Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. VIII, 3–4, (1956), Beograd
Yougoslavie

УОПШТЕЊЕ НЕКИХ РЕЗУЛТАТА У ПРОБЛЕМУ ДВАЈУ ТЕЛА С ПРОМЕНЉИВИМ МАСАМА

ДОБРИВОЈЕ МИХАИЛОВИЋ, БЕОГРАД

Предмет овога чланка претставља уопштење једне релације, до које је аутор дошао у своме чланку [2], а која везује секторске брзине у проблему двају тела са променљивим масама и класичном проблему двају тела. Упоредо са овим уопштењем аутор успоставља једну просту релацију између вектора брзина у једном и другом проблему, но која је општијег карактера од оне до које је дошао у [2].

Аутор је у чланку [3] показао, да се векторска диференцијална једначина релативног кретања једне променљиве масе у односу на другу

$$\frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2} = -\frac{M}{s^3}\mathfrak{s}, \quad (s = |\mathfrak{s}| = \overline{m_1 m_2}) \tag{1}$$

трансформацијама:

$$\mathfrak{r} = F(t)\cdot\mathfrak{s}, \quad \tau = \varphi(t), \quad M = f(t) \tag{2}$$

где је $\mathfrak{r}$ нова вектор-функција, τ-нова независно променљива, а $M = m_1 + m_2$, може свести на диференцијалну једначину:

$$\frac{d^2 \mathfrak{r}}{d\tau^2} + \frac{\mathfrak{r}}{\rho^3} = 0, \quad (\rho = |\mathfrak{r}|, \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2). \tag{3}$$

Овим трансформацијама се проблем са променљивим збиром маса своди на проблем непоремећеног релативног кеплеровског кретања, а спиралне путање у првом проблему се пресликавају на коничне пресеке у класичном проблему двају тела. Аутор је у [3] одредио облике функција $F(t)$, $\varphi(t)$ и $f(t)$ и нашао:

$$F(t) = -\frac{1}{C(C_2 t + C_3)}; \quad \varphi(t) = -\frac{1}{C^2(C_2 t + C_3)} - \frac{C_1}{C}; \quad f(t) = -\frac{C_2^2}{C}\cdot\frac{1}{C_2 t + C_3}, \tag{4}$$

где су C, C_1, C_2 и C_3 константе. Функције (4) претстављају најопштији облик функција, за које се трансформацијама (2) векторска диференцијална једначина (1) може редуковати на једначину (3). За специјалне вредности констаната

$$C=\alpha, \quad C_1=0, \quad C_2=-1, \quad C_3=-\frac{1}{\alpha} \tag{5}$$

функције (4) се своде на следеће:

$$F^*(t)=\frac{1}{1+\alpha t}, \quad \varphi^*(t)=\frac{1}{\alpha(1+\alpha t)}, \quad f^*(t)=\frac{1}{1+\alpha t}, \tag{6}$$

а трансформације (2) се своде на трансформације *Баширев*-а које је он у [1] користио за квалитативну анализу облика путања у проблему двају тела са промењљивим масама.

Из векторске диференцијалне једначине (1) произилази интеграл секторске брзине за проблем са промењљивим масама

$$\mathfrak{s}\times\frac{d\mathfrak{s}}{dt}=\mathfrak{C}, \tag{7}$$

где $\mathfrak{C}$ означује константни вектор. Међутим овај интеграл за кеплеровско непоремећено кретање следује из векторске диференцијалне једначине (3) у облику:

$$\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}=\mathfrak{C}_1, \tag{8}$$

где је $\mathfrak{v}=\dfrac{d\mathfrak{r}}{d\tau}$, а $\mathfrak{C}_1$ претставља векторску интеграциону константу.

Из прве релације (2):

$$\mathfrak{r}=F(t)\cdot\mathfrak{s}, \tag{2'}$$

диференцирањем по промењљивој τ, произилази:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=\frac{d}{d\tau}[F(t)\mathfrak{s}]=\frac{d}{dt}[F(t)\mathfrak{s}]\cdot\frac{dt}{d\tau}. \tag{9}$$

Према другој од релација (2) $\tau=\varphi(t)$, при чему за функцију $\varphi(t)$ егзистира инверзна функција и $\varphi'(t)\neq 0$, је $\dfrac{dt}{d\tau}=1/\varphi'(t)$. Стога релација (9) постаје

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=\left\{F(t)\frac{d\mathfrak{s}}{dt}+F'(t)\cdot\mathfrak{s}\right\}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)};$$

или

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=\frac{F(t)}{\varphi'(t)}\cdot\frac{d\mathfrak{s}}{dt}+\frac{F'(t)}{\varphi'(t)}\cdot\mathfrak{s}. \tag{10}$$

Заменом вектора $\mathfrak{r}$ из једначине (2) и вектора $\dfrac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}$ из (10) у (8) добија се

$$F(t)\cdot\mathfrak{s}\times\left\{\frac{F(t)}{\varphi'(t)}\cdot\frac{d\mathfrak{s}}{dt}+\frac{F'(t)}{\varphi'(t)}\cdot\mathfrak{s}\right\}=\mathfrak{C}_1,$$

одакле произилази:

$$\frac{[F(t)]^2}{\varphi'(t)}\left(\mathfrak{s}\times\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)=\mathfrak{C}_1,$$

Међутим према (7) је

(11) $$\frac{[F(t)]^2}{\varphi'(t)}\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1.$$

Из друге од релација (4) добијамо:

$$\varphi'(t)=C_2/C^2\,(C_2\,t+C_3)^2,$$

па је на основу ове и прве релације (4)

(12) $$[F(t)]^2/\varphi'(t)=1/C_2.$$

Релација (11) на основу (12) постаје

(13) $$\mathfrak{C}=C_2\,\mathfrak{C}_1.$$

Овом релацијом је успостављена проста веза између секторских брзина у проблему са променљивим и ономе са сталним масама. Ако се са A означи положај тачке променљиве масе на спиралној путањи, а са P одговарајући положај пресликане тачке трансформацијама (2) на коничном пресеку, тада се из релације (13) може извести следећи закључак.

У случају када је константа $C_2>0$, равни путања тачака A и P имају исту оријентацију, а смер обилажења тачке A по спиралној путањи је исти као и смер обилажења тачке P по коничном пресеку. Ако је константа $C_2<0$, тада равни путања тачака A и P имају супротну оријентацију; смер обилажења тачке A променљиве масе по спиралној путањи супротан је смеру обилажења пресликане тачке P по коничном пресеку.

Овај закључак је општијег карактера од онога који је аутор извео у своме чланку [2]. Стварно, ако се пресликавање изврши на основу трансформација (6) које у [1] користи Батирев, тада је према (5)

(14) $$C_2=-1$$

те релација (13) даје

(15) $$\mathfrak{C}=-\mathfrak{C}_1,$$

а ово је релација (12) до које је аутор дошао у [2]. Из ње произилази тамо изведени закључак, да су равни путања тачака A и P супротно оријентисане, при чему је смер обилажења тачке A по спиралној путањи супротан смеру обилажења пресликане тачке P по коничном пресеку.