\beta$ пресликане матрице означава да кад $k\to\alpha$ онда и $k+1\to\beta$.

За цикличне групе пермутација услов суседности два елемента α и β има шематски облик

$$(5)\qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ m-1 & m \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

3°. Услов да код симетричне групе S_4 елементи 1 и 2 буду раздвојени са једним елементом (3 или 4) гласи

$$\begin{matrix} k\to 1 & & k\to 2 \\ k+2\to 2 & \text{или} & k+2\to 1, \end{matrix}$$

односно

$$\begin{matrix} 1\to 1 & & 2\to 1 & & 1\to 1 & & 2\to 2 \\ 3\to 2 & \text{или} & 4\to 2 & \text{или} & 3\to 2 & \text{или} & 4\to 1. \end{matrix}$$

Њима одговарају пермутације

$$\begin{matrix} (23)=1324 & (1342)=3142 & (123)=2314 & (134)=3241 \\ (243)=1423 & (142)=4132 & (1243)=2413 & (14)=4231. \end{matrix}$$

Услов раздвојености α и β са p елемената, могао би, слично претходном, шематски бити приказан

$$\begin{bmatrix} 1 & 2+p \\ 2 & 3+p \\ \vdots & \vdots \\ m-p-1 & m \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{6}$$

II. Интересантне особине показује и комбинација по два суседна елемента тј. скуп пермутација којих су не само α и β суседни него исто тако и γ и δ $(\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta)$. Услови да једна таква пермутација P припада наведеном скупу гласе

$$\begin{matrix} k\to\alpha & & k'\to\gamma \\ k+1\to\beta & & k'+1\to\delta \end{matrix}$$

при чему k и k' пролазе кроз све природне бројеве $1, 2, \ldots, m$ уз услов $k \neq k'$, $k+1 \neq k'$ и $k \neq k'+1$.

Тако нпр. за $m=4$ имамо за сваку пермутацију по четири услова

$$\begin{matrix} 1\to\alpha & & 3\to\alpha \\ 2\to\beta & & 4\to\beta \\ 3\to\gamma & & 1\to\gamma \\ 4\to\delta & \text{или} & 2\to\delta. \end{matrix}$$

Поред ових, имамо још и све оне случајеве који настају кад се елементи α, β, γ, δ, у сваком ступцу пермутују на ова четири начина

$$H=1+(\alpha\beta)+(\gamma\delta)+(\alpha\beta)\,(\gamma\delta).$$

Исти услови могли би очевидније бити приказани као

$$(7) \qquad \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,4\,1\,2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}\alpha & \beta & \alpha & \beta\\ \beta & \alpha & \beta & \alpha\\ \gamma & \gamma & \delta & \delta\\ \delta & \delta & \gamma & \gamma\end{bmatrix}.$$

III. Најважније питање које се може поставити састоји се у томе, да се испита шта претставља скуп таквих пермутација. Уопше узев, скуп пермутација, код којих су два одређена елемента њена суседна или по два различита одређена елемента суседна, не чини групу. Међутим, има примера, тј. посебних случајева да скуп таквих пермутација чини групу. Тако нпр. скуп пермутација од четири елемента 1, 2, 3, 4 код којих су 1, 2 суседна а тако исто и 3, 4 чини групу идентичну са групом познате функције

$$(8) \qquad x_1 x_2 + x_3 x_4.$$

Исто тако нпр. групу

$$(9) \qquad 1, \quad (12)\,(34), \quad (13)\,(24), \quad (14)\,(23)$$

односно

$$1234, \quad 2143, \quad 3412, \quad 4321$$

чини, за поменута четири елемента, и скуп оних пермутација код којих су истовремено оба пара 1, 2 и 3, 4 или у истом смеру суседна, или у супротном.

Али иако скуп таквих пермутација уопште не чини групу, има примера да показују неке особине сличне особинама група.

Тако нпр. скуп H оних пермутација од 1, 2, 3, 4 код којих су 1, 2 суседни елементи, као што смо видели, гласи

$$1=1234, \quad (34)=1243, \quad (132)=3124, \quad (1432)=4123, \quad (13)\,(24)=3412,$$
$$(1423)=4312, \quad (12)=2134, \quad (12)\,(34)=2143,$$
$$(13)=3214, \quad (143)=4213, \quad (1324)=3421 \quad \text{и} \quad (14)\,(23)=4321.$$

Скуп H не чини групу, јер иако садржи јединичну пермутацију производ два његова члана

$$(132)\cdot(1432)=(1243)=\begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}=2413$$

даје пермутацију која не припада скупу H.

Али ако се скуп H подели на два подскупа H^+ и H^-, при чему H^+ претставља све оне пермутације код којих су 1, 2 суседни у смеру 12, а H^- пермутације са смером суседности 21, онда се H^+ може написати

$$H^+ = I + t_1 I + t_2 I. \tag{10}$$

I означава групу

$$I = 1 + (34), \tag{11}$$

а t_1 и t_2 две које било пермутације из H^+ али изван I. Тиме је скуп H^+ репродукован помоћу I, t_1 и t_2, односно разложен по модулу I, који је група у скупу H^+.

Исто тако може се разложити и скуп H. Група која овде служи као модуо гласи

$$I = 1 + (12) + (34) + (12)\ (34), \tag{12}$$

а само разлагање има облик

$$H = I + s\,I + t\,I, \quad s, t \in H;\ s, t \in' I. \tag{13}$$

Оба резултата су општи. Уочимо скуп H оних пермутација од m цифара код којих су 1, 2 суседни у смеру 12. Таквих пермутација има $(m-1)!$ тј. то су све оне које настају размештајем

$$(12)\,345 \ldots m,$$

при чему се (12) са истим смером рачуна као јединствен елеменат. Модуо I по коме се H^+ разлаже састоји се из свих пермутација које се могу начинити од елемената $3, 4, \ldots, m$ и чији је број $(m-2)!$ Зато је број комплекса

$$\frac{(m-1)!}{(m-2)!} = m - 1.$$

Према томе је

$$H^+ = I + t_1 I + t_2 I + \cdots + t_{m-2} I. \tag{14}$$

Разлагање скупа H, тј. скупа пермутација код којих су 1, 2 суседни у оба смера има исту особину, само модулу I треба, поред наведених пермутација, додати и транспозицију (12) као и оне, које се комбинују помоћу (12) и групе пермутација које су служиле као модуо у разлагању H^+.

Оваква особина скупова H^+ и H одговара тзв. Mischgruppe*, а подскуп I језгру (Kern) једног таквог скупа.

---

* Група настала мешањем, распоређивањем.