BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES MATHÉMATICIENS ET PHYSICIENS DE LA R. P. DE SERBIE YOUGOSLAVIE

ВЕСНИК

ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

VIII

1–2

БЕОГРАД, 1956

САДРЖАЈ

		Страна
Dragoslav S. Mitrinovitch:	Sur certaines équations aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues	3
Borivoj Rachajsky:	Théorème de Jacobi pour le système d'équations en involution de Darboux-Lie	7
Dragoslav S. Mitrinovitch:	Sur certaines relations restant valables si l'on permute les opérateurs y intervenant	15
Voïn Daïovitch:	Sur l'existence des valeurs limites de la résultante des fonctions appartenant à la classe H_{δ}, $\delta > 1$	23
Lazar Karadžić:	Quelques conséquences d'un théorème des séries fonctionnelles	29
Constantin Orloff:	Simplification de la méthode de Graeffe au moyen des spectres mathématiques	39
Božidar Popović:	Specialperturboj de vektoraj elementoj de planedetorbito	47
Драгољуб Марковић:	О приближној факторизацији полинома	53
Часлав В. Станојевић:	О једном ставу *K. L. Chung*-а	59
Зарија Булатовић:	Један начин свођења опште једначине коничних пресека на канонични облик	61
Виктор Јанекоски:	Прилог доказима неких ставова векторске алгебре	65
Ružica S. Mitrinović:	Novi elementi planetoida 1952 UV_1 = 1932 DC	73
Ружица С. Митриновић:	О кометама које су посматране током 1955 год.	77
Реферати и белешке		83

Весник Друштва математичара и физичара НРС издаје Друштво математичара и физичара НРС у два двоброја годишње. Годишња претплата износи 400.— дин. коју треба слати на чек. рачун бр. 102-Т-119 Друштву математичара и физичара НРС у Београду са назнаком на полеђини чека да се претплата шаље за „Весник Друштва математичара и физичара НРС".

Радове и сву преписку у вези с часописом „Весник" слати на адресу: Уређивачки одбор Весника Друштва математичара и физичара НРС, Београд, пошт. фах 791.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. VIII, 1–2 (1956), Beograd
Yougoslavie

SUR CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES À DEUX FONCTIONS INCONNUES

par **DRAGOSLAV S. MITRINOVITCH, BEOGRAD**

On indique un nouveau procédé permettant de trouver des solutions $\{u(x, y), v(x, y)\}$ des équations indéterminées (1), (5), (10), (14), etc.

1. À plusieurs reprises nous avons étudié certaines équations différentielles ordinaires indéterminées et avons indiqué trois procédés d'intégration de telles équations dans des cas assez généraux [1]. À présent, nous signalerons un procédé fournissant des solutions $\{u(x, y), v(x, y)\}$ de l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{k}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \qquad (k = \text{const}), \tag{1}$$

ainsi que de plusieurs autres équations.

Posons dans (1)

$$u = T(v), \tag{2}$$

T étant une fonction arbitraire de v, supposée dérivable, avec

$$T' \equiv dT/dv, \qquad T'' \equiv d^2T/dv^2.$$

L'équation (1), grâce à la transformation (2), devient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{vT''}{kT - vT'}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad (kT - vT' \not\equiv 0), \tag{3}$$

ce qui est l'équation de *Hoppe* [2] (qu'on nomme quelquefois équation de *Goursat*).

La solution générale de l'équation (3) est définie par la relation

$$\int dv \exp\left(-\int \frac{vT''}{kT - vT'}\,dv\right) = X + Y, \tag{4}$$

avec $X \equiv X(x)$, $Y \equiv Y(y)$ fonctions arbitraires, supposées dérivables.

Par suite, la forme de la fonction T étant donnée, on aura, à l'aide de (4), l'inconnue v en fonction de $X + Y$ et ensuite, en vertu de (2), l'autre inconnue

$$u = T\{v(X + Y)\}.$$

La solution $\{u(x, y)\ v(x, y)\}$ de (1), obtenue plus haut, contient trois fonctions arbitraires.

Les fonctions

$$u = (X + Y)^{(\lambda^2 - k\lambda)/(\lambda^2 - k)}, \quad v = (X + Y)^{(\lambda - k)/(\lambda^2 - k)}$$

avec $\lambda = \text{const} \neq \pm k^{1/2}$, présentent une solution particulière de (1).

2. Considérons maintenant l'équation indéterminée

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big/ \frac{\partial u}{\partial y} = k \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big/ \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad (k = \text{const} \neq 0), \tag{5}$$

et essayons d'en trouver des solutions $\{u(x, y),\ v(x, y)\}$ en partant de la relation

$$u = T(v). \tag{6}$$

On a, après calculs effectués, l'équation

$$(1 - k)\, T' \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 3\, T'' \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + T''' \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^3 = 0. \tag{7}$$

Pour intégrer la dernière équation, il faut parallèlement avec (7) considérer l'équation différentielle ordinaire

$$(1 - k)\, T' v''' + 3\, T'' v' v'' + T''' (v')^3 = 0, \tag{8}$$

où $v^{(i)} \equiv d^i v / dx^i$, $i = 1, 2, 3$.

En posant $v' = p$ dans (8), on obtient l'équation

$$(1 - k)\, T' \left[\left(\frac{dp}{dv}\right)^2 + p \frac{d^2 p}{dv^2}\right] + 3\, T'' p \frac{dp}{dv} + T''' p^2 = 0,$$

laquelle se transforme en

$$(1 - k)\, T' \left(2P^2 + \frac{dP}{dv}\right) + 3\, T'' P + T''' = 0, \quad p = \exp\left(\int P dv\right). \tag{9}$$

L'équation (9) est une équation de *Riccati* pour $P(v)$. Par suite, c'est un problème de plus dont la solution dépend de cette célèbre équation différentielle.

Pour $k = 1$, l'équation (9) devient très simple.

3. Prenons enfin l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{a'}{a}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'}\right) \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{10}$$

avec $k=\text{const}$, $a=a(t)$, $a'=da/dt$, $a''=d^2a/dt^2$.

L'équation (10), en y faisant

$$f=T(a, y). \tag{11}$$

prend la forme suivante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial a^2}+\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial a}=0 \tag{12}$$

et ensuite

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+k\frac{\partial T}{\partial y}=0, \quad (a=\exp\lambda). \tag{13}$$

Dans le cas où $k=0$, l'équation (10) devient une transformation de l'équation de *Laplace*.

N. Saltikow {*cf.* **[3]**, p. 225—227}, par une voie assez compliquée, a intégré l'équation (10) pour le cas particulier $k=0$.

4. Lorsqu'on donne, par avance, une des fonctions u et v, par exemple, $v=v_0(x, y)$, l'équation (1) prend la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}=F(x, y)\, u,$$

ce qui est une équation dont la solution peut être determinée pour des formes très particulières de $F(x, y)$. Ce fait montre que le procédé, appliqué dans les paragraphes 1—3 de cette Note, présente quelque intérêt.

5. Le procédé employé plus haut s'applique aussi, avec succès, par exemple aux équations suivantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big/\frac{\partial u}{\partial y}=k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big/\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big/\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big/\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \tag{14}$$

etc.

Observons qu'on pourrait mettre en correspondance l'équation de *Demoulin* {*cf.* **[3]**, p. 221}

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+f(z)\, F(x, y)$$

{$f(z)$, $F(x, y)$ fonctions quelconques}

avec une classe d'équations aux dérivées partielles indéterminées.

Il serait intéressant de développer les résultats de cette Note, en appliquant le procédé indiqué à différentes équations aux dérivées partielles indéterminées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinovitch: 1° *Annuaire de la Faculté de philosophie de l'Université de Skopje* — Section des sciences naturelles, t. 3, № 6 (1950), 16 pages;
2° *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 232, 1951, p. 681—683, p. 1334—1336.

[2] *Cf.* par exemple, H. Laurent, *Traité d'Analyse*, t. VI, 1890, Paris, p. 221.

[3] N. Saltykow, *Bulletin de l'Académie des sciences mathématiques et naturelles*, Belgrade, t. 6, 1939, p. 215—246.

O NEKIM PARCIJALNIM JEDNAČINAMA SA DVE NEPOZNATE FUNKCIJE

D. S. MITRINOVIĆ, BEOGRAD

Sadržaj

U ovom članku je dat jedan postupak za iznalaženje rešenja

$$\{u(x, y),\ v(x, y)\}$$

parcijalne jednačine (1), sa dve nepoznate funkcije u i v.

Ovaj postupak je primenjen i na druge parcijalne jednačine [jednačine (5), (10)] i ukazana je mogućnost njegove primene na parcijalne jednačine oblika (14).

*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R.P. de Serbie
Vol. VIII, 1—2 (1956), Beograd
Yougoslavie*

THÉORÈME DE JACOBI POUR LE SYSTÈME[1] D'ÉQUATIONS EN INVOLUTION DE DARBOUX-LIE

par **BORIVOJ RACHAJSKY**, BEOGRAD.

Sommaire. Formation de l'intégrale générale des caractéristiques à l'aide de l'intégrale complète pour un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de Darboux-Lie.

Introduction. Jacobi [1] a étudié ce problème concernant une équation du premier ordre. Les résultats de ces recherches sont généralisés par N. Saltykow [2, 4], Th. De-Donder [3] etc.

Pour le cas d'un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de Darboux-Lie ce problème avait été traité par E. Goursat [5]. Cependant son procédé peut être simplifié et mis sous la forme analogue à celle de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. On y reussit grâce à la condition qui doit satisfaire l'intégrale complète du système consideré que nous venons de trouver [6].

L'étude de ce problème est d'autant plus intéressant que N. Saltykow avait récemment résolu le problème inverse [7]. Généralisant la notion des fonctions des caractéristiques il avait obtenu les conditions nécessaires et suffisantes pour la formation d'une intégrale complète du système d'équations Darboux-Lie à l'aide de l'intégrale des caractéristiques.

I. Considérons le système en involution de Darboux-Lie

$$\left\{\begin{array}{l} r + f(x, y, z, p, q, s) = 0 \\ t + \varphi(x, y, z, p, q, s) = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

et le système correspondant des caractéristiques

$$dx = \frac{dy}{f_s} = \frac{dz}{p + f_s q} = \frac{dp}{-f + f_s s} = \frac{dq}{s - \varphi f_s} = \frac{ds}{-D_y f}. \tag{1'}$$

[1]) Саопштено у Друштву математичара и физичара НР Србије 10.IV.1956.

E. Goursat [5], partant de l'intégrale complète

$$F(x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4) = 0 \tag{2}$$

en tire, grâce aux considérations géometriques, une courbe caractéristiques moyennant l'équation (2) et l'équation suivante

$$\frac{\partial F}{\partial C_1} + \frac{\partial F}{\partial C_2}\frac{dC_2}{dC_1} + \frac{\partial F}{\partial C_3}\frac{dC_3}{dC_1} + \frac{\partial F}{\partial C_4}\frac{dC_4}{dC_1} = 0. \tag{3}$$

L'équation (3) définit la fonction y de la variable x. Parce que les multiplicités correspodantes des caractéristiques des éléments du second ordre satisfont aux équations différentielles des caractéristiques, E. Goursat obtient deux relations

$$\Phi_i\left(C_1, C_2, C_3, C_4, \frac{dC_2}{dC_1}, \frac{dC_3}{dC_1}, \frac{dC_4}{dC_1}\right) = 0, \quad (i = 1, 2) \tag{4}$$

entre les sept paramètres $C_1, C_2, C_3, C_4, \frac{dC_2}{dC_1}, \frac{dC_3}{dC_1}, \frac{dC_4}{dC_1}$ figurant dans l'équation (3). Éliminant grâce aux relations (4) deux des paramètres, la courbe caractéristique ne depend que de cinq paramètres. En pratique la détermination des relations mentionnées (4) et les éliminations correspodantes présentent souvent de très grandes difficultés.

II. Mettons l'intégrale complète du système (1) sous la forme

$$z = V(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4), \tag{5}$$

en posant

$$\Delta_{xy} \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right) \neq 0. \tag{6}$$

Il est aisé de démontrer que les formules

$$z = V, \ p = V_x, \ q = V_y, \ s = V_{xy} \tag{5'}$$

définissent les quatre premières intégrales du système (1′). En effet, on a

$$\frac{dz}{dx} = V_x + V_y\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = V_{x^2} + V_{xy}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dq}{dx} = V_{xy} + V_{y^2}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{ds}{dx} = V_{x^2y} + V_{xy^2}\frac{dy}{dx},$$

et en vertu des formules connues [6]

$$(f_s) = -\frac{\Delta_{x^2}}{\Delta_{xy}}, \quad -(D_y f) = V_{x^2y} - \frac{\Delta_{x^2}}{\Delta_{xy}} V_{xy^2}$$

et aussi

$$\frac{dy}{dx} = (f_s),$$

le symbole ( ) désignant le résultat de la substitution de z, p, q, s respectivement par V, V_x, V_y, V_{xy} et Δ_{x^2}, Δ_{y^2} les déterminants fonctionels

$$\Delta_{x^2} \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{x^2}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right), \quad \Delta_{y^2} \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{y^2}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right),$$

on obtient, en éliminant les constantes C_i définies par les formules (5′), les équations suivantes

$$\frac{dz}{dx} = p + qf_s; \quad \frac{dp}{dx} = -f + sf_s.$$

$$\frac{dq}{dx} = s - \varphi f_s, \quad \frac{ds}{dx} = -D_y f.$$

III. En différentiant les identités évidentes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f\left(x, y, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \varphi\left(x, y, V, \frac{\partial V}{dx}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

par rapport à C_k on obtient

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial C_k} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial C_k} + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_k} + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_k} + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial C_k} = 0$$

$$\text{(8)} \qquad \frac{\partial^3 V}{\partial y^2 \partial C_k} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial C_k} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_k} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_k} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial C_k} = 0,$$

$$(k = 1, 2, 3, 4).$$

Grâce à l'involution du système (1) et aux équaiions des caractéristiques (1') on a les relations

(9) $$\frac{dy}{dx} = (f_s) = \frac{1}{(\varphi_s)}.$$

Il est connu que l'intégrale complète (5) vérifie identiquement la condition, [6],

(10) $$\Delta_{x^2}\,\Delta_{y^2} - \Delta_{xy}^2 = 0.$$

En vertu de (6), on conclut de (10)

(11) $$\Delta_{x^2} \neq 0, \quad \Delta_{y^2} \neq 0.$$

En éliminant $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)$ des équations (7) et (8) on obtient, en vertu des (6), (9) et (11), deux relations pour définir la fonction y

(12 $$\Delta_{x^2}\,dx + \Delta_{xy}\,dy = 0,$$

(13) $$\Delta_{xy}\,dx + \Delta_{y^2}\,dy = 0.$$

Or, elles se confondent, grâce à la condition (10).

IV. Introduisons les symboles suivants

$$(i,j,k) \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y}{C_i, C_j, C_k}\right), \quad (i,j) \equiv D\left(\frac{V_x, V_y}{C_i, C_j}\right), \quad \underline{(i,j)} \equiv D\left(\frac{V, V_x}{C_i, C_j}\right), \quad \overline{(i,j)} \equiv D\left(\frac{V, V_y}{C_i, C_j}\right)$$

Considérons trois hypothèses suivantes:

a) Supposons, d'abord, que le système (1) n'admet pas d'intégrales intermédiaires avec une constante arbitraire, c'est-à-dire que $(i,j,k) \neq 0$, $(i,j,k = 1, 2, 3, 4)$. Utilisons les identités évidentes

(14) $$\left\{\begin{aligned} &\underline{(i,l)}\,(i,j,k)_x - \underline{(i,k)}\,(i,j,l)_x + \underline{(i,j)}\,(i,k,l)_x = V_i\,\Delta_{x^2},\\ &\underline{(i,l)}\,(i,j,k)_y - \underline{(i,k)}\,(i,j,l)_y + \underline{(i,j)}\,(i,k,l)_y = V_i\,\Delta_{xy},\\ &\overline{(i,l)}\,(i,j,k)_x - \overline{(i,k)}\,(i,j,l)_x + \overline{(i,j)}\,(i,k,l)_x = V_i\,\Delta_{xy},\\ &\overline{(i,l)}\,(i,j,k)_y - \overline{(i,k)}\,(i,j,l)_y + \overline{(i,j)}\,(i,k,l)_y = V_i\,\Delta_{y^2},\end{aligned}\right.$$

où $(\ )_x$ et $(\ )_y$ désignant les dérivées partielles correspodantes par rapport aux x et y. On a de plus les identités

$$\underline{(i,l)}\ (\overline{i,k}) - \underline{(i,k)}\ (\overline{i,l}) = -V_i\,(i,k,l),$$

$$\underline{(i,j)}\ (\overline{i,k}) - \underline{(l,k)}\ (\overline{l,j}) = V_i\,(i,j,k).$$

Formons les identités suivantes

$$\underline{(i,k)}\ \Delta_{xy} - (\overline{i,k})\ \Delta_{x^2} = (i,k,l)\ (l,j,k)_x - (i,j,k)\ (i,k,l)_x$$

$$\underline{(i,k)}\ \Delta_{y^2} - (\overline{i,k})\ \Delta_{xy} = (l,k,l)\ (i,j,k)_y - (i,j,k)\ (l,k,l)_y$$

qui donnent, grâce à la condition (10)

$$\text{(10')}\qquad \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{(i,k,l)}{(i,j,k)}\right]}{\Delta_{x^2}} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{(i,k,l)}{(i,j,k)}\right]}{\Delta_{xy}}.$$

L'équation (12), introduisant la désignation

$$\alpha \equiv \frac{(i,k,l)}{(i,j,k)},$$

admet l'intégrale sous le forme suivante

$$\alpha = \text{const.},\quad \alpha_x \neq 0,\quad \alpha_y \neq 0.$$

En effet, grâce aux conditions (6), (10), (11) et (10') on peut toujours choisir les index i, j, k, l de telle manière que la fonction α soit dépandue des variables x et y.

On a de même, d'une manière analogue, les intégrales de l'équation mentionnée

$$\beta \equiv \frac{(i,j,l)}{(i,j,k)} = \text{const.},\quad \gamma \equiv \frac{(j,k,l)}{(i,j,k)} = \text{const.}$$

Or, α, β, γ ne sont pas distinctes par rapport aux variables x et y. Démontrons cela, par exemple, pour les fonctions α et β. Considérons le déterminant

$$A \equiv D\left(\frac{\alpha, \beta}{x, y}\right).$$

Substituant y les expressionns α et β, on obtient la relation

$$(15) \qquad A' = \frac{1}{(i,j,k)^3}\begin{vmatrix} (i,j,k) & (i,j,k)_x & (i,j,k)_y \\ (i,j,l) & (i,j,l)_x & (i,j,l)_y \\ (i,k,l) & (i,k,l)_x & (i,k,l)_y \end{vmatrix}$$

D'autre part, grâce aux identités (14), on obtient la relation suivante

$$V_l(\Delta_{x^2}\Delta_{y^2} - \Delta_{xy}^2) = \begin{vmatrix} (i,j,k) & (\quad)_x & (\quad)_y \\ (i,j,l) & (\quad)_x & (\quad)_y \\ (i,k,l) & (\quad)_x & (\quad)_y \end{vmatrix}$$

et l'on a en vertu de (15) et (10),

$$A = \frac{V_i(\Delta_{x^2}\Delta_{y^2} - \Delta_{xy}^2)}{(i,k,l)^3} = 0$$

De cette manière on peut prendre

$$(16) \qquad \alpha = \text{const.}, \quad \alpha_x, \alpha_y \neq 0$$

pour l'intégrale cherchée des caractéristiques.

b) Passons, à présent, à la seconde hypothèse. Si la fonction inconnue ne figure pas dans le système (1) et C_k représente la constante arbitraire additive dans l'intégrale complète, alors, en vertu de (16), l'intégrale des caractéristiques admet la forme suivante

$$\frac{(i,l)}{(i,j)} = \text{const.}$$

c) Supposons, enfin, conservant l'hypothèse de b) que le système (1) ait une intégrale intermédiaire ayant la constante C_i, c'est-à-dire que l'on a $(j,k,l) = 0$. Dans ce cas l'intégrale cherchée des caractéristiques, admet la forme

$$\frac{V_{xl}}{V_{xj}} = \text{const}, \quad \text{ou} \quad \frac{V_{yl}}{V_{yj}} = \text{const.}$$

Conclusion. L'intégrale générale des caractéristiques est définie, en vertu de l'intégrale complète, par les formules suivantes

$$z=V,\ p=V_x,\ q=V_y,\ s=V_{xy},\ \alpha\equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y}{C_i, C_j, C_k}\right):D\left(\frac{V, V_x, V_y}{C_i, C_l, C_k}\right)=C_5,$$

$$\alpha_x \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_y \neq 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik,* Gesammelte Werke, Berlin 1884, S. 157.

[2] Saltykow, *Généralisation de la première méthode de Jacobi d'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre,* Com. de la Société Math. de Kharkow 1898; Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5 serie t. V. 1899 p. 435; Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques 1903.

[3] Th. De-Donder, *Théorie des invariants intégraux,* Paris 1927; Sur les transformations de contact spéciales et la théoreme de Jacobi, Rend. della R. Ac. dei Lincei, classe de fis mat. t. 20 serie 5.

[4] Saltykow, *Méthodes intégration des équations eux dérivées partielles du premier ordre,* Academie Serbe, t. CXXIX, Beograd, 1947, en serbe.

[5] E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre,* t. II, p. 73.

[6] B. Rachajsky, *Systèmes des équations aux dérivées partielles du second ordre,* Bulletin de la Société des math. et phys. de la Serbie, t. VII, 1—2.

[7] N. Saltykow, *Fonctions caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre,* Glas srpske akademije nauka CXCVIII, Beograd, 1950, en serbe.

JACOBI-ЕВА ТЕОРЕМА ЗА СИСТЕМЕ ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА У ИНВОЛУЦИЈИ DARBOUX-LIE-A

БОРИВОЈЕ РАШАЈСКИ, БЕОГРАД

Садржај

Познато је да постоји више аналогних особина између парцијалних једначина I реда и система парцијалних једначина II реда у инволуцији Darboux-Lie-a. Тако недавно, [7], су помоћу карактеристичних функција, дати потребни и довољни услови за формирање потпуног интеграла одговарајућег система II реда, када је познат општи интеграл тзв. система диференцијалних једначина за карактеристике.

У овом чланку третира се проблем који је иннерзан поменутом: формирање општег интеграла карактеристика помоћу потпуног интеграла. Познато је да је овај проблем у теорији парцијалних једначина I реда решен тзв. Jacobi-евом теоремом, [1], [2], [4].

Користећи услов (10), [6], који потпуни интеграл система задовољава, добијамо следећи резултат, који, пак, по својој форми највише одговара наведеној Jacobi-евој теореми:

Општи интеграл карактеристика дефинисан је помоћу потпуног интеграла (5) следећим формулама:

$$z = V(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4), \quad p = V_x, \quad q = V_y, \quad s = V_{xy},$$

$$a \equiv D\left(\frac{V, V_x, V_y}{C_i, C_j, C_k}\right) : D\left(\frac{V, V_x, V_y}{C_i, C_l, C_k}\right) = C_5, \quad a_x \neq 0, \quad a_y \neq 0.$$

Дате су и одговарајуће формуле за системе специјалнијих особина.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R.P. de Serbie
Vol. VIII, 1—2 (1956), Beograd
Yougoslavie

SUR CERTAINES RELATIONS RESTANT VALABLES SI L'ON PERMUTE LES OPÉRATEURS Y INTERVENANT*

par DRAGOSLAV S. MITRINOVITCH, BEOGRAD

1. Dans le livre {cf. [1], p. 121} de *Pólya* et de *Szegö* on trouve un problème, numéroté par 28, que voici:

„Es seien $a, b, c, \dots, k, l$ irgendweise nichtnegative ganze Zahlen. Es ist

$$\begin{aligned}&\max(a,b,c,\dots,k,l)\\&= a+b+c+\dots+k+l\\&-\min(a,b)-\min(a,c)-\dots-\min(k,l)\\&+\min(a,b,c)+\dots\\&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\&\pm\min(a,b,c,\dots,k,l)."\end{aligned}$$

À la page 329 du livre cité se trouve la vérification du résultat susdit. Nous allons appeler la relation indiquée: *relation* $(P-S)$.

Dans ce qui suit nous allons donner une nouvelle démonstration de la relation $(P-S)$, en montrant à la fois que la relation $(P-S)$ est valable non seulement pour les nombres

$$a, b, c, \dots, k, l$$

appartenant à l'ensemble

$$0, 1, 2, 3, \dots,$$

mais aussi pour les n nombres réels quelconques.

Également, nous montrerons que la **relation $(P-S)$ reste valable, si** l'on y permute les opérateurs max et min.

---

* Nous sommes redevables à Monsieur le Professeur *G. Pólya* qui a bien voulu lire cette Note en manuscrit.

2. Pour tout l'ensemble E des nombres réels

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

les deux identités suivantes sont valables:

$$\begin{aligned}
(1) \qquad \max(a_1, a_2, \ldots, a_n) = & \sum \min(a_1) \\
& - \sum \min(a_1, a_2) \\
& + \sum \min(a_1, a_2, a_3) \\
& - \ldots \\
& + (-1)^{k-1} \sum \min(a_1, a_2, \ldots, a_k) \\
& + \ldots \\
& + (-1)^{n-1} \sum \min(a_1, a_2, \ldots, a_n);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \qquad \min(a_1, a_2, \ldots, a_n) = & \sum \max(a_1) \\
& - \sum \max(a_1, a_2) \\
& + \sum \max(a_1, a_2, a_3) \\
& - \ldots \\
& + (-1)^{k-1} \sum \max(a_1, a_2, \ldots, a_k) \\
& + \ldots \\
& + (-1)^{n-1} \sum \max(a_1, a_2, \ldots, a_n).
\end{aligned}$$

Chaque Σ dans les relations (1) et (2) est étendue à toutes les combinaisons de la classe indiquée. Ainsi, par exemple, la somme $\Sigma \min(a_1, a_2)$ signifie:

$$\begin{aligned}
\min(a_1, a_2) + \min(a_1, a_3) + \min(a_1, a_4) + \ldots + \min(a_1, a_n) \\
+ \min(a_2, a_3) + \min(a_2, a_4) + \ldots + \min(a_2, a_n) \\
+ \ldots \\
+ \min(a_{n-1}, a_n);
\end{aligned}$$

la somme $\Sigma \max(a_1)$ représente

$$\begin{aligned}
& \max(a_1) + \max(a_2) + \ldots + \max(a_n) \\
& = a_1 + a_2 + \ldots + a_n;
\end{aligned}$$

etc.

Sans nuire à la généralité des relations (1) et (2), on peut supposer que

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_k > \ldots > a_n . \tag{3}$$

Ceci étant, l'expression figurant dans le second membre de la relation (1) peut s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned}
&a_1\\
&+ a_2\{1-1\}\\
&+ a_3\{1-2+1\}\\
&+ \ldots\\
&+ a_k\left\{1-\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}-\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1}\right\}\\
&+ \ldots\\
&+ a_n\left\{1-\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right\}.
\end{aligned}$$

La somme précédente se réduit à a_1, étant donné qu'on a

$$1-\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}-\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1}=(1-1)^{k-1}=0, \tag{4}$$

si k présente un nombre naturel.

Le premier membre de la relation (1), sous la condition (3), se ramène aussi à a_1. *Par suite, la relation* (1) *est démontrée.*

Le second membre de la relation (2) s'écrit:

$$\begin{aligned}
&a_1\left\{1-\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right\}\\
&+ a_2\left\{1-\binom{n-2}{1}+\binom{n-2}{2}-\ldots+(-1)^{n-2}\binom{n-2}{n-2}\right\}\\
&+ \ldots\\
&+ a_k\left\{1-\binom{n-k}{1}+\binom{n-k}{2}-\ldots+(-1)^{n-k}\binom{n-k}{n-k}\right\}\\
&+ \ldots\\
&+ a_{n-1}\{1-1\}\\
&+ a_n
\end{aligned}$$

et se ramène, grâce à l'identité (4), à a_n. Le premier membre de la relation (2) étant aussi égal à a_n, *la relation* (2) *est ainsi complètement démontrée.*

Les relations (1) et (2) restent également valables si parmi les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ il y en a de tels qui sont égaux entre eux.

Récemment, nous avons établi une autre relation où interviennent les opérateurs max est min {cf. [2]}. Voir aussi les notes [3] et [4].

3. *Application.* Considérons maintenant les n nombres naturels

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

et écrivons les sous la forme („prime factorisation"):

$$P_1 = p_1^{a_1^1} p_2^{a_2^1} \ldots p_r^{a_r^1},$$

$$P_2 = p_1^{a_1^2} p_2^{a_2^2} \ldots p_r^{a_r^2},$$

$$\vdots$$

$$P_n = p_1^{a_1^n} p_2^{a_2^n} \ldots p_r^{a_r^n},$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers et où les éléments de la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_r^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_r^2 \\ \vdots & & & \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_r^n \end{Vmatrix}$$

sont des entiers non négatifs.

Désignons par

$$(P_1, P_2, \ldots, P_s) \quad \text{et} \quad [P_1, P_2, \ldots, P_s]$$

respectivement *le plus grand commun diviseur* {*p. g. c. d.*} et *le plus petit commun multiple* {*p. p. c. m.*} des nombres indiqués.

Ceci étant admis, on peut écrire:

$$(P_1, P_2, \ldots, P_s) = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \ldots p_r^{\delta_r}$$

$$[P_1, P_2, \ldots, P_s] = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \ldots p_r^{d_r}$$

avec

$$\delta_i = \min (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^s),$$

$$d_i = \max (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^s).$$

Nous sommes, à présent, dans la possibilité d'établir les relations que voici:

I. n pair:

$$[P_1, P_2, \ldots, P_n] =$$

$$\frac{\Pi(P_1)\,\Pi(P_1, P_2, P_3)\ldots\Pi(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1})}{\Pi(P_1, P_2)\,\Pi(P_1, P_2, P_3, P_4)\ldots\Pi(P_1, P_2, \ldots, P_n)},$$

II. n impair:

$$[P_1, P_2, \ldots, P_n] =$$

$$\frac{\Pi(P_1)\,\Pi(P_1, P_2, P_3)\ldots\Pi(P_1, P_2, \ldots, P_n)}{\Pi(P_1, P_2)\,\Pi(P_1, P_2, P_3, P_4)\ldots\Pi(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1})},$$

III. n pair:

$$(P_1, P_2, \ldots, P_n) =$$

$$\frac{\Pi[P_1]\,\Pi[P_1, P_2, P_3]\ldots\Pi[P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}]}{\Pi[P_1, P_2]\,\Pi[P_1, P_2, P_3, P_4]\ldots\Pi[P_1, P_2, \ldots, P_n]},$$

IV. n impair:

$$(P_1, P_2, \ldots, P_n) =$$

$$\frac{\Pi[P_1]\,\Pi[P_1, P_2, P_3]\ldots\Pi[P_1, P_2, \ldots, P_n]}{\Pi[P_1, P_2]\,\Pi[P_1, P_2, P_3, P_4]\ldots\Pi[P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}]}.$$

Dans ces relations les produits Π s'étendent à toutes les combinaisons de la classe indiquée. Ainsi, par exemple, dans (I) $\Pi(P_1, P_2)$ signifie:

$$\begin{aligned}(P_1, P_2)\,(P_1, P_3)\,(P_1, P_4)\ldots(P_1, P_n)&\\ \times(P_2, P_3)\,(P_2, P_4)\ldots(P_2, P_n)&\\ \times(P_3, P_4)\ldots(P_3, P_n)&\\ \times\ldots&\\ \times(P_{n-1}, P_n).&\end{aligned}$$

Le vérification des relations plus haut citées peut se faire sans difficulté. À cet effet, déterminons dans le premier et dans le second membre de la relation (I) l'exposant de la puissance dont la base est p_i.

L'exposant en question dans le premier membre est

$$\max(a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n).$$

L'exposant dont il s'agit dans le second membre est

$$\sum \min (a_i^1)$$
$$- \sum \min (a_i^1, a_i^2)$$
$$+ \dots$$
$$- \sum \min (a_i^1, a_i^2, \dots, a_1^n).$$

Grâce à la formule (1), déjà établie, on a identiquement

$$\max (a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n) = \sum \min (a_i^1)$$
$$- \sum \min (a_i^1, a_i^2)$$
$$+ \dots$$
$$- \sum \min (a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n),$$

ce qui montre que la formule (I) est, à la vérité, exacte.

On peut démontrer les formules (II), (III), (IV) de la même manière, mais nous allons omettre ici ces démonstrations.

Les relations (I), (II), (III), (IV) jouissent de la propriété qu'elles *restent valables si l'on y échange les opérateurs*

$$(\ \ ) \text{ et } [\ \ ]\,,$$

conduisant à l'obtention des $\{p.\,g.\,c.\,d.\}$ et $\{p.\,p.\,c.\,m.\}$ *pour les nombres en question.*

4. En raisonnant, comme précédemment, on peut également démontrer les formules suivantes:

I. n pair.

$$\max (a_1, a_2, \dots, a_n)$$
$$\equiv \frac{\Pi \min (a_1) \Pi \min (a_1, a_2, a_3) \dots \Pi \min (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})}{\Pi \min (a_1, a_2) \Pi \min (a_1, a_2, a_3, a_4) \dots \Pi \min (a_1, a_2, \dots, a_n)},$$

II. n impair

$$\max (a_1, a_2, \dots, a_n)$$
$$\equiv \frac{\Pi \min (a_1) \Pi \min (a_1, a_2, a_3) \dots \Pi \min (a_1, a_2, \dots, a_n)}{\Pi \min (a_1, a_2) \Pi \min (a_1, a_2, a_3, a_4) \dots \Pi \min (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})}.$$

Les deux formules indiquées plus haut demeurent aussi valables si l'on y échange les opérateurs max *et* min.

Dans les dernières formules les a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ désignent des nombres réels tels que $a_k \neq 0$.

5. *Remarque.* — Après la rédaction de cette Note, nous avons rencontré, par hasard, certaines formules de *F. Klein-Barmen* {cf. **[5]**, p. 320 et **[6]**, p. 96—97} appartenant à l'algèbre des ensembles, formules qui embrassent celles que nous y avons indiquées. Nous publions toutefois cette Note à cause des faits suivants:

1° Nous avons retrouvé les formules de *Klein-Barmen* en partant d'un point de vue fort différent de celui de *Klein-Barmen*;

2° Les démonstrations de *Klein-Barmen* exigent une connaissance étendue de l'algèbre des ensembles, tandis que nous avons donné les démonstrations, fort élémentaires, des formules en question, démonstrations qui ne sont par fondées sur la théorie de l'algèbre des ensembles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Pólya — G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Bd. II, Berlin, 1925, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 20.

[2] D. S. Mitrinovitch, *Formules sur les valeurs absolues des nombres réels* (sous presse).

[3] D. S. Mitrinovitch, *Sur une propriété des opérations* max *et* min, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 232, p. 286 - 287 (1950).

[4] D. S. Mitrinovitch, *Sur certaines relations de l'algèbre des ensembles*, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 232, p. 917—918 (1951).

[5] F. Klein-Barmen, *Zur Theorie der abstrakten Verknüpfungen*, Mathematische Annalen, Bd. 105, 1931, S. 308—323.

[6] F. Klein-Barmen, *Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementverknüpfung*, Mathematische Zeitschrift, Bd. 47, 1940 S, 85—104.

О НЕКИМ РЕЛАЦИЈАМА КОЈЕ ОСТАЈУ У ВАЖНОСТИ АКО СЕ ПЕРМУТУЈУ ОПЕРАТОРИ ШТО СЕ У ЊИМА ПОЈАВЉУЈУ

Д. С. МИТРИНОВИЋ, БЕОГРАД

Садржај

1. За реалне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$ доказана је релација:

$$\begin{aligned} \max(a_1, a_2, \ldots, a_n) = & \sum \min(a_1) \\ & - \sum \min(a_1, a_2) \\ & + \ldots \\ & + (-1)^{n-1} \sum \min(a_1, a_2, \ldots, a_n), \end{aligned}$$

као и особина да ова релација остаје у важности ако се max *и* min *пермутују.*

Збирове Σ треба протегнути на све комбинације назначене класе од n елемената $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тако, на пример, $\Sigma \min(a_1, a_2)$ има значење:

$$\begin{aligned} \min(a_1, a_2) + \min(a_1, a_3) + \ldots + \min(a_1, a_n) & \\ + \min(a_2, a_3) + \ldots + \min(a_2, a_n) & \\ + \ldots\ldots\ldots & \\ + \min(a_{n-1}, a_n). & \end{aligned}$$

2. Са $(P_1, P_2, \ldots, P_s)$ означен је највећи заједнички делилац природних бројева $P_1, P_2, \ldots, P_s$, а са $[P_1, P_2, \ldots, P_s]$ најмањи заједнички садржалац истих бројева.

За природне бројеве $P_1, P_2, \ldots, P_n$ доказан је овај резултат:

$$[P_1, P_2, \ldots, P_n] = \begin{cases} \dfrac{\Pi(P_1)\,\Pi(P_1, P_2, P_3)\ldots\Pi(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1})}{\Pi(P_1, P_2)\,\Pi(P_1, P_2, P_3, P_4)\ldots\Pi(P_1, P_2, \ldots, P_n)}, & n \text{ парно;} \\[2ex] \dfrac{\Pi(P_1)\,\Pi(P_1, P_2, P_3)\ldots\Pi(P_1, P_2, \ldots, P_n)}{\Pi(P_1, P_2)\,\Pi(P_1, P_2, P_3, P_4)\ldots\Pi(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1})}, & n \text{ непарно} \end{cases}$$

3. *Последња релација остаје на снази ако се оператори* ( ) *и* [ ] *међусобно пермутују.*

Производе Π треба проширити на све комбинације назначене класе од n елемената $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Тако, на пример, $\Pi(P_1, P_2, P_3)$ има значење:

$$\begin{aligned} (P_1, P_2, P_3)\,(P_1, P_2, P_4)\ldots(P_1, P_2, P_n) & \\ \times \ \ldots & \\ \times (P_{n-2}, P_{n-1}, P_n). & \end{aligned}$$

Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. VIII, 1–2 (1956), Beograd
Yougoslavie

SUR L'ÉXISTENCE DES VALEURS LIMITES DE LA RÉSULTANTE DES FONCTIONS APPARTENANT À LA CLASSE H_δ, $\delta > 1$

par VOÏN DAÏOVITCH, BEOGRAD

Une fonction $f(z)$, régulière pour $|z| < 1$, appartient à la classe $\mathbf{H}_\delta$, $\delta > 0$, si l'intégrale

$$\mu_\delta(r; f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta \, d\varphi$$

reste bornée quand $r \to 1$. Dans ce cas la fonction $f(z)$ possède presque partout sur le contour du cercle-unité une valeur limite déterminée [1].

Particulièrement, dans le cas $\delta > 1$, $\mathbf{H}_\delta$ coïncide avec la classe des séries entières dont les parties réelles on peut représenter sous la forme de l'intégrale de Poisson d'une fonction appartenant à la classe $\mathbf{L}^\delta$ [2] *).

Ici on va démontrer un théorème concernant l'existence des valeurs limites de la résultante de deux fonctions appartenant à la classe $\mathbf{H}_\delta$, $\delta > 1$.

Théorème. — *La résultante*

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

de la fonction

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu, \quad f(z) \in \mathbf{H}_\delta, \quad \delta > 1,$$

et d'une fonction

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu, \quad g(z) \in \mathbf{H}_{\delta'},$$

---

*) Une fonction mesurable $P(\vartheta)$, $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, appartient à la classe $\mathbf{L}^\delta$, $\delta \geqq 1$, si

$$\int_0^{2\pi} |P(\vartheta)|^\delta \, d\vartheta < \infty, \quad \delta \geqq 1.$$

où l'on a

$$\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta'}=1,$$

— est une fonction régulière et bornée dans l'intérieur du cercle-unité et, par conséquant, elle a presque partout sur le contour du cercle-unité des valeurs limites bien déterminées.

Démonstration. D'après la supposition, la fonction

$$f(z)=u(z)+iv(z)$$

appartient à la classe $\mathbf{H}_\delta, \delta>1$, et, par conséquant, sa partie réelle $u(re^{i\varphi})$ peut être représentée par l'intégrale de Poisson:

$$(1)\qquad u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\vartheta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta,$$

où la fonction de distribution $P(\vartheta)$ appartient à la classe $\mathbf{L}^\delta$, $\delta>1$. La résultante $F(z)$ est, à une constante additive près, égale à la fonction

$$\alpha_0 b_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu b_\nu z^\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)\cdot g(\underline{z})\,d\varphi,\quad r<1,$$

où $\underline{z}=re^{i(\vartheta-\varphi)}$, $z=r^2e^{i\vartheta}$, et

$$u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}r^\nu(\alpha_\nu\cos\nu\varphi-\beta_\nu\sin\nu\varphi)$$

représente la partie réelle de la fonction $f(z)$. Par suite de l'inégalité de Hölder on a

$$(2)\qquad \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)\cdot g(\underline{z})\,d\varphi\right|\leqq$$

$$\leqq\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|^\delta d\varphi\right)^{\frac{1}{\delta}}\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(\underline{z})|^{\delta'}d\varphi\right)^{\frac{1}{\delta'}},$$

et d'après une inégalité de Hölder équivalante et par suite de (1) on a

$$(3)\qquad \begin{aligned}|u(r,\varphi)|^\delta&\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(\vartheta)|^\delta\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta\cdot\\&\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta\right)^{\delta-1};\end{aligned}$$

alors, en tenant compte de

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\, d\vartheta = 1$$

on obtient

$$|u(r,\varphi)|^\delta \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(\vartheta)|^\delta \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\, d\vartheta .$$

Mais, puisque

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|^\delta\, d\varphi \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(\vartheta)|^\delta \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\, d\vartheta\right\} d\varphi,$$

c.-à-d.

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|^\delta\, d\varphi \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\, d\varphi\right) |P(\vartheta)|^\delta\, d\vartheta,$$

on a, en vertu de (4),

$$\int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|^\delta\, d\varphi \leqq \int_0^{2\pi} |P(\vartheta)|^\delta\, d\vartheta .$$

Donc, puisque $P(\vartheta)$ appartient à la classe $\mathbf{L}^\delta$, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|^\delta\, d\varphi$$

est bornée, et parce que $g(\underline{z})$ appartient à la classe $\mathbf{H}_{\delta'}$, l'intégrale

$$(6) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(\underline{z})|^{\delta'}\, d\varphi$$

est aussi bornée.

De cette manière nous avons demontré que l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\cdot g(\underline{z})\, d\varphi, \quad r<1,$$

est, en vertu de (2), (5) et (6) bornée et, par conséquant, la fonction définie par la série

$$\alpha_0 b_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

est bornée dans l'intérieur du cercle-unité; or, la résultante $F(z)$, régulière dans l'intérieur du cercle-unité, est aussi bornée dans l'intérieur de ce cercle et, par conséquant, d'après le théorème bien connu de Fatou, elle a dans presque tous les points du contour du cercle-unité des valeurs limites bien déterminées, c. q. f. d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Riesz, *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*, Math. Ztschr., Bd. 17 (1923), S. 87—95.

[2] V. par ex. A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, New York 1952. P. 158.

О ЕГЗИСТЕНЦИЈИ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ РЕЗУЛТАНТЕ ФУНКЦИЈА КЛАСЕ H_δ, $\delta > 1$

В. ДАЈОВИЋ, БЕОГРАД

Садржај

У овом раду доказан је следећи став:

Резултанта

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

функције

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu, \quad f(z) \in H_\delta, \ \delta > 1,$$

и функције

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu, \quad g(z) \in H_{\delta'},$$

где је $\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta'}=1$, — *јесте регуларна и ограничена функција унутар јединичног круга и, према томе, она скоро свугде на рубу тог круга има одређене граничне вредности.*

Заиста, према претпоставци, функција $f(z)=u(z)+iv(z)$ припада класи $\mathbf{H}_\delta$, $\delta>1$, те се њен реални део може изразити Poisson-овим интегралом

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\vartheta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta,$$

где функција $P(\vartheta)$ припада класи $\mathbf{L}^\delta$, $\delta>1$. Резултанта $F(z)$ је до адитивне константе једнака функцији која је дефинисана редом

$$(*)\qquad \alpha_0 b_0+\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\cdot g(\underline{z})\,d\varphi,\quad r<1,$$

где је $\underline{z}=re^{i(\vartheta-\varphi)}$, $z=r^2e^{i\vartheta}$, а

$$u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu(\alpha_\nu\cos\nu\varphi-\beta_\nu\sin\nu\varphi)$$

претставља реални део функције $f(z)$. На основи добијене релације

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|^\delta\,d\varphi\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(\vartheta)|^\delta\,d\vartheta$$

и особине интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(\underline{z})|^{\delta'}\,d\varphi,\quad g(\underline{z})\in\mathbf{H}_{\delta'},$$

а с обзиром на Hölder-ову неједнакост

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)\cdot g(\underline{z})\,d\varphi\right|\leqq\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|^\delta\,d\varphi\right)^{\frac{1}{\delta}}\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(\underline{z})|^{\delta'}\,d\varphi\right)^{\frac{1}{\delta'}},$$

интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} u(r,\varphi)\cdot g(\underline{z})\,d\varphi, \quad r<1,$$

је ограничен. Дакле, пошто је функција дефинисана редом (*) регуларна и ограничена у јединичном кругу, то је и резултанта $F(z)$ регуларна и ограничена у том кругу, те, на основи познатог Fatou-овог става, има скоро свугде на рубу јединичног круга одређене граничне вредности.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R.P. de Serbie
Vol. VIII, 1—2 (1956), Beograd
Yougoslavie

QUELQUES CONSEQUENCES D'UN THEOREME DES SERIES FONCTIONNELLES

par LAZAR KARADŽIĆ, BEOGRAD

Théorème. — *Soient les membres de la suite*

$$\{\beta_n(x)\}$$

fonctions uniformes dans le domaine D. Si les conditions:

$$(1)\qquad G^{(i)}(t)_{t=1} \leqslant O(1),\quad i \to \infty,\quad [i = 0, 1, 2, \ldots;\ G^{(0)}(t) = G(t)],$$

$$(2)\qquad \Delta^n \alpha_0(x) = \alpha_n(x) - \binom{n}{1}\alpha_{n-1}(x) + \cdots \pm \binom{n}{1}\alpha_1(x) \mp \alpha_0(x)$$

$$= o(1),\quad n \to \infty,$$

sont uniformément remplies dans le domaine D, alors

$$(3)\qquad \sum_0^\infty \alpha_n(x)\,\beta_n(x) = \sum_0^\infty \Delta^n \alpha_0(x)\,F^{(n)}(t)_{t=1},\quad x \in D,$$

où

$$G(t) = \sum_0^\infty |\beta_n(x)|\,t^n \quad \text{et} \quad F(t) = \sum_0^\infty \beta_n(x)\,t^n.$$

Si dans le domaine D la condition (2) est uniformément remplie et la condition (1) ne l'est pas mais, au lieu d'elle, la condition

$$(4)\qquad \frac{G^{(i)}(t)}{i\,!}{}_{t=1} \leqslant O(1),\ i \to \infty,$$

alors

$$(5)\qquad \sum_0^\infty \alpha_n(x)\,\beta_n(x) = \sum_0^\infty \Delta^n \alpha_0(x)\,\frac{F^{(n)}(t)}{n\,!}{}_{t=1},\quad x \in D,$$

Si l'on suppose que les membres de la suite $\{\beta_n(x)\}$ sont des fonctions uniformes dans le domaine D et si la condition (1) est uniformément remplie dans le domaine D, les résultats suivants deviennent évidents:

a) La fonction

$$F(t)=\sum_{0}^{\infty}\beta_n(x)\,t^n,\quad x\in D,$$

est une fonction entière. Les séries

$$G^{(i)}(t)_{t=1}=i\,!\sum_{n=i}^{\infty}\binom{n}{i}|\beta_n(x)|,\quad i=0,1,2,\ldots;\quad G^{(0)}(t)=G(t),$$

convergent uniformément dans le domaine D.

b) Si par $R_{n,i}$ on désigne le reste de la série

$$F^{(i)}(t)_{t=1}=i\,!\sum_{n=i}^{\infty}\binom{n}{i}\beta_n(x),$$

on a alors

$$R_{i+1;\,i+1}=\sum_{m=i+1}^{\infty}R_{m,i}=F^{(i+1)}(t)_{t=1},$$

$$i=0,1,2,\ldots;\ R_{m,0}=\sum_{n=m}^{\infty}\beta_n(x),$$

Les membres de la suite des transformations

(6) $$R_{n,i}=R_{n,i+1}-R_{n+1,i+1},\quad i=0,1,2,\ldots,$$

sont des fonctions uniformes dans le domaine D.

c) Les membres de la suite des transformations (6) satisfont uniformément aux conditions

(7) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}R_{n,i}=0,\ i=0,1,2,\ldots,\\ \left|\sum\limits_{i=0}^{n}R_{n+1,i}\right|<G^{(n+1)}(t)_{t=1}<M,\end{array}\right\}\ x\in D,$$

où M est independant de x.

Si l'on soumet la somme des $n+1$ premiers termes de la série

$$\sum\alpha_n(x)\,\beta_n(x),$$

c'est-à-dire de la suite

(8) $$S_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\alpha_m(x)\,\beta_m(x),$$

à la suite des transformations successives (6), on obtient alors le résultat suivant

$$(9)\qquad \sum_{0}^{n} \alpha_m(x)\,\beta_m(x) = \sum_{0}^{n} \Delta^m \alpha_0(x)\, F^{(m)}(t)_{t=1} +$$

$$-\sum_{0}^{n} (-1)^m \Delta^m \alpha_n(x)\, R_{n+1,m}, \qquad x \in D.$$

De ce qu'on vient de dire plus haut, ainsi que de la supposition (2), il s'ensuit que, selon le théorème de Toeplitz, la suite

$$\left\{ \sum_{0}^{n} (-1)^m \Delta^m \alpha_n(x)\, R_{n+1,m} \right\},$$

$$\Delta^m \alpha_n(x) = \alpha_{n-m}(x) - \binom{m}{1} \alpha_{n-m+1}(x) + \ldots \pm \alpha_n(x),$$

dans le domaine D est une suite-nulle. Alors, si l'on prend que $n \to \infty$ de (9) on obtient (3), ce qu'il fallait démontrer.

La suite des transformations (6), selon la supposition (4), prend la forme [1]

$$r_{n,i} = r_{n,i+1} - r_{n+1,i+1}, \; i = 0, 1, 2, \ldots,$$

où

$$r_{n,i} = \frac{R_{n,i}}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Si l'on soumet la suite (8) à la suite de ces transformations successives, on obtient alors de même que dans le cas précédent [1]

$$(10)\qquad \sum_{0}^{n} \alpha_m(x)\beta_m(x) = \sum_{0}^{n} \Delta^m \alpha_0(x) \frac{F^{(m)}(t)}{m!}_{t=1} +$$

$$-\sum_{0}^{n} (-1)^m \Delta^m \alpha_n(x)\, r_{n+1,m}.$$

Des suppositions (2) et (4) il résulte que, selon le théorème de Toeplitz, la suite [1]

$$\left\{ \sum_{0}^{n} (-1)^m \Delta^m \alpha_n(x)\, r_{n+1,m} \right\}$$

dans le domaine D est une suite-nulle. Alors, si l'on prend que $n \to \infty$, de (10) on obtient (5), ce qu'il fallait prouver.

Soit $f(z)$ une fonction entière, définie par la série

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n, a_0 = f(0) \neq 0.$$

Alors, si l'on écrit cette série dans la forme

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!}, [f^{(0)}(0) = f(0)],$$

et que l'on pose

$$F(t) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} = l^{zt},$$

on obtient, selon le susdit théorème, la relation suivante

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n = e^z \sum_{0}^{\infty} \Delta^n f(0) \frac{z^n}{n!},$$

où la suite $\{\Delta^n f(0)\}$ est une suite-nulle. Mais si cette suite n'est pas une suite-nulle, alors, au lieu de la fonction $F(t) = l^{zt}$ nous envosagerons la fonction

$$F(t) = e^{G(zt)} = \sum_{0}^{\infty} d_n (zt)^n, d_n \neq 0,$$

où $G(z)$ est une fonction entière. Alors, si on écrit la série donnée sous la forme

$$f(z) = \sum a_n z^n = \sum \left(\frac{a_n}{d_n}\right) d_n z^n,$$

on obtient, d'après le susdit théorème, la relation suivante

$$(11) \qquad f(z) = \sum d_n z^n = e^{G(z)} \sum_{0}^{\infty} \Delta^n \left(\frac{a_0}{d_0}\right) G_n(z) z^n,$$

où la fonction entière $G_n(z)$ est déterminée de la relation

$$\frac{F^{(n)}(t)}{n!}_{t=1} = \frac{(e^{G(zt)})^{(n)}}{n!}_{t=1} = e^{G(z)} z^n G_n(z).$$

Si la suite $\left\{\frac{a_n}{d_n}\right\}$ était une suite arithmétique d'ordre supérieur et la fonction $G(z)$ un polynôme, la fonction (11) pourrait alors être écrite dans la forme

$$f(z) = \Sigma\, a_n z^n = Q(z)\, e^{P(z)},$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes. Dans le cas général de (11), comme on le sait, il s'ensuit: que toute fonction entière $f(z)$ peut être écrite sous forme de produit de deux fonctions entières ayant la forme

$$f(z) = H(z)\, e^{G(z)},$$

où la fonction $H(z)$ peut être résolue en un produit des facteurs primaires.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|z| \leqslant 1$, définie par la série

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n. \tag{12}$$

Si l'on écrtt cette série dans la forme

$$f(z) = \sum a_n z^n = \sum a_n \alpha^n \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n, \quad 0 < |\alpha| \leqslant 1,$$

et que l'on prend pour la fonction $F(t)$ la fonction

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{zt}{\alpha}\right)^n,$$

on obtient alors, selon le susdit théorème, la relation suivante

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^{n-1} b_1 \left(\frac{z}{\alpha - z}\right)^n, \tag{13}$$

où

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{n-1} b_1 = 0, \quad b_n = a_n \alpha^n.$$

Mais si l'on prend pour $F(t)$ la fonction

$$F(t) = \sum_{0}^{\infty} a_n (\alpha t)^n,$$

on obtient alors, selon le susdit théorème, la relation suivante

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n=\sum_0^\infty\left(\frac{z}{\alpha}-1\right)^n\left[\alpha^n\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\right]= \tag{14}$$

$$=\sum_0^\infty\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n,$$

où

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{z}{\alpha}-1\right)^n=0.$$

Selon les conditions du théorème donné la relation (14) existe lorsque

$$|z-\alpha|<|\alpha|,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\alpha|\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\right|}\leqslant 1,$$

c'est-à-dire lorsque

$$|z-\alpha|<\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\right|}}. \tag{15}$$

Cette relation, comme on le sait, détermine le rayon de convergence de la série de Taylor

$$\sum_0^\infty\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n,$$

dont la somme, suivant la formule (14) sera identique à la fonction donnée $f(z)$ dans le domaine (15).

Si le point α est situé sur le cercle de convergence $|z|=1$ de la série donnée (12), alors l'identité (13) existera pour chaque z, situé dans le cercle $|z|=1$, lorsque la suite $\{\Delta^{n-1}b_1\}$ est une suite-nulle. De là s'ensuivent d'une manière évidente les résultats suivants:

1. — Si la suite $\{a_n\}$ et la suite $\{\Delta^{n-1}b_1\}$, $b_n=a_n\alpha^n$, sont des suites-nulles, il existe alors, sur le cercle de convergence $|z|=1$ l'arc Γ dans les points duquel la série (12) converge uniformément.

2. — Le point $z=-\alpha=e^{\lambda i}$, situé sur le cercle de convergence de la série donnée, sera singulier si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\Delta^{n-1}b_1|}=2.$$

De ce résultat il s'ensuit le théorème connu de Lindelöf [2].

3. — L'argument θ d'un point singulier sur le cercle de convergence de la série donnée (12) est déterminé par la relation [3]

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Delta^{n-1} a_1|}, \quad (\alpha = 1).$$

4. — *Si*

$$a_n = o\,(1), \quad n \to \infty\,; \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Delta^n S_0|} = o\,(1), \quad n \to \infty\,,$$

(16)

$$S_n = \sum_0^n a_m\,,$$

et que la série

$$\sum_0^\infty a_n$$

est somable par le procédé

(17) $$\sum_0^\infty \Delta^n S_0\, y^n \quad \text{ou} \quad \sum_0^\infty \Delta^n S_0 \frac{y^n}{n!}$$

alors

$$S_n \to S, \quad n \to \infty\,.$$

Selon la supposition (16) la relation (3) obtient la forme suivante

$$\sum_0^\infty a_n z^n = \sum_0^\infty \Delta^n S_0 \left(\frac{z}{1-z}\right)^n, \quad |z| < 1,$$

$$(\Delta^{n-1} a_1 = \Delta^n S_0\,, \quad S_n - S_{n-1} = a_n),$$

où la seconde série est alors une fonction entière de $\frac{z}{1-z}$. La série (12), selon le théorème de Fatou-Riesz, converge uniformément sur le cercle de convergence $|z| = 1$ dans tous les points à l'exception du point $z = 1$. De là, cette relation existera dans tous les points sur le cercle $|z| = 1$ excepté dans le point $z = 1$. De cette identité il peut résulter l'identité suivante

$$\lim_{z\to 1-0} \Sigma\, \Delta^n S_0 \left(\frac{z}{1-z}\right)^n = \lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

lorsque la série Σa_n est sommable par le procédé

$$\sum_0^\infty \Delta^n S_0 y^n .$$

Pourtant, on arrive au même résultat si cette série n'est pas sommable par le susdit procédé, mais plutôt par le procédé

$$\sum_0^\infty \Delta^n S_0 \frac{y^n}{n!} .$$

Ce dernier procédé de sommation est identique au procédé de sommation de Borel

$$e^{-y} \sum_0^\infty S_n \frac{y^n}{n!} ,$$

car, selon le théorème donné, si l'on prend

$$F(t) = e^{y(t-1)},$$

on obtient

$$e^{-y} \sum_0^\infty S_n \frac{y^n}{n!} = \sum_0^\infty \Delta^n S_0 \frac{y^n}{n!} ,$$

où $\{\Delta^n S_0\}$ est une suite-nulle. *De la même façon, selon les premières conditions du théorème donné, on obtient*

$$e^{-y} \sum_0^\infty S_n \frac{y^n}{n!} = \sum_0^\infty \Delta^n S_0 y^n , \quad y \to \infty .$$

Par conséquent, dans le résultat exposé ci-dessus les conditions (17) *peuvent être substituées par le procédé de sommation de Borel.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Karadžić, L., *Jedna teorema funkcionalnih redova*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, T. 5, 4—5, Zagreb, 1950.

[2] Lindelöf, *Sur la transformation d'Euler et la détermination des points singuliers d'une fonction définie par son développement de Taylor*, Comptes rendus de l'Acad. des Sc., 28 février 1898.

[3] Mandelbrojt, *Sur la détermination effective des points singuliers d'une fonction analytique donnée par son développement en série des puissances*, Comptes rendus de l'Acad. des Sc., 15 février 1926.

НЕКЕ ПОСЛЕДИЦЕ ЈЕДНЕ ТЕОРЕМЕ ИЗ ФУНКЦИОНАЛНИХ РЕДОВА

ЛАЗАР КАРАЏИЋ, БЕОГРАД

Садржај

Теорема. — *Нека буду чланови низа* $\{\beta_n(x)\}$ *униформне функције у области D.*

Ако су у области D униформно задовољени услови (1) *и* (2), *тада се има релација* (3).

Ако је у области D униформно испуњен услов (2) *али није испуњен услов* (1) *него услов* (4), *тада се има релација* (5).

Ако се на низу (8) изврши низ узастопних трансформација (6), тада се добива резултат (9) из кога према претпоставкама дате теореме произлази релација (3). Ако се на низу (8) изврши низ узастопних трансформација облика $r_{n,i} = \frac{R_{n,i}}{i!}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, добиће се тада услов (10) из кога према претпоставкама дате теореме произлази резултат (5).

Из ове теореме произлазе ови дјелимично познати резултати:

a) Цела функција $f(z)$ може се написати у облику

$$f(z) = H(z)\, e^{G(z)},$$

где су $G(z)$ и $H(z)$ целе функције.

b) Дата функција $f(z)$ и њен Taylor-ов развој у близини тачке α идентички су једнаки у области (15).

c) Ако су низови $\{a_n\}$ и $\{\Delta^{n-1} b_1\}$, $b_n = a_n\,\alpha^n$, нула-низови, постоји тада на кругу конвергенције $|z| = 1$ лук Γ у чијим тачкама ред (12) униформно конвергира.

d) Тачка $z = \alpha = e^{\lambda i}$ биће сингуларна ако је [2]

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|\Delta^{n-1} b_1|} = 2.$$

e) Аргумент θ сингуларне тачке на рубу конвергенције одређује се релацијом [3]

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|\Delta^{n-1} a_1|}.$$

f) Ако се има (16) и ако је ред Σa_n збирљив по поступку (17), тада $S_n \to S$, $n \to \infty$.

g) Поступци збирљивости (17) идентички су једнаки према условима (16) Borel-овом поступку збирљивости.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. VIII, 1—2 (1956), Beograd
Yougoslavie

SIMPLIFICATION DE LA MÉTHODE DE GRAEFFE AU MOYEN DES SPECTRES MATHÉMATIQUES

par CONSTANTIN ORLOFF, BEOGRAD

1. Le but de ce travail est d'apporter une simplification *considérable* dans le mécanisme pratique de la méthode de Graeffe pour l'évaluation numérique des racines d'une équation algébrique. La méthode spectrale qui va être exposée simplifie le procédé de transformation d'une équation algébrique en une autre, ayant pour racines les carrés des racines de l'équation donnée, en réduisant le nombre des opérations à effectuer.

Il est bien connu que cette transformation de l'équation

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{1}$$

exige 1) $\left[\dfrac{(n+2)^2}{4}\right]$[1] multiplications entre les coefficients, 2) $\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$ multiplications avec le nombre 2, 3) $\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$ additions ou soustractions.

La méthode spectrale réalise la transformation en question, pour n'importe quel n, au moyen: 1) *d'une seule multiplication* entre les spectres, 2) *d'une seule multiplication* avec le nombre 2, 3) au plus 3 additions ou soustractions.

La méthode traitée, outre l'interêt théorique, est d'utilité pratique, assurant une plus grande rapidité de calcul, avec une machine à calculer. Les autres avantages de la méthode spectrale sont les suivants: 1) le schéma du calcul est encore plus simple que le schéma ordinaire, par cela même la possibilité de faire des fautes est moindre, 2) le contrôle du calcul devient plus simple, car au lieu de contrôler chaque coefficient obtenu, on contrôle d'un coup tous les coefficients.

Le fait nécessaire pour l'application de la méthode spectrale est que les coefficients a_i, doivent être des nombres entiers (ou décimaux). Mais il n'aporte aucune restriction pratique, car les coefficients irrationaux sont remplacés, en pratique, par leurs valeurs décimales approchées.

---

[1] Le symbole $[x]$ représente le plus grand nombre entier ne dépassant pas le nombre x.

2. Rappelons nous quelques notions fondamentales de la Théorie des spectres.

Le spectre ordinaire [1], [2], [3], [6], d'un polynôme $P(x)$ (aux coefficients nombres entiers) au rythme uniforme h, compatible avec ce polynôme, est le nombre

$$S = P(10^h). \tag{2}$$

Le spectre corrigé, d'un polynôme $P(x)$, *à toutes les places paires* est le spectre ordinaire du polynôme $P_1(x)$, appelé polynôme corrigé de $P(x)$ *à toutes les places paires* qui s'obtient du polynôme $P(x)$ par le changement de signe de tous les coefficients ayant des places paires (les polynômes étant rangés en puissances décroissantes). Ce spectre [5] est donné par le nombre

$$\overline{S} = (-1)^n P(-10^h) \tag{3}$$

On appelle spectre d'une équation algébrique le spectre de son polynôme.

3. Passons maintenant au théorème sur lequel est basée cette méthode spectrale.

T h é o r è m e. *Soit donnée l'équation* (1), a_i *étant des nombres entiers. Formons les spectres, ordinaire et corrigé à toutes les places paires, de cette équation, avec le rythme uniforme h, défini par les relations suivantes*

$$h = \left[\log a + \frac{1}{2}\log 2(n+1)\right] + 1 \qquad a = \max|a_i|. \tag{4}$$

Le spectre ordinaire S_1, *au rythme uniforme* $2h$, *de l'équation transformée, aux racines qui sont les carrés des racines de l'équation* (1), *est égal au produit des spectres*

$$S_1 = S \cdot \overline{S} . \tag{5}$$

D é m o n s t r a t i o n. Il est bien connu que la transformée de l'équation (1) peut être obtenue de l'expression

$$R(x^2) = (-1)^n P(x) P(-x) \tag{6}$$

par la substitution $x^2 = y$, et devient $R(y) = 0$. En posant

$$x = 10^h$$

dans la formule (6), où h est donné par les formules (4), on obtient

$$R(10^{2h}) = P(10^h) \cdot (-1)^n P(-10^h)$$

ce qui donne, d'après les définitions des spectres ordinaires et corrigés par les formules (2) et (3), la formule (5)

$$S_1 = S \cdot \overline{S},$$

si le rythme uniforme h est compatible avec le polynôme $P(x)$ et le rythme uniforme $2h$ est compatible avec le polynôme $R(y)$. Ainsi il reste à démontrer que ces rythmes sont compatibles avec les polynômes correspondants. Pour que h soit compatible avec $P(x)$ il suffit qu'il satisfasse l'inégalité suivante [3], [4], [5], [6]

$$10^h > 2a$$

ou ce qui est le même

$$h > \log a + \log 2. \tag{7}$$

Pour que $2h$ soit compatible avec $R(y)$ il suffit qu'ait lieu l'inégalité suivante

$$10^{2h} > 2(n+1)a^2$$

ou

$$h > \log a + \frac{1}{2}\log 2(n+1). \tag{8}$$

Ainsi pour que h satisfasse les inégalités (7) et (8), il suffit de prendre pour h la valeur

$$h = \left[\log a + \frac{1}{2}\log 2(n+1)\right] + 1$$

énoncée dans le théorème. Le théorème est donc démontré.

Cependant dans les applications pratiques on peut prendre pour h une valeur plus simple (valable pour $n \leqslant 48$)

$$h = (a) + 1 \tag{9}$$

où (a) désigne le nombre de chiffres du nombre a.

4. Passons maintenant à la méthode spectrale. Les spectres ordinaires des équations (le rythme h étant fixé) sont en relation *biunivoque* avec les équations mêmes et représentent parfaitement les équations correspondantes avec toutes leurs propriétés [1], [3], [5], [6]. C'est pour cela qu'on peut, au lieu de faire les transformations consécutives sur les équations, effectuer les transformations correspondantes (en nombre quelconque) sur les spectres (au moyen de la formule (5)). Du dernier spectre obtenu de cette manière on peut obtenir directement la dernière équation transformée, sans connaître les équations transformées intermédiaires.

La méthode spectrale s'applique donc de la manière suivante. On forme premièrement les spectres S et $\bar{S}$ de l'équation donnée (1), d'après les formules (2) et (3), le rythme h étant antérieurement fixé d'après la formule (9) ou (4). Puis on obtient le spectre ordinaire S_1 de la première transformée de l'équation (1), d'après la formule (5). Du spectre S_1 on trouve directement le spectre corrigé $\bar{S}_1$ de la même équation, sans chercher cette équation-là à [5]. De S_1 et $\bar{S}_1$ on obtient S_2, d'après la formule (5), et on continue le procédé jusqu-à S_k. De S_k on obtient aisément [3], [4], [5], [6], la k-ième transformée de l'équation (1).

La méthode énoncée étant pratique, il me semble utile de montrer les façons les plus efficaces pour former les nombres S, $\bar{S}$, S_1, $\bar{S}_1$ etc.

Le nombre S s'obtient par *une* soustraction. Par exemple si l'équation donnée est

$$x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0 \tag{10}$$

et $h = 2$ (obtenu d'après la formule (9)) on obtient S de la manière suivante. On forme le spectre ordinaire des coefficients positifs de l'équation, en mettant les zéros à la place des coefficients négatifs. Puis on forme le spectre ordinaire des valeurs absolues des coefficients négatifs en mettant les zéros à la place des coefficients positifs. Le spectre S s'obtient *par la soustraction* de ces deux spectres [3], [4], [5], [6].

$$\begin{array}{r}
1\,|\,03\,|\,00\,|\,05\,|\,04\,|\,00\,|\,01 \\
-0\,|\,00\,|\,02\,|\,00\,|\,00\,|\,03\,|\,00 \\
\hline
S = 1\,|\,02\,|\,98\,|\,05\,|\,03\,|\,97\,|\,01
\end{array}$$

D'ailleurs les calculateurs après une très courte instruction en Calcul spectral peuvent écrire le spectre S directement c'est-à-dire sans soustraction.

On pourrait obtenir le spectre $\bar{S}$ de la même manière (après avoir changé les signes des coefficients des places paires de l'équation (10), c'est-à-dire les signes des coefficients des puissances x^5, x^3, x). Mais on ne pourrait faire de même pour obtenir les spectres $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, etc., car les transformées consécutives de l'équation (10) restent inconnues jusqu'à la fin du calcul. C'est pour cela que je vais montrer une façon directe donnant le moyen d'obtenir le spectre corrigé ($\bar{S}$), le spectre ordinaire (S) étant connu. Il consiste en soustraction du spectre S des valeurs effectives doublées des tranches paires du même spectre S, [5].

Nous distinguons donc trois sortes de valeurs des tranches d'un spectre: valeurs nominales, corrigées et effectives [4], [5], [6]. Les valeurs nominales des tranches en question (deuxième, quatrième, sixième) sont les nombres inscrits dans ces tranches, à savoir 02, 05, 97. Les valeurs corrigées sont les mêmes valeurs, ou bien les valeurs augmentées d'une unité, selon que la tranche suivante commence par un petit chiffre (0—4) ou un grand chiffre (5—9). Ainsi les valeurs corrigées en question sont 03, 05, 97. Les valeurs effectives sont égales aux valeurs corrigées si celles-ci commencent par un petit chiffre et sont *négatives* et égales au supplément jusqu'à 10^h (dans notre cas 100) des valeurs corrigées commençant par un grand chiffre. Ainsi les valeurs effectives en question sont 3, 5, — 3 et on obtient

$$\begin{array}{rl} S= & 1|02|98|05|03|97|01 \\ & \quad -6 \quad -10 \quad +6 \\ \hline \bar{S}= & \quad 96|97|95|04|03|01 \end{array}$$

De cette manière $\bar{S}$ s'obtient au plus par trois opérations: une multiplication avec le nombre 2 (toutes les valeurs effectives, sans signes, sont mises à la fois à la machine à calculer et multipliées par le nombre 2), une addition et une soustraction (on additionne et soustrait les nombres d'un coup, dans le présent exemple les nombres 6 et 10). Ainsi le procédé énoncé de la méthode spectrale peut se dérouler, pour l'équation (10), de la manière suivante

$$S \cdot \bar{S} = 1029805039701 \times 969795040301 = 998699819979004199990001$$

et la valeur numérique de S_1 est obtenue.

Cependant on doit écrire un zéro au commencement de ce spectre, afin qu'il ait autant de tranches que l'équation a de coefficients (c'est-à-dire 7). D'ailleurs il est évident qu'un spectre ne peut pas commencer par un grand chiffre, [3], [4], [5], [6]. Le rythme est d'après le théorème fondamental $2h=4$. Ainsi le spectre S_1, partagé en tranches spectrales, est

$$S_1 = 0\,|\,9986\,|\,9981\,|\,9979\,|\,0041\,|\,9999\,|\,0001.$$

Puis on obtiendrait par la manière énoncée $\bar{S}_1$, ensuite par leur multiplication S_2 etc.

De cette façon le rythme se double par chaque transformation et les spectres deviennent des nombres plus grands qu'il n'est nécessaire. En tenant compte de la formule (9), on voit clairement qu'on peut faire diminuer le rythme chaque fois qu'au commencement de *chaque tranche* on a plus d'un chiffre non-significatif (zéro ou neuf). Si le minimum de ces chiffres non-significatifs au commencement des tranches est p, alors on peut faire diminuer le rythme de $p-1$ unités, et le spectre ayant ce nouveau rythme s'obtient du spectre en question en abaissant simplement $p-1$ premiers chiffres de chaque tranche. Dans notre cas est $p=1$ et le spectre de l'équation transformée avec le plus petit rythme $h_1=3$ est

$$\mathbf{S}_1=0\,|\,986\,|\,981\,|\,979\,|\,041\,|\,999\,|\,001$$

On peut donc continuer le prodédé de la même manière avec ce rythme réduit. Le spectre corrigé $\overline{\mathbf{S}}_1$ sera alors

$$\overline{\mathbf{S}}_1=1\,|\,012\,|\,982\,|\,021\,|\,042\,|\,001\,|\,001$$

$$\mathbf{S}_1\cdot\overline{\mathbf{S}}_1=986981979041999001\times 1012982021042001001=$$

$$=999794999861998023001686000083000001$$

$$\overline{S}_2=0\,|\,999794\,|\,999861\,|\,998023\,|\,001686\,|\,000083\,|\,000001$$

On devrait maintenant continuer le procédé jusqu'à obtenir S_k, spectre de l'équation transformée définitive, où k dépend de la précision voulue. Mais puisque notre but n'est pas la résolution de l'équation (10), mais l'exposition du procédé, nous pouvons considerer S_2 comme spectre de l'équation transformée définitive. Alors il ne nous resterait qu'à montrer comment s'obtient l'équation transformée définitive de son spectre ordinaire.

Les coéfficients de l'équation sont les valeurs effectives des tranches de son spectre ordinaire, [4], [5], [6].

Dans le cas traité les valeurs nominales des tranches sont: 0, 999794, 999861, 998023, 001686, 000083, 000001. Les valeurs corrigées sont: 1, 999795, 999862, 998023, 001686, 000083, 000001. Les valeurs effectives sont: 1, – 205, – 138, – 1977, 1686, 83, 1.

Ainsi la deuxième transformée de l'équation (10) est

$$x^6 - 205\,x^5 - 138\,x^4 - 1977\,x^3 + 1686\,x^2 + 83\,x + 1 = 0.$$

Cette équation est donc obtenue sans connaître la première transformée de l'équation (10).

Analysons, maintenant, les résultats acquis du point de vue pratique. La réduction du nombre des opérations est très grande et reste grande même si la machine à calculer est d'une petite capacité et qu'il faille *partager* les spectres et les multiplier partie par partie. Ainsi au lieu d'une multiplication nous aurons 2 ou 4 multiplications par exemple, mais l'économie est évidente, car par la méthode classique on devrait faire pour *deux* transformations effectuées pour l'équation de sixième degré 50 multiplications et 18 additions ou soustractions, en tenant compte des signes et en écrivant beaucoup de résultats intermédiaires qu'on ne dois pas ecrire en procédé spectral. On gagne donc toujours beaucoup de temps par le procédé spectral. Quelques lecteurs, pourraient peut-être penser que le temps épargné par la diminution du nombre d'opérations se perd en formation des spectres. Cela n'est nullement vrai, car les spectres ne s'écrivent guère, les calculateurs spectraux un peu avancés les „mettent" directement de l'équation à la machine à calculer et écrivent, du résultat de la machine, non les spectres, mais directement les équations correspondantes. De même il me semble inutile de démontrer les autres avantages de la méthode spectrale, cités au commencement de l'article, car après l'exemple numérique ils sont évidents.

Remarquons que l'on peut toujours (en se servant de grandes machines à calculer ou en partageant les spectres en parties) faire par la méthode spectrale autant de transformations qu'on le veut. Mais quelquefois il est plus commode de faire seulement quelques transformations premières par la méthode spectrale et puis de passer à la méthode algébrique classique, surtout si les coefficients sont devenus par les transformations très inégaux et que beaucoup de leurs produits puissent être négligés.

Remarquons encore que la méthode spectrale n'est pas bornée exclusivement aux équations algébriques, elle peut être appliquée aussi pour le calcul des zéros des fonctions *transcendantes* qu'on peut représenter par des séries tayloriennes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Petrovitch, *Leçons sur les spectres mathématiques, proféssées à la Sorbonne en 1928*, Gauthier-Villars, Paris 1928.

[2] C. Orloff, *Application du calcul spectral aux problèmes sur les polynômes*, Bull. de l'Acad. Serbe. No. 1 Belgrade, 1933.

[3] C. Orloff, *Applications arithmétiques et analytiques des spectres mathématiques*, (en serbe avec un résumé en français), Thése, Beograd 1935.

[4] C. Orloff, *Méthode spectrale pratique d'évaluation numérique des déterminants et de résolution du système d'équations linéaires*, en français, Vesnik društva matematičara i fizičara Srbije V, 1—2, Beograd, 1953.

[5] C. Orloff, *Les éléments d'arithmétique et d'algèbre spectrale pratique*, (en serbe), Beograd, 1955.

[6] C. Orloff, *The fundamentals of the practical spectral arithmetic and algebra*, Vršac, Jugoslavia, 1955.

УПРОШЋАВАЊЕ GRAEFFE-ове МЕТОДЕ ПОМОЋУ МАТЕМАТИЧКИХ СПЕКТАРА

КОНСТАНТИН ОРЛОВ, БЕОГРАД

Садржај

Спектрална метода ослања се на следећу теорему.

Теорема: *Нека је дата једначина* (1) *где су* a_i *цели бројеви. Образујмо спектре ове једначине и то, обичан* S *и поправљени на свим парним местима* $\bar{S}$, *са униформним ритмом* h, *који је одређен следећим једначинама*

$$h = \left[\log a + \frac{1}{2} \log 2(n+1)\right] + 1; \quad a = \max |a_i|. \tag{4}$$

Горњи спектри су дати формулама

$$S = P(10^h) \qquad , \quad \bar{S} = (-1)^n P(-10^h).$$

Ако са S_1 *означимо обичан спектар, са униформиним ритмом* $2h$, *трансформисане једначине, која има за корене квадрате корена једначине* (1), *тада се* S_1 *добија као следећи производ*

$$S_1 = S \cdot \bar{S} \tag{5}$$

Помоћу спектралне методе смањује се број рачунских радњи, потребних ради извршења једне трансформације алгебарске једначине (1), од $\left[\frac{3n^2 + 4n + 4}{4}\right]$ на свега 5, маколико било n.

*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R.P. de Serbie
Vol. VIII, 1—2 (1956), Beograd
Yougoslavie*

SPECIALPERTURBOJ DE VEKTORAJ ELEMENTOJ DE PLANEDETORBITO

de BOŽIDAR POPOVIĆ, SARAJEVO

1. — Krom la klasikaj (sferaj) elipsaj elementoj de planedetorbito (inklino, nodlongitudo, longa duonakso; ekscentrikeco, perihelilongitudo kaj mezanomalio — aŭ mezlongitudo — de la epoko), estas uzataj ankaŭ la vektoraj elementoj: vektora sektorrapido $\mathfrak{C}$, perihelia vektoro $\mathfrak{D}$ kaj pastempo T tra perihelio. Al ĉi tia elekto de la elementoj direktigas senpere la integraloj de la dukorpa problemo: la areointegralo

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{r}\mathfrak{v}]\,, \tag{1}$$

la Laplasa (aŭ Hamiltona) integralo

$$\mathfrak{D} = [\mathfrak{v}\mathfrak{C}] - \frac{\mathfrak{r}}{r} \tag{2}$$

kaj la Keplera ekvacio

$$u - D \sin u = E^3 (t - T)\,. \tag{3}$$

Ĉi tie $\mathfrak{r}$ kaj $\mathfrak{v}$ estas suncentraj pozicio kaj rapido, u ekscentra anomalio de planedeto kaj E devas esti determinata el

$$EC = \sqrt{1 - D^2}\,. \tag{4}$$

La skalaro T venas kiel la sesa skalara elemento, ĉar la vektoroj $\mathfrak{C}$ kaj $\mathfrak{D}$ estas reciproke normalaj, t. e. ligitaj per skalara rilato

$$\mathfrak{C}\mathfrak{D} = 0\,. \tag{5}$$

Por la vektoraj elementoj ekzistas ([3], p. 63) diferencialaj perturbekvacioj uzantaj la perturbfunkcion, kaj same ekzistas, [5], la ekvacioj uzantaj senpere la perturbofortօn ($\mathfrak{F}$):

$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = [\mathfrak{r}\mathfrak{F}]\,, \tag{6}$$

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = [\mathfrak{F}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{v}[\mathfrak{r}\mathfrak{F}]]\,, \tag{7}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{C^2 + r}{E^2 D^2}(\mathfrak{r}\mathfrak{v})(\mathfrak{v}\mathfrak{F}) - \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{D}}{D^2}(\mathfrak{r}\mathfrak{F}), \tag{8}$$

kondiĉe ke la ekscentra anomalio estu serĉata el

$$u - D \sin u = \int_T^t E^3\, dt, \tag{9}$$

ĉe kio

$$\frac{dE^3}{dt} = -3E(\mathfrak{v}\mathfrak{F}). \tag{10}$$

Post kiam la vektoraj elipsaj elementoj jam forpuŝis la sferajn elipsajn elementojn el la kalkulado de neperturbitaj efemeridoj, lasttempe ili estas utiligataj ankaŭ en perturb-kalkuloj. En du verkaĵoj de *S. Herrick*, [1], [2], kaj en la plej nova de *P. Musen*, [4], plene estas montrita praktika valoro de la vektoraj elementoj en kalkulado de specialaj perturboj.

Herrick operacias fakte kun la vektoroj $\mathfrak{D}$ kaj $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$, kaj *Musen* evitas multiplikon de la perturboforto per du ŝanĝiĝaj vektoroj $\mathfrak{r}$ kaj $\mathfrak{v}$, pro kio li serĉas perturbojn de la vektoroj $\mathfrak{C}$ kaj

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{C}^2[\mathfrak{C}\mathfrak{D}], \tag{11}$$

enkondukante samtempe la vektoron

$$\mathfrak{K} = \left(1 + \frac{r}{C^2}\right)\mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\mathfrak{F})}{C^2 r} \tag{12}$$

anstataŭ $\mathfrak{F}$. Tiam la ekvacioj (6) kaj (10) restas fakte neŝanĝitaj, nur oni utiligas la kvanton

$$\mathfrak{v} = \frac{1}{C^2}[\mathfrak{C}\mathfrak{D}] + \frac{1}{C^2 r}[\mathfrak{C}\mathfrak{r}], \tag{13}$$

eltirebla el (2). Anstataŭ la ekvacio (7) nun venas

$$\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = \mathfrak{K} - \frac{2r(\mathfrak{F}\mathfrak{C})}{C^4}\mathfrak{C}. \tag{14}$$

Sed negrandaj transformoj de la ekvacioj (7) kaj (8) ebligas eviti uzadon de la ŝanĝiĝa vektoro $\mathfrak{v}$ (kion postulas praktikeco ĉe utiligo de grandaj elektronkalkuliloj — laŭ prava rimarko de *Musen*). Tiel oni malpliigas la multiplikojn de la perturboforto per ŝanĝiĝaj vektoroj kaj samtempe oni evitas enkondukon de la novaj vektoroj $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{K}$.

2. — Pro tio enigu unue $\mathfrak{v}$ el la esprimo (13) en la duan parton de la dekstra flanko de (7) kaj ni ricevos

$$\frac{1}{C^2}[[\mathfrak{C}\mathfrak{D}][\mathfrak{r}\mathfrak{F}]] + \frac{1}{C^2 r}[[\mathfrak{C}\mathfrak{r}][\mathfrak{r}\mathfrak{F}]] = \frac{1}{C^2}[[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]\mathfrak{C}'] + \frac{1}{C^2 r}(\mathfrak{C}\mathfrak{r}\mathfrak{F})\mathfrak{r}, \qquad \overline{C}' = \frac{d\overline{C}}{dt}$$

Per tio la ekvacio (7) fariĝas

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = [\mathfrak{F}\mathfrak{C}] + \frac{[[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]\,\mathfrak{C}']}{C^2} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}'}{C^2 r}\mathfrak{r}. \tag{15}$$

Konsiderinte ke la esprimon $\mathfrak{C}'$ ni jam havas kalkulitan en (6) kaj ke (10) per enigo de (13) fariĝas

$$\frac{dE^3}{dt} = -\,3\,E\left\{\frac{([\mathfrak{F}\mathfrak{C}]\,\mathfrak{D})}{C^2} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}'}{C^2 r}\right\}, \tag{16}$$

kio montras ke ankaŭ $[\mathfrak{F}\mathfrak{C}]$ kaj $\dfrac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}'}{C^2 r}$ estos dufoje utiligataj, oni vidas ke la nombro de la kalkulataj kvantoj grave malpliiĝas.

Restas ankoraŭ transformi la esprimon (8). Por tio oni utiligu esprimon

$$\mathfrak{v} = \frac{E\cos u}{r\sin u}\mathfrak{r} - \frac{E}{D\sin u}\mathfrak{D},$$

kiun oni trovas eliminante la vektoron $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ el la esprimoj por $\mathfrak{r}$ kaj $\mathfrak{v}$. Eniginte ĉi-esprimon en (8) ni havas

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{C^2+r}{E^2D^2}\cdot\frac{D\sin u}{E}\cdot\frac{E\cos u}{r\sin u} - \frac{\cos u - D}{E^2 D}\right)(\mathfrak{r}\mathfrak{F}) - \frac{C^2+r}{E^2D^2}\cdot\frac{D\sin u}{E}\cdot\frac{E}{D\sin u}(\mathfrak{D}\mathfrak{F}) =$$

$$= \left(\frac{C^2\cos u}{E^2 Dr} + \frac{1}{E^2}\right)(\mathfrak{r}\mathfrak{F}) - \frac{C^2+r}{E^2D^2}(\mathfrak{D}\mathfrak{F}).$$

Transformoj de la unua koeficiento donas

$$\frac{2}{E^2} + \frac{C^2\cos u - Dr}{E^2 Dr} = \frac{2}{E^2} + \frac{\cos u\,(1-D^2) - D\,(1-D\cos u)}{E^4 Dr} = \frac{2}{E^2} + \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{D}}{E^2D^2 r}.$$

Do definitive oni havas

$$\frac{dT}{dt} = E^{-2}\left(2 + \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{D}}{E^2 r}\right)(\mathfrak{r}\mathfrak{F}) - \frac{C^2+r}{D^2E^2}(\mathfrak{D}\mathfrak{F}). \tag{17}$$

3. — Tiel la ekvacioj (16), (9), (6), (15) kaj (17) ebligas kalkuladon de specialperturboj de la vektoraj elementoj $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, T. Ankaŭ ĉi tiu sistemo, kiel same aliaj metodoj, ne konvenas por preskaŭ cirklaj orbitoj, ĉar en la ekvacio (17) aperas D en la denominatoro (ŝajne estas D^2, sed en la numeratoro ankaŭ troviĝas $\mathfrak{D}$). Oni ne povas forigi ĉi tiun mankon, ĉar ĝi kuŝas en la naturo de la moviĝo mem.

Anstataŭ la ekvacioj (9) kaj (17) povas esti utiligataj ankaŭ

$$u - D \sin u = M = M_0 + \Delta M + E_0^3 (t - t_0) + \iint \frac{dE^3}{dt} dt^2, \tag{18}$$

$$\frac{d\Delta M}{dt} = -E^3 \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{E(C^2 + r)}{D^2} (\mathfrak{D}\mathfrak{F}) - E\left(2 + \frac{r\mathfrak{D}}{D^2 r}\right)(r\mathfrak{F}). \tag{19}$$

La lastan ekvacion oni facile trovas el (9), skribinte la dekstran flankon en la formo

$$\int_T^{t_0} E^3\, dt + \int_{t_0}^{t} \left\{ E_0^3 + \int_{t_0}^{t} \frac{dE^3}{dt} dt \right\} dt,$$

de kie devenas kaj la dekstra flanko de (18) kaj

$$\frac{d\Delta M}{dt} = \frac{d}{dt} \int_T^{t_0} E^3\, dt = -E^3 \cdot \frac{dT}{dt}.$$

Musen, utiligante unu ekvacion de *Brown*, trovis (en la ĉi-signaĵoj)

$$\frac{d\Delta M}{dt} = \frac{C\sqrt{1-D^2}}{D}\left(\frac{\mathfrak{D}}{D}\,\mathfrak{R}\right) - 2E\,(r\mathfrak{F}).$$

Konsiderinte la kvanton (12), oni facile konkordigas la lastan esprimon kun la ekvacioj (17) kaj (19).

Ĉu estas pli bone utiligi (9) kaj (17) aŭ (18) kaj (19) oni ne povas antaŭaserti, ĉar oni devas vidi kio montriĝos pli praktika por kalkuliloj kiujn oni disponas. Senkonsidere kiu el la variantoj estas pli bona, mi opinias ke la problemo de kalkulado de specialperturboj estas nun solvita kontentige: kaj praktike kaj sen enkonduko de novaj kvantoj apud la jam ekzistantaj vektoraj elementoj.

4. — Por tute certiĝi ke la metodo estas ankaŭ praktika, mi petis *Minor Planet Center* (Centro por planedetoj) en Cincinnati por kalkuli ekzemplon sur elektronkalkulilo. Mi utiligas la okazon por danki al la direktoro d-ro *P. Herget* por afableco permesi la kalkulojn, kaj al mia kamarado d-ro *P. Musen* por senprokrasta efektivigo de la kalkuloj. Samtempe mi prenas liberecon citi vortojn el la letero de *Musen:* ... „in the process of work, I foud that your arrangement is a convenient one". Estas kalkulitaj la perturboj de la planedeto (1593) *1951 LB* de JP 2433720.5 ĝis JP. 2434520.5 en intervaloj de 40 tagoj (laŭ la elementoj el *MPC* 907).

En la subaj tabeloj mi donas la lastan parton de la kalkuloj:

Dato JP. 243	en radianoj. 10^8 $''\Delta$	$\iint \frac{dE^3}{dt} dt^2$	$'\Delta$	$D.\Delta M$	$'\Delta$ por $10^8.\delta\,\mathfrak{C}$			$'\Delta$ por $10^8.\delta\,\mathfrak{D}$		
4240.5	−49847	+2801		+7391						
			+9227		+7297	−5664	−24082	+8359	−52145	−22182
4280.5	−51049	+2644		+7274						
			+16501		+8067	−3105	−32798	+5704	−61252	−25101
4320.5	−49607	+2343		+6753						
			+23254		+8599	−0526	−40589	+3859	−69466	−27755
4360.5	−45822	+1986		+6064						
			+29318		+8925	+1893	−47288	+2704	−76633	−30093
4400.5	−40051	+1623		+5362						
			+34680		+9082	+4041	−52864	+2058	−82729	−32098
4440.5	−32657	+1278		+4735						
			+39415		+9120	+5862	−57361	+1728	−87817	−33779
4480.5	−23985	+0958		+4208						
			+43623		+9078	+7329	−60847	+1539	−91998	−35153
4520.5	−14355									

Por JP. 2434360.5 estas fine trovitaj la valoroj

$$\iint \frac{dE^3}{dt}\, dt^2 = -0\overset{r}{.}00045657 = -0\overset{0}{.}02616,$$

$$D\,\Delta M = +0\overset{r}{.}00026346 \quad (\Delta M = +0\overset{0}{.}053666)$$

$$10^8\,\Delta\,\mathfrak{C}\,(+8778, +702, -44032),\ 10^8\,\Delta\,\mathfrak{D}\,(+3231, -73139, -28951).$$

Pro komparo kun la elementoj kiujn *Musen* trovis per sia metodo kaj kun la elementoj kiujn *E. Rabe* trovis per la metodo de Encke ([4] p. 267), mi citu ankaŭ la aliajn (sferajn kaj vektorajn) kvantojn:

		Musen	*Rabe*	*Popović*
M		$134\overset{0}{.}56629$	$134\overset{0}{.}56625$	$134\overset{0}{.}56628$
$D\,(=e)$		0.2812851	0.2812852	0.2812854
$E^3\,(=n)$		$0\overset{0}{.}2971480$	$0\overset{0}{.}2971483$	$0\overset{0}{.}2971479$
$E^{-2}\,(=a)$		2.2241036	2.2241020	2.2241042
$\frac{\mathfrak{D}}{D}\,(=\mathfrak{P})$	{	+0.560 6864	+0.560 6824	+0.560 6839
		−0.754 4152	−0.754 4165	−0.754 4156
		−0.341 3074	−0.341 3076	−0.341 3071
$\frac{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]}{CD}\,(=\mathfrak{Q})$	{	+0.814 2816	+0.814 2829	+0.814 2819
		+0.577 1561	+0.577 1565	+0.577 1557
		+0.061 9373	+0.061 9360	+0.061 9368

Kiel oni vidas, la konkordo estas tre bona. Por takso de la precizeco ne estas tute sensignifa la fakto ke miaj kvantoj troviĝas plej ofte inter aliaj du kvantoj, precipe kiam ili du multe diferencas.

LA MENCIITA LITERATURO:

[1] S. Herrick, *„A Modification of the „Variations-of-Constants“ Method for Special Perturbations“*, Publ. Astr. Soc. Pacific, **60**, p. 321.

[2] S. Herrick, *„Special Perturbations...“*, Astr. Journal **58**. p. 156.

[3] M. Milankowitch, *„Kanon der Erdbestrahlung und...“*, Éditions speciales, Tome CXXXIII, de l'Akad. serbe des sciences, Beograd, 1941.

[4] P. Musen, *„Special Perturbations of the vectorial Elements“*, Astr. Journal (1954) **59**, pp. 262—267.

[5] B. Popović, *„Les équations nouvelles des perturbations...“*, Bulletin de l'Acad. serbe des sciences, T. V, p. 123 (aŭ GLAS CXCVIII, pp. 129—139)

СПЕЦИЈАЛНИ ПОРЕМЕЋАЈИ ВЕКТОРСКИХ ЕЛЕМЕНАТА ПУТАЊЕ МАЛЕ ПЛАНЕТЕ

БОЖИДАР ПОПОВИЋ, САРАЈЕВО

За векторске елементе, дефинисане изразима (1)—(5), постоје једначине поремећаја које користе функцију силе [3], а има и оних које користе непосредно силу поремећаја, [5]: (6)—(10). Међутим ради практичности рачунања са електронским машинама дати су други облици ([1], [2], [4]), који међутим уводе друге векторе, избегавајући појаву $\mathfrak{v}$ у рачунима. Аутор овде даје малу измену горњих једначина поремећаја, помоћу којих избегава $\mathfrak{v}$, а не уводи нове векторе, већ се задржава потпуно на поменутим векторским елементима. Било која од варијаната: (16), (9), (6), (15) и (17) или пак (16), (18), (6), (15) и (19) омогућује практично израчунавање поремећаја непосредно векторских елемената. Пример израчунат у *Minor Planet Center* показао је и да је метода погодна и да се резултати слажу добро са другим резултатима (изгледа да су и мало тачнији), као што се види из задњег упоредног прегледа.

*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. VIII, 1—2 (1956), Beograd
Yougoslavie*

О ПРИБЛИЖНОЈ ФАКТОРИЗАЦИЈИ ПОЛИНОМА

ДРАГОЉУБ МАРКОВИЋ, БЕОГРАД

У прошлом раду [1] показали смо процес факторизације само у једном случају кад се корен x дате алгебарске једначине изрази у облику

$$x = 1 \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu x^\nu . \tag{1}$$

Међутим, дата алгебарска једначина (са реалним коефицијентима нпр.)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1} + x^m = 0, \tag{2}$$

може се на више начина идентички написати у облику сличном (1). Уопште узев, корен x се може на више начина претставити у облику рационалне разломљене функције

$$x = \sum_{\nu=0}^{m-1} a_{1\nu} x^\nu \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} a_{0\nu} x^\nu , \tag{3}$$

при чему степен полинома у имениоцу мора бити $m-1$, а степен полинома у бројиоцу највише $m-1$. Коефицијенти полинома на десној страни израза (3) постају непосредно на разне начине из једначине (2), према томе који је од израза облика (3) изабран као почетни.

Тако нпр. једначина

$$1 - x + 2x^3 + x^4 = 0,$$

може се у смислу (3) написати

$$x = \frac{1}{1 - 2x^2 - x^3} \quad \text{или} \quad x = \frac{-1 + x}{2x^2 + x^3} \quad \text{или} \quad x = \frac{1 + 2x^3}{1 - x^3} .$$

Да бисмо показали како се у овом случају спроводи поступак итерације, множићемо најпре (3) редом са $x, x^2, \ldots, x^{m-2}$, како бисмо добили одговарајуће изразе и за $x^2, x^3, \ldots, x^{m-1}$, т.ј.

$$x^{1+p} = \sum_{\nu=0}^{m-1} a_{1\nu} x^{\nu+p} \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} a_{0\nu} x^\nu . \tag{4}$$

$$P = 0, 1, \ldots, m-2.$$

Али пошто ће полиноми у бројиоцима евентуално достићи степен m и већи од m, треба извршити снижење степена до највише $m-1$. То ће се постићи на тај начин што ће се поступним множењем алгебарске једначине (2) са x, x^2, $x^3, \ldots$ моћи рационално (у облику полинома) изразити x^m, x^{m+1}, $x^{m+2}, \ldots$ помоћу коефицијената једначине (2) и степена x, $x^2, \ldots$, x^{m-1}, и као такви унети у претходне изразе (4). На тај начин ће и изрази за x^2, $x^3, \ldots$, x^{m-1} бити слични ономе за x, односно бити по типу исти са њим. Дакле, обележимо дефинитивно и једнообразно

$$x^k = \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu a_{k\nu} \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu a_{0\nu}. \tag{5}$$

$$k = 1, 2, \ldots, m-1$$

Да бисмо показали у чему се састоји поступак итерације, поћи ћемо рецимо од израза за x тј. од (3). Поступним уношењем на десној страни његовој уместо x, $x^2, \ldots$, x^{m-1} њихове изразе из (5), добићемо, после сређивања и скраћивања са $\sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu a_{0\nu}$, нов израз за x сличног типа као и (3) односно (5). Обележимо га са

$$x = \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu a_{1\nu}(2) \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu a_{0\nu}(2) \tag{6}$$

при чему смо са $a_{1\nu}(2)$ и $a_{0\nu}(2)$ обележили коефицијенте одговарајућих полинома после прве трансформације изразима из (5).

Применимо ли на (6) исти поступак као раније опет помоћу израза из (5), то ћемо за x добити трећи облик сличан изразима (3) и (6). Из овога произилази да се овај поступак може увек помоћу (5) поновити небројено пута и да ће се добијати сваки пут за x идентични изрази облика (3).

Дакле, ако се наведени поступак итерира n пута, написаћемо за x идентитет

$$x = \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu a_{1\nu}(n) \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu a_{0\nu}(n), \tag{7}$$

при чему узимамо $a_{1\nu}(1) \equiv a_{1\nu}$, $a_{0\nu}(1) \equiv a_{0\nu}$ као коефицијенте прве итерације.

Изложени поступак можемо прегледније приказати у матричном облику. Пре свега образоваћемо почетну матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,m-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,m-1} \end{Vmatrix}, \tag{7'}$$

чији се елементи формирају на следећи начин: у прву врсту ређају се коефицијенти полинома заједничког имениоца, у другу врсту коефицијенти полинома бројиоца за x, у трећу врсту коефицијенти бројиоца за x^2, итд. а у последњу m-ту врсту коефицијенти полинома бројиоца за x^{m-1}.

Да бисмо добили коефицијенте $a_{1\nu}(2)$ и $a_{0\nu}(2)$ у изразу (6) треба матрицу

$$\begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,m-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,m-1} \end{Vmatrix}$$

коефицијената првог полинома имениоца и првог полинома бројиоца из (3) помножити са матрицом A. Тако настала матрица биће истог типа као и претходна тј. правоугаона $2 \times m$ матрица. Помножи ли се тако постала матрица опет са A, добиће се нова $2 \times m$ матрица са елементима $a_{1\nu}(3)$ и $a_{0\nu}(3)$, итд.

Али уместо низа правоугаоних $2 \times m$ матрица које нам дају поступно низове коефицијената полинома имениоца и полинома бројиоца само у изразима за x, погодније је истовремено постићи низове коефицијената полинома бројиоца и полинома имениоца и за изразе за $x^2, x^3, \ldots, x^{m-1}$. То ће се постићи ако се формирају матрице A, A^2, $A^3, \ldots, A^n, \ldots$ све квадратне $m \times m$, при чему је

$$A^u = \begin{Vmatrix} a_{00}(n) & a_{01}(n) & \cdots & a_{0,m-1}(n) \\ a_{10}(n) & a_{11}(n) & \cdots & a_{1,m-1}(n) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m-1,0}(n) & a_{m-1,1}(n) & \cdots & a_{m-1,m-1}(n) \end{Vmatrix}$$

Матрица A^n зове се матрица генератриса коефицијената $a_{ij}(n)$. Њихово значење је истоветно са значењем коефицијената матрице A, с том разликом што се коефициенти $a_{ij}(n)$ односе на полиноме после n итерација.

На основу припреме коју смо досада изложили, можемо формулисати овај општи резултат:

Ако матрица генератриса A^n тежи, кад $n \to \infty$, некој матрици C тако да однос свака два њена елемента који се налазе у истом ступцу а у двема суседним врстама тежи граници $\lambda \neq 0$, тј.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{ij}(n)}{a_{i-1,j}(n)} = \lambda \neq 0, \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m-1 \\ j = 0, 1, \ldots, m-1 \end{array}$$

онда λ представља један реалан корен једначине (3).

Доказ. Напишимо (7) у облику

$$x \sum_{\nu=0}^{m-1} x^{\nu} a_{0\nu}(n) - \sum_{\nu=0}^{m-1} x^{\nu} \frac{a_{1\nu}(n)}{a_{0\nu}(n)} \cdot a_{0\nu}(n) = 0. \tag{8}$$

То је уствари алгебарска једначина (2) или (3) настала низом трансформација описаних у предњем делу. Редукцијом и сређивањем, једначина (8) разликовала би се од (2) евентуално само у једној мултипликативној константи.

Ако је у смислу горњега става

$$\frac{a_{1\nu}(n)}{a_{0\nu}(n)} = \lambda + \varepsilon_{\nu}(n), \quad \varepsilon_{\nu}(n) \to 0, \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

онда се (8) може написати

$$(x - \lambda) \sum_{\nu=0}^{m-1} x^{\nu} a_{0\nu}(n) - \sum_{\nu=0}^{m-1} \varepsilon_{\nu}(n)\, x^{\nu} a_{0\nu}(n) = 0$$

а ова ће бити задовољена за $x = \lambda$, јер други члан леве стране тежи нули кад $n \to \infty$. Ово показује да је гранична вредност λ један реалан корен алгебарске једначине (2).

Примера ради наведимо ову једначину

$$x^4 + x^3 + a^2 - x - 1 = 0,$$

за коју се нпр. може написати

$$x = \frac{1 + x}{x + x^2 + x^3}, \quad x^2 = \frac{x + x^2}{x + x^2 + x^3}, \quad x^3 = \frac{x^2 + x^3}{x + x^2 + x^3}.$$

Одговарајуће матрице су

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A^4 = \begin{Vmatrix} 5 & 11 & 8 & 4 \\ 4 & 9 & 7 & 4 \\ 4 & 8 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$A^8 = \begin{Vmatrix} 113 & 246 & 177 & 96 \\ 96 & 209 & 150 & 81 \\ 81 & 177 & 128 & 69 \\ 69 & 150 & 108 & 59 \end{Vmatrix}.$$

Упоређивањем односа прве врсте A^8, добија се

$$\frac{96}{113}=0{,}8495\ldots,\ \frac{209}{246}=0{,}8495\ldots,\ \frac{150}{177}=0{,}8474\ldots,\ \frac{81}{96}=0{,}8436\ldots$$

као приближне вредности једног позитивног корена дате једначине.

На крају ћемо навести неке напомене:

1⁰. У практичне сврхе није потребно рачунати редом A^2, A^3, $A^4, \ldots$, већ се до високог степена може доћи и израчунавањем A^2, A^4, A^8, $A^{16}, \ldots$, тј. поступним квадрирањем претходне матрице;

2⁰. Као што из доказа теореме произлази, за израчунавање приближне вредности корена не треба узимати у обзир све врсте, већ само нпр. прве две, јер су оне довољне за оцену приближне вредности;

3⁰. Матрице A, A^2, A^4, $A^8, \ldots$, у целини корисне су за теориска разматрања. Али и са практичне стране, јер односи елемената истог ступца треће и прве дају нам приближне вредности за квадрат посматраног корена дате једначине, а односи елемената истог ступца четврте и прве врсте дају нам приближне вредности за куб посматраног корена. Остале предности низа матрица A, A^2, A^3, $A^4, \ldots$ у целини, односно њихових елемената, биће приказане доцније.

БИБЛИОГРАФИЈА

[1] Markovitch D., *Sur un procédé de factorisation approximative des polynômes*, Весник друштва математичара и физичара НР Србије, VI, 1—2, 1954.

SUR UN MODE DE FACTORISATION APPROXIMATIVE DES POLYNÔMES

par D. MARKOVITCH, BEOGRAD

Résumé

L'article envisage une équation algébrique génèrale (2) ecrite d'une manière quelconque comme (3), dont lés coeficients sont par ex. reels. Au moyen d'une suite de transformations (5), ou $a_{0\nu}$ et $a_{k\nu}$ sont les fonctions des a_ν ($\nu=0, 1, 2, \ldots, m-1$), l'équation (3) se traduise en une suite correspondante des identitées (7). Les coefficients $a_{k\nu}(n)$ sont, comme le résultat des transformations successives (5), d'une part les fonctions des a_ν, et d'autre part du nombre n de répétition du procédé.

Cela revient au même que si, au lieu de faire la suite des transformations (5), de former la matrice initiale A (7′) et la matrice generatrice A^n. Cette dernière nous fournit en même temps tous les coefficients $a_{k\nu}(n)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$. Alors le résultat essentiel est le suivant:

Si la matrice generatrice A^n tend, pour $n \to \infty$, vers une matrice C de la manière, que le rapport de deux elements, qui correspondent a une même colonne des deux lignes consecutives, tend vers $\lambda \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{ij}(n)}{a_{i-1,j}(n)} = \lambda = 0, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m-1 \\ j = 0, 1, \ldots, m-1, \end{array}$$

alors λ répresente un zéro réel de l'équation (2).

Il est toujours possible de former une matrice initiale et la matrice generatrice correspondante pour chaque žéro réel d'une équation algebrique. Si elle „converge“ au sens que nous avons indiqué, nous obtiendrons chaque fois une valeur approchée pour un zéro réel de l'équation donnée.

Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R.P. de Serbie
Vol. VIII, 1–2 (1956), Beograd
Yougoslavie

О ЈЕДНОМ СТАВУ K. L. CHUNG-А

ЧАСЛАВ В. СТАНОЈЕВИЋ, БЕОГРАД

1. Од K. L. Chung-а [1] потиче став: *Нека је* X_n *низ независних случајних променљивих за које је* $M(X_n)=0$, $M(|X_n|^{2r})<\infty$, *за неки реални број* $r \geqslant 1$. *Ако*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(|X_n|^{2r})}{n^{r+1}} < \infty$$

тада

$P\{|S_n| < n\varepsilon$, за свако n почев од једног утврђеног ранга m, и за свако $\varepsilon > 0\} = 1$

где је $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n .$$

Тај став даје уствари довољне услове за важење строгог закона великих бројева за низ X_n и формулисан је преко строге конвергенције за низ S_n. Овде указујемо на аналогни став за униформну конвергенцију у вероватноћи низа S_n.

2. Нека је X_n низ независних случајних променљивих, са $M(X_n)=0$ и нека је $\varphi(n)$ монотоно растући низ позитивних бројева. Ослањајући се на методу из [2] и на једну неједначину Marcinkiewicz-Zygmund-а [1] може лако да се добије неједначина

$$P\left\{\bigcup_{2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1}\left(|S_m| \geqslant m^{1-\frac{1}{2r}}\varphi^{\frac{1}{2r}}(m)\right)\right\} \leqslant A\, \frac{\sum\limits_{k=1}^{2^{\nu}-1} M(|X_k|^{2r})}{2^{r(\nu-1)}\,\varphi(2^{\nu-1})} \tag{2.1}$$

где је $r \geqslant 1$, $S_m = X_1 + X_2 + \ldots X_m$, и где A зависи само од r.

У формулацији за униформну конвергенцију став K. L. Chung-а гласи:

Став. *Нека је* X_n *низ независних случајних променљивих са* $M(X_n)=0$, *и нека за неко реално* $r \geqslant 1$

$$n\,\varepsilon_n^{2r} \uparrow \infty \tag{2.2}$$

где $\varepsilon_n > 0$ *и* $\varepsilon_n \downarrow 0$

Ако

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M(|X_k|^{2r})}{k^{r+1}\,\varepsilon_k^{2r}} < \infty \tag{2.3}$$

тада

(2.4) $P\{|S_n| < n\varepsilon_n$, за свако n почев од једног утврђеног ранга $m\} = 1$

или у асимӣтоӣској ознаци

(2.5) $$P\{S_n = 0\,(n\,\varepsilon_n)\} = 1$$

Доказ. Ставимо да је $n\,\varepsilon_n^{2r} = \varphi(n)$. Конвергенција реда

(2.6) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} P\left\{\bigcup_{2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1}\left(|S_m| \geqslant m^{1-\frac{1}{2r}}\,\varphi^{\frac{1}{2r}}(m)\right)\right\}$$

имплицира тврђење (2.4). Према (2.1) ред (2.6) може да се мајорира редом

$$A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2^{\nu}-1} M(|X|^{2r})}{2^{r(\nu-1)}\,\varphi(2^{\nu-1})}$$

Према условима става може да се промени поредак сабирања у последњем реду, те добивамо

(2.7) $$A\sum_{k=1}^{\infty} M(|X_k|^{2r})\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{rj}\,m_k^{r}\,\varphi(2^{j}\,m_k)}$$

где је
$$m_k = 2^{[\lg k]^{1)}}$$

На основу (2.2) ред (2.7) може да се мајорира редом

$$A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M(|X_k|^{2r})}{k^{r+1}\,\varepsilon_k^{2r}}$$

који по претпоставци конвергира.

ЛИТЕРАТУРА

[1] K. L. Chung, *The Strong Law of Large Numbers*, Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California (1951) p. 348—349.

[2] Ч. Станојевић, *О сӣрогом закону великих бројева* (у штампи)

ON A THEOREM OF K. L. CHUNG

by ČASLAV V. STANOJEVIĆ, BEOGRAD

Summary

A version of a theorem of K. L. Chung [1] is given:

Let X_n *be a sequence of independent random varlables, with* $M(x_n)=0$, $M(|x_n|^{2r}) < \infty$, *and let*

$$n\varepsilon_n^{2r}\uparrow\infty,\ \varepsilon_n > 0,\ \varepsilon_n\downarrow 0,$$

for some real $r \geqslant 1$.

If

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(|X_n|^{2r})}{n^{r+1}\,\varepsilon_n^{2r}} < \infty,$$

then

$$P\left\{\lim_{n=\infty}\frac{S_n}{n\,\varepsilon_n} = 0\right\} = 1.$$

[1]) lg је узет за основу 2

*Bulletin de la Société de mathématiciens
et physiciens de la R.P. de Serbie
Vol. VIII, 1—2 (1956), Beograd
Yougoslavie*

ЈЕДАН НАЧИН СВОЂЕЊА ОПШТЕ ЈЕДНАЧИНЕ КОНИЧНИХ ПРЕСЕКА НА КАНОНИЧНИ ОБЛИК

ВАРИЈА БУЛАТОВИЋ, БЕОГРАД

1. Нека је дата општа једначина коничних пресека у облику:

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0. \tag{1}$$

Ако је $B = 0$ једначина се своди на канонични облик једноставним идентичним трансформацијама које се састоје у тзв. „издвајању потпуног квадрата" из чланова у којима фигурише x, као и из оних у којима фигурише y.

Кад је $B \neq O$ убичајени поступак којим се овај случај своди на претходни састоји се у томе што се старе променљиве x и y замене новима применом познатих образаца трансформације координата:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

у којима се вредност параметра α одређује из услова да у трансформисаној једначини коефицијенат уз производ $x'y'$ нових променљивих буде једнак нули.

Овај поступак, иако у суштини елементаран и због своје систематичности веома погодан за теориска разматрања и дискусије, рачунски је врло гломазан и за његово исцрпно извођење потребно је утрошити доста времена. Због тога није без интереса указати и на друге начине свођења који би били краћи и подеснији од поменутог.

У случају кад је $\delta \equiv AC - B^2 = 0$ једначина (1) може се, као што је познато*), свести на канонични облик на врло једноставан начин, који се састоји из лако изводљиве идентичне трансформације њене леве стране и примене обрасца за отстојање тачке од праве:

$$ax + by + c = kd^2. \tag{2}$$

Показаћемо, међутим, како се сличан поступак може применити и у случају кад је $\delta \neq 0$.

---

*) Види на пример: A. Geary H. V. Lowry and H. A. Hayden, *Advenced Mathematics for Technical Students*, Part I, Longmans, Green and &, London, 1947.

2. У ту сврху доказаћемо најпре да важи следећа

Лема. Ако је бар у једној тачки (x, y) вредност квадратне форме

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \tag{3}$$

позитивна, онда важи идентитет:

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \equiv \left(\sqrt{\frac{A}{2}+\lambda}\,x + \beta\sqrt{\frac{C}{2}+\mu}\,y\right)^2 + \\ + \varepsilon\left(\sqrt{\varepsilon\left(\frac{A}{2}-\lambda\right)}\,x - \beta\sqrt{\varepsilon\left(\frac{C}{2}-\mu\right)}\,y\right)^2, \text{*)} \end{aligned} \tag{4}$$

у којем је

$$\beta = \begin{cases} +1 \text{ ако је } B \geqslant 0 \\ -1 \text{ ако је } B < 0, \end{cases} \qquad \varepsilon = \begin{cases} +1 \text{ ако је } \delta \geqslant 0 \\ -1 \text{ ако је } \delta < 0, \end{cases} \tag{*}$$

$$\lambda = \frac{2B^2 + A(A-C)}{2\sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}, \qquad \mu = \frac{2B^2 - C(A-C)}{2\sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}. \tag{5}$$

Доказ. Да би вредност квадратне форме (3) била позитивна бар у једној тачки, мора бити или $\delta < 0$, или бар један од коефицијената A и C позитиван. Лако је показати да су под овим условима, а с обзиром на значења величина ε, λ и μ, сви изрази под коренима у релацији (4) позитивни, и, дакле, вредности самих корена реалне. Даље је:

$$\left(\sqrt{\frac{A}{2}+\lambda}\,x + \beta\sqrt{\frac{C}{2}+\mu}\,y\right)^2 + \varepsilon\left(\sqrt{\varepsilon\left(\frac{A}{2}-\lambda\right)}\,x - \beta\sqrt{\varepsilon\left(\frac{C}{2}-\mu\right)}\,y\right)^2 =$$

$$= Ax^2 + 2\beta mxy + Cy^2,$$

где смо, краткоће ради, ставили:

$$m \equiv \sqrt{\left(\frac{A}{2}+\lambda\right)\left(\frac{C}{2}+\mu\right)} - \varepsilon\sqrt{\left(\frac{A}{2}-\lambda\right)\left(\frac{C}{2}-\mu\right)},$$

па остаје још само да се докаже да је $\beta m = B$, односно $m = |B|$.

У том циљу показаћемо најпре да је, у условима леме: $m = 0$ или $m > 0$ према томе да ли је $B = 0$ или $B \neq 0$. Заиста, за $B = 0$ је:

$$\lambda = \frac{A}{2}\cdot \operatorname{sgn}(A-C), \quad \mu = -\frac{C}{2}\cdot \operatorname{sgn}(A-C),$$

па је према томе $m = 0$. За $B \neq 0$ и $\delta < 0$ је очигледно $m > 0$, док за $\delta > 0$, m има исти знак као и разлика

$$\left(\frac{A}{2}+\lambda\right)\left(\frac{C}{2}+\mu\right) - \left(\frac{A}{2}-\lambda\right)\left(\frac{C}{2}-\mu\right) = A\mu + C\lambda = \frac{2B^2(A+C)}{2\sqrt{4B^2+(A-C)^2}};$$

---

*) Уместо $\varepsilon\left(\frac{A}{2}-\lambda\right)$ и $\varepsilon\left(\frac{C}{2}-\mu\right)$ може се писати $\left|\frac{A}{2}-\lambda\right|$ и $\left|\frac{C}{2}-\mu\right|$.

а како A и C морају бити позитивни, то значи да је у овом случају $m > 0$. Најзад, за $\delta = 0$ је: $\lambda = \frac{A}{2}$, $\mu = \frac{C}{2}$, и дакле: $m = \sqrt{AC} > 0$.

С друге стране, после краћег рачуна добијамо да је $m^2 = B^2$, па је према томе заиста $m = |B|$. Тиме је горња лема у потпуности доказана.

3. Само свођење једначине (1) је сада врло једноставно. Пре свега је јасно да се увек може учинити да квадратна форма, која се састоји из прва три члана леве стране једначине (1), задовољава услове леме. Претпоставимо, дакле, да је то већ учињено, и да је усто $\delta \neq 0$. Тада је увек могуће одредити вредности p и q тако да једнакост:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F =$$
$$= \left(\sqrt{\frac{A}{2} + \lambda}\, x + \beta\sqrt{\frac{C}{2} + \mu}\, y + p\right)^2 + \varepsilon\left(\sqrt{\varepsilon\left(\frac{A}{2} - \lambda\right)}\, x - \beta\sqrt{\varepsilon\left(\frac{C}{2} - \mu\right)}\, y + 2q\right)^2 +$$
$$+ F - p^2 - \varepsilon q^2, \tag{6}$$

са напред утврђеним значењима величина β, ε, λ и μ, буде идентички задовољена.

Заиста, на основу горње леме квадратни чланови на десној страни једнакости (6) идентични су са онима на левој, а да би то био случај и са линеарним, треба p и q да задовољавају систем од две линеарне једначине за чију је детерминанту лако показати да је, под учињеним претпоставкама, различита од нуле.

Према томе, са овим вредностима за p и q једначина (1) може се написати у облику:

$$\left(\sqrt{\frac{A}{2} + \lambda}\, x + \beta\sqrt{\frac{C}{2} + \mu}\, y + p\right)^2 + \varepsilon\left(\sqrt{\varepsilon\left(\frac{A}{2} - \lambda\right)}\, x - \beta\sqrt{\varepsilon\left(\frac{C}{2} - \mu\right)}\, y + q\right)^2 +$$
$$+ F - p^2 - \varepsilon q^2 = 0. \tag{7}$$

С друге стране, са мало рачуна да се показати да су праве

$$\sqrt{\frac{A}{2} + \lambda}\, x + \beta\sqrt{\frac{C}{2} + \mu}\, y + p = 0,$$
$$\sqrt{\varepsilon\left(\frac{A}{2} - \lambda\right)}\, x - \beta\sqrt{\varepsilon\left(\frac{C}{2} - \mu\right)}\, y + q = 0$$

нормалне једна на другој, па се могу узети за осе новог координатног система. Ако прву од њих узмемо, рецимо, за η, а другу за ξ осу, онда се једначина (7), с обзиром на образац (2), може одмах писати у каноничном облику:

$$k_1^2\, \xi^2 + \varepsilon\, k_2^2\, \eta^2 + f = 0, \tag{8}$$

где је

$$k_1^2 = \frac{A+C}{2} + \lambda + \mu = \frac{1}{2}(A + C + \sqrt{4B^2 + (A-C)^2}),$$

$$k_2^2 = \varepsilon \cdot \left(\frac{A+C}{2} - \lambda - \mu\right) = \frac{\varepsilon}{2}(A + C - \sqrt{4B^2 + (A-C)^2}),$$

$$f = F - p^2 - \varepsilon q^2.$$

Једна од предности овог начина свођења у поређењу са другима састоји се у томе што нам он одмах даје и једначине оса симетрије коничног пресека у односу на стари координатни систем.

ON A NEW METHOD OF REDUCTION OF THE GENERAL EQUATION OF CONICS TO THE CANONICAL FORM

by ZARIJA BULATOVIĆ, BEOGRAD

Summary

The author proves at first the lemma:

If the quadratic form (3) is positive at least in one point (x, y), then holds the identity (4), where β and ε are defined by means of the formulas (*), and λ and μ are given by the formulas (5).

Then it is demonstrated how, using the identity (4), the equation (1), in the case when $AC - B^2 \neq 0$, may be written in the form (7) from which, regarding the known formula (2) of Analytic geometry, one can immediately pass to the canonical form (8).

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie Vol. VIII, 1—2 (1956), Beograd Yougoslavie

ПРИЛОГ ДОКАЗИМА НЕКИХ СТАВОВА ВЕКТОРСКЕ АЛГЕБРЕ

ВИКТОР ЈАНЕКОСКИ, СКОПЉЕ

За доказивање познатих ставова векторске алгебре:

$$(1)\qquad (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}=(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\cdot\mathfrak{a}=(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b},$$

$$(2)\qquad (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}=\mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})-\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}),$$

где су $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ произвољни вектори, у литератури срећемо различите поступке.

Овде (тач. **1**), изводећи израз за квадрат мешовитог производа вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ у облику Gram'ове детерминанте трећег реда

$$(3)\qquad [(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}]^2=\begin{vmatrix}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}\\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}\\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}\end{vmatrix},$$

изложићемо један нов поступак за добивање правила цикличне размене у мешовитом производу (1).

Даље (тач. **2** и **3**), даћемо неколико нових доказа за познати образац двоструког векторског производа (2), као и (тач. **4**), за случај некомпланарних вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, извођење једног новог облика трансформационог обрасца:

$$(2')\qquad (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}=\frac{(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})}{(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\cdot\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}+\frac{(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{b})}{(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b}}\,\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}.$$

При томе, поред правила (1) и идентитета (3), користићемо још и дистрибутивни закон за скаларно множење, Lagrange'ов идентитет

$$(4)\qquad (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2+(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2=\mathfrak{a}^2\,\mathfrak{b}^2,$$

као и специјалан случај дистрибутивног закона за векторско множење

$$(5)\qquad (\mathfrak{a} + \lambda\,\mathfrak{b}) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \qquad (\lambda = \text{произвољан скалар}).$$

Идентитет (4) је очигледан и може се лако показати да је он последица дистрибутивног закона за скаларно множење, док идентитет (5) следује непосредно из геометриско-површинског значења векторског производа.

1.1. Један произвољан вектор $\mathfrak{c}$ може се разложити, за неколинеарне $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, у некомпланарном триједру вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$:

$$(6)\qquad \mathfrak{c} = \lambda\,\mathfrak{a} + \mu\,\mathfrak{b} + \nu\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}).$$

Ако ову једначину (6) измножимо скаларно векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ — узимајући у обзир да је, због нормалности вектора $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ на векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = 0$ — добићемо систем

$$(H_1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \lambda\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} + \mu\,\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a} & = \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a},\\ \lambda\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + \mu\,\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b} & = \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b},\\ \lambda\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} + \mu\,\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a} + \nu\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c} & = \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c},\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \nu\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2 & = \mathfrak{c}\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) \end{array}\right.$$

који, поред тога што одређује коефицијенте разлагања λ, μ, ν, даје и, с обзиром на Lagrange'ов идентитет (4) и независно од геометриског значења мешовитог производа $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$, идентитет (3).

1.2. Ако сада у једначини (6) извршимо цикличну замену вектора $\mathfrak{a}\to\mathfrak{b}\to\mathfrak{c}\to\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\to\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$ и поновимо поступак из тач. **1.1**, добићемо систем (H_2) који ће одређивати квадрат мешовитог производа $(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$ преко исте Gram'ове детерминанте дате десним изразом идентитета (3). Према томе, из система (H_1) и (H_2) имамо

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c} = \varepsilon\,(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\cdot\mathfrak{a},$$

где је $\varepsilon = \pm 1$ параметар који се, због једнозначности мешовитих производа $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}$ и $(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\cdot\mathfrak{a}$, одређује из једног партикуларног случаја: нпр., ако $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ граде десни ортогонални триједар вектора, лако се налази $\varepsilon = +1$. Слично, преко одговарајућег система (H_3), из (H_2) и (H_3) добија се $(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\cdot\mathfrak{a} = (\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b}$.

На тај начин доказано је правило цикличне размене у мешовитом производу (1) које се обично [1] геометриски доказује. Код Burali-Forti e Marcolongo'a [2] се наводи да се исто правило може доказати аналитички помоћу координата и уједно се даје доказ помоћу својства сложеног векторског производа $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$ да се може развити на два начина.

2. Да би доказао једнакост (2), Burgatti [3] полази од израза који се лако добија

$$(7) \qquad (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = k[\mathfrak{b}(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})]$$

— где су $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ произвољни вектори, и тврди без доказа да, цитирамо —

„ . . . *essendo* l ($l \equiv k$ — B. J.) *un numero indipendente dai vettori (per ragioni d'omogeneità)*".

Међутим, није непосредно јасно да због хомогености израза $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{b}(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$ скалар k не зависи од вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.

2.1. Доказаћемо, најпре, да скаларна функција k вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ тј. $k = k(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, због хомогености поменутих израза, не зависи од њихових алгебарских вредности, тј. од модула и смерова вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$,

Ако у (7) векторе $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ заменимо респективно са $\lambda\mathfrak{a}, \mu\mathfrak{b}, \nu\mathfrak{c}$. где су λ, μ, ν произвољни позитивни или негативни скалари, имамо

$$(\lambda\mathfrak{a} \times \mu\mathfrak{b}) \times \nu\mathfrak{c} = k(\lambda\mathfrak{a}, \mu\mathfrak{b}, \nu\mathfrak{c})\,[\mu\mathfrak{b}(\nu\mathfrak{c} \cdot \lambda\mathfrak{a}) - \lambda\mathfrak{a}(\mu\mathfrak{b} \cdot \nu\mathfrak{c})],$$

одакле, с обзиром на (7)

$$(8) \qquad k(\lambda\mathfrak{a}, \mu\mathfrak{b}, \nu\mathfrak{c}) = k(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}),$$

тј. k је хомогена функција нултог степена у односу на алгебарске вредности вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ — што због произвољних, и према томе, различитих λ, μ, ν даје $k \equiv \text{Const}$.

Да функција k не зависи и од праваца — углова што их између себе захватају вектори $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, доказаћемо на следећи начин. За триједре вектора $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ и $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ имамо, према (7), респективно једначине

$$(9) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{b}_1) \times \mathfrak{c}_1 = k(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1)\,[\mathfrak{b}_1(\mathfrak{c}_1 \cdot \mathfrak{a}_1) - \mathfrak{a}_1(\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{c}_1)], \\ (\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{b}_1) \times \mathfrak{c}_1 = k(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1)\,[\mathfrak{b}_1(\mathfrak{c}_1 \cdot \mathfrak{a}_2) - \mathfrak{a}_2(\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{c}_1)]. \end{cases}$$

Вектор $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$ нека је, сада, прешао у произвољан вектор $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2$. На основу резултата (8) довољно је да се стави $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 + \beta\mathfrak{b}_1$, где β означава произвољан скалар. Тада су, према (5), леви изрази од (9) једнаки; исто тако су једнаки и десни изрази који стоје уз функцију k, што се лако доказује развијањем другог десног израза. Значи, имамо

$$(10) \qquad k(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1) = k(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1),$$

тј., с обзиром на (8), k не зависи од правца, смера и модула вектора $\mathfrak{a}$. Слично, трансформацијама: $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_1 + \alpha\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_1 + \gamma(\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{b}_2)$, где су α, γ произвољни скалари, доказује се да k не зависи респективно од вектора $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, тј. за све међусобне положаје и модуле вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ је

$$k \equiv \text{Const},$$

што је и требало доказати.

Сада, слично *Burgatti*'у, из једног партикуларног случаја нпр. за $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}$ нормално на $\mathfrak{b}$, из (7) се лако налази $k = 1$.

2.2. Да је скалар k у једначини (7) константа, може се — опет помоћу функционалних једначина — доказати и на следећи начин.

Једначину (7) множимо скаларно једним произвољним помоћним вектором $\mathfrak{d} \neq 0$ и, на основу доказаног правила цикличне размене у мешовитом производу (1) примењеног на израз $[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \cdot \mathfrak{d}$ и закона комутације за скаларни производ примењеног на израз $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = = (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$, добивамо четири форме.

$$[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \cdot \mathfrak{d} = [\mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})] \cdot \mathfrak{a} = [(\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \times \mathfrak{a}] \cdot \mathfrak{b} = [\mathfrak{d} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})] \cdot \mathfrak{c}.$$

Одатле, с обзиром на закон алтернације за векторски производ: $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$, од десних страна једначине (7), преко лако схватљивих трансформација, добивамо три релације

$$k(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = k(\mathfrak{d}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = k(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{a}) = k(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d})$$

које опет дају $k \equiv \text{Const}$.

3. За добивање обрасца двоструког векторског производа (2), Chattelun [4] полази од *Lagrange*'овог идентитета (4) и, користећи дистрибутивне законе за скаларно и векторско множење, након извесних скаларно-векторских трансформација, долази до обрасца

$$(11) \qquad (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a})(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$$

који на основу правила цикличне размене у мешовитом производу (1) и дистрибутивног закона за скаларно множење, написан у облику

$$\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{a} = 0$$

заједно са

$$\mathfrak{N} \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{c} = 0,$$

где је

$$\mathfrak{N} \equiv (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} - [\mathfrak{b}(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})]$$

даје, за случај некомпланарних вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, $\mathfrak{N} = 0$, тј. тражени образац (2). Потом, помоћу једне трансформације и дистрибутивних закона на векторско множење, доказује да исти важи и за случај компланарности вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.

3.1. Образац *Chattelun'a* (11) се може добити из нашег система (H_1) у тач. **1.1.** Наиме, из система (H_1) за произвољне векторе $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} \neq \mathfrak{a})$ издвајамо систем

$$(L_1) \qquad \begin{cases} \lambda\, \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}+\mu\, \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}, \\ \lambda\, \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}+\mu\, \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Ако, сада, једначину (6) измножимо скаларно векторима $\mathfrak{a}\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$ и $\mathfrak{b}\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$, користећи правило цикличне размене у мешовитом производу (1), добивамо систем

$$(L_2) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})=-\mu\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2, \\ (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{b})=\quad\lambda\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2; \end{cases}$$

овај систем (L_2), за случај некомпланарних вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, се може добити и ако једначину (6) измножимо скаларно векторима $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}$, док се за компланарне $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ добија, помоћу (5), ако се (6) измножи векторски са $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и тако добивене релације помноже скаларно са $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$.

Решења λ и μ система (L_1) замењена у систему (L_2), преко *Lagrange*'овог идентитета (4), дају обрасце

$$(11') \qquad \begin{cases} (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})=(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})-(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}), \\ (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{b})=(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})-(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) \end{cases}$$

који написани у облику

$$\begin{matrix} \mathfrak{N}\cdot\mathfrak{a}=0, \\ \mathfrak{N}\cdot\mathfrak{b}=0 \end{matrix} \qquad \{\mathfrak{N}\equiv(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}-[\mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})-\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})]\}$$

— имајући у виду да вектори $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})-\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})$ леже у равни неколинеарних вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — дају образац (2), за који се лако доказује да важи и за $\mathfrak{b}$ колинеарно са $\mathfrak{a}$ ако се у њему изврши смена $\mathfrak{b}=\omega\,\mathfrak{a}$, где је ω произвољан скалар.

3.2. Образац (2) може да се добије и на следећи начин. Будући да, за неколинеарне $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, вектори $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{a}$ и $(\mathfrak{b}\times\mathfrak{a})\times\mathfrak{b}$ леже у равни вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, аналогно разлагању (6) у тач. **1.1**, за вектор $\mathfrak{c}$ можемо да ставимо

$$\mathfrak{c}=\lambda\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{a}+\mu\,(\mathfrak{b}\times\mathfrak{a})\times\mathfrak{b}+\nu\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}).$$

Ако ову једначину измножимо скаларно векторима $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, имајући у виду својство (1), за $\mathfrak{c}$ можемо, сада, да напишемо

$$(12) \qquad \mathfrak{c}=\frac{\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}}{(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2}\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{a}+\frac{\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}}{(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2}\,(\mathfrak{b}\times\mathfrak{a})\times\mathfrak{b}+\frac{(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}}{(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2}\,\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}.$$

Множећи последњу једнакост (12) скаларно вектором $\mathfrak{c}$, преко својства (1) добивамо

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2\mathfrak{c}^2=[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}]\cdot[\mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})-\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})]+[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}]^2$$

што на основу *Lagrange*'овог идентитета (4), примењеног на векторе $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, даје

$$[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}]^2=[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}]\times[\mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})-\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})]. \tag{13}$$

Последњој једначини (13) написаној у облику

$$\mathfrak{N}\cdot[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}]=0,$$

можемо дописати још

$$\mathfrak{N}\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})=0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{N}\cdot\mathfrak{c}=0,$$

где је опет

$$\mathfrak{N}\equiv(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}-[\mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})-\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})].$$

Ако је вектор $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\neq 0$, и вектор $\mathfrak{c}$ није нормалан на раван вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, тада је геометриски евидентно да је триједар вектора $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$ некомпланаран, па из горњих трију једначина следује (2). До истог резултата се долази и ако се формира мешовит производ вектора $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$, и који на основу својства (1) може да се напише у облику $[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}]^2$ и који је, због горе направљених претпоставки, различит од нуле. Образац (2) се верификује лако и за случај: $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=0$ преко смене $\mathfrak{b}=\lambda\mathfrak{a}$, као и за случај: $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}=0$ уз $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\neq 0$ преко смене $\mathfrak{c}=\omega(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$, где су λ и ω произвољни скалари.

До обрасца (2) се може доћи и комбинираном методом: наиме, ако се за $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$ узме из једначине (7) вредност $k[\mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})-\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})]$ и замени у (13) добива се одатле одмах $k=1$.

4. Двоструком векторском производу може се, за некомпланарне векторе $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ дати нов облик (2'). Наиме, ако су $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ некомпланарни вектори тада су, како се лако геометриски уочава и може векторски помоћу мешовитог производа вектора $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}$ да докаже, $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}$ су исто тако некомпланарни и, према томе, неколинеарни вектори па за $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$, као и за сваки произвољан вектор, може да се стави

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}=\alpha(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})+\beta(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})+\gamma(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$$

Ако помножимо ову једначину скаларно вектором $\mathfrak{c}$, добијамо одмах $\gamma=0$, тј. вектор $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$ лежи у равни вектора $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}$. Множећи, даље, исту једначину векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, и узимајући у обзир својство (1), за коефицијенте α и β добијамо

$$\alpha = \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a})}{(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a}}, \quad \beta = \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{b})}{(\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b}},$$

одакле следује тражени образац (2′).

Ако вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ нису задани помоћу својих координата, образац (2′) није згодан за примену. За непосредну, векторску, примену коефицијенте α и β изражавамо помоћу скаларних производа вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ тако да, сада уместо (2′), имамо

$$(2'') \qquad (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \frac{1}{\pm\sqrt{G}} (\Delta_1 \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} + \Delta_2 \mathfrak{c} \times \mathfrak{a}),$$

где су, према обрасцима (3) и (11′) изведеним у тач. **1.1** и **3.1**:

$$G \equiv \begin{vmatrix} \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} \\ \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a} \\ \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b} \end{vmatrix};$$

знак пред изразом $\sqrt{G}$ се бира тако да је једнак са знаком мешовитог производа $(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a} = (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b}$.

До обрасца (2″) — ако дозволимо употребу дистрибутивног закона за векторско множење — можемо да дођемо ако, слично као у тач. **1.1**, вектор $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ разложимо по некомпланарним векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ и образујемо, помоћу дистрибутивног закона за векторско множење израз $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}$.

Од два израза (2) и (2″) за двоструки векторски производ, добијамо нову везу између три некомпланарна вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$

$$(14) \qquad \pm\sqrt{G}\,[\mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})] = \Delta_1 \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} + \Delta_2 \mathfrak{c} \times \mathfrak{a},$$

а одатле, цикличном заменом $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} \to \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c} \to \mathfrak{c} \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$, још две сличне.

Геометриско значење релације (14) се састоји у томе што, ако вектор $\mathfrak{c}$ није нормалан на векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, вектор $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}$ даје правац пресека двеју равни постављених кроз векторе $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и векторе $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}$ или, што је исто, пресек равнине кроз векторе $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и равнине која пролази кроз заједнички почетак вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ и стоји нормално на вектору $\mathfrak{c}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Spielrein J., *Lehrbuch der Vektorrechnung*, 2. Aufl., Stuttgart 1926, S. 17.

[2] Burali-Forti C. e Marcolongo R., *Elementi di Calcolo vettoriale*, secondo edizione, Bologna 1921, p. 31.

[3] Burgatti P., *Elementi di Calcolo vettoriale e omografico*, Milano 1937, p. 18.

[4] Chattelun L., *Calcul vectoriel*, t. I, Paris 1952, p. 170.

SUR LES DÉMONSTRATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES EN ALGÈBRE DES VECTEURS

par V. JANEKOSKI, SKOPJE

Résumé

Dans cet article l'auteur donne les démonstrations originelles de quelques théorèmes connus en algèbre des vecteurs. Le travail est de caractère méthodologique.

*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. VIII, 1–2 (1956), Beograd
Yougoslavie*

NOVI ELEMENTI PLANETOIDA 1952 UV_1 = 1932 DC

RUŽICA S. MITRINOVIĆ, BEOGRAD

Nedavno sam objavila prve eliptične elemente planetoida 1952 x (videti moj članak: „Orbites et identifications d'astéroïdes", Zbornik radova Astronomsko-numeričkog instituta Srpske akademije nauka, knj. I, str. 105, 1954).

U istom članku (str. 114) pokazala sam da je ovaj planetoid identičan sa planetoidom 1932 DC.

Planetoid 1952 x, prividne veličine $13^m.2$ pronašao je sa Astronomske opservatorije u Beogradu *M. Protić*, 22 oktobra 1952 godine. Položaj ovog planetoida je objavljen u časopisu Bulletin de l'Observatoire Astronomique de Beograd (№ 3–4, Volume XVII, p. 34). Planetoid 1952 x u Međunarodnom centru za male planete (Cincinnati, Ohio, USA) dobio je privremenu oznaku 1952 UV_1 (Minor Planet Circulars № 1176).

Planetoid 1932 DC prividne veličine 14.5, otkrio je sa Astronomske opservatorije Uccle (Belgija) *E. Delporte*, 28 februara 1932 godine. Eliptične elemente putanje ovog planetoida izračunao je *S. Mauderli*, koji su objavljeni u časopisu Astronomische Nachrichten **251**.139, 1934.

Ranije smo pokazali da su ova dva planetoida jedno isto nebesko telo 1952 UV_1 = 1932 DC, a sada smo izračunali nove popravljene eliptične elemente iz opozicija za 1952 i 1932 godinu, metodom varijacije geocentričnih otstojanja.

Popravljena eliptična putanja dobija sada ovaj oblik:

Epoha: 1952 – X – 26.0 U. T.

$$
\begin{aligned}
M &= 311^\circ.628\ 795 \\
\omega &= 280.330\ 932 \\
i &= 11.583\ 994 \\
\Omega &= 162.481\ 354 \\
a &= 2.707\ 338 \\
\mu &= 0.221\ 253 \\
\varphi &= 4.667\ 517 \\
e &= 0.081\ 373 \\
g &= 10^m.1
\end{aligned}
\quad \left.\begin{matrix}\omega\\ i\\ \Omega\end{matrix}\right\}\ 1950.0
\tag{1}
$$

Vrednosti vektorskih veličina su:

$$
\text{(II)} \quad
\begin{array}{ll}
P_x = +0.119\ 066 & Q_x = -0.991\ 048 \\
P_y = +0.971\ 323 & Q_y = +0.103\ 656 \\
P_z = +0.215\ 924 & Q_z = +0.084\ 206
\end{array}
$$

Za otstupanja između opservirane i računate rektascenzije (α), odnosno deklinacije (δ), primenom elemenata (I), dobijaju se sledeće vrednosti za (0 – c):

		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1950 –	X – 22.79860	$0\overset{\circ}{.}00$	$0\overset{\circ}{.}00$
	X – 25.79860	0.00	0.00
	X – 27.94304	0.00	0.00
1932 –	II – 28.02	– 0.09	– 0.39
	III – 1.04	– 1.00	+ 0.89
	III – 10.05	– 0.01	– 0.29
	III – 12.43	– 0.13	– 0.28
	III – 13.03	– 0.06	– 0.34
	III – 13.49	– 0.13	– 0.28
	III – 15.07	– 0.05	– 0.33
	III – 25.96	– 0.02	– 0.23
	IV – 8.96	– 0.01	– 0.22
	IV – 27.94	+ 0.07	– 0.06
	V – 6.89	+ 0.13	+ 0.01

Posmatranja, odnosno (α, δ) uzeta su iz publikacije: Circular Rechen — Institut, Berlin № 564, 565, 568, 572, 578, 585, 593 i 622.

Posmatrajući $\Delta\delta$ za 1932 godinu, vidi se da su vrednosti razlike između opservirane i računate deklinacije veće, nego što je po teoriji. A pošto je identičnost ovih dvaju tela nesumnjiva, mi smo izvršili diferencijalnu korekciju ovog sistema, promenom ω, i i Ω za:

$$d\omega = -\ 1\overset{\circ}{.}200\ 066$$

$$di = +\ 0.175\ 339$$

$$d\Omega = +\ 1.275\ 977$$

Promena u ω, i Ω dobijena je empiriskom popravkom P_z i Q_z za:

$$dP_z = -\ 0.004\ 000$$

$$dQ_z = -\ 0.004\ 000$$

Korigovane vektorske veličine (II) dobijaju ovaj oblik:

$$
\text{(III)} \qquad
\begin{aligned}
P_x &= +0.117\ 991 & \qquad Q_x &= -0.991\ 374 \\
P_y &= +0.972\ 268 & \qquad Q_y &= +0.103\ 656 \\
P_z &= +0.201\ 924 & \qquad Q_z &= +0.080\ 206
\end{aligned}
$$

Polazeći od ovih korigovanih elemenata, za otstupanja između opserviranih i računatih rektascenzija (α), odnosno deklinacija (δ), u smislu (0 - c), dobijamo vrednosti:

(IV)

		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1952	- X - 22.79860	$-0\overset{\circ}{.}05$	$-0\overset{\circ}{.}10$
	X - 25.79860	- 0.05	- 0.11
	X - 27.94304	- 0.06	- 0.09
1932	- II - 28.02	- 0.08	- 0.04
	III - 1.04	- 1.01	+ 1.23
	III - 10.05	- 0.05	- 0.02
	III - 12.43	- 0.14	+ 0.04
	III - 13.03	- 0.06	+ 0.01
	III - 13.49	- 0.15	+ 0.04
	III - 15.07	- 0.05	+ 0.03
	III - 25.96	- 0.03	+ 0.05
	IV - 8.96	- 0.02	+ 0.12
	IV - 27.94	+ 0.05	+ 0.18
	V - 6.89	+ 0.11	+ 0.21

Napomena: Položaj od 1.04 - III-1932 ne pripada planetoidu 1932 DC.

Planetoid 1952 UV_1 = 1932 DC, 29 avgusta 1956 godine biće u opoziciji sa Suncem. Budući da je povoljna prividna veličina (13.5) ovog planetoida i položaj u deklinaciji, Astronomska opservatorija u Beogradu moći će da traga za njim.

Efemeride za 1956 godinu su:

1956 0^h U. T.		α (1950.0)		δ (1950.0)		262°
Jul 30		$22^h\ 47.2^m$		$-3^\circ\ 8'$		13.5^m
			-4.8^m		$-60'$	
Avg. 9		22 42.4		-4 8		0.440
			- 6.4		-76	
Avg. 19		22 36.0		-5 24		-54'
	29		- 7.4		-86	
Avg. 29		22 28.6		-6 50		(+5.8)
			- 7.6		-89	
Sept. 8		22 21.0		-8 19		-9.3^m
			- 6.6		-84	
Sept. 18		22 14.4		-9 43		0.242

NOUVEAUX ÉLÉMENTS DU PLANETOÏDE $1952\ UV_1 = 1932\ DC$

par **RUŽICA S. MITRINOVIĆ**, BEOGRAD

Résumé

À l'aide de la méthode de variation des distances géocentriques pour oppositions en 1952 et 1932, nous avons calculé les nouveaux éléments (I) pour le planétoïde $1952\ UV_1 = 1932\ DC$.

La différence dans la déclinaison $\Delta\delta$, étant considérablement plus grande que celle qu'on obtient d'après la théorie, et étant donné que l'identité $1952\ UV_1 = 1932\ DC$ est non douteuse, ont conduit l'auteur d'effectuer la correction différentielle du systeme, par variation des ω, i, Ω avec

$$d\omega = -1\overset{\circ}{.}200\ 066,$$

$$di = +0.175\ 339,$$

$$d\Omega = +1.275\ 9/7.$$

Les corrections des grandeurs ω, i, Ω sont trouvées au moyen des corrections P_z et Q_z avec

$$P_z = -0.004\ 000,$$

$$Q_z = -0.004\ 000.$$

Par la correction des grandeurs vectorielles (II) on obtient les valeurs vectorielles corrigées (III), à partir desquelles on calcule pour $(0-c)$ les valeurs (IV).

La position pour 1.04 - III-1932 n'appartient pas au planétoïde 1932 DC.

Dans cet article on donne aussi les éfémerides pour 1956 année.

Bulletin de la Société de mathématiciens
et physiciens de la R.P. de Serbie
Vol. VIII, 1—2 (1956), Beograd
Yougoslavie

О КОМЕТАМА КОЈЕ СУ ПОСМАТРАНЕ ТОКОМ 1955 ГОДИНЕ

РУЖИЦА С. МИТРИНОВИЋ, БЕОГРАД

У току 1955 године откривено је девет комета. Од ових шест су нове, а три периодичне, чији се повратак очекивао.

Ове године, прво место у открићу нових комета заузимају астрономи из САД. Њихови проналасци су: комета HARRINGTON-ABELL = = 1955 a, комета ABELL = 1955 b и комета RENNER = 1955 h.

Комета MRKOS = 1955 e откривена је у Чехословачкој.

Комета BAKHAREV-MACFARLANE-KRIENKE = 1955 f откривена је у SSSR-u.

Комета HONDA = 1955 g. откривена је у Јапану.

Од периодичних комета две су нађене у САД (Комета ASHBROOK-JACKSON = 1955 c и комета WHIPPLE = 1955 d) и једна у Чехословачкој (комета PERRINE-MRKOS = 1955 i).

У овом чланку изнећемо за наведене комете прве информације.

Комета HARRINGTON-ABELL = 1955 a

Комета Harrington-Abell је *прва* нова комета у 1955 години. Открили су је 22 марта 1955 године астрономи: Robert G. Harrington и George O. Abell са опсерваторија: Maunt Wilson и Palomar, помоћу Schmidt-ове камере од 48 палаца, недалеко од звезде δ Leonis. Дневно кретање комете износило је: $\Delta\alpha = -16^s$, $\Delta\delta = +13'$.

Комета је дифузна, са централном кондензацијом и репом мањим од једног степена, привидне величине 17^m. Она је посматрана 27 и 30 марта 1955 године. Редукцију и мерење извршио је A. G. Mewbray. Како је плоча била пет минута изложена, слика је показала згуснуто језгро привидне величине $19^m.0$ опкољено слабом комом.

Из посматрања од 22, 27 и 30 марта 1955 године, Leland E. Cunningham је израчунао провизорне елиптичне елементе путање ове комете, који су показали да је комета периодична са периодом револуције 7.01 година. На основу ових елемената пролаз комете кроз перихел догодио се 18 децембра 1954 године. Ефемериде су израчунате за временски интервал од 3 јануара до 22 јула 1955 године.

Комета ABELL = 1955 b

13 априла 1955 године G. Abell са опсерваторије Maunt Palomar открио је *другу* нову комету у 1955 години, у сазвежђу Ловачког Пса, мало северно од маглине M51.

У време проналаска дневно кретање износило је:

$$\Delta\alpha = -1^m\ 45^s,\ \Delta\delta = +2'.$$

Комета је била дифузна са централном кондензацијом, са репом мањим од једног степена и привидне величине око 15^m.

Са Lick опсерваторије (Maunt Hamilton) су такође опазили ову комету: 15 априла 1955 године — Vasilevskis и 23 априла 1955 године E. Roemer.

Тако исто, са Yerkes опсерваторије ову комету је опазио 17 априла 1955 године и G. Van Biesbroeck.

Користећи посматрања са Lick и Yerkes опсерваторија L. E. Cunnigham је израчунао параболичну путању ове комете као и ефемериде од 13 априла до 22 јула 1955 године. Астрономка E. Roemer (Berkeley) је такође израчунала ефемериде.

Према рачуну L. E. Cunningham-а излази да се комета налази са оне стране путање Јупитера и да је пролаз комете кроз перихел наступио 19 јуна 1954 године, на отстојању 5.05 астрономских јединица од Сунца.

Комета ASHBROOK-JACKSON = 1955 c

Комета Jackson (1934 II) је периодична комета (P = 7.475 година). Она је нађена 19 јуна 1935 године.

W. E. Beart и M. P. Candy на основи посматрања 1948 и 1949 гогодине израчунали су елиптичну путању ове комете као и ефемериде за интервал од 13 јануара до 30 септембра 1955 године. Комета је прошла кроз перихел 4 октобра 1948 године.

G. Van Biesbroeck открио је 24 априла 1955 године ову периодичну комету, на плочи изложеној на телескопу од 82 палаца опсерваторије McDonald (Texas, SAD). Плоча је показала једну дифузну слику привидне величине 17^m. Положај који је G. Van Biesbroeck добио при проналаску мало се разликовао од прорачунате ефемериде Beart-а и Candy-а.

Пролаз комете кроз перихел треба да се догоди 6.173 априла 1956 године, са корекцијом од пола дана од предвиђеног пролаза.

Комета WHIPPLE = 1955 d

F. L Whipple је открио 15 октобра 1933 године ову периодичну комету која је добила привремену ознаку 1933 V. Она је посматрана у наредним поврацима 1940 и 1947 године.

Комета Whipple = 1955 d је из породице Јупитера (P = 7.47 године).

Ове године E. Roemer открила је ову периодичну комету 25 маја са опсерваторије Lick и била је, у моменту проналаска, привидне величине 18. То је друга периодична комета у 1955 години.

Нове елиптичне елементе путање ове комете израчунао је Cameron Dinwoodie. Према његовом прорачуну кометин пролаз кроз перихел очекивао се 29.8855 новембра 1955 године.

Комета MRKOS = 1955 e

Трећу нову комету у 1955 години открио је Antonin Mrkos 12 јуна 1955 године у сазвежђу Кочијаша, са своје приватне опсерваторије Lomnicky Štit (Brdo Tatra, Чехословачка). A. Mrkos је опсервирао са врха Lomnicky Štit, који је на висини од 2634 метара, где се налази метеоролошка станица. Услови за истраживање комета су на овој станици погоднији, јер је цео хоризонт слободан, него ли у опсерваторији Skalnaté Pleso, где је до сада већ 13 комета откривено од стране Бесvar-а, Mrkos-а, Kresák-а, Vozarove и Pajdušakove.

Комета се налазила на неких 5 степени на југо-западу, али више ка западу од звезде Capella, била је видљива голим оком и са репом мало већим од једног степена. Одмах идуће вечери комета је са опсерваторије Haute-Provence била опажена и њен сјај је оцењен са $3^m.5$ привидне величине. J. Dufay, директор опсерваторије у Loyn-у и Haute-Provence добио је слику комете из које се види реп од 3 степена у врло сложеној структури. Са опсерваторије Skalnaté Pleso (Чехословачка) Kresák и Kresakova добили су две позиције 14 јуна 1955 године. Привидна величина износила је 5^m. Комета је била дифузна са кондензацијом и репом већим од једног степена. Petersen и Laustsen са опсерваторије Copenhagen посматрали су ову комету 16 јуна, када је привидна величина била 6^m.

Комета Mrkos посматрана је и из Белгије, Пољске, Данске, Грчке, Италије, Румуније, Немачке и Јапана.

Параболичне елементе израчунао је L. E. Cunningham (Berkeley) као и ефемериде од 17 јуна до 12 јула 1955 године. У том временском интервалу привидна величина се кретала од $6^m.1$ до $7^m.0$. G. Merton је тако исто израчунао ефемериде до 6 августа 1955 године.

Нагиб орбита је нагнут скоро нормално према еклиптици (i = 86°.30) а отстојање од перихела (q = 0.5376) је нешто мало јаче од пола астрономске јединице. Ова два податка чине комету Mrkos знатно интересантнијом од осталих проналазака.

Комета BAKHAREV-MACFARLANE-KRIENKE = 1955 f

13 јула 1955 године откривена је *четврта* нова комета у 1955 години. Њу су открили независно A. M. Bakharev са опсерваторије Stalinabad (SSSR) и два аматера Macfarlane и Krienke из Seattle (SAD) у сазвежђу Пегаза. Alcock из Petersbourgh-а (Енглеска) опсервирао је ову комету 17 јула 1955 године са малим дурбином и описао је као слаби објект, са језгром пречника 15′, умерено згуснуте ка центру, на ивици дифузна и привидне величине округло $7^m.5$.

Дневно кретање износило је $\Delta\alpha = -2^m\ 24^s$, $\Delta\delta = +1°\ 36'$. Комета је посматрана из Грчке, Аустрије, Данске, Немачке, Чехословачке, Румуније, Белгије и Јапана.

E. L. Cunningham је израчунао елементе путање ове комете, као и A. D. Dubiago из Engelhardt - опсерваторије (Kazan, SSSR). Елементи су хиперболични.

Комета HONDA = 1955 g

Аматер Minori Honda из Kurasiki (Јапан) открио је *пету* нову комету 13 јула 1955 године у сазвежђу Ориона, привидне величине 8^m. Како се комета приближавала Земљи, сјај се брзо увећавао и 15 дана касније привидна величина износила је 5^m.

E. L. Cunningham је израчунао провизорне елементе из којих се закључује да се пролаз кроз перихел догодио 3.99 августа 1955 године на отстојању 0.8846 астрономских јединица.

Средње дневно кретање износило је $\Delta\alpha = +24^s$, $\Delta\delta = +1°\ 6'$.

Комета је дифузна са централном кондензацијом и без репа.

Комета је посматрана из Румуније, Грчке, Данске и Белгије као и са опсерваторије Lick.

И I. Mitani (Kyoto) израчунао је елементе ове комете. По његовим рачунима пролаз кроз перихел догодио се 4.05226 августа 1955 године. Исти је израчунао и ефемериде од 26 августа до 30 септембра, 1955 године.

Комета RENNER = 1955 h

Са опсерваторије Harvard, Renner је 16 августа 1955 године пронашао *шесту* нову комету, привидне величине 10^m.

Дневно кретање је било приближно 5.6 минута ка југу — југозападу.

Никаквог извештаја нема до сада о репу као и о изгледу овог објекта.

Комета PERRINE-MRKOS = 1955 i

A. Mrkos (Lomnicky Štit, Чехословачка) нашао је ову периодичну комету трећу по реду у 1955 години, 19 октобра 1955 године, привидне величине 9^m.

Pajdušáková (Skalnaté Pleso) је опсервирала 20 октобра 1955 године када је дневно кретање било: $\Delta\alpha = + 2^m\ 21^s$, $\Delta\delta = - 29'$

Комета је дифузна, са кондензацијом. Никаквог извештаја нема о репу.

По L. E. Cunningham-у ово је периодична комета PERRINE. Астрономи I. Hasėgava (Kobe, Јапан) и H. Hirose (Tokyo) потврђују да је Mrkos (1955 i) периодична комета PERRINE. Ова комета је посматрана у Румунији и J. Африци као и са опсерваторија Mt. Hamilton, Tokyo и Kurasaki.

Према елементима H. Hirose (Tokyo) пролаз кроз перихел се догодио 30 септембра 1955 године на отстојању 3.4775 астрономских јединица од Сунца.

Комета PERRINE пронађена је пре 59 година, као седма по реду у 1896 години (1896 VII). Периода револуције је 6.44071 година и ишчезла је после два узастопна повратка 1902 и 1909 године. После 46 година, тј. 1955 године она је поново нађена.

Отај реферат је написан према следећој литератури:

1. Circulaire;

Bureau central des télégrammes astronomiques. Union Astronomique internationale Copenhagen (Danemark).

2. Gazette astronomique;

Bulletin de la Société d'Astronomie d'Anvers 37e Année, 3–4–5, 1955, (Belgique).

3. L'Astronomie;

Revue mensuelle fondée par Camille Flammarion, 69e Année 1955, (France).

SUR LES COMÈTES OBSERVÉES EN 1955 ANNÉE

par RUŽICA S. MITRINOVIĆ, BEOGRAD

Résumé

Après une courte introduction l'auteur résume brièvement, pour chaque comète observée, les circonstances de découverte, ainsi que les résultats d'observations les plus intéressants, en particulier pour les comètes observées en 1955 suivantes:

Harrington-Abel = 1955 a,
Abell = 1955 b,
Ashbrook-Jackson = 1955 c,
Whipple = 1955 d,
Mrkos = 1955 e,
Bakharev-Macfarlane-Krienke = 1955 f,
Honda = 1955 g,
Renner = 1955 h,
Perrine-Mrkos = 1955 i.

Piero Buzano, *Lezioni di Analisi matematica*, quarta edizione completamente rifatta, 593 pp. Libreria editrice universitaria Levroto & Bela, Torino, 1956.

Ovo je kurs koji profesor *Buzano* drži na *Politehničkoj školi* u Torinu (Italija). Ustvari knjiga obuhvata gradivo koje je propisano na našim tehničkim fakultetima u kursevima: Matematika I i Matematika II. Doduše, naši kursevi obuhvataju još: teoriju vektora, analitičku geometriju i detaljniju obradu diferencijalnih (običnih i parcijalnih) jednačina nego što je to u *Buzano*-ovom udžbeniku.

Iz algebre ima više materijala nego što se predaje na našim tehničkim fakultetima.

Izlaganje u ovoj knjizi je jasno i metodično. Ima dosta izrađenih primera, ali nema zadataka za vežbanje koji bi bili namenjeni čitaocu.

Naročito su lepo obrađeni odeljci koji govore o determinantama, o Gräffe-ovoj metodi i o integraciji diferencijalnih jednačina pomoću metoda sukcesivnih aproksimacija.

Knjiga je tehnički odlično opremljena.

D. S. Mitrinović, Beograd

L. Vietoris — G. Lochs, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, 416 Seiten, 1951, Universitätsverlag, Insbruck.

Ova knjiga je proistekla iz predavanja koja je prof. *L. Vietoris* držao prvo na Tehničkoj velikoj školi u Beču, a zatim na Univerzitetu u Insbruku.

Definitivni tekst je redigovao prof. *G. Lochs* koji je u više mahova pisao recenzije u referativnom časopisu *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* o radovima naših matematičara.

Knjiga je namenjena, prema rečima pisaca, studentima I semestra i samostalnom studiranju.

Izlaganje je jasno i privlačno. Matematička strogost na potrebnoj visini.

Teorija je praćena lepim, prigodno izabranim primerima.

U knjizi je obrađeno gradivo koje je obimnije nego što je kurs *Matematika I* na našim tehničkim fakultetima. Šta više, jedna glava posvećena je kompleksnoj analizi. Na pedeset stranica lepo, u sažetoj formi, dati su elementi kompleksne analize.

Glava posvećena numeričkim metodama takođe je vrlo uspela. Uostalom, naučna oblast *L. Vietoris*-a je numerička integracija diferencijalnih jednačina, dok je oblast drugog pisca *G. Lochs*-a algebra i teorija brojeva, što se takođe manifestovalo u nekim glavama.

Tehnička oprema knjige je na velikoj visini.

D. S. Mitrinović, Beograd

G. Vitali — G. Sansone, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, terza edizione, parte II: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, VII+614, 1952, Zanichelli, Bologna.

Ovaj deo (II deo) moderne teorije funkcija realne promenljive izradio je sam *Giovanni Sansone*, profesor Univerziteta u Firenci i dugogodišnji pretsednik društva Unione matematica italiana.

Ovu monografiju o ortogonalnim funkcijama izdao je Nacionalni savet za istraživanja u Italiji u kolekciji: *Monografie di matematica applicata*.

Monografija prof. *Sansone*-a podeljena je u pet glava:

I. Razvijanje u red ortogonalnih funkcija i prvi pojmovi o *Hilbert*-ovom prostoru;

II. Razvijanje u Fourier-ov red;

III. Razvijanje u red Legendre-ovih polinoma. Razvijanje u red sfernih funkcija;

IV. Razvijanje u Cebišev-Laguerre-ove i Cebišev-Hermite-ove redove;

V. Aproksimiranje i interpoliranje;

VI. Stieltjes-ov integral.

Ova monografija pretstavlja odličan priručnik za oblast analize koja ima važnih i raznovrsnih primena u teorijskoj fizici i u tehničkim problemima.

Iz sadržaja pojedinih glava vidi se da je pisac posle opšte teorije detaljno tretirao specijalne funkcije, primenjujući na njih opštu teoriju.

Dat je niz pojedinosti o Legendre-ovim polinomima, Hermite-ovim polinomima, o polinomima Čebiševa, o Laguerre-ovim polinomima, itd.

Prof. *Sansone* dao je niz priloga teoriji specijalnih funkcija, što je garancija da je sa poznavanjem materije i znalački redigovao ovu knjigu.

Na kraju knjige nalazi se bibliografija u kojoj je citirano 121 originalna rasprava među kojima su nabrojane i druge monografije o ortogonalnim funkcijama koje su ranije pisali: Szegö, Heine, Kaczmarz-Steinhaus, F. E. Neumann, Shohat, Zygmund, itd.

Jednom drugom prilikom potpisani će se detaljnije osvrnuti na ovu izvanrednu knjigu.

D. S. Mitrinović, Beograd

Klaus Pöschl, *Mathematische Methoden in der Hochfrequenztechnik*, VIII+331 Seiten, 1956, *Springer*-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.

Sadržaj knjige je sledeći:

Skalar und Vektorfelder (1—15); Determinanten und Matrizen (15—32). Komplexe Rechnung. Ortskurven (32—49); Funktionentheoretische Hilfsmittel (49—73); Fouriersche Reichen und Integrale (73—109); Laplace-Transformation (109—138); Grundbegriffe der Statistik (139—153); Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung (153—173); Spezielle Funktionen (173 — 193); Verfahren zur genäherter Lösung von Randwertaufgaben (194—204); Die Maxwellschen Feldgleichungen (204—222); Hohlraumresonatoren (222—242); Wellenleiter (242—277); Strahlungsfelder (277—300); Elektronenströmungen (300—323).

Na kraju knjige (str. 324—328) nalazi se literatura. Najpre je navedeno 56 knjiga: to su uglavnom tretei, kopendijumi i već klasična dela koja obrađuju gradivo obuhvaćeno u 15 gore pomenutih odeljaka *Pöschl*-ove knjige. Zatim je navedeno 68 članaka iz raznih elektrotehničkih časopisa u kojima je tretirana materija iz poslednjih pet odeljaka.

Dr. Pöschl, kao matematičar koji je zaposlen u istraživačkom institutu fabrike: Röhrenfabrik der Siemens und Halske AG., München, postavio je sebi zadatak da izloži sažeto i, koliko je to mogućno, strogo sav onaj matematički aparat koji se upotrebljava u teoriskim problemima visokofrekventne tehnike.

Izlaganje je na naučnoj visini. Naročito su dobro obrađeni ovi odeljci: specijalne funkcije, linearne diferencijalne jednačine drugog reda, Laplace-ova transformacija, i determinante i matrice.

Ova će knjiga biti od koristi stručnjacima visokofrekventne tehnike, kao i onim matematičarima koji kao nastavnici pripremaju kadrove za visokofrekventnu tehniku.

Ova knjiga je priručnik, a ne udžbenik.

Knjiga je tehnički odlično opremljena.

D. S. Mitrinović, Beograd

G. Petiau, *La théorie des fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la Physique mathématique*, Centre national de la recherche scientifique, 477 pages, 1955, Paris.

Ovo je jedna od monografija koju je izdao *Nacionalni centar za naučna istraživanja* u Parizu u kolekciji *Etudes mathématiques en vue des applications* — Série: A. *Applications des théories mathématiques*.

Pisac *Gérard Petiau* bavi se matematičkom fizikom i dao je iz ove nauke niz naučnih radova.

Specijalne funkcije uopšte, a posebno *Bessel*-ove funkcije, pojavljuju se u mnogobrojnim problemima fizike, elektrotehnike, teorije elastičnosti, itd. Ma da postoji vrlo opsežno delo o *Bessel*-ovim funkcijama (*G. N. Watson, A treatise on the on the theory of Bessel functions,* Cambridge, 2 nd, ed., 1944, 804 pp.) ono ipak nije dovoljno podesno za one koji primenjuju *Bessel*-ove funkcije. Sem toga, *Watson*-ovo delo ne sadrži rezultate do kojih se došlo u poslednjim godinama.

Polazeći od toga, *Petiau* je redigovao svoju monografiju o *Bessel*-ovim funkcijama koja ima dvadeset i četiri glave, i više numeričkih tablica i grafika.

Glave *XIX* – XXIV posvećene su problemima talasne mehanike, elektromagnetike, teorije elastičnosti, itd. u kojima se *Bessel*-ove funkcije primenjuju.

Izlaganje je elementarno i metodski uspelo, ali stoga i razvučeno. Dokazi nisu svuda potpuno, do kraja, izvedeni niti su svuda dovoljno fundirani. Za izlaganje upotrebljena je i teorija funkcija kompleksne promenljive.

Ova monografija korisno će poslužiti fizičarima i inžinjerima.

D. S. Mitrinović, Beograd

UNE NOUVELLE REVUE SCIENTIFIQUE YOUGOSLAVE POUR LES MATHEMATIQUES ET LA PHYSIQUE

Le Département de mathématiques et le Département de physique de la Faculté d'électrotechnique de l'Université à Belgrade ont commencé, en 1956, à publier une revue sous le titre suivant:

Publications de la Faculté d'électrotechnique de l'Université à Belgrade — Série: *Mathématiques et physique.*

Chaque mémoire ou article paraîtra séparément.

Ces *Publications* inséreront les mémoires et les articles rédigés en serbo-croite et accompagnés d'un résumé en français, anglais, russe, italien ou allemand. On publiera également les mémoires et les articles dans une des langues précitées avec un résumé en serbo-croite. Jusqu'à ce jour ont paru les fascicules N^{os} 1 à 3 contenant les mémoires suivants:

D. S. Mitrinović: Quelques formules concernant les polynômes de Legendre.

D. M. Ivanović: Theory of motion of neutrons through the mixture of elements.

D. Mihailović: Beiträge zur Untersuchung des Zweikörperproblems mit veränderlicher Massensumme.

Sous peu paraîtront les fascicules N^{os} 4 à 9 contenant respectivement les mémoires et articles qui suivent:

M. N. Ranojević: Sur la nature des composantes des grandeurs alternatives dans la théorie des courants alternatifs.

D. S. Mitrinović: Sur quelques formules sommatoires.

D. S. Mitrinović: Sur une question d'analyse diophantienne.

D. S. Mitrinović: Sur un procédé fournissant des équations fonctionnelles dont les solutions continues et différentiables peuvent être déterminées.

L. Karadžić: Quelques propriétés des fonctions, définies par la série de Taylor ou de Dirichlet, sur le cercle de convergence.

D. S. Mitrinović: Compléments au Traité de Kamke, Note V.

P. Miljanić: Considérations sur les grandeurs physiques et leurs unités.

Pour l'échange contre ces *Publications* s'adresser à

Département de mathématiques — Faculté d'Électrotechnique
Bulevar Revolucije, 73 — Boîte postale 816
BELGRADE, Yougoslavie