Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1952

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?311570321_0004|log2

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES MATHÉMATICIENS ET PHYSICIENS DE LA R. P. DE SERBIE

ВЕСНИК

ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

IV

1—2

БЕОГРАД, 1952

САРАДНИЦИМА ВЕСНИКА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА НРС

Чланци који се шаљу за Весник морају бити изложени кратко, јасно и дати у коначној редакцији. Чланци дужи од $^{8}/_{4}$ штампаног табака (15—17 страница на писаћој машини) неће бити примљени.

Уз чланак потребно је приложити кратак садржај (до $^{1}/_{2}$ стране откуцане писаћом машином). По могућству приложити и превод овога на неки од главнијих страних језика, или означити на који се језик жели да преведе.

Чланке откуцати писаћом машином без уметака исписаних руком, на једној страни, с проредом. Обрасце исписати читко мастилом; странице рукописа нумерисати; таблице приложити у два примерка.

Да би се избегли неспоразуми и грешке потребно је правити јасну разлику између великих и малих слова у случају када се она разликују само величином (V, v, — U, u, — W, w, — O, o, — и сл.) као и између слова *O* и нуле.

Цитирану литературу дати у списку на крају чланка а не у примедбама на страницама под текстом. Позив на литературу у тексту дати редним бројем (у средњој загради) цитираног рада у списку литературе и презименом цитираног аутора. У списку литературе за радове објављене у часописима дати иницијале и презиме аутора, назив рада, назив часописа, том или годиште, страну и годину издања; за књиге дати иницијале и презиме аутора, потпун наслов књиге, место и годину издања.

Цртеже приложити по могућству израђене на тврдој хартији, тушем, са ознаком размера на коју их треба смањити. Цртеже не треба никако лепити за рукопис. Текст уз слике приложити на посебном листу.

Уређивачки одбор може на захтев доставити аутору једну коректуру која се има вратити истог дана када је примљена. Накнадне исправке нису дозвољене.

За оригиналност и тачност чланака одговорност сносе аутори.

Сву преписку у вези са Весником Друштва математичара и физичара НРС слати на адресу: Друштво математичара и физичараНРС, Београд, Булевар Црвене Армије бр. 18/I.

Претплата за 1952 год. износи 400 дин. коју треба слати на чековни рачун Издавачког предузећа „НАУЧНА КЊИГА“ у Београду бр. 101-901-8115 са назнаком на полеђини чека да се претплата шаље за „Весник друштва математичара и физичара НРС“. Двоброј Весника III, 3—4, 1951 стаје 200 дин.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES MATHÉMATICIENS ET PHYSICIENS DE LA R. P. DE SERBIE

ВЕСНИК

ДРУШТВА
МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА
НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

IV

1—2

БЕОГРАД, 1952

Уређивачки одбор:

Павле Савић, проф. Унив.; *Драгољуб К. Јовановић*, проф. Унив.; *Милош Радојчић*, проф Унив.; *Добривоје Михаиловић*, предавач Унив ; *Никола Салтиков*, проф. Унив., *Драгослав Митриновић*, ванр. проф. Техн. в. школе; *Мирко Стојаковић*, предавач Техн. в. школе; *Мира Јурић*, асистент Инст. у Винчи ; *Властимир Вучић*, доцент Техн. в. школе; *Ернест Стипанић*, предавач Техн. в. школе; *Боривоје Рашајски*, асистент Унив.

Главни Уредник:

Драгољуб Марковић, проф. Унив. Београд, ул. Косте Јовановића, 67.

Секретар:

Златко Мамузић, асистент Техн. в. школе.

2—1
21953.9446

Штампарија и књиговезница „НАУЧНА КЊИГА" — Београд, Космајска ул. бр. 28

САДРЖАЈ

		Стр.
Gjuro Kurepa :	On a Definition and Notation of Matrices. On a Kind of Switch Matrices	1
Мирко Стојаковић :	Детерминанте неквадратних матрица	9
Златко Мамузић :	О релативно затвореним и отвореним скуповима у просторима Hausdorff-a	25
Драгољуб Марковић :	О једном поступку за одређивање највећег заједничког делитеља два или више полинама	37
Растко Стојановић :	Диференцијалне једначине кретања чврстог тела у тензорском облику	43
Симон Ћетковић :	Решење једног скуповног система од бесконачно много једначина са бесконачно много непознатих . . .	51
Константин Орлов :	Геометриска теорија редова М. Миланковића и настава редова	61
Боривој Михајловић:	Инверзија у простору изведена векторским рачуном	69
Реферате и прикази	. . . . .	75
	Đ. Kurepa : Povodom prve glavne skupštine internacionalne matematičke unije u Rimu	75
	Драгољуб Марковић: Приказ превода књиге Течај нумеричке математике од E. Whittaker-a и G. Robinson-a	83
Састанци друштва	. . . . .	85

ON A DEFINITION AND NOTATION OF MATRICES. ON A KIND OF SWITCH MATRICES[1])

By GJURO KUREPA, Zagreb

1. Let α, β be any positive ordinal numbers (finite or transfinite, equal or no), we shall consider any mapping f such that for every ordinal number $\xi < \alpha$ (zero included) and every ordinal number $\eta < \beta$ i. e. for every ordered pair (ξ, η), $(\xi < \alpha, \eta < \beta)$,

$$f(\xi, \eta) \quad \text{or} \quad f_{\xi, \eta} \tag{1.1}$$

is defined as a number, set, object etc.

The order Sf of such a mapping f is defined as the ordered pair (α, β); one writes

$$Sf = (\alpha, \beta); \tag{1.2}$$

one defines

$$rf = \alpha, \qquad sf = \beta; \tag{1.3}$$

thus

$$Sf = (rf; sf). \tag{1.4}$$

Substantially, rf and sf mean the amount of „rows" and „columns" of f respectively.

$f(\xi, \eta)$ is called the (ξ, η)-component f. For every $\xi < rf$, the function

$$f_{\xi, \eta} \qquad (\eta < sf) \tag{1.5}$$

is called tke ξ-row of f; the η-column of f, for any $\eta < sf$, is defined as the function

$$f_{\xi\eta} \qquad (\xi < rf). \tag{1.6}$$

If

$$rf = sf \tag{1.7}$$

f is called a square or „quadratic".

---

[1]) In my visiting lectures at Belgrade's University, december 1949, the exposed definition and notation of matrices were given as an example of mappings.

The diagonal of f is the function

(1.8) $$f_{\xi,\xi} \quad (\xi < inf\{rf, sf\}).$$

The transformation f is a switch transformation or dyadic, provided every component of f is 0 or 1:

(1.9) $$f_{\xi\eta} \varepsilon \{0,1\}, \quad (\xi < rf, \eta < sf).$$

2. *Definition of matrices.* Let (α, β) be any ordered pair of positive ordinal numbers; every transformation f such that for every ordinal $\xi < \alpha$, $\eta < \beta$, $f(\xi, \eta)$ or $f_{\xi\eta}$ is a well determined object is said a matrix of order (α, β), provided the equality, summation and multiplication of any two such mappings f, g are defined as follows:

I The equality $f = g$ means

(2.1) $$Sf = Sg, \quad f_{\xi\eta} = g_{\xi\eta} \quad (\xi < rf, \eta < sf);$$

II If $Sf = Sg$ the sum $f + g$ of f, g is defined as the transformation

(2.2) $$(f+g)_{\xi\eta} = f_{\xi\eta} + g_{\xi\eta} \quad (\xi < rf, \eta < sf);$$

III if

(2.3) $$sf = rg$$

the product fg of f and g is defined by the equalities

(2.4) $$(fg)_{\xi\eta} = \sum_{\tau < sf} f_{\xi\tau}\, g_{\tau\eta}$$

provided for every $\xi < rf$, $\eta < sg$ the sum in (2.4) has a meaning.

Substantially, one sees that matrices are certain transformations of two variables; consequently, the matrices are to be denoted as other functions: either by letters, abbreviations or special symbols; one speaks of a matrix f, M, a etc. If the order of a is (2, 3), then a_{00} is the 0,0-component. For any matrix a one writes

(2.5) $$a = \begin{bmatrix} a_{00}\ a_{01} \dots a_{0\eta} \dots \\ a_{10}\ a_{11} \dots a_{1\eta} \dots \\ \dots\dots \\ a_{\xi_0}\ a_{\xi_1} \dots a_{\xi\eta} \dots \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix} \quad (\xi < ra, \eta < sa)$$

For instance, if a denotes the matrix $\begin{bmatrix} 6, & 7, & 5 \\ 4, & 8, & 9 \end{bmatrix}$, then $a_{00} = 6$, $a_{02} = 5$ etc. An example of transfinite matrix is the sequence N of natural numbers; one has $SN = (1, \omega)$; the sequence of all transfinite numbers $< \omega_1$ is a matrix of order $(1, \omega_1)$.

Remark. Sometimes it is usefull to consider as (α, β) — matrix every mapping

$$f_{\xi\eta} \quad (\xi < \alpha,\ \eta < \beta)$$

no matter whether the summation and multiplication are defined. In that sense one can speak for instance of a (2, 8) — matrix of galvanometers.

Lemma. If a switch matrix has a single unit in every row and in every column, the matrix is a square.

The lemma is a consequence of the Th. 3. 1 dealing with general transformations: it is sufficient to consider the case $A = [0, \alpha) =$ the set of all ordinals $\xi < \alpha$, and $B = [0, \beta)$.

3. *Theorem 3. 1. If A, B are any two nonvoid sets and f any uniform mapping of $A \times B$ into $\{0, 1\}$ such that for every $a \in A$ there is a single $\varphi(b) \in B$ satisfying*

(3.1) $$f(a, \varphi(a)) = 1 \quad (a \in A)$$

and for every $b \in B$ there is a single $\psi(b) \in B$ satisfying

(3.2) $$f(\psi(b), b) = 1 \quad (b \in B),$$

then φ is a one-to-one mapping of A onto B and $\varphi = \psi^{-1}$, $\varphi^{-1} = \psi$; the sets A, B have the same cardinal number.

At first, one sees that the relation (3. 1) implies

(3.3) $$a = \psi\varphi(a) \quad (a \in A)$$

and consequently $\psi\varphi A = A$. Analogously,

(3.4) $$b = \varphi\psi(b) \quad (b \in B).$$

Further, φ, ψ are one-one mappings; for instance, if a, a', are two different points of A, then $\varphi(a) \neq \varphi(a')$; otherwise, $\varphi(a) = \varphi(a')$ and from there $\psi\varphi(a) = \psi\varphi(a')$ and by (3, 3): $a = a'$. Finally, $\varphi A = B$; in opposite case, since $\varphi A \subseteq B$, one would have a point

(3.5) $$b \in B \setminus \varphi A;$$

now, $\psi b \in A$, $\varphi\psi b \in \varphi A$ and $\varphi\psi b = b$ (v. (3.4)) thus $b \in \varphi A$, contrarilly to (3. 5).

Theorem 3. 2. Let α be any initial ordinal number $\neq 0$; the number of different dyadic matrices of order (α, α) having in every row and in every column a single unit element is equal to the number $\alpha!$ of all different permutations of the set of numbers $< \alpha$ [1].

a) If π is any permutation of the set of numbers $< \alpha$, let δ_π be the dyadic matrix such that

(3.6) $$\delta_\pi(\xi, \pi(\xi)) = 1 \quad \text{and} \quad \delta_\pi(\xi, \eta) = 0 \quad (\xi < \alpha,\ \eta < \alpha,\ \eta \neq \pi(\xi))$$

---

[1] The permutation of a set S is every one-to-one mapping φ of S onto itself (in particular $\varphi S \equiv S$).

Then, if $\xi<\alpha$, the matrix δ_π has in the ξ-row a single unit element — that which is in the $\pi(\xi)$-column; in the ξ-column of δ_π there is a single unit element — that which is in the $\pi^{-1}(\xi)$-row.

b) If π, π' are two different permutations of the set $[0, \alpha)$ of numbers $<\alpha$, then $\delta_\pi \neq \delta_{\pi'}$. The inequality $\pi \neq \pi'$ means the existence of a $\xi < \alpha$ such that $\pi(\xi) \neq \pi'(\xi)$; according to the definition of functions $\delta_\pi, \delta_{\pi'}$ that means that

$$\delta_\pi(\xi, \pi(\xi)) = 1, \qquad \delta_\pi(\xi, \pi'(\xi)) = 0 \tag{3.7}$$

$$\delta_{\pi'}(\xi, \pi'(\xi)) = 0, \qquad \delta_{\pi'}(\xi, \pi'(\xi)) = 1. \tag{3.8}$$

c) It remains to establish that every matrix of Th. 3.2, is of the form δ_π i. e. that the following statement holds:

If f is any switch matrix of order (α, α) having in every row and in every column a single unity element, there is a permutation π of numbers $<\alpha$ satisfying $\delta_\pi = f$.

Now, if for every $\xi < \alpha$ one defines $\pi(\xi)$ so that $f(\xi, \pi(\xi)) = 1$, one has $\delta_\pi = f$.

4. *Remark on determinants.* Matrices being certain mappings, determinants are certain functionals and mappings in general case. In particular, if components of a square matrix a of finite order belong to a field or to an integral domain D, *det* a is an element of D. For instance, starting from a set S of real valued square matrices of finite orders, the transformation (determinant)

$$det\ x \quad (x \in S) \tag{4.1}$$

is a mapping of S into the set of real numbers; as one knows, for each $x \in S$ one has

$$det\, x = \sum_p (-1)^{lp} \prod_\xi x_{\xi p_\xi} \quad (\xi < rx,\ p \in [o, rx)\,!); \tag{4.2}$$

$[o, rx)\,!$ means the set of all permutations p of the set $[o, rx)$ of all ordinals $<rx$; lp means the number of all inversions corresponding to p, that is the number of all pairs of ordinals $\alpha < \beta < rx$ such that $p_\alpha > p_\beta$.

University , Mathematics Institute, Zagreb (Yugoslavia)

DEFINICIJA MATRICA. O JEDNOJ VRSTI MATRICA[1])

ĐURO KUREPA, Zagreb

REZIME

Kako je pojam funkcije odnosno preslikavanja od osnovne važnosti, prirodno je da se definicija matrica svede na preslikavanja.

Neka su α, β bilo koja dva redna pozitivna broja; svaki od njih može biti ili konačan ili beskonačan. Neka je f bilo koje preslikavanje koje svakom uređenom paru (ξ, η) rednih brojeva $\xi < \alpha$, $\eta < \beta$ jednoznačno pridružuje određen broj, predmet, skup kojega ćemo osnačiti sa $f(\xi, \eta)$ ili $f_{\xi\eta}$. Red ili stupanj Sf preslikavanja f definira se kao uređen par (α, β) i piše

$$Sf = (\alpha, \beta).$$

Operativno se mogu definirati još: „broj redaka" rf i „broj stubaca" sf preslikavanja f pomoću jednakosti

$$rf = \alpha, \quad sf = \beta.$$

Ako je $rf = sf$, zove se f kvadratnim preslikavanjem. Na taj način, za svako $\xi < rf$, $\eta < sf$ potpuno je određena $(\xi\eta)$-komponenta preslikavanja f kao $f_{\xi\eta}$.

Definicija matrica. Neka su α, β bilo koja dva redna pozitivna broja; svako preslikavanje f koje svakom rednom broju $\xi < \alpha$ i svakom rednom broju $\eta < \beta$ pridružuje $f_{\xi\eta}$ zove se matrica reda ili stupnja (α, β), ako su jednakost, sabiranje i množenje bilo kojih takovih preslikavanja f, g definirani prema ovim propisima:

Jednakost. $f = g$ znači isto što i $Sf = Sg$, $f_{\xi\eta} = g_{\xi\eta}$ $(\xi < rf, \eta < sf)$;

Sabiranje. Suma $f + g$ je definirana za slučaj da je $Sf = Sg$ i to po propisima (2.2) ukoliko sve sume (2.2) postoje.

Množenje. Produkt fg se definira ako je $sf = rg$ i to po propisima (2.4) ukoliko sve posljednje sume (2.4) postoje.

Primjedba. Nekad je zgodno o preslikavanju $f_{\xi\eta}$ $(\xi < \alpha, \eta < \beta)$ govoriti kao o matrici f, a da i nije definirano sumiranje i množenje „matrica". Tako se može govoriti o (2,3) — matrici galvanometara kao o dva niza po tri galvanometra. Na taj način vidimo da se pojam matrice u suštini svodi na izvjesna preslikavanja. Zato je prirodno da se matrice označuju kao i ostala preslikavanja: slovima i dr. funkcionalnim znakovima. Zato se može govoriti o matricama f, a, σ, T itd. Ako je a matrica, tad su broj ra njenih redaka kao i broj sa njenih stubaca potpuno određeni; isto tako je određen i stupanj (red) Sa matrice a kao uređeni par (ra, sa).

[1]) Na mojim predavanjima na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu u decembru 1949 izneta je ova definicija matrica kao primjer preslikavanja.

Ako je $\xi < ra$ bilo koji redni broj, tad se preslikavanje (1.5) zove ξ-redak matrice a; isto tako za $\eta < sa$ zove se preslikavanje (1.6) η-stubac matrice a. Prema tome, $a_{\xi\eta}$ je element matrice a koji se nalazi u ξ-retku i η-stupcu. U teoriji i praksi često se pojavljuju matrice kojima su elementi 0 ili 1; to su t. sv. svič-matrice ili điadičke matrice; one zadovoljavaju uslovu (1.9).

Lema. Ako neka svič-matrica f ima u svakom retku po jednu jedinicu i u svakom stupcu po jednu jedinicu, matrica je kvadratna.

Ta lema izlazi neposredno — stavljajući $A = [0, rf) =$ skup svih rednih brojeva $< rf$, $B = [0, sf)$ — iz

Teorema 1. Ako su A, B, bilo kakvi neprazni skupovi, a f preslikavanje skupa $A \times B$ u $\{0, 1\}$ tako da za svako $a \varepsilon A$ postoji jedno $\varphi(a) \varepsilon B$ za koje je

$$f(a, \varphi(a)) = 1 \quad (a \varepsilon A)$$

i za svako $b \varepsilon B$ postoji jedno jedino $\psi(b) \varepsilon A$ za koje je

$$f(\psi(b), a) = 1 \quad (b \varepsilon B)$$

tada je φ obostrano jednoznačno preslikavanje skupa A na čitav B i podudara se sa inverznim preslikavanjem ψ^{-1} preslikavanja ψ.

Stvarno, iz (3.1) proizlazi (3.3); slično se zaključuje da važi (3.4). Nadalje, φ i ψ su obostrano jednoznačna preslikavanja; tako na pr. ako su a, a' različite tačke iz A, $\varphi(a) \neq \varphi(a')$, jer bi inače bilo $\varphi(a) = \varphi(a')$ dakle i $\psi\varphi(a) = \psi\varphi(a')$ sto bi prema (3.3) dalo $a = a'$. Najzad, $\varphi A = B$; u obrnutom slučaju bila bi bar jedna tačka $b \varepsilon B \setminus \varphi A$, jer je $\varphi A \subseteq B$, dakle $\psi b \varepsilon A$; no $\varphi\psi b = b$, pa bi dakle bilo $\varphi\psi b$ non εA, što je nesmisao. Dakle je φ obostrano jednoznačno u A i važi $\varphi A = B$. Analogno se zaključuje da je ψ obostrano jednoznačno preslikavanje u B. Zato, primjenjujući operator ψ^{-1} na (3.3) proizlazi $\psi^{-1}(a) = \varphi(a)$ $(a \varepsilon A)$, što upravo i znači da je $\psi^{-1} = \varphi$.

Teorema 2. Neka je α bilo koji redni broj $\neq 0$; broj različitih điadičkih matrica stupnja (α, α) koje u svakom retku i svakom stupcu imaju po jednu jedinu jedinicu jednak je broju permutacija[1]) *skupa $[0, \alpha)$ svih redkih brojeva $< \alpha$.*

Neka je π bilo koja permutacija skupa $[0, \alpha)$; neka je δ_π preslikavanje koje je definirano relacijama (3.6). Tada svič-matrica δ_π ima u svom ξ-retku jednu jedinu jedinicu i to u $\pi(\xi)$-stupcu; isto tako u ξ-stupcu ima δ_π jedino jedinicu koja je i u $\pi^{-1}(\xi)$-retku. Ako su π, π' dvije različite permutacije skupa $[0, \alpha)$, matrice $\delta_\pi, \delta_{\pi'}$ su različite, jer $\pi \neq \pi'$ znači da postoji bar jedno $\xi < \alpha$ za koje je $\pi(\xi) \neq \pi'(\xi)$; zato vrijedi (3.7) i (3.8), a to upravo znači da je $\delta_\pi \neq \delta_{\pi'}$.

[1]) Permutacija skupa S jest svako obostrano jednoznačno preslikavanje f skupa S na čitava sebe; dakle je $fS = S$.

Još se radi o tome da vidimo da je svaka matrica f iz T. 2 oblika δ_π tj. da postoji π za koji je $\delta_\pi = f$ (naravno da π zavisi od f). No, označimo li za svako $\xi < \alpha$ sa $\pi(\xi)$ broj $< \alpha$ za koji je $f(\xi, \pi(\xi)) = 1$, tada je $\pi(\xi)$ $(\xi < \alpha)$ određena permutacija skupa $[0, \alpha)$ i očigledno je $\delta_\pi = f$. Time je teorema 2 dokazana.

4. *Primjedba o determinantama.* Kako su matrice izvjesna preslikavanja a u specijalnim slučajevima izvjesne funkcije, to će pripadne determinante biti također izvjesna preslikavanja a u specijalnim slučajevima preslikavanja funkcija na realne brojeve dakle će biti funkcionale. Napose, ako kvadratna matrica a konačna reda ima svoje komponente u nekom polju ili integralnom području D, biće $det\ a \in D$. Tako na pr. polazeći od kakvog skupa S kvadratnih realnih matrica konačna reda (koji se općenito mijenja sa $x \in S$) biće (4.1) izvjesno preslikavanje skupa S na skup realnih brojeva; kao što se zna, formiranje izraza $det\ x$ vrši se po (4.2), pri čemu $[0, rx)!$ označuje skup svih permutacija p skupa rednih brojeva $< rx$; Ip kazuje koliko ima uređenih pari rednih brojeva $\alpha < \beta < rx$ sa svojstvom $p_\alpha > p_\beta$.

ДЕТЕРМИНАНТЕ НЕКВАДРАТНИХ МАТРИЦА

МИРКО СТОЈАКОВИЋ, Београд

У овом раду показаћемо како се од елемената једне задате матрице могу формирати изрази који играју исту улогу и код квадратних и код неквадратних матрица, а који се у специјалном случају своде на познате изразе за детерминанте квадратних матрица. Ови изрази имају примене у проблему инверзије матрица најопштијег облика а самим тим и у проблему решавања матричних једначина.

А.

Нека је задата матрица $\mathfrak{a}$ димензије $r \times s$

$$\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{vmatrix}.$$

Дефиниција 1.

Са $det_n\, \mathfrak{a}$, $n \leqslant \min(r, s)$, означићемо израз

$$(1) \qquad det_n\, \mathfrak{a} = \sum_{(j)}^{\binom{r}{n}} \left\{ \sum_{(i)}^{\binom{s}{n}} \left[\sum_{(\sigma)}^{n!}{}' (-1)^{J(\sigma)}\, a_{\rho_1 \sigma_1} a_{\rho_2 \sigma_2} \dots a_{\rho_n \sigma_n} \right]_{(i)} \right\}_{(j)}$$

где је

(а) $(\sigma) = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ нека пермутација n елемената изабраних без понављања међу елементима $1, 2, \dots, s$;

(б) $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ природан поредак n елемената изабраних без понављања међу елементима $1, 2, \dots, r$;

(в) $J(\sigma)$ број инверзија и пермутацији (σ);

(г) $\sum_{(\sigma)}$ оператор сабирања преко свих $n!$ пермутација елемената једног одређеног избора од n колона и n врста;

(д) $\sum_{(i)}$ оператор сабирања преко свих $\binom{s}{n}$ могућих избора (i) од n колона;

(ђ) $\sum_{(j)}$ оператор сабирања преко свих $\binom{r}{n}$ могућих избора (j) од n врста.

У (α) и (δ) изрази „нека пермутација“ и „природан поредак“ могу се узајамно сменити.

Ако се уочи да је израз под трећим знаком Σ у ствари обична детерминанта димензије $n \times n$, горња дефиниција могла би се кратко изрећи овако:

Израз $det_n \mathfrak{a}$ *је сума свих детерминаната квадратних матрица димензије* $n \times n$ *које се могу, без измене поретка врста и колона, формирати од елемената матрице* $\mathfrak{a}$.

Кад је $n > r$ или $n > s$, узећемо да је $det_n \mathfrak{a}$ по дефиницији једнако нули. (Због $\binom{r}{n} = 0$ или због $\binom{s}{n} = 0$, први или други збир из дефиниције (1) су у ствари празни, а трећи губи смисао).

Кад је $n = r = s$ онда је $\binom{r}{n} = \binom{s}{n} = 1$, па се добија обична детерминанта матрице $\mathfrak{a}$:

$$det_n \mathfrak{a} = det_r \mathfrak{a} = det_s \mathfrak{a} = det \mathfrak{a}.$$

Кад је $n = min\,(r, s)$ онда је или $\binom{r}{n} = 1$ или $\binom{s}{n} = 1$; тада је n највећи број за који $det_n \mathfrak{a}$ није већ унапред, по дефиницији, једнако нули. То и јесте израз $det\,\mathfrak{a}$:

$$det\,\mathfrak{a} = \sum_{(i)} \left(\sum_{\sigma} (-1)^{J(\sigma)} a_{1\sigma_1}, \ldots a_{r\sigma_r} \right)_{(i)} \text{ за } \gamma \leqslant s;\ det\,\mathfrak{a} =$$

$$= \sum_{(j)} \left(\sum_{(\rho)} (-1)^{J(\sigma)} a_{\rho_1 1} \ldots a_{\rho_s s} \right)_{(j)} \text{ за } r \leqslant s.$$

који претставља генерализацију појма детерминанте за неквадратне матрице.

Дефиниција 2.

Израз $det\,\mathfrak{a}$ *је сума свих детерминаната квадратних матрица максималне димензије које се могу, без измене поретка врста и колона формирати од елемената задате матрице* $\mathfrak{a}$.

Показаћемо, потпуности ради, да изрази $det\,\mathfrak{a}$ имају све познате особине детерминаната са местимичним природним модификацијама.

У извођењу, одређености ради, узећемо да је $\gamma \leq s$. Стога се у набрајању особина свуда реч „врста“ може заменити речју „колона“ и обрнуто чим је $r \geq s$.

Изведимо најпре *став о независности неквадратних детерминаната.*

Ако, дакле, према предњем, неквадратну детерминанту дефинишемо као збир свих максималних квадратних детерминаната које се од њених елемената могу формирати без измене поретка врста или колона, тада важи став

Квадратна детерминанта је у сваком случају специјалан облик неквадратне детерминанте а обрнуто у општем случају не важи.

Доказ. Да је квадратна детерминанта специјалан случај неквадратне, следи из саме дефиниције када се у овој збир сведе само на један сабирак. Да обрнуто не важи, то јест да се сума која даје неквадратну детерминанту не може добити из неке квадратне детерминанте добивене дописивањем елемената који недостају неквадратној детерминанти, доказаћемо тиме што ћемо навести случај када се таква квадратна детерминанта не може наћи.

Посматрајмо детерминанту димензије 4×6

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{46} \end{vmatrix},$$

и допунимо је до квадратне неким елементима $x_1, x_2, \dots, x_6, y_1, y_2, \dots y_6$, који нису сви једнаки нули. Тако се добија:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2, & \dots & x_6 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_6 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{46} \end{vmatrix}.$$

Да би се Δ свело на D, треба да буде, на основу Laplace-ове теореме:

$$\begin{vmatrix} x_\nu & x_\mu \\ y_\nu & y_\mu \end{vmatrix}=(-1)^{\mu+\nu+1};\begin{Bmatrix} \nu=1,2,\dots,6 \\ \mu=2,\quad \dots,6 \\ \nu\neq\mu \end{Bmatrix}$$

Ово је систем од 15 једначина са 12 непознатих $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$. Нека је $\nu<\mu<\eta$, $(\eta=3,4,5,6)$, па из (1) следи

$$y_\nu\begin{vmatrix} x_\mu & x_\eta \\ y_\mu & y_\eta \end{vmatrix}-y_\mu\begin{vmatrix} x_\nu & x_\eta \\ y_\nu & y_\eta \end{vmatrix}+y_\eta\begin{vmatrix} x_\nu & x_\mu \\ y_\nu & y_\mu \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_\nu & y_\mu & y_\eta \\ x_\nu & x_\mu & x_\eta \\ y_\nu & y_\mu & y_\eta \end{vmatrix}=0=$$

$$=(-1)^{\mu+\nu+1}y_\eta+(-1)^{\eta+\nu+2}y_\mu+(-1)^{\mu+\eta+1}y_\nu, \text{ т. j.}$$

$$(-1)^{\mu+\eta}y_\nu+(-1)^{\nu+\eta+1}y_\mu+(-1)^{\nu+\mu}y_\eta=0.$$

За разне вредности ν, μ, η одавде следи

$$
\begin{aligned}
y_1+y_2+y_3 &= 0, \quad (\nu=1, \mu=2, \eta=3),\\
y_1+y_2-y_4 &= 0, \quad (\nu=1, \mu=2, \eta=4),\\
y_1+y_2+y_5 &= 0, \quad (\nu=1, \mu=2, \eta=5),\\
y_1+y_2-y_6 &= 0, \quad (\nu=1, \mu=2, \eta=6),\\
y_2+y_3+y_4 &= 0, \quad (\nu=2, \mu=3, \eta=4),\\
y_2+y_3-y_5 &= 0, \quad (\nu=2, \mu=3, \eta=5),\\
y_2+y_3+y_6 &= 0, \quad (\nu=2, \mu=3, \eta=6),\\
y_3+y_4+y_5 &= 0, \quad (\nu=3, \mu=4, \eta=5),\\
y_3+y_4-y_6 &= 0, \quad (\nu=3, \mu=4, \eta=6),\\
y_4+y_5+y_6 &= 0, \quad (\nu=4, \mu=5, \eta=4), \text{ и тд.}
\end{aligned}
$$

што претставља низ једначина чије је једино решење

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0.$$

То и доказује да се D не може допунити онако како то захтева Δ.

Докажимо сада следеће теореме:

I. *Кад се елементи једне врсте у матрици* $\mathfrak{a}$ *поможе бројем* k, *добија се матрица* $\mathfrak{b}$ *и важи* $det\,\mathfrak{b} = k\,det\,\mathfrak{a}$.

Доказ. Како се у сваком сабирку $a_{1\sigma 1}\ a_{2\sigma 2}\dots\ a_{r\sigma r}$ налази један и само један елеменат из сваке врсте матрице $\mathfrak{a}$, то ће сви сабирци у изразу $det\,\mathfrak{b}$ задржавати један и само један фактор k, који се онда може извући пред суму, а ова није ништа друго него $det\,\mathfrak{a}$. Тако се добија $det\,\mathfrak{a} = k\,det\,\mathfrak{b}$.

II. *Кад се елементи једне врсте додаду елементима неке друге врсте матрице* $\mathfrak{a}$, *добија се матрица* $\mathfrak{b}$ *и важи* $det\,\mathfrak{a} = det\,\mathfrak{b}$.

Доказ. Кад се елементу $a_{2\sigma 2}$ дода елеменат $a_{1\sigma 2}$, у матрици $\mathfrak{b}$ биће један сабирак облика

$$(2) \qquad a_{1\sigma 1}(a_{2\sigma 2}+a_{1\sigma 2})\,a_{3\sigma 3}\dots, a_{r\sigma r})$$

или

$$a_{1\sigma 1}\,a_{2\sigma 2}\dots\ a_{\gamma\sigma\gamma}+a_{1\sigma 1}\,a_{1\sigma 2}\,a_{3\sigma 3}\dots, a_{r\sigma r}.$$

Кад први од ова два сабирка пролази сумом из дефиниције (2) израза $det\,\mathfrak{a}$, он ће дати вредност $det\,\mathfrak{a}$, а други ће дати детерминату једне матрице са две једнаке врсте. Како свакој пермутацији $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\dots, \sigma_r$, одговара пермутација $\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3, .., \sigma_r$, а број инверзија у овима се разликује за јединицу, то ће у овако формираном збиру по два сабирка имати супротне вредности, а читав тај збир имаће вредност нула. Стога сума сабирка облика (2) даје опет вредност $det\,\mathfrak{a}$, то јест $det\,\mathfrak{a} = det\,\mathfrak{b}$, што је и тврђено. Овим је истовремено доказано

III. *Кад су у матрици* $\mathfrak{a}$ *две врсте једнаке, онда је* $det\,\mathfrak{a} = 0$.

IV. *Кад се елементи једне врсте матрице* $\mathfrak{a}$ *помноже са* k *и додаду наспрамним елементима неке друге врсте, добија се матрица* $\mathfrak{b}$, *и важи* $det\,\mathfrak{a} = det\,\mathfrak{b}$.

Доказ. Нека је $det\,\mathfrak{a} = D$. Кад једну врсту у $\mathfrak{a}$ помножимо са k, добићемо матрицу $\mathfrak{a}_1$ за коју је $det\,\mathfrak{a}_1 = kD$, према I. Ако сад ову врсту додамо другој врсти, добићемо матрицу $\mathfrak{a}_2$ за коју је $det\,\mathfrak{a}_2 = det\,\mathfrak{b}_1$, према II. Ако елементе који су у почетку били множени са k помножимо сада поново за $\frac{1}{k}$, добићемо коначно матрицу $\mathfrak{b}$ за коју је $det\,\mathfrak{b} = \frac{1}{k}\,det\,a_2 = D$, опет према I.

V. *Ако матрицу* $\mathfrak{a}$ *транспонујемо, добићемо матрицу* $\mathfrak{a}'$ *и важи* $det\,\mathfrak{a} = det\,\mathfrak{a}'$.

Доказ. Израз $det\,\mathfrak{a}$ је сума квадратних детерминаната, а израз $det\,\mathfrak{a}'$ је сума тих истих квадратних детерминаната само транспонованих. Како за квадратне детерминанте важи горње тврђење, то оно важи и за читав збир, то јест $det\,\mathfrak{a} = det\,\mathfrak{a}'$.

VI. *Кад се и матрици* $\mathfrak{a}$ *две врсте узајамно замене, добија се матрица* $\mathfrak{b}$ *и важи* $det\,\mathfrak{a} = -det\,\mathfrak{b}$.

Доказ. Нека је $det\,\mathfrak{a} = D$. Кад у $\mathfrak{a}$ i-ту врсту додамо j-ој врсти, добићемо матрицу $\mathfrak{a}_1$ за коју је $det\,\mathfrak{a}_1 = det\,\mathfrak{a}$, према II. Кад у $\mathfrak{a}_1$ j-ту врсту одузмемо од i-те, добићемо матрицу $\mathfrak{a}_2$, па ће бити $det\,\mathfrak{a}_2 = det\,\mathfrak{a}_1$, према II и IV. Ако сад у $\mathfrak{a}_2$ i-ту врсту додамо j-ој врсти, добићемо матрицу $\mathfrak{a}_3$ и још увек ће бити $det\,\mathfrak{a}_3 = det\,\mathfrak{a}_2$, према II. Ако најзад у $\mathfrak{a}_3$ i-ту врсту помножимо са -1, добићемо матрицу $\mathfrak{b}$, али ће, према I, бити $det\,\mathfrak{b} = -det\,\mathfrak{a}_3 = -det\,\mathfrak{a}$.

Непосредно из дефиниције, или из I, следи:

VII. *Ако је у матрици* $\mathfrak{a}$ *једна врста састављена од нула, онда је* $det\,\mathfrak{a} = 0$.

VIII. *Ако је у матрици* $\mathfrak{a}$ *нека врста линеарна комбинација других врста, онда је* $det\,\mathfrak{a} = 0$.

Доказ. Применом изведених својстава може се добити матрица $\mathfrak{b}$ чија је једна врста састављена од нула, а према VII таквој матрици одговара вредност $det\,\mathfrak{b} = det\,\mathfrak{a} = 0$.

IX. *За израз* $det\,\mathfrak{a}$ *важи Laplace-ова теорема о развијању.*

Доказ. Laplace-ову теорему дајемо овде у нешто модификованој формулацији: Фактор $(-1)^{i+k}$ у изразу $(-1)^{i+k}\,a_{ik}\,A_{ik}$ унећемо у сам израз A_{ik} множећи у овоме са -1 све врсте чији је индекс мањи од i и све колоне чији је индекс мањи од j. Тако ћемо приликом писања минора A_{ik}, који одговара елементу a_{ik}, уз елементе чији је први индекс

већи од i а други мањи од j, или чији је први индекс мањи од i а други већи од j, писати супротне знаке од оних које ти елементи имају у заданој матрици $\mathfrak{a}$. Очигледно је да је ово само вербална измена кад се ради о квадратним матрицама. Доказ саме теореме састоји се сад у томе да се у изразу $det\,\mathfrak{a}$, формираном по дефиницији (2), уоче сви сабирци који садрже фактор a_{ik} и да се запази да, после извлачења овог фактора пред суму, ова последња постаје баш минор A_{ik} онаквог типа како је овде описано. Збиља, у непосредно формираном изразу за $det\,\mathfrak{a}$ имамо збир од $\binom{s}{r}$ квадратних детерминаната димензије $r\times r$, што значи да после њиховог развијања имамо $\binom{s}{r} r!$ сабирака облика $a_{\rho_1\sigma_1}a_{\rho_2\sigma_2}\dots a_{\rho_r\sigma_r}$. У збиру формираном по Laplace-овој теореми имамо најпре s сабирака облика $a_{ik}\,A_{ik}$, а ако сваки сабирак A_{ik} развијемо по нашој дефиницији, имаћемо $s\binom{s-1}{r-1}(r-1)!$ сабирака облика $a_{\rho_1\sigma_1}\dots a_{\rho_r\sigma_r}$. Значи да се сума формирана по нашој дефиницији и сума формирана по Laplace-овој теореми подударају у погледу броја и врсте сабирака $a_{\rho_1\sigma_1}\dots a_{\rho_r\sigma_r}$. Да би се те суме подударале и по знаку одговарајућих сабирака, довољно је пребројати инверзије које елеменат a_{ik} чини тиме што се извлачи пред суму A_{ik}. Кад се врста са елементом a_{ik} доведе у положај прве врсте, онда све елементе у врстама мањег индекса треба помножити са -1. Ако сада и колону у којој је елеменат a_{ik} доведемо у положај прве колоне, онда и све елементе из колона мањег индекса треба помножити са -1. Када се то уради, узете су у обзир све инверзије које елеменат a_{ik} чини са елементима из A_{ik}, те израз $\sum_{k=1}^{s} a_{ik}A_{ik}$ $(i=1,2,\dots,r)$ мора бити једнак изразу $det\,\mathfrak{a}$.

Посматрајмо сада општи случај развијања по Laplace-овој теореми. Изаберимо у матрици $\mathfrak{a}$ l одређених врста од r врста и један од $\binom{s}{k}$ могућих избора k колона од s колона. Нека елементи који припадају оваквом избору врста и колона и леже у пресеку ових чине минор A_i димензије $l\times k$ а елементи који леже истовремено у претеклим врстама и колонама нека чине (комплементарни) минор B_j димензије $(r-l)\times(s-k)$. Да би ови минори, сматрани као неквадратне детерминанте, имали својства детерминаната баш у погледу врста као и детерминанта задате матрице, треба да буде $l\leqslant k$ и $r-l\leqslant s-k$. Тада ће детерминанта A_i имати

$$\binom{k}{l} l!$$

сабирака облика $a_{i_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_l j_l}$ а B_j ће имати

$$\binom{s-k}{r-l}(r-l)!$$

сабирака облика $a_{i_{l+1} j_{l+1}} a_{i_{l+2} j_{l+2}} \ldots a_{i_r j_r}$. Производ $A_i B_j$ даће

$$\binom{k}{l} l! \quad \binom{s-k}{r-l}(r-l)!$$

сабирака облика $a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_r j_r}$, а како има свега $\binom{s}{k}$ различитих избора k колона од s колона, то ће укупно бити $\binom{s}{k}$ производа $A_i B_j$ па према томе и

$$\binom{k}{l} l! \binom{s-k}{r-l}(r-l)! \binom{s}{k}$$

сабирака облика $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_\nu j_\nu}$. Да би ових сабирака било на број исто онолико колико их се добија и по дефиницији (2) треба да буде

$$\binom{k}{l} l! \binom{s-k}{r-l}(r-l)! \binom{s}{k} = \binom{s}{r} r! .$$

Како је

$$\binom{k}{l} l! \quad \binom{s-r}{r-l}(r-l)! \quad \binom{s}{k} = \frac{s!}{(k-l)!\ (s-r-k+l)!},$$

$$\binom{s}{r} r! = \frac{s!}{(s-r)!},$$

то мора бити

$$\frac{(s-r)!}{(k-l)!\ [(s-r)-(k-l)]!} = \binom{s-r}{k-l} = 1, \text{ па или } k=l, \text{ или } s-r=k-l.$$

Тако се долази до става: Нека је $s-r$ „дефект" задате матрице $\mathfrak{a}$, тада се Laplace-ова теорема о развијању може применити само онда кад је дефект $(s-r)$ израза $det\,\mathfrak{a}$ једнак дефекту $(k-l)$ минора по којима се врши развијање. Такво развијање може се дакле вршити само кад је „водећи" минор рецимо A_i квадрати и, према томе, комплементарни минор B_j истог дефекта као и задата матрица. Но то још није и довољно. Да би се сабирци облика $a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_r j_r}$ добијени преко производа $A_i B_j$, поклапали и по знаку са таквим сабирцима добивеним по дефиницији 2, треба знаке елемената комплементарних минора бирати на одговарајући начин. Овде је опет меродаван број инверзија који се чини превођењем врста и колона квадратног минора у водећи положај. Лако је тада уочити да елемент a_{ij} комплемен-

тарног минора треба да има супротан знак од оног који има у задатој матрици, ако је збир броја врста и колона у квадратном минору које имају већи индекс врсте од i и већи индекс колоне од j непаран а исти знак ако је тај збир паран. За случај кад се квадратни минор састоји од само једног елемента на тај начин добија се, у почетку овог доказа већ наведено, правило за одређивање знака комплементарног минора при развијању по елементима једне врсте. Одредивши, дакле знаке елемената комплементарног минора на овај начин, узећемо у обзир све инверзије па ће се израз $\Sigma A_i B_j$ подударати и по знацима са изразом $det\,\mathfrak{a}$ то јест биће

$$\sum_{(i,j)}^{\binom{s}{k}} A_i B_j = det\,\mathfrak{a}.$$

Тиме је Laplace-ова теорема у потпуности доказана.

Пример:

Детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

развијева по дефиницији 2 даје

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

развијена према Лапласовој теореми по елементима друге врсте даје

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

а развијена према Лапласовој теореми, узимајући крадратне миноре другог реда кроз прве две врсте, даје

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot |1\ 1| + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot |-1\ 1| + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot |-1\ -1| + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot |0\ 1| + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} |0\ -1| + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} |0\ 1| = 0.$$

Сада постаје јасно какав смисао има код квадратних детерминаната развијање по квадратним минорима и познато одређивање знака тих минора. Исто тако постаје јасно зашто је и дефиниција 2 морала бити дата онако како смо то ми учинили: Сама та дефиниција није ништа друго него специјалан случај Laplace-ове теореме развијања

неквадратних и квадратних детерминаната када се за квадратне миноре узимају минори димензије r. У том случају, наиме, комплементарни минор постаје једнак јединици. Он би се додуше могао дефинисати и као -1, али би то захтевало да се и код квадратних детерминаната тако узме. (Напомињемо да то, у ствари, не би ни у чему реметило консистенцију саме теорије детерминаната).

Овим је истовремено доказано и

X. *За неквадратне као и за квадратне матрице важи правило*

$$\sum_{k=1}^{s} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} det\,\mathfrak{a} & за\ i=j \\ 0 & за\ i \neq j \end{cases} \quad (i,j=1,2,\ldots,r).$$

Испоставило се да изрази $det\,\mathfrak{a}$, онако како су овде дефинисани, имају све особине обичних детерминаната. Изузетно не важи увек инверзија својства VIII: ако је израз $det\,\mathfrak{a}$ и једнак нули, не мора у њему ни једна врста бити линеарно зависна од осталих. (Тако је у претходном примеру $\Delta = 0$ а врсте су независне). Да би то било, морао би бити испуњени и неки накнадни услов — на пример, да и свака максимална квадратна детерминанта посебно буде једнака нули.

У сврху доказивања инверзног става нека важи

Дефиниција 3

Норма матрице $\mathfrak{a}$ *јесте израз*

$$N(\mathfrak{a}) = \left\{ \sum_{(i)} \left(\sum (-1)^{J(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{r\sigma_r} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \{ det(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}') \}^{\frac{1}{2}}, \quad (r \leqslant s)$$

(односно

$$N(\mathfrak{a}) = \left\{ \sum_{(i)} \left(\sum (-1)^{J(\rho)} a_{\rho_1 1} a_{\rho_2 2} \ldots a_{\rho_s s} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \{ det(\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}) \}^{\frac{1}{2}}, (r \leqslant) s)$$

или речима: *Норма матрице је позитивна вредност квадратног корена из збира квадрата свих максималних квадратних детерминаната које се могу формирати од елемената матрице* $\mathfrak{a}$ *без измене поретка врста и колона.*

Ова дефиниција норме одговара дефиницији 2. Општија је дефиниција норме која одговара дефиницији 1, премда њу нећемо овде користити:

Дефиниција 4

Норма ранга n, $N_n(\mathfrak{a})$, *матрице* $\mathfrak{a}$, *јесте позитивна вредност квадратног кврена из збира квадрата свих квадратних детерминаната*

реда n, које се могу формирати од елемената $\mathfrak{a}$ *без промене поретка врста или колона.*

Тада важи став

XI. *Међу врстама матрице* $\mathfrak{a}$ *постоји линеарна зависност тада и само тада кад је* $N(\mathfrak{a}) = 0$.

Доказ

Збиља, ако та зависност постоји, све су максималне детерминанте једнаке нули па је и $N(\mathfrak{a}) = 0$.

За доказ обрнутог става, уведимо нешто краће ознаке. Нека елементи i-те врсте матрице $\mathfrak{a}$ дефинишу вектор a_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Нека је $a_i a_j$ скаларни производ вектора a_i и a_j. Тада је

$$N^2(\mathfrak{a}) = det(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}') = \begin{vmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & \ldots & a_1 a_r \\ a_2 a_1 & a_2 a_2 & \ldots & a_2 a_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k a_1 & a_k a_2 & \ldots & a_k a_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_r a_1 & a_v a_2 & \ldots & a_r a_r \end{vmatrix}$$

Претпоставка да су врсте матрице $\mathfrak{a}$ линеарно независне своди се на то да су вектори a_i међусобно независни. Ако је $N(\mathfrak{a}) = 0$, у детрминанти $det(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}')(=0)$ постоји међу врстама нека линеарна зависност. Одређености ради, нека су у овој детерминанти првих k врста међусобно зависне. Нека су $m_1, \ldots m_k$ одговарајући коефицијенти те линеарне зависности, то јест нека је

$$\begin{aligned} m_1 a_1 a_1 + m_2 a_2 a_1 + \ldots + m_k a_k a_1 &= 0, \\ m_1 a_1 a_2 + m_2 a_2 a_2 + \ldots + m_k a_k a_2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ m_1 a_1 a_r + m_2 a_2 a_r + \ldots + m_k a_k a_r &= 0. \end{aligned}$$

Одавде следи

$$\begin{aligned} (m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_k a_k)\, a_1 &= 0, \\ (m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_k a_k)\, a_2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_k a_k)\, a_k &= 0, \end{aligned}$$

то јест, вектор $m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_k a_k$ треба да буде ортогоналан на све векторе $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Како ови вектори чине базу подпростора вектора $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ по претпоставци да су они линерно независни,

ни једна њихова линеарна комбинација не може бити ортогонална истовремено на све њих. Стога мора бити

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_k a_k = 0$$

а то је у контрадикцији са претпоставком да су вектори $a_1, \ldots, a_r$ линеарно независни. Ова контрадикција и доказује тврђење.

Б

Што се тиче операција са детерминантама, детерминанте су бројеви и са њима се могу вршити све операције као и са бројевима. У колико се те операције ипак засебно описују, то се ради само у колико је и резултат могуће написати у облику детерминанте или неке једноставне комбинације детртерминаната.

Нека матрице $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ имају димензије $r_1 \times s_1$, односно $r_2 \times s_2$.

У општем случају је $det\ (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \neq det\ \mathfrak{a} + det\ \mathfrak{b}$,
али је увек

$$det_1 (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = det_1 \mathfrak{a} + det_1 \mathfrak{b}$$

а

$$det_n (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = det_n \mathfrak{a} + det_n \mathfrak{b}$$

кад год је

$$n > min\,(r_1, s_1)$$

Но ако уведемо ознаку $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ за матрицу која се добија кад се поред елемената матрице $\mathfrak{a}$ у наставку допишу елементи матрице $\mathfrak{b}$ тако да дужи редови дођу у правцу дужих, тада је увек

$$det\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = det\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$$

Што се тиче множења детерминананта матрица $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, да би се резултат могао писати у облику детерминанте, потребно је пре свега да буде дефинисан сам производ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ што ће бити ако је $s_2 = r_2$; но осим тога потребно је да буде и $r_1 \geqslant s_1$, односно $r_2 \leqslant s_2$. Тада важи

XII. *Производ израза* $det\,\mathfrak{a}$ *и* $det\,\mathfrak{b}$ *једнак је детерминанти производа* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, *то јест*

$$det_n \mathfrak{a}\ det_n \mathfrak{b} = det_n \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

где је $n = s_1 = r_2$, $r_1 \geqslant n \leqslant s_2$

Доказ. Према нашој дефиницији 2 сабирци који чине израз $det\,\mathfrak{a}$ јесу квадратне детерминанте A_i димензије $n \times n$, а исто тако и сабирци који чине израз $det\,\mathfrak{b}$. Кад се сваки сабирак A_i из збира $det\,\mathfrak{a}$ помножи са сваким сабирком B_j из другог збира $det\,\mathfrak{b}$ добија се, применом познатог правила за множење квадратних детермианата, укупно $\binom{r_1}{n}\binom{s_2}{n}$ квадратних детерминаната димензије $n \times n$, чији су елементи постали композицијом једне врсте матрице $\mathfrak{a}$ са једном колоном матрице $\mathfrak{b}$. Уочимо

једну квадратну детерминанту димензије $n \times n$ у шеми елемената матрице $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ чија је димензија $r_1 \times s_2$. Елементи те детерминанте постали су композицијом извесних одређених n врста матрице $\mathfrak{a}$ и одређених n колона матрице $\mathfrak{b}$. Али тих n врста матрице $\mathfrak{a}$ чине неку детерминанту A_i а тих n колона матрице $\mathfrak{b}$ чине неку детерминанту B_j. На тај начин, сваки производ $A_i B_j$ чини једну квадратну детерминанту димензије $n \times n$ из шеме производа $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, и обрнуто свака таква квадратна детерминанта јесте неки производ $A_i B_j$. Скуп квадратних матрица димензије $n \times n$ шеме елемената $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ састоји се из истих елемената и само из оних из којих се састоји и скуп производа $A_i B_j$ $\begin{bmatrix} i = 1, 2 \ldots, \binom{r_1}{n} \\ j = 1, 2 \ldots, \binom{s_2}{n} \end{bmatrix}$.

Стога су и суме свих елемената ових скупова међусобно једнаке, то јест

$$\sum_{j=1}^{\binom{s_2}{n}} \left(\sum_{j=1}^{\binom{r_1}{n}} A_i B_j \right) = det_n \mathfrak{a} \cdot det_n \mathfrak{b} = det_n \mathfrak{a}\,\mathfrak{b},$$

што је и тврђено.

Пример. За матрицу

$$\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

имамо

$$det\,\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -16\ (= det_2 \mathfrak{a}).$$

Адјунгована матрица је

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix},$$

а за ову је

$$det\,A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -48\ (= det_2 A).$$

За производ $A\,\mathfrak{a}$ добијамо

$$A \,.\, \mathfrak{a} = \begin{bmatrix} -12 & -4 & 4 \\ -8 & -8 & 8 \\ 4 & -4 & -12 \end{bmatrix},$$

то јест

$$det_2 A\,\mathfrak{a} = 768 = (-48) \cdot (-16) = det_2 A \cdot det_2 \mathfrak{a}.$$

После овога може се дати и дефиниција инверзне матрице једне неквадратне матрице:

Дефиниција 5.

Инверзна матрица матрице $\mathfrak{a}$ *добија се кад се елементи у* $\mathfrak{a}$ *замене њиховим кофакторима подељеним вредношћу det* $\mathfrak{a}$ $(\neq 0)$, *то јест потпуно онако како се то ради по дефиницији за квадратне матрице, укључујући притом и транспозицију. То значи елементу* a_{ij} *у* $\mathfrak{a}$ *одговара елемената* $\frac{A_{ji}}{det\,\mathfrak{a}}$ *у* $\mathfrak{a}^{-1}$. Стварно, на основи X, следи да ће тада бити

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} = [I].$$

Поменимо да израз $a^{-1}\mathfrak{a}$ даје такозвану „екстраординерну јединичну матрицу" [1].

C.

Што се тиче примене, ова је опширно обрађена у раду A. Bjerhammar-a: „Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations [1]. A. Bjerhammar је у том раду први дао једну дефиницију инверзне матрице неквадратне матрице но без позивања на детерминанте. Дефиниција и примена детерминаната неквадратних матрица на инверзију, која се овде први пут [2] даје, може имати теориског интереса и сама по себи, а како показује цитирани рад, у извесним калкулацијама она може бити и од практичне користи.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Arne Bjerhammar* — Rectangular reciprocal matrices, with special reference to geodetic calculations — Bulletin geodesique; Paris, 1951 str: 188-220. Assoc. Inter. de Geod.

[2]. *Thomas Muir* — Contributions to the history of determinants, London, 1950.

DETERMINANTEN RECHTECKIGER MATRIZEN

von MIRKO STOJAKOVIĆ, Beograd

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Artikel der Verfasser gibt die Definition der Determinanten der rechteckigen Matrizen wie auch einige andere Definitionen und Sätze die sich auf die allgemeinen Matrizen beziehen.

Ist eine Matrize

$$\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{bmatrix}$$

gegeben so gilt zunächst

Definition 1. $det_n \mathfrak{a}$ ist die Summe aller quadratischer Determinanten vom Grade n die sich, ohne Änderung der Anordnung von Zeilen oder Spalten, aus den Elementen von $\mathfrak{a}$ bilden können.

Hier sind die quadratische Determinanten nur der Kürze wegen erwähnt, die Definition selbst ist aber von dieser völlig unabhängig.

Definition 2.

Nimmt man in der Definition 1, $n = r$ für $r \leqslant s$, oder $n = s$ für $r \geqslant s$ so bekommt man die rechteckige Determinante $det\,\mathfrak{a}$ die eine wahre Generalization quadratischer Determinanten ist.

Der Verfasser beweist dass die Ausdrücke die nach der Definition 2 gebaut sind, alle Eigenschaften der gewöhnlichen Determinanten besitzen inwieweit dies nur die Zeilen für $r \leqslant s$ oder die Spalten für $r \geqslant s$, betrifft.

Insbesondere gilt der Laplacesche Entwicklungssatz in einer etwas modifizierter Formulierung die für die quadratische Determinanten ohne Bedeutug für die rechteckigen aber grundlegend ist:

Fasst man $l (\leqslant r)$ Zeilen und $k (\leqslant s)$ Spalten einer Matrize $\mathfrak{a}$ ins Auge, so bilden die Elemente die gleichzeitig diesen Zeilen und Spalten angehören einen Minor A_l und die Elemente die gleichzeitig den übrigbleibenden Zeilen und Spalten angehören einen (komplemetären) Minor B_j. Die Summe aller Produkte $A_l B_j$ die man mit gleichem Auswahl der l Zeilen und veränderlichem Auswahl der k Spalten gebildet sind ist gleich $det\,\mathfrak{a}$ wenn

(a) A_l quadratisch und demgemäss B_j mit gleichem Defekt wie $\mathfrak{a}$ ist (dass heisst wenn die Differenz $s - r$ gleich $k - l$ ist).

(b) B_j quadratisch und A_l mit gleichem Defekt wie $\mathfrak{a}$ ist.

Die Elemente des quadratischen Minors nimmt man mit gleichem Vorzeichen wie sie in $\mathfrak{a}$ vorkommen, die Elemente a_{ik} im komplementärem Minor nimmt man mit gleichem Vorzeichen wie in $\mathfrak{a}$ wenn im entschprechenden quadratischem Minor die Summe der Anzahl der Zeilen mit grösstem Index als i und der Spalten mit gröstem Index als j echt ist, mit entgegengesetztem in anderen Fällen.

Nimmt man hier für den quadratischen Minor den Grad $l = r, (r \leqslant s)$ (oder den Grad $k = s$ für $r \geqslant s$) so soll man den entsprechenden komplementären Minor gleich 1 setzen. Die Definition 2 erscheint dann als Spezialfall des Laplaceschen Entwicklungssatz wenn man $l = r$ für $r \leqslant s$ (oder $k = s$ für $r \geqslant s$) nimmt.

Der Verfasser zeigt dass der bekannte Satz

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} det\,\mathfrak{a} & \text{für } i = k \\ 0 & \text{„ } i \neq k \end{cases} \qquad (r \leqslant s)$$

auch für die rechteckige Matrize gilt; er zeigt weiter die Unzulänglichkeit der quadratischen Determinanten oder, was auf dasselbe hinausgeht, die Unzurückfürbarkeit der rechteckigen Determinanten auf die quadratische.

Der bekannte Satz von der linearen Abhängigkeit der Zeilen oder Spalten steht im allgemeinen nicht mit der Determinante sondern mit der Norm $N(a)$:

$$N(\mathfrak{a}) = (det\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{a}')^{\frac{1}{2}} \text{ für } r \leqslant s,\ N(\mathfrak{a}) = (det\, \mathfrak{a}'\, \mathfrak{a})^{\frac{1}{2}} \text{ für } r \geqslant s$$

in Verbindung: In einer Matrize $\mathfrak{a}$ sind die Zeilen (oder die Spalten) dann und nur dann linear abhängig wenn die Norm $N(\mathfrak{a})$ gleich Null ist. (Bei quadratischen Determinanten stimmen die absolute Werte $det\, \mathfrak{a}$ und $N(\mathfrak{a})$ immer überein).

Zuletzt, beweist der Verfasser dass man die Inversion einer rechteckiger Matrize nach den gleichen Regeln wie bei einer quadratischer vollziehen kann: das Element a_{ik} aus $\mathfrak{a}$ gibt das Element $\frac{A_{ki}}{det\, \mathfrak{a}}$, $(det\, \mathfrak{a} \neq 0)$ in $\mathfrak{a}^{-1}$. Im Falle $det\, \mathfrak{a} = 0$ spielt $N(\mathfrak{a})$ wieder eine wichtige Rolle [1].

Was die Rechenoperationen mit rechteckigen Determinanten betrifft, der Verfasser gibt, unter anderem, den Satz

$$det_n\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b} = det_n\, \mathfrak{a} \cdot det_n\, \mathfrak{b},$$

wo $\mathfrak{a}$ eine Matrize vom Grade $r_1 \times s_1$ und $\mathfrak{b}$ eine Matrize vom Grade $r_2 \times s_2$ ist, wo $r_1 \geqslant s_1 = n = r_2 \leqslant s_2$ und wo det_n nach der Definition 2 gebildet sein muss.

О РЕЛАТИВНО ЗАТВОРЕНИМ И ОТВОРЕНИМ СКУПОВИМА У ПРОСТОРИМА HAUSDORFF-A

ЗЛАТКО МАМУЗИЋ, Београд

1. Сва разматрања у овом раду односе се на скупове тачака простора у ком важе ова четири аксиома Hausdorff-a, ([1], стр. 213):

(A) свакој тачки x одговара бар једна околина $N(x)$; свака околина тачке x садржи x;

(B) пресек двеју околина једне и исте тачке садржи бар једну околину те тачке;

(C) ако је $N(x)$ било која околина тачке x и $y \in N(x)$, онда постоји бар једна околина $N(y)$ тачке y тако да $N(y) \subseteq N(x)$;

(D) двема различитим тачкама x, y одговарају бар две околине $N(x)$, $N(y)$ тако да $N(x) \cap N(y) = \nu$ ($\nu =$ празан скуп).

Како ови аксиоми важе ([2]. стр. 305) за Картезијеве, Хилбертов, функционални (C_c), раздаљинске и све потпуно уређене просторе, то ће и резултати овога рада важити за све те просторе. Према једној од неколико напомена, које је у вези с овим радом учинио Др. Ђуро Курепа, важе они и за тополошке просторе Куратовског.

Наведимо неколико појмова који ће нам требати у даљем излагању.

Ако је E неки скуп и ако за тачку $x \in E$ постоји околина $N(x) \subseteq E$, за тачку x се каже да је унутрашња тачка скупа E. Ако су све тачке скупа E унутрашње, каже се да је скуп E отворен. Тачка x јесте тачка нагомилавања скупа E, ако свака њена околина садржи бесконачно много тачака из E. Користићемо се теоремом:

(a) *да тачка x буде тачка нагомилавања скупа E потребно је и довољно да свака околина тачке x садржи бар једну тачку из E различиту од x.*

Скуп свих тачака нагомилавања скупа E означићемо са E' а скуп $E \cup E'$ означићемо са $\overline{E}$ (просторност или адхеренција скупа E). Ако је $E' \subseteq E$ каже се да је скуп E затворен.

Користићемо се теоремом:

(b) *скупови E' и $\bar{E}$ јесу затворени.*

Стављање ознаке C испред ознаке за скуп значиће нам операцију узимања комплемента тог скупа у простору Hausdorff-a.

За затворене и отворене скупове важи:

(c) *ако је скуп E отворен тада је скуп CE затворен; ако је скуп E затворен тада је скуп CE отворен;*

(d) *ако са H означимо скуп свих тачака посматраног простора онда је скуп H и отворен и затворен; празан скуп v је и отворен и затворен.*

2. Ако су дати скупови E, S, F, G од којих је F затворен а G отворен и ако је

$$E = S \cap F,$$

по Hausdorff-y ([1], стр. 240) се каже да је скуп E затворен у скупу S, а ако је

$$E = S \cap G,$$

каже се да је скуп E отворен у скупу S (тј. E = *ein Relativgebiet von* S).

Друга дефиниција релативне затворености и отворености, еквивалентна првој, је ова. Ако је $E \subseteq S$ и $E' \cap S \subseteq E$, тада је скуп E затворен у скупу S, а ако је $E \subseteq S$ и ако за сваку тачку $x \varepsilon E$ постоји околина $N(x)$ тако да $N(x) \cap S \subseteq E$, тада је скуп E отворен у скупу S (за Картезијеве просторе в. на пр. [3], стр. 9—10). Лако се показује да

(e) *ако је $E \subseteq S$, $E' \cap S \subseteq E$, тада $E = S \cap \bar{E}$.*

У обим дефиницијама претпостављено је $E \subseteq S$. Узмимо дакле да овај услов није неопходно испуњен и уведимо ову дефиницију:

Дефиниција. *Ако је $E' \cap S \subseteq E$, казаћемо да је скуп E затворен према скупу S; ако за сваку тачку $x \varepsilon E$ постоји околина $N(x)$ тако да $N(x) \cap S \subseteq E$, казаћемо да је скуп E отворен према скупу S.*

Полазећи од ове дефиниције извешћемо сада неколико теорема од којих ће неке имати као непосредне последице већ познате теореме а које се изводе на основи горе наведених дефиниција. У случају $E \subseteq S$ задржаћемо терминологију коју је увео F. Hausdorff.

Доказаћемо претходно:

Лема 1. *Ако је $E' \cap S \neq v$, $E' \cap S \subseteq E$, скупови E и S не могу бити дисјунктни.*

Доказ. Из $x \varepsilon E' \cap S \neq v$ следи $x \varepsilon E'$, $x \varepsilon S$, па како $E' \cap S \subseteq E$, то $x \varepsilon E$ и зато $E \cap S \neq v$.

Обрнуто не мора важити као што показује пример:

$S = \left\{-\frac{1}{n}\right\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $E = \left\{\frac{1}{n}\right\} \cup \{2, 3, 4\}$, где су $\frac{1}{n}$, $-\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ и 2, 3, 4, тачке на бројној линији. Очигледно, $E \cap S = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $E' = \{0\}$, 0 *non* εS па $E' \cap S = \nu$.

Са конвенцијом да је празан скуп ν садржан у сваком скупу, видимо да у случају $E' \cap S = \nu$ важи $\nu \subset E$ па таква околност не утиче на нашу дефиницију затворености скупа E према скупу S. Али, ни случај $N(x) \cap S = \nu$, $x \varepsilon E$, не утиче на нашу дефиницију отворености скупа E према скупу S, јер тада $N(x) \cap S = \nu \subset E$, са свако $x \varepsilon E$. У постављању и извођењу ниже наведених теорема претпоставићемо да је $E' \cap S \neq \nu$ и $N(x) \cap S \neq \nu$, $x \varepsilon E$; случајеви када су ти пресеци празни нису од интереса.

Лема 2. *Празан скуп ν је и затворен и отворен према сваком скупу S, и обрнуто: сваки скуп S је и затворен и отворен према скупу ν.*

Доказ. Како $\nu' = \nu$ то $\nu' \cap S = \nu$, па је скуп ν затворен према скупу S (у исто време он је затворен и у скупу S, јер $\nu \subset S$). С друге стране, како је скуп ν отворен то је скуп $\nu \cap S = \nu$ отворен у скупу S па по нашој теореми 10 скуп ν је отворен и према скупу S. Да важи и обрнуто види се отуда што је $S' \cap \nu = \nu \subset S$ а, за $x \varepsilon S$, имамо $N(x) \cap \nu = \nu \subset S$.

Према томе, ако се у нашем даљем излагању појави случај $E = \nu$ или $S = \nu$, или и једно и друго, ово неће утицати ни на извођење ни на закључке. Такве ћемо случајеве сматрати тривијалним.

Теорема 1. *Ако је скуп E затворен према скупу S, онда је скуп $S \setminus E$ отворен у скупу S; ако је скуп E отворен према скупу S, онда је скуп $S \setminus E$ затворен у скупу S.*

Доказ. Како $S \setminus E \subseteq S$, треба показати да из $E' \cap S \subseteq E$ следи: за сваку тачку $x \varepsilon S \setminus E$ постоји околина $N(x)$ тако да $N(x) \cap S \subseteq S \setminus E$. Нека дакле $x \varepsilon S \setminus E$; како $x \varepsilon S$, x *non* εE то x *non* $\varepsilon E' \cap S$, тј. x *non* $\varepsilon E'$, тј. x *non* $\varepsilon \bar{E}$. Како је према теореми (*b*) скуп $\bar{E}$ затворен, постоји околина $N(x) \subseteq C\bar{E}$, одакле $N(x) \cap S \subseteq S \cap C\bar{E} = S \setminus \bar{E} \subseteq S \setminus E$, јер $\bar{E} = E \cup E'$ па $S \setminus \bar{E}$ садржи све тачке из S које нису у $\bar{E}$, дакле ни у E.

За доказ другог тврђења треба показати: ако за сваку тачку $x \varepsilon E$ постоји околина $N(x)$ тако да $N(x) \cap S \subseteq E$ онда $(S \setminus E)' \cap S \subseteq S \setminus E$. Нека дакле $x \varepsilon (S \setminus E)' \cap S$, тј. $x \varepsilon (S \setminus E)'$, $x \varepsilon S$. За сваку околину $N'(x)$ тачке x постоји тачка $x_1 \neq x$ са особином да $x_1 \varepsilon N'(x)$, $x_1 \varepsilon S \setminus E$, тј. $x_1 \varepsilon S$, x_1 *non* εE па $x \varepsilon S'$, а како $x \varepsilon S$, то $x \varepsilon \bar{S}$. Но тачка x не може бити у E. Кад би било $x \varepsilon E$, постојала би нека околина $N''(x)$ тако

да $N''(x) \cap S \subseteq E$. Али ни $N''(x) \cap CS$ нема тачака у S, па ниједна тачка из $N''(x)$ није у S. Како је $x \varepsilon S'$, морала би околина $N''(x)$ садржати бар једну тачку из S, различиту од x, а видели смо да она нема ниједне тачке из S, па је доказ теореме завршен.

Королар 1. *Ако је скуп E затворен према скупу S тада је скуп $S \cap E$ затворен у скупу S; ако је скуп E отворен према скупу S, скуп $S \cap E$ јесте отворен у скупу S.*

Королар 2. *Сваки скуп S је и затворен и отворен у скупу S.*

Доказ. То се одмах види ако се стави $E = v$.

Теорема 2. *Ако је скуп E отворен према скупу S онда је*

$$S \cap C(S \setminus E) = S \cap C(\overline{S \setminus E}).$$

Доказ. Према теореми 1 је скуп $S \setminus E$ затворен у скупу S па је зато $S \setminus (S \setminus E)$ отворен у скупу S. Како је према (b) и (e)

$$S \setminus E = S \cap (\overline{S \setminus E})$$

то

$$\begin{aligned} S \setminus (S \setminus E) &= S \setminus (S \cap (\overline{S \setminus E})) \\ &= S \cap C(S \cap (\overline{S \setminus E})) \\ &= S \cap (CS \cup S(\overline{S \setminus E})) \\ &= (S \cap CS) \cup (S \cap C(\overline{S \setminus E})) \\ &= S \cap C(\overline{S \setminus E}), \end{aligned}$$

па је теорема доказана.

Королар. *Ако је $E \subseteq S$ онда*

$$\dot{E} = S \cap C(\overline{S \setminus E}).$$

Теорема 3. *Ако је скуп S_1 затворен према скупу S_2 а скуп S_2 затворен према скупу S_1, тада је пресек $S_1 \cap S_2$ затворен и у унији $S_1 \cup S_2$ и у скупу S_1 и у скупу S_2.*

Доказ. Како $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1 \cup S_2$ треба покати да

$$(S_1 \cap S_2)' \cap (S_1 \cup S_2) \subseteq S_1 \cap S_2.$$

Нека дакле

$$x \varepsilon (S_1 \cap S_2)' \cap (S_1 \cup S_2), \text{ тј.}$$

$$x \varepsilon (S_1 \cap S_2)', \quad x \varepsilon S_1 \cup S_2.$$

Како је x тачка нагомилавања скупа $S_1 \cap S_2$ мора бити

$$x \varepsilon S_1' \quad \text{и} \quad x \varepsilon S_2';$$

јер, према теореми (a) свака околина $N(x)$ садржи бар једну тачка $x_1 \neq x$, $x_1 \varepsilon S_1 \cap S_2$, тј. $x_1 \varepsilon S_1$ и $x_1 \varepsilon S_2$ па је x тачка нагомилавања и скупа S_1

и скупа S_2. Због $x \in S_1 \cup S_2$, тачка x се мора налазити бар у једном од скупова S_1 и S_2. Ако $x \in S_1$ онда због $x \in S'_2$, мора бити $x \in S'_2 \cap S_1$ па због $S'_2 \cap S_1 \subseteq S_2$, мора бити $x \in S_2$, тј. $x \in S_1 \cap S_2$. Ако $x \in S_2$ онда због $x \in S'_1$, мора бити $x \in S'_1 \cap S_2$ па због $S'_1 \cup S_2 \subseteq S_1$ мора бити $x \in S_1$, тј. $x \in S_1 \cap S_2$. У сваком случају је дакле $x \in S_1 \cap S_2$, па је теорема доказана примедбом да се скуп $S_1 \cap S_2$ налази и у скупу S_1 и у скупу S_2.

Напомена. Теорема 3 може се доказати и применом теореме 1.

Королар. *Ако је скуп S_1 затворен према скупу S_2 а скуп S_2 затворен према скупу S_1 тада је симетрична диференција $(S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$ отворена у унији $S_1 \cup S_2$.*

Теорема 4. *Ако је скуп S_1 отворен према скупу S_2 а скуп S_2 отворен према скупу S_1 тада је пресек $S_1 \cap S_2$ отворен и у унији $S_1 \cup S_2$ и у скупу S_1 и у скупу S_2.*

Доказ. Према теореми 1 је скуп $S_1 \setminus S_2$ затворен у скупу S_1 а скуп $S_2 \setminus S_1$ је затворен у скупу S_2. Према истој теореми зато је скуп $S_1 \setminus (S_1 \setminus S_2)$ отворен у скупу S_1 а скуп $S_2 \setminus (S_2 \setminus S_1)$ је отворен у скупу S_2. Али

$$S_1 \setminus (S_1 \setminus S_2) = S_2 \setminus (S_2 \setminus S_1) = S_1 \cap S_2,$$

па како је скуп $S_1 \cap S_2$ отворен и у скупу S_1 и у скупу S_2, отворен је он и унији $S_1 \cup S_2$.

Королар. *Ако је скуп S_1 отворен према скупу S_2 а скуп S_2 отворен према скупу S_1 тада је симетрична диференција $(S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$ затворена у унији $S_1 \cup S_2$.*

Теорема 5. *Ако је скуп $S_2 \setminus S_1$ отворен у скупу S_2, скуп S_1 биће затворен у скупу S_2 тада и само тада када $S_1 \subseteq S_2$,*

Доказ. Ово следи отуда што је по теореми 1 скуп $S_2 \setminus (S_2 \setminus S_1)$ затворен у скупу S_2 и, ако $S_1 \subseteq S_2$, тада $S_2 \setminus (S_2 \setminus S_1) = S_1$.

Теорема 6. *Ако је скуп $S_2 \setminus S_1$ затворен у скупу S_2, скуп S_1 биће отворен у скупу S_2 тада и само тада када $S_1 \subseteq S_2$.*

Доказ. Ово следи отуда што је према теореми 1 скуп $S_2 \setminus (S_2 \setminus S_1)$ отворен у скупу S_2 и, ако $S_1 \subseteq S_2$, тада $S_2 \setminus (S_2 \setminus S_1) = S_1$.

Теорема 7. *Ако је дат скуп S и фамилија скупова Φ таква да је $E' \cap S \subseteq E$ за сваки скуп $E \in \Phi$, тада је пресек $\bigcap_{E \in \Phi} E$ затворен према скупу S. Ако се фамилија Φ састоји из коначног броја скупова E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, тада је унија $\bigcup E_i$ затворена према скупу S.*

Доказ. Треба показати да је

$$\left(\bigcap_{E \in \Phi} E\right)' \cap S \subseteq \bigcap_{E \in \Phi} E.$$

Нека дакле

$$x \in (\underset{E \in \Phi}{\cap} E)' \cap S, \text{ тј. } x \in (\underset{E \in \Phi}{\cap} E)', \quad x \in S.$$

Према теореми (а) у свакој околини $N(x)$ тачке x постоји бар једна тачка $x_1 \neq x$ са особином $x_1 \in \underset{E \in \Phi}{\cap} E$ одакле $x_1 \in E$ за сваки скуп $E \in \Phi$. Према томе, $x \in E'$ за сваки скуп $E \in \Phi$. Како $x \in S$ то $x \in E' \cap S$ за сваки $E \in \Phi$ а како $E' \cap S \subseteq E$, то $x \in E$ за сваки $E \in \Phi$ и зато $x \in \underset{E \in \Phi}{\cap} E$.

Ако се Φ састоји из коначног броја скупова E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, треба показати да

$$(\cup E_i)' \cap S \subseteq \cup E_i.$$

Нека $x \in (\cup E_i)' \cap S$, тј.

$$x \in (\cup E_i)', \quad x \in S.$$

Према теореми (а) у свакој околини $N(x)$ тачке x постоји бар једна тачка $x_1 \neq x$ са особином $x_1 \in \cup E_i$. Нека $x_1 \in E_k$, где је k бар један од бројева $1, 2, \ldots, n$. Тачка x је дакле тачка нагомилавања скупа E_k, тј. $x \in E'_k$. Како $x \in S$ то $x \in E'_k \cap S$, а како $E'_k \cap S \subseteq E_k$, то $x \in E_k$ тј. $x \in \cup E_i$, чиме је теорема доказана.

Королар. 1. *Ако је $E' \cap S \subseteq E$ за сваки скуп E фамилије Φ, тада је $S \cap (\underset{E \in \Phi}{\cap} E)$ затворен у скупу S; ако је $\underset{E \in \Phi}{\cap} E \subseteq S$, пресек $\underset{E \in \Phi}{\cap} E$ затворен је у скупу S. Ако се фамилија Φ састоји из коначног броја скупова E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, тада је $S \cap (\cup E_i)$ затворен у скупу S.*

Королар 2. *Ако је $E \subseteq S$, $E' \cap S \subseteq E$ за сваки скуп $E \in \Phi$, тада је пресек $\underset{E \in \Phi}{\cap} E$ затворен у скупу S. Ако се при истим условима фамилија Φ састоји из коначног броја скупова E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, тада је унија $\cup E_i$ затворена у скупу S.*

Теорема 8. *Ако је дат скуп S и фамилија скупова Φ тако да за сваки скуп $E \in \Phi$ и за сваку тачку $x \in E$ постоји околина $N(x)$ са особином да $N(x) \cap S \subseteq E$, тада је унија $\underset{E \in \Phi}{\cup} E$ отворена према скупу S. Ако се фамилија скупова Φ састоји из коначног броја скупова E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, тада је пресек $\cap E_i$ отворен према скупу S.*

Доказ. Треба показати да за $x \in \underset{E \in \Phi}{\cup} E$ постоји околина $N(x)$ са особином

$$N(x) \cap S \subseteq \underset{E \in \Phi}{\cup} E.$$

Ако $x \in \underset{E \in \Phi}{\cup} E$ онда се x налази бар у једном од скупова фамилије Φ,

рецимо у скупу $E_\beta \in \Phi$. Али постоји околина $N(x)$ тако да $N(x) \cap S \subseteq E_\beta$ тј. $N(x) \cap S \subseteq \bigcup_{E \in \Phi} E$.

Ако се Φ састоји из коначног броја скупова E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, тада из $x \in \cap E_i$ следи $x \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, па постоје околине $N_i(x)$ са особином $N_i(x) \cap S \subseteq E_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Нека је

$$N(x) = \cap N_i(x).$$

Тада $N(x) \subseteq N_i(x)$, па

$$N(x) \cap S \subseteq N_i(x) \cap S \subseteq E_i, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

одакле

$$N(x) \cap S \subseteq \cap E_i,$$

чиме је теорема доказана.

Королар 1. *Ако за сваки скуп $E \in \Phi$ и сваку тачку $x \in E$ постоји околина $N(x)$ са особином $N(x) \cap S \subseteq E$, тада је скуп $S \cap (\bigcup_{E \in \Phi} E)$ отворен у скупу S. Ако се фамилија Φ састоји из коначног броја скупова E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, тада је скуп $S \cap (\cap E_i)$ отворен у скупу S.*

Доказаћемо овај королар још и применом теореме 1 и королара 2 теореме 7.

Скупови $S \setminus E$, $E \in \Phi$ јесу затворени у скупу S (теорема 1); према королару 2 теореме 7 такав је и скуп $\cap_{E \in \Phi} (S \setminus E)$ па је опет према теореми 1 скуп $S \setminus \cap (S \setminus E)$ отворен у скупу S. Али $S \setminus \cap (S \setminus E) =$

$$= S \setminus (\cap (S \cap CE)) = S \cap C (\cap (S \cap CE)) = S \cap (\cup C (S \cap CE)) =$$
$$= S \cap (\cup (CS \cup E)) = \cup (S \cap (CS \cup E)) = \cup ((S \cap CS) \cup (S \cap E))$$
$$= \cup (S \cap E) = S \cap (\cup E),$$

чиме је прво тврђење доказано.

Према теореми 1, скупови E_i јесу затворени у скупу S. Према королару 2 теореме 7, скуп $\cup (S \setminus E_i)$ јесте затворен у скупу S па је скуп $S \setminus (\cup (S \setminus E))$ отворен у скупу S. Али $S \setminus (\cup (S \setminus E_i)) = S \setminus (\cup (S \cap CE_i)) =$
$= S \setminus (S \cap (\cup CE_i)) = S \setminus (S \setminus \cap E_i) = S \cap (\cap E_i)$, чиме је доказано и друго тврђење.

Королар 2. *Ако је $E \subseteq S$ и ако за сваки скуп $E \in \Phi$ и свако $x \in E$ постоји околина $N(x)$ са особином $N(x) \cap S \subseteq E$, тада је скуп $\cup_{E \in \Phi} E$ отворен у скупу S. Ако се фамилија Φ састоји из коначног броја скупова E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, тада је пресек $\cap E_i$ отворен у скупу S.*

Теореме 3 и 4, королар 1 теореме 1, королар 1 теореме 7 и королар 1 теореме 8 показују да услов затворености или отворености

скупа E у скупу S у смислу дефиниције Hausdorff-a, јесте довољан али да није потребан. Наиме, доказаћемо теореме:

Теорема 9. *Да неки скуп буде затворен у скупу S потребно је и довољно да он буде пресек скупа S и скупа E затвореног према скупу S.*

Доказ. Нека је скуп $E \cap S$ затворен у скупу S. Како $E \cap S \subseteq S$, за потребност услова треба показати да из

(A) $$(E \cap S)' \cap S \subseteq E \cap S$$

следи

$$E' \cap S \subseteq E.$$

Нека дакле $x \in (E \cap S)' \cap S$, тј.

$$x \in (E \cap S)', \quad x \in S.$$

Према теореми (a), за сваку околину $N(x)$ тачке x постоји тачка $x_1 \in N(x)$, $x_1 \neq x$, $x_1 \in E \cap S$, тј. $x_1 \in E$ па је x тачка нагомилавања скупа E тј. $x \in E'$. Како $x \in S$ то $x \in E' \cap S$ а како према (A) мора бити $x \in E \cap S$ то $x \in E$ па $E' \cap S \subseteq E$.

Услов је довољан. Ако $E' \cap S \subseteq E$, према корolару 1 теореме 1 скуп $S \cap E$ јесте затворен у скупу S.

Теорема 10. *Да неки скуп буде отворен у скупу S потребно је и довољно да он буде пресек скупа S и скупа E отвореног према скупу S.*

Доказ. Нека је скуп $E \cap S$ отворен у скупу S. Како $E \cap S \subseteq S$, за потребност услова треба показати да из

$$x \in E \cap S, \quad N(x) \cap S \subseteq E \cap S,$$

следи

$$N(x) \cap S \subseteq E.$$

Но, из $x \in E \cap S$ следи $x \in E$ и

$$N(x) \cap S \subseteq E \cap S \subseteq E.$$

Услов је довољан. Ако $x \in E$, $N(x) \cap S \subseteq E$, према корolару 1 теореме 1 скуп $S \cap E$ јесте отворен у скупу S.

Примедба. У случају $E \subseteq S$, теореме 9 и 10 јесу тривијалне. Јер, тада $E \cap S = E$ и према теореми (e) тада је $S \cap \bar{E} = E$, у случају да је скуп E затворен у скупу S, а $E = S \cap C(\overline{S \setminus E})$, у случају да је скуп E отворен у скупу S (према корolару теореме 2), при чему, према теоремама (b) и (c), скуп $\bar{E}$ јесте затворен а скуп $C(\overline{S \setminus E})$ јесте отворен.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *F. Hausdorff*, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914.
[2] *Dr. Đuro Kurepa*, Teorija skupova, Zagreb, 1951, izd. „Školske knjige".
[3] *E. J. Mc Shane*, Integration, 1947, Princeton University Press.

ON SETS CLOSED OR OPEN RELATIVE TO A SET IN HAUSDORFF'S SPACE

by ZLATKO MAMUZIĆ, Beograd

SUMMARY

Consider a space H in which the well-known Hausdorff's axioms ([1], *p.* 213) hold (the results are still valid for the topological space or Kuratowski 's space). Let E, S, F, G be the sets in H, F being closed and G open. If

$$E = S \cap F,$$

by Hausdorff's definition ([1], *p.* 240) the set E is said to be closed in the set S, and if

$$E = S \cap G,$$

the set E is said to be open in the set S (i. e.: $E =$ ein Relativgebiet von S). By another definition, equivalent to the first, the set E is said to be slosed in the set S if $E \subseteq S$ and if $E' \cap S \subseteq E$; on the other hand, if $E \subseteq S$ and if for every point $x \varepsilon E$ there existe a neighbourhood $N(x)$ such that $N(x) \cap S \subseteq E$, the set E is said to be open in the set S. (Instead of "in the set S" some authors use the expression "relative to the set S", — for instance, [3], *p.* 9—10). In both definitions is supposed $E \subseteq S$. In this paper the author removes the restriction $E \subseteq S$ suggesting the following definition.

Definition. *Let E, S be the sets in H. If $E' \cap S \subseteq E$, the set E is said to be closed relative to the set S; if for every point $x \varepsilon E$ there existe a neighbourhood $N(x)$ such that $N(x) \cap S \subseteq E$, the set E is said to be open relative to the set S.*

If $E \subseteq S$, the author retains the terminology introduced by Hausdorff.

The author proves:

Lemma 1. *If $E' \cap S \neq v$ (v = empty set) then the sets E and S are not disjoint.*

Lemma 2. *The set v is both closed and open relative to every set S; every set S is both closed and open relative to the set v.*

Theorem 1. *If E is closed relative to S, then $S \setminus E$ is open in S; if E is open relative to S, then $S \setminus E$ is closed in S.*

Corollary 1. *If E is closed relative to S, then $S \cap E$ is closed in S; if E is open relative to S, then $S \cap E$ is open in S.*

Corollary 2. *Every set S is both closed and open in S.*

Theorem 2. *If E is open relative to S, then*

$$S \cap C(S \setminus E) = S \cap C(\overline{S \setminus E}).$$

Corollary. *If* $E \subseteq S$, *then*

$$E = S \cap C(\overline{S \setminus E}).$$

Theorem 3. *If* S_1 *is closed relative to* S_2 *and if* S_2 *is closed relative to* S_1, *then* $S_1 \cap S_2$ *is closed in the sets* $S_1 \cup S_2$, S_1 *and* S_2.

Corollary. *If* S_1 *is closed relative to* S_2 *and if* S_2 *is closed relative to* S_1, *then the symetrical difference* $(S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$ *is open in* $S_1 \cup S_2$.

Theorem 4. *If* S_1 *is open relative to* S_2 *and if* S_2 *is open relative to* S_1, *then* $S_1 \cap S_2$ *is open in the sets* $S_1 \cup S_2$, S_1 *and* S_2.

Corollary. *If* S_1 *is open relative to* S_2 *and if* S_2 *is open relative to* S_1, *then the symetrical difference* $(S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$ *is closed in* $S_1 \cup S_2$.

Theorem 5. *If the set* $S_2 \setminus S_1$ *is open in* S_2, *then the set* S_1 *is closed in* S_2 *if and only if* $S_1 \subseteq S_2$.

Theorem 6. *If the set* $S_2 \setminus S_1$ *is closed in* S_2, *then the set* S_1 *is open in* S_2 *if and only if* $S_1 \subseteq S_2$.

Theorem 7. *Given a set* S *and a family* Φ *of sets* E *such that* $E' \cap S \subseteq E$ *for every* $E \in \Phi$; *then* $\bigcap_{E \in \Phi} E$ *is closed relative to* S. *If the family* Φ *consiste of a finite number of sets* E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *then* $\bigcup E_i$ *is closed relative to* S.

Corollary 1. *If* $E' \cap S \subseteq E$ *for every* $E \in \Phi$, *then the set* $S \cap (\bigcap_{E \in \Phi} E)$ *is closed in* S; *if* $\bigcap_{E \in \Phi} E \subseteq S$, *then* $\bigcap_{E \in \Phi} E$ *is closed in* S. *If the family* Φ *consiste of a finite number of sets* E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *then* $S \cap (\bigcup E_i)$ *is closed in* S.

Corollary 2. *If* $E \subseteq S$, $E' \cap S \subseteq E$ *for every* $E \in \Phi$, *then* $\bigcap_{E \in \Phi} E$ *is closed in* S. *If the family* Φ *consiste of a finite number of sets* E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *then* $\bigcup E_i$ *is closed in* S.

Theorem 8. *Given a set* S *and a family* Φ *of sets* E *such that for every set* $E \in \Phi$ *and for every point* $x \in E$ *there existe a* $N(x)$ *such that* $N(x) \cap S \subseteq E$; *then* $\bigcup_{E \in \Phi} E$ *is open relative to* S. *If the family* Φ *consiste of a finite number of sets* E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *then* $\bigcap E_i$ *is open relative to* S.

Corollary 1. *If for every* $E \in \Phi$ *and for every point* $x \in E$ *there existe a* $N(x)$ *such that* $N(x) \cap S \subseteq E$, *then* $S \cap (\bigcup_{E \in \Phi} E)$ *is open in* S. *If the family* Φ *sonsiste of a finite number of sets* E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *then* $S \cap (\bigcap E_i)$ *is open in* S.

Corollary 2. *If* $E \subseteq S$ *and if for every* $E \varepsilon \Phi$ *and for every point* $x \varepsilon E$ *there existe a* $N(x)$ *such that* $N(x) \cap S \subseteq E$, *then* $\bigcup_{E \varepsilon \Phi} E$ *is open in* S. *If the family* Φ *consiste of a finite number of sets* E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *then* $\cap E_i$ *is open in* S.

Theorem 9. *In order that a set be closed in the set* S *it is necessary and sufficient that he be the intersection of the set* S *and of a set* E *closed relative to* S.

Theorem 10. *In order that a set be open in the set* S *it is necessary and sufficient that he be the intersection of the set* S *and of a set* E *open relative to* S.

О ЈЕДНОМ ПОСТУПКУ ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ НАЈВЕЋЕГ ЗАЈЕДНИЧКОГ ДЕЛИТЕЉА ДВА ИЛИ ВИШЕ ПОЛИНОМА

ДРАГОЉУБ МАРКОВИЋ, Београд

Обичај је да се највећи заједнички делитељ (н. з. д.) за два полинома одређује преко Еуклидовог алгоритма. Тај пут је, због низа дељења, у већини случајевима технички прилично заметан. Ово нарочито вреди за случај кад имамо задатак да одредимо н. з. д. за три или више полинома. Указаћемо у овом раду на један поступак који нам се, са методске и практичне тачке гледишта, чини прилично једноставан, бар у једном великом броју случајева. Напоменимо да се поступак формално може проширити на истовремено одређивање н. з. д. за три и уопште за k полинома.

1. *Излагање поступка.* — Уочимо два потпуна полинома једнаких степена n[1])

$$\begin{aligned} P_n &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ Q_n &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0. \end{aligned} \tag{1}$$

У већини случајева могу се наћи четири броја $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, и δ_1 таква, да су испуњени услови

$$\alpha_1 a_n + \beta_1 b_n = 0, \quad \gamma_1 a_0 + \delta_1 b_0 = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Тада се на један једини начин могу написати ове релације

$$\begin{aligned} \alpha_1 P_n + \beta_1 Q_n &= p_1 P_{n-1}, \\ \gamma_1 P_n + \delta_1 Q_n &= x\, q_1 Q_{n-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где су P_{n-1} и Q_{n-1} полиноми $n-1$ степена добивени оваквим поступком, а p_1 и q_1 неки константни фактори, различити од нуле. Напоменимо да су из P_{n-1} и Q_{n-1} извучени константни чиниоци, уколико постоје. Поступак има за циљ да се добију полиноми, бар за један, нижег

---

[1]) Услови $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ прећутно се подразумевају, јер је наглашено да су полиноми истога степена n.

Исто тако прећутно се претпостављају услови $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, јер би се тада чинилац x могао одстранити.

степена од датих, али такви да н. з. д. за P_n и Q_n мора бити садржан и у P_{n-1}, односно у Q_{n-1}. Снижавање степена првобитних полинома изводи се с крајева и то „с лева" и „с десна".

Претпоставимо за сада да се уопште степен полинома може, и с једне и с друге стране снизити само за по један. Ако P_{n-1} и Q_{n-1} нису идентични, може се исти поступак применити и на њих и добити

$$\begin{aligned} \alpha_2 P_{n-1} + \beta_2 Q_{n-1} &= p_2 P_{n-2} \\ \gamma_2 P_{n-1} + \delta_2 Q_{n-1} &= x q_2 Q_{n-2}, \end{aligned} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

при чему се избор бројева α_2, β_2, γ_2 и δ_2 подешава, као и у претходном поступку, тако да се елиминишу коефицијенти највиших степена полинома P_{n-1} и Q_{n-1} с једне стране, као и њихови слободни чланови с друге стране.

Нека смо после s оваквих поступака дошли до релација

$$(4) \qquad \begin{aligned} \gamma_s P_{n-s+1} + \beta_s Q_{n-s+1} &= p_s P_{n-s} \\ \gamma_s P_{n-s+1} + \delta_s Q_{n-s+1} &= x q_s Q_{n-s}, \end{aligned} \qquad \Delta_s = \begin{vmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ \gamma_s & \delta_s \end{vmatrix} \neq 0,$$

што је могуће у оном случају, ако су сви ранији полиноми P_{n-s+k} и Q_{n-s+k}, $k = 1, 2, \ldots s$, међусобно различити. Уколико су и остали полиноми све нижег степена, који се оваквим поступцима добијају, различити све до P_1 и Q_1, доћи ће се на крају до константа P_0 и Q_0.

Напоменимо најзад да се снижавање степена полинома P_n и Q_n може с једне (леве) стране одједном снизити и за m, а с друге (десне) стране одједном и за k, тако да се могу написати релације

$$(5) \qquad \begin{aligned} \alpha P_n + \beta Q_n &= p P_{n-m} \\ \gamma P_n + \delta Q_n &= x q Q_{n-k}, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

То ће бити испуњено ако α и β задовољавају m услова

$$\alpha a_n + \beta b_n = 0, \quad \alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1} = 0, \ldots, \alpha a_{n-m+1} + b_{n-m+1} = 0,$$

а γ и δ, k услова

$$\gamma a_0 + \delta b_0 = 0, \quad \gamma a_1 + \delta b_1 = 0, \ldots, \gamma a_{k-1} + \delta b_{k-1} = 0.$$

Ово се не мора десити одмах у првом поступку већ у неком наредном. Исто тако снижавање степена за више од једне јединице не мора бити са оба краја полинома. У даљем излагању претпоставићемо најпре да су полиноми једнаког степена n и да се снижавање степена може извести највише за једну јединицу.

2. Став: *Ако је за неки индекс* $s = 1, 2, 3, \ldots n-1$, $P_{n-s} \equiv Q_{n-s}$, *онда је* P_{n-s} *највећи заједнички делитељ за дате полиноме* P_n *и* Q_n.

Доказ. а) P_{n-s} је заједнички делитељ. Из 4) следи

$$P_{n-s+1} = \frac{P_{n-s}}{\Delta_s} G_1, \qquad Q_{n-s+1} = \frac{Q_{n-s}}{\Delta_s} H_1$$

где су

$$G_1 = \begin{vmatrix} p_s & \beta_s \\ xq_s & \delta_s \end{vmatrix}, \qquad H_1 = \begin{vmatrix} \alpha_s & p_s \\ \gamma_s & xq_s \end{vmatrix}.$$

Поступним враћањем добићемо да је на крају

$$(6) \qquad P_n = \frac{P_{n-s}}{\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_s} G_s, \qquad Q_n = \frac{Q_{n-s}}{\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_s} H_s,$$

где су G_s и H_s неки полиноми степена s дати у облику

$$G_s = \begin{vmatrix} p_1 G_{s-1} & \beta_1 \\ xq_1 H_{s-1} & \delta_1 \end{vmatrix}, \qquad H_s = \begin{vmatrix} \alpha_1 & p_1 G_{s-1} \\ \gamma_1 & xq_1 H_{s-1} \end{vmatrix}.$$

Изрази (6) показују да је P_{n-s} односно Q_{n-s} заједнички делитељ.

b) P_{n-s} је највећи заједнички делитељ. Пре свега не може бити $G_1 \equiv H_1$ јер би то повлачило услов $\beta_s = \alpha_s$, $\delta_s = -\gamma_s$, што би значило да је, противно претпоставци, $\Delta_s = 0$. Али из истих разлога не може бити ни $G_2 \equiv H_2$, јер би тада, због

$$G_2 = \begin{vmatrix} p_{s-1} G_1 & \beta_{s-1} \\ xq_{s-1} H_1 & \delta_{s-1} \end{vmatrix}, \qquad H_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{s-1} & p_{s-1} G_1 \\ \gamma_{s-1} & xq_{s-1} H_1 \end{vmatrix}$$

морало бити $\beta_{s-1} = -\alpha_{s-1}$, $\delta_{s-1} = -\gamma_{s-1}$, односно, $\Delta_{s-1} = 0$. Истим резоновањем долази се до закључка да не може бити ни $G_s \equiv H_s$, чиме је показано да изван P_{n-s} других заједничких фактора и нема.

Ово тврђење може бити интерпретирано и на овај начин. Процес који смо навели могућ је само дотле док су снижавањем степена добивени полиноми различити. Ако се деси да су после неког процеса једнаки (или се разликују у једној умноженој константи), онда је тиме снижавање заустављено. Заједничког делитеља вишег степена нема, јер би се он појавио раније, у полиномима $P_{n-s+1}, P_{n-s+2}, \dots, P_{n-1}$.

Примедба I. Став претпоставља да су P_n и Q_n једнаког степена n. Ако су полиноми различитог степена, могуће је снижавањем вишег степена, добити два полинома једнаког степена, који у погледу н. з. с. имају исто својство као и два дата полинома.

Нека су дати полиноми P_m и Q_n $(n > m)$. Н.з.с. може бити највише степена m. Значи да треба добити још један полином Q_m који у погледу н.з.с. репрезентује Q_n. Низом релација

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\alpha_1 P_m + \beta_1 Q_n = xq_1 Q_{n-1} \\ &\alpha_2 P_m + \beta_2 Q_{n-1} = xq_2 Q_{n-2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_{n-m} P_m + \beta_{n-m} Q_{m+1} = xq_{n-m} Q_m, \end{aligned}$$

добија се Q_m, после чега се са P_m и Q_m ради по претходном. Из низа релација (7) следи да ако P_m и Q_n имају н. з. д. онда га морају садржати сви Q_{n-1}, $Q_{n-2}\ldots$, Q_m.

Примедба II. Уколико се после првог, другог или маког даљег поступка догоди да се добије

$$\alpha P_r + \beta Q_r = p P_{r-\mu}$$
$$\gamma P_r + \delta Q_r = x^{\nu} q Q_{r-\nu}$$

онда се са $P_{r-\mu}$ и $Q_{r-\nu}$ поступа на досад изложени начин.

Примедба III. Ако је за било који индекс

$$\begin{vmatrix} \alpha_m & \beta_m \\ \gamma_m & \delta_m \end{vmatrix} = 0,$$

онда ће наведеним процесом бити елиминисани коефицијенти бар највећег степена и слободни чланови (истовремено). На тај начин ће се снижавање степена извести најмање за 2, после чега се поступа по примедби I.

Примедба IV. Процес је изводљив и са полиномима који имају празнина (нису потпуни). Снижавање степена датих полинома изводи се с десна, односно и с лева и с десна, према томе да ли су они различитог или једнаког степена.

У пракси ово извођење може бити јако упрошћено.

Пример.

$$Q_4 = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3$$
$$P_3 = \quad 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$$
$$x^4 - 9x^2 = x^2(x^2 - 9)$$
$$P_3 = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \mid 3$$
$$Q_2 \qquad\qquad x^2 - 9$$
$$6x^3 - 14x^2 - 12x = 2x\ (3x^2 - 7x - 6)$$
$$P_2 = 3x^2 - 7x - 6$$
$$Q_2 = x^2 - 9 \quad \Big| -3$$
$$-7x + 21 = -7(x - 3)$$
$$7x^2 - 21x = 7x(x - 3).$$

Н. з. с. $= x - 3$.

Овај пример узет је из књиге Высшая Алгебра од Л. Я. Окунев-а, где је за овај рад употребљена читава страна.

На основу познате везе између н.з.д. (d) и најмањег заједничког садржаоца (н.з.с. $= D$), може се на овај начин добивени н.з.д. за два полинома P_n и Q_n искористити и за добијање њиховог н.з.с.

Збиља, тада је $D = P_n \cdot H_s$ или $D = Q_n G_s$, јер је очевидно $P_n = dG_s$, $Q_n = dH_s$, где је $d = P_{n-s} \equiv Q_{n-s}$.

3. Наведимо на крају да се поступак може проширити и на одређивање н. з. д. више полинома. Једноставности ради узмимо три полинома P_n, Q_n и R_n једнаких степена. Тада се могу изабрати константе α_{ij} такве да постоје ове релације

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} P_n + \alpha_{12} Q_n + \alpha_{13} R_n = p_1 P_{n-1} \\ &\alpha_{21} P_n + \alpha_{22} Q_n + \alpha_{23} R_n = q_1 Q_{n-1} \\ &\alpha_{31} P_n + \alpha_{32} Q_n + \alpha_{33} R_n = x \gamma_1 R_{n-1}, \end{aligned} \tag{8}$$

или

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} P_n + \alpha_{12} Q_n + \alpha_{13} R_n = p_1 P_{n-1} \\ &\alpha_{21} P_n + \alpha_{22} Q_n + \alpha_{23} R_n = x q_1 Q_{n-1} \\ &\alpha_{31} P_n + \alpha_{32} Q_n + \alpha_{33} R_n = x \gamma_1 R_{n-1}, \end{aligned} \tag{8a}$$

и да је детерминанта једног или другог система различита од нуле. Исти поступак се примењује и на полиноме P_{n-1}, Q_{n-1} и R_{n-1} док се евентуално не наиђе на случај $P_{n-s} \equiv Q_{n-s} \equiv R_{n-s}$. Уколико ни до краја ($P_1$, Q_1, R_1) не бисмо наишли на једнаке полиноме, значило би да је $d = 1$.

SUR UN PROCÉDÉ DE DÉTERMINER LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE DEUX POLYNÔMES

par D. MARKOVITCH, Beograd

RÉSUMÉ

La détermination de p. g. c. d. de deux polynômes on fait ordinairement à l'aide d'une suite de divisions connue sous le nom d'algorithme d'Euclid. Puisque cette mêthode est dans la plupart des cas assez longue, l'auteur expose un procédé, qui semble, au point de vue pratique, plus commode, et qu'on ne trouve ordinairement dans les Cours d'Algèbre. D'autre part, le procédé peut être très facilement généralisé à trois et en général à k polynômes.

L'idée consiste de former sous les conditions (2) et par les relations (3) deux polynômes P_{n-1} et Q_{n-1}, respectivement P_{n-m} et Q_{n-k}, (relations (5)), tels que le p. g. c. d. pour P_n et Q_n est le même que pour P_{n-1} et Q_{n-1}, respectivement pour P_{n-m} et Q_{n-k}. Si P_{n-1} et Q_{n-1} ne sont pas identiques, on peut continuer le même procédé et obtenir P_{n-2} et Q_{n-2}, et ainsi de suite. Si pour un indice s on arrive que $P_{n-s} \equiv Q_{n-s}$, il est impossible de continuer plus le procédé, et P_{n-s} est le p. g. c. d. Au contraire, s'il est possible de continuer le procédé jusqu'au bout (P_1 et Q_1 aussi différents) le p. g. c. d. est $= 1$.

Le même procédé pour les trois polynômes, P_n, Q_n et R_n, par exemple, consiste à former les trois relations (8) ou (8a), et d'appliquer les raisonnements semblables comme pour P_n et Q_n.

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА ЧВРСТОГ ТЕЛА У ТЕНЗОРСКОМ ОБЛИКУ

РАСТКО СТОЈАНОВИЋ, Београд

У класичној интерпретацији динамике чврстог тела разликујемо две врсте брзина: транслаторну и угловну, сем у Lagrange-овим једначинама, где фигуришу генералисане брзине. Са друге стране, посматрамо ли кретање чврстог тела као кретање једне репрезентативне тачке у Riemann-овом простору V_6, дефинисаном живом силом посматраног чврстог тела, као координате те репрезентативне тачке јављају се координате посматраног чврстог тела, а брзине репрезентативне тачке су изводи по времену тих координата. Да бисмо и у једначинама тензорског облика могли разликовати горе поменуте две врсте брзина, морамо на место општих тензорских једначина за кретање материјалног система увести друге, које би биле такође тензорског карактера и задржавале инваријантан облик при трансформацијама координата, а при томе бисмо могли, према карактеру проблема, да правимо разлику између транслаторних и угловних брзина. Потреба за таквим једначинама се нарочито поставља онда, када покушавамо да на конкретан проблем кретања чврстог тела под дејством нехолономних веза применимо једначине *Vraceanu*-а [1].

Један случај кретања чврстог тела са нехолономним везама решио је, применом *Vraceanu*-ових једначина, *V. Vagner* [4], али је то у довољној мери поједностављен случај, тако да се питање разликовања ове две врсте брзина не поставља.

Док се, колико ми је познато, сви аутори баве питањем тензорских једначина за кретања материјалног система, једино се код *J. L. Synge*-а и *A. Schild*-а [2] налазе изведене тензорске једначине за кретање чврстог тела. Те су једначине изведене за N-димензионални еуклидски простор, у правоуглим координатама и потпуно се разликују, како по начину извођења, тако и по своме коначном облику, од овде изведених једначина.

Исцрпна библиографија о примени тензорског рачуна на механику налази се у [3].

I

Посматрајмо у тродимензионом еуклидском простору E_3 неко чврсто тело. Ако је дат систем ма каквих, међусобно независних, оса x^1, x^2, x^3, непокретних у простору, са почетком у 0 и елементом лука у њима $ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$, положај тела је потпуно одређен познавањем положаја ма које утврђене тачке тела A и релативног положаја оса $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$, чврсто везаних за посматрано тело, са почетком у A и елементом лука $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^j$, према осама x^1, x^2, x^3. Положај ма које тачке M чврстог тела ће бити одређен изразима:

$$x^i_M = x^i_A + A^i_j \bar{x}^j_M, \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

где је x^i_M вектор ноложаја тачке M у систему $0(x)$, $\bar{x}^i_M$ у систему $A(\bar{x})$, а A^i_j је функција променљивих $x^{i'}$, $(i' = 4, 5, 6)$, које одређују положај оса једног система у односу на други и обрнуто.

Изрази инверзни изразима (1) гласе:

$$\bar{x}^i_M = B^i_j (x^i_M - x^j_A), \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2}$$

где је B^i_j елеменат матрице $\{B^i_j\}$, реципропне матрици $\{A^i_j\}$, при чему је очигледно да морају бити задовољени услови:

$$A^i_j B^j_k = \delta^i_k, \quad A^i_j B^k_l = \delta^k_l. \tag{3}$$

Величине A^i_j, односно B^i_j су коефицијенти трансформација и омогућавају прелаз из система $0(x)$ на систем $A(\bar{x})$ и обратно.

Брзина тачке M чврстог тела ће се добити диференцирањем израза (1) и увођењем замене из (2):

$$\dot{x}^i_M = \dot{x}^i_A + \omega^i_k (x^k_M - x^k_A). \tag{4}$$

Величина ω^i_k је „мешовити тензор угловне брзине" са вредношћу:

$$\omega^i_k = \dot{A}^i_j B^j_k, \qquad \left(\dot{A}^i_j = \frac{dA^i_j}{dt}\right). \tag{5}$$

У систему $A(\bar{x})$ за брзину тачке M имамо:

$$\bar{v}^i_M = \bar{v}^i_A + \bar{\omega}^i_k \bar{x}^k_M \tag{6}$$

при чему је $\bar{v}^i_M = B^i_j \dot{x}^j_M$, $\bar{v}^i_A = B^i_j \dot{x}^j_A$, $\bar{\omega}^i_k = A^m_k B^i_e \omega^e_m$.

Тензору угловне брзине ω^i_k, односно $\bar{\omega}^i_k$, можемо асоциирати вектор угловне брзине ω^e (одн. $\bar{\omega}^e$) помоћу израза:

$$\omega^e = \tfrac{1}{2} \varepsilon^{ejk} g_{ij} \omega^i_k, \quad \bar{\omega}^e = \tfrac{1}{2} \bar{\varepsilon}^{ejk} \bar{g}_{ij} \bar{\omega}^i_k, \tag{7}$$

а лако се може показати да је:

$$\bar{\omega}^e = B^e_m \omega^m \tag{8}$$

Сам вектор угловне брзине ω^e, одн. $\bar{\omega}^e$ је, као што је познато, линеарна функција генералисаних брзина $\dot{x}^{i'}$, па можемо писати:

$$\omega^e = \Omega^e/_{i'}\, \dot{x}^{i'}, \qquad \bar{\omega}^e = \bar{\Omega}^e/_{i'}\, \dot{x}^{i'}, \tag{9}$$

а генералисане брзине $\dot{x}^{i'}$ можемо сада изразити инверзним формулама:

$$\begin{cases} \dot{x}^{i'} = \Omega_j/^{i'}\, \omega^j, \\ \dot{x}^{i'} = \bar{\Omega}_j/^{i'}\, \bar{\omega}^j. \end{cases} \tag{9'}$$

II

Полазећи од израза (4) и (6) за брзину тачке чврстог тела, лако можемо написати изразе за живу силу у експлицитном облику. Добићемо два таква израза; један ће се односити на осе непокретне у простору, а други на осе које се крећу заједно са посматраним телом.

Кретање чврстог тела можемо да посматрамо као кретање једне — репрезентативне — тачке у неком Riemann-овом простору V_6, са метриком

$$d\sigma^2 = 2Tdt^2, \tag{10}$$

или, у експлицитном облику:

$$d\sigma^2 = mg_{ij}\, dx^i_A\, dx^j_A + 2m(x^e_c - x^e_A)\varepsilon_{ejk}\, \Omega^j/_{e'}\, dx^k_A\, dx^{e'} + y^{(A)}_{pq}\, \Omega^p/_{i'}\, \Omega^q/_{j'}\, dx^{i'} dx^{j'},$$

у односу на $0(x)$ систем и:

$$d\sigma^2 = mg_{ij}\, dx^i_A\, dx^j_A + 2m\bar{x}^e_c\, \bar{\varepsilon}_{ejk}\, B^j_e\, \bar{\Omega}^k/_{e'}\, dx^e_A\, dx^{e'} + \bar{J}^{(A)}_{pq}\, \bar{\Omega}^p/_{i'}\, \bar{\Omega}^q/_{j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'},$$

у односу на $A(\bar{x})$ систем. Ова метричка форма је одређена, будући да је жива сила $2T$ одређена. Као координате тачке V_6 служе x^i_A и $x^{i'}$, ($i = 1, 2, 3$; $i' = 4, 5, 6$) и потпуно одређују положај тачке.

Кретање тачке у V_6 под дејством спољних сила је одређено једначинама

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = x_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 6). \tag{11}$$

Величине x_α су генералисане силе, одн. координате спољних сила које делују на посматрану тачку и морају да задовољавају услов

$$dA = x_\alpha\, d\, x^\alpha \tag{12}$$

при чему је dA елементарни рад чврстог тела, одн. репрезентативне тачке у V_6.

Опште једначине (11), међутим, не одговарају увек карактеру проблема на који се примењују и стога је потребно да их напишемо у другом облику. За кретање чврстог тела непосредно је, често пута, везано питање угловне брзине и стога потражимо такав облик једна-

чина кретања, који ће садржати као независно променљиву угловну брзину.

Нека су дате неке променљиве q^α помоћу израза:

$$(13)\qquad dx^\alpha = \lambda^{\alpha}_{(\beta)}\, dq^\beta, \quad \lambda^{\alpha}_{(\beta)} = fonct.(x', \cdots, x^6, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, 6)$$

и нека ови изрази нису, у општем случају, интеграбилни. Променљиве q^α су тада квази-координате, а не праве координате. Хоћемо једначине (11) да трансформишемо на квази-координате q^α.

Под претпоставком да је детерминанта $|\lambda|^{\alpha}_{(\beta)}$ различита од нуле, можемо написати трансформације инверзне трансформацијама (13):

$$(14)\qquad dq^\alpha = \lambda^{(\alpha)}_{\beta}\, dx^\beta$$

а $\lambda^{(\alpha)}_{\beta}$ је елемент матрице $\left\{\lambda^{(\alpha)}_{\beta}\right\}$, реципрочне матрици $\left\{\lambda^{\alpha}_{(\beta)}\right\}$; стога је

$$(15)\qquad \lambda^{(\alpha)}_{\beta}\,\lambda^{\beta}_{(\gamma)} = \delta^{\alpha}_{\gamma}, \quad \lambda^{\alpha}_{(\beta)}\,\lambda^{(\beta)}_{\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}, \quad \delta^{\alpha}_{\gamma} = \begin{cases} 1, \alpha = \gamma \\ 0, \alpha \neq \gamma \end{cases}.$$

Тада је увек

$$(16)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^\alpha} = \lambda^{(\beta)}_{\alpha}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^\beta}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^\alpha} = \lambda^{\beta}_{(\alpha)}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^\beta}$$

где је Φ нека инваријанта, а тачка изнад x^α и q^α означава извод по променљивом параметру.

Израз за живу силу, а према томе и за метричку форму, мењаће се сходно трансформацијама (13):

$$(17)\qquad \begin{cases} 2T = a_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = b_{\lambda\mu}\dot{q}^\lambda \dot{q}^\mu \\ b_{\lambda\mu} = a_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}_{(\lambda)}\lambda^{\beta}_{(\mu)} \end{cases}.$$

Стављајући у (11) да је $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\alpha} = \lambda^{\beta}_{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\beta}$, добијамо

$$(18)\qquad \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\beta}\right)\lambda^{(\beta)}_{\alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\beta}\,\frac{D\lambda^{(\beta)}_{\alpha}}{Dt} = x_\alpha.$$

Међутим је

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\beta}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\beta}\right),$$

јер, посматрамо ли са једне стране израз

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\right)=\lambda_{\alpha}^{(\mu)}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\mu}}\right)+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\mu}}\frac{D\lambda_{\alpha}^{(\mu)}}{Dt},$$

а са друге стране развијемо ли извод $\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\right)$ по дефиницији и у тако развијени израз уведемо трансформације (13):

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial t}{\partial \dot{q}^{\mu}}\right)\lambda_{\alpha}^{(\mu)}+\frac{D\lambda_{\alpha}^{(\mu)}}{Dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\mu}},$$

упоређењем видимо да заиста постоји горе наведена једнакост. Сада можемо једначину (18) написати у облику:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\beta}}\right)\lambda_{\alpha}^{(\beta)}+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\beta}}\frac{D\lambda_{\alpha}^{(\beta)}}{Dt}=X_{\alpha}. \tag{19}$$

Пошто величине $\lambda_{\alpha}^{(\beta)}$ зависе од положаја у V_6, то је

$$\frac{D\lambda_{\alpha}^{(\beta)}}{Dt}=\frac{D\lambda_{\alpha}^{(\beta)}}{Dx^{\gamma}}\dot{x}^{\gamma}=\frac{D\lambda_{\alpha}^{(\beta)}}{Dx^{\gamma}}\lambda_{(\delta)}^{\gamma}\dot{q}^{\delta},$$

то једначине (19) изгледају:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\beta}}\right)\lambda_{\alpha}^{(\beta)}+\frac{D\lambda_{\alpha}^{(\beta)}}{Dx^{\gamma}}\lambda_{(\delta)}^{\gamma}\dot{q}^{\delta}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\beta}}=X_{\alpha}.$$

Помножимо ли сада леву и десну страну ове једначине са $\lambda_{(\xi)}^{\alpha}$ и извршимо сабирање по α:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\xi}}\right)+\frac{D\lambda_{\alpha}^{(\beta)}}{Dx^{\gamma}}\lambda_{(\xi)}^{\alpha}\lambda_{(\delta)}^{\gamma}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\beta}}\dot{q}^{\delta}=X_{\alpha}\lambda_{(\xi)}^{\alpha}$$

и ставимо, краћег писања ради,

$$\frac{D\lambda_{\alpha}^{(\beta)}}{Dx^{\gamma}}\lambda_{(\xi)}^{\alpha}\lambda_{\delta}^{\gamma}=\Gamma_{\xi\,\delta}^{\beta},\quad X_{\alpha}\lambda_{(\xi)}^{\alpha}=Q_{\xi}, \tag{20}$$

добијамо коначан облик трансформисаних једначина (11):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right)+\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\beta}}\dot{q}^{\gamma}=Q_{\alpha},\quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots,6). \tag{21}$$

Симболи $\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}$ се, у случају кад величине $\lambda_{(\beta)}^{\alpha}$ образују у V_6 систем ортогоналних јединичних вектора, своде на Ricci-јеве коефицијенте ротације $\gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}$.

Из једначина (21) можемо непосредно прећи на једначине које би би садржале угловне брзине место променљивих x_A^i и $x^{i'}$, што је случај у (11). Нека трансформације (14) буду облика

$$(22)\qquad \begin{cases} dq^i = \delta^i_\alpha\, dx^\alpha\ ; & \left(\begin{matrix}\alpha = 1, 2, \ldots 6\ ;\ i, j = 1, 2, 3\\ i', j' = 4, 5, 6\\ i' - 3 = i\end{matrix}\right)\\ dq^{i'} = \Omega^{i'-3}{}_{/j'}\, dx^{j'}, & \end{cases}$$

и обратно:

$$(23)\qquad \begin{cases} dx^i = \delta^i_\alpha\, dq^\alpha\\ dx^{i'} = \Omega_{j'-3/}{}^{i'}\, dq^{j'}\ . \end{cases}$$

Одмах се види да је dq^i уствари dx_A^i, а $\dot q^{i'} = \omega^i$, па стављајући у (21) да је $\alpha = i$, ове се једначине своде на:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x^i}\right) = X_i\,, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

или

$$(24)\qquad \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_A^i}\right) = X_i.$$

За $\alpha = i'$ једначине (21) постају:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q^{i'}}\right) + \Gamma_{i'\gamma}^{\beta}\,\frac{\partial T}{\partial \dot q^\beta}\,\dot q^\gamma = Q_{i'}\,, \qquad (i' = 4, 5, 6)$$

или

$$(25)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega^{i'-3}}\right) + \Gamma_{i'\gamma}^{\beta}\,\frac{\partial T}{\partial \dot q^\beta}\,\dot q^\gamma = Q_{i'}\ .$$

Једначине (24) и (25) претстављају тражене трансформисане облике једначина (11) за кретање чврстог тела. Величине v_A^i и $\omega^{i'-3}$ се односе на систем оса $0(x)$, непокретних у простору. Да бисмо добили сличне једначине, које се односе на осе чврсто везане за тело, вежимо једначине (11) за метрику која се односи на систем $A(\bar x)$, а коефицијентима трансформације $\lambda_\beta^{(\alpha)}$ дајмо вредности:

$$(26)\qquad \begin{cases} \lambda_j^{(i)} = B_j^i,\ \lambda_{j'}^{(i)} = \lambda_j^{(i')} = 0, & \lambda_{j'}^{(i')} = \overline{\Omega}^{i'-3}{}_{/j'}\ ;\\ \lambda_{(j)}^{i} = A_j^i,\ \lambda_{(j')}^{i} = \lambda_{(j)}^{i'} = 0, & \lambda_{(j')}^{i'} = \overline{\Omega}_{j'-3/}{}^{i'}\ . \end{cases}$$

Поређењем ових трансформација са изразима (6) и (9), видимо да ове заиста уводе величине $\bar v_A^i$ и $\bar\omega^i$, јер је:

$$(27)\qquad dq^i = \bar v_A^i\, dt, \qquad dq^{i'} = \bar\omega^{i'-3}\, dt\ .$$

Ставимо ли сада у (21) да је $\alpha = i$, добијамо:

$$(28)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \bar v_A^i}\right) + \Gamma_{i\gamma}^{\beta}\,\frac{\partial T}{\partial \dot q^\beta}\,\dot q^\gamma = Q_i\,, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

а за $\alpha = i'$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \overline{\omega^{i'-s}}}\right) + \Gamma_{i'\ \gamma}^{\ \beta}\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\beta}}\ \dot{q}^{\gamma}\ Q_{i'} \,. \tag{29}$$

Једначине (28) и (29) претстављају тражене облике једначине (21) и односе се на осе чврсто везане за тело.

Увођењем специјалних услова и давање метричкој форми и коефицијентима трансформације конкретних облика, једначине (24) и (25), односно (28) и (29) могу да се сведу на познате класичне облике диференцијалних једначина за кретање чврстог тела.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Vranceanu*, Les espaces non holonomes, Mem. des Sciences Mathematiques, fasc. LXXVI, 1936, Gaut. Vill., Paris.

[2] *J. L. Synge and Schild*, Tensor Calculus, University of Toronto press, 1949.

[3] *J. L. Synge*, Tensorial methods in dynamics, Applied Mathematics series, № 2, Toronto University.

[4] *В. Вагнер*, Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических, систем, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, Вып. V, 1941, Казан.

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE MOVEMENT OF A RIGID BODY IN TENSORIAL FORM

by RASTKO D. STOJANOVIĆ, Beograd

SUMMARY

It is sometimes necessery, in order to solve a certain problem by means of tensorial methods, to find such equations of the motion of a rigid body, that would hold invariant their form under all coordinate transformations and, in the same time, vould anable us to make distinction between translational and angular velocities.

Defining the metric of a Riemannian space V_6, in which we may consider the motion of a rigid body as the motion of a representative particle, by (10), the author introduces new variables, quasi-coordinates, by transformation-equations (13) and (14).

Introducing now in the general equations of motion of a material system (11) these new variables, we get after some transformations the final equations (21).

Giving to the coefficients of transformation $\lambda_{\beta}^{(\alpha)}$ special values (22), we can get very easily the equations (24) and (25) for motion of the rigid body with respect to the coordinate system fixed in Euclid space. On the other hand, giving to the coefficients of transformation values (26), we get the equations (28) and (29) with respect to the system of coordinates, moving together with the considered body .

In both systems of the equations (24) and (25), or (28) and (29), we make distinction between two kinds of velocities, defined for each of two coordinate systems by (4), (5), (6) and (7).

РЕШЕЊЕ ЈЕДНОГ СКУПОВНОГ СИСТЕМА ОД БЕСКОНАЧНО МНОГО ЈЕДНАЧИНА СА БЕСКОНАЧНО МНОГО НЕПОЗНАТИХ

СИМОН ЋЕТКОВИЋ, Београд

Ако је дат бесконачни скуповни систем једначина:

$$
\begin{aligned}
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(X_{i-1} \cap CA_i) \cup (CX_i \cap A_{i-1}) = A_{i-1}\\
&(X_i \cap CA_{i+1}) \cup (CX_{i+1} \cap A_i) = A_i\\
&(X_{i+1} \cap CA_{i+2}) \cup (CX_{i+2} \cap A_{i+1}) = A_{i+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(X_{-1} \cap CA_0) \cup (CX_0 \cap A_{-1}) = A_{-1}\\
&(X_0 \cap CA_1) \cup (CX_1 \cap A_0) = A_0\\
&(X_1 \cap CA_2) \cup (CX_2 \cap A_1) = A_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
\tag{а}
$$

или друкчије написан:

$$(X_d \cap CA_{d+1}) \cup (CX_{d+1} \cap A_d) = A_d, \tag{б}$$

где d пролази скупом целих бројева, биће показано да:

(в)

Систем (б) има за опште решење:

$$(б_1)\quad X_d = M_d \cup N_d \cup N_{d+1},$$

где су:

$$M_d \varepsilon P(A_d \cup A_{d+1} \setminus A_{d-1}),$$

$$N_d \varepsilon P(A_{d+1} \cap A_{d-1} \setminus A_d \setminus A_{-d2}).$$

За решење овог проблема служићемо се „методом дељења васионе на дисјунктне скупове, елементарне у односу на дати проблем". Основни принцип ове методе је да се подели васиона, ако је то могуће, на

дисјунктне скупове таквих особина да се сви елементи сваког појединог скупа подједнако односе на дати проблем, и да се затим испита како се дати проблем односи појединачно на сваки од тих скупова.

Ако се у неком проблему појављује n познатих скупова $A_1, A_2, \ldots A_n$, и ако је S скуп чији су елементи $A_1, A_2, \ldots A_n$, онда су елементарни скупови у великом броју случајева дати обрасцем:

$$(z) \qquad E_i = (\underset{x}{\cap} X) \cap C(\underset{y}{\cup} Y),$$

где је $x \in M_i$, а $y \in N_i$, и где је $M_i \subseteq S$, $N_i = (CM_i) \cap S$, и где још укључујемо и скуп

$$(z_1) \qquad E = C(\underset{z}{\cup} Z), \quad z \in S.$$

Често се по неколико елементарних скупова добивених по обрасцу (z) и (z_1) односе на исти начин према датом проблему, те према томе и његову унију можемо сматрати као „елементарни" скуп. То је нарочито изражено у овом проблему, што ће се видети из даљег излагања.

1.1. Ради даљег разматрања напишимо систем (a) у облику:

$$\begin{array}{ll}
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(1, \text{i-1}) & (X_{i-1} \setminus A_i) \cup (A_{i-1} \setminus X_i) = A_{-1} \\
(1, \text{i}) & (X_i \setminus A_{i+1}) \cup (A_i \setminus X_{i+1}) = A_i \\
 & (X_{i+1} \setminus A_{i+2}) \cup (A_{i+1} \setminus X_{i+2}) = A_{i+1} \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & (X_{-1} \setminus A_0) \cup (A_{-1} \setminus X_0) = A_{-1} \\
 & (X_0 \setminus A_1) \cup (A_0 \setminus X_1) = A_0 \\
 & (X_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \setminus X_2) = A_1 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

1.2. Уочимо сада следећих пет скупова:

$$\begin{aligned}
P_i &= C(A_i \cup A_{i+1}), \\
Q_i &= A_i \cap A_{i-1}, \\
R_i &= (A_{i+1} \cap A_{i-1} \setminus A_i) \cap A_{i-2}, \\
S_i &= (A_{i+1} \cap A_{i-1} \setminus A_{1i}) \cap CA_{i-2}, \\
T_i &= A_i \cup A_{i+1} \setminus A_{i-1}.
\end{aligned}$$

Како је

$$\begin{aligned}
Q_i &\subseteq A_i \cup A_{i+1}, \quad R_i \subseteq A_i \cup A_{i+1}, \\
S_i &\subseteq A_i \cup A_{i+1}, \quad T_i \subseteq A_i \cup A_{i+1},
\end{aligned}$$

то је

(1. 2. 1) $$P_i \cap Q_i = \nu, \quad P_i \cap R_i = \nu,$$
$$P_i \cap S_i = \nu, \quad P_i \cap T_i = \nu,$$

и како је

$$R_i \cap A_i = \nu, \quad S_i \cap A_i = \nu, \quad T_i \cap A_{i-1} = \nu,$$

то је

(1. 2. 2) $$Q_i \cap R_i = \nu, \quad Q_i \cap S_i = \nu, \quad Q_i \cap T_i = \nu,$$

и како је

$$S_i \cap A_{i-2} = \nu, \quad T_i \cap A_{i-1} = \nu,$$

то је

(1. 2. 3) $$R_i \cap S_i = \nu, \qquad R_i \cap T_i = \nu,$$

и како је

$$S_i \cap A_i = \nu, \qquad T_i \subseteq A_i,$$

то је и

(1. 2. 4) $$S_i \cap T_i = \nu.$$

С друге стране имамо да је

$$R_i \cup S_i = A_{i+1} \cap A_{i-1} \setminus A_i,$$

па је и

$$Q_i \cup (R_i \cup S_i) = (A_i \cap A_{i-1}) \cup (A_{i+1} \cap A_{i-1} \setminus A_i),$$

или

$$Q_i \cup R_i \cup S_i = A_{i-1} \cap (A_i \cup A_{i+1}),$$

а на основу тога

$$(Q_i \cup R_i \cup S_i) \cup T_i = A_i \cup A_{i+1},$$

или коначно

(1. 2. 5) $$P_i \cup Q_i \cup R_i \cup S_i \cup T_i = 1.$$

(1. 2. 6) На основу (1. 2. 1), (1. 2. 2), (1. 2. 3), (1. 2. 4) и (1. 2. 5) закључујемо да смо скуповима P_i, Q_i, R_i, S_i и T_i разделили васиону на пет дисјунктних скупова.

2. Покажимо да је:

(2. 0) $$\begin{aligned} X_d \cap P_d &= \nu, \\ X_d \cap Q_d &= \nu, \\ X_d \cap R_d &= \nu, \\ X_d \cap S_d &\subseteq X_{d-1}. \end{aligned}$$

2.1 Покажимо прво да је

$$X_i \cap P_i = \nu.$$

Претпоставимо ли супротно тј. да је

$$X_i \cap P_i \neq v,$$

односно

$$X_i \cap C\,(A_i \cup A_{i+1}) \neq v,$$

онда би морао постојати бар један елеменат y_1, који би задовољавао следеће услове:

(2. 1. 1)
$$\begin{array}{l} y_1 \in X_i \cap C\,(A_i \cup A_{i+1}), \\ y_1 \in X_i \quad \text{и} \quad y_1 \in C\,(A_i \cup A_{i+1}), \\ y_1 \in CA_i, \quad y_1 \in CA_{i+1}, \\ y_1 \text{ non } \in A_i, \quad y_1 \text{ non } \in A_{i+1}, \\ y_1 \in X_i \setminus A_{i+i}, \\ y_1 \in (X_i \setminus A_{i+1}) \cup (A_i \setminus X_{i+1}), \end{array}$$

а према једначини (1, i) и

$$y_1 \in A_i,$$

а то је супротно једначини (2. 1. 1).

Према томе није

$$X_i \cap P_i \neq v,$$

већ је

(2. 1. 2) $X_i \cap P_i = v$, а то је и требало показати.

2. 2. Покажимо затим да је

$$X_i \cap Q_i = v.$$

Претпоставимо ли супротно, онда би морао постојати бар један елеменат y_2, који би задовољавао следеће услове:

$$\begin{array}{ll} & y_2 \in X_i \cap A_i \cap A_{i-1}, \\ \text{(2. 2. 1)} & y_2 \in X_i, \quad y_2 \in A_i \cap A_{i-1}, \\ \text{(2. 2. 2)} & y_2 \in A_i, \quad y_2 \in A_{i-1}, \\ & y_2 \text{ non } \in A_{i-1} \setminus X_i, \text{ према (2. 2. 1)}, \\ & y_2 \text{ non } \in X_{i-1} \setminus A_i, \text{ према (2. 2. 2)}, \end{array}$$

а одатле следи:

$$y_2 \text{ non } \in (X_{i-1} \setminus A_i) \cup (A_{i-1} \setminus X_i);$$

према једначини (1, $i-1$)

$$y_2 \text{ non } \in A_{i-1},$$

а то је супротно са (2. 2. 2)

Према томе није

$$X_i \cap Q_i \neq v,$$

већ је, као што је и требало показати,

(2. 2. 3)
$$X_i \cap Q_i = v.$$

Аналогно се показује да је

$$X_{i-1} \cap Q_{i-1} = v,$$

односно

(2. 2. 4) $$X_{i-1} \cap (A_{i-1} \cup A_{i-2}) = v.$$

2. 3. Показаћемо сада да је и

$$X_i \cap R_i = v.$$

Претпоставимо ли да је

$$X_i \cap R_i \neq v,$$

односно

$$X_i \cap (A_{i+1} \cap A_{i-1} \setminus A_i) \cap A_{i-2} \neq v,$$

или

$$X_i \cap (A_{i+1} \cap A_{i-1} \cap A_{i-2} \setminus A_i) \neq v,$$

онда мора постојати бар један елеменат y_3, који задовољава следеће услове:

(2. 3. 1) $$y_3 \varepsilon X_i,$$

$$y_3 \varepsilon A_{i+1} \cap A_{i-1} \cap A_{i-2} \setminus A_i,$$

(2. 3. 2) $$y_3 \varepsilon A_{i+1} \cap A_{i-1} \cap A_{i-2},$$

(2. 3. 3) $$y_3 \text{ non } \varepsilon A_i,$$

(2. 3. 4) $$y_3 \varepsilon A_{i-1},$$

(2. 3. 5) $$y_3 \text{ non } \varepsilon A_{i-1} \setminus X_i.$$

Како је према (2. 2. 4)

$$X_{i-1} \cap (A_{i-1} \cup A_{i-2}) = v,$$

а тим пре и

(2. 3. 6) $$X_{i-1} \cap (A_{i+1} \cap A_{i-1} \cap A_{i-2}) = v,$$

па је на основу (2. 3. 2) и (2. 3. 6)

$$y_3 \text{ non } \varepsilon X_{i-1},$$

а тим пре и

(2. 3. 7) $$y_3 \text{ non } \varepsilon (X_{i-1} \setminus A_i).$$

На основу (2. 3. 5) и (2. 3. 7)

$$y_3 \text{ non } \varepsilon (X_{i-1} \setminus A_i) \cup (A_{i-1} \setminus X_i),$$

или према једначини (1', *i*-1)

(2. 3. 8.) $$y_3 \text{ non } \varepsilon A_{i-1}.$$

Како је (2. 3. 8.) у супротности са (2. 3. 4.) то горња претпоставка није тачна, већ је

(2. 3. 9.) $$X_i \cap R_i = v.$$

2. 4. Покажимо да је и

$$(X_i \cap S_i) \subseteq X_{i-1}.$$

Да бисмо показали да је ово тачно, претпоставићемо супротно, тј. да је

$$X_i \cap [(A_{i+1} \cap A_{i-1} \setminus A_i) \cap CA_{i-2}] \text{ non} \subseteq X_{i-1}.$$

Тада би морао постојати бар један елеменат y_4, који би задовољавао следеће услове:

$$y_4 \varepsilon X_i \cap (A_{i+1} \cap A_{i-1} \cap CA_{i-2} \setminus A_i),$$

$$y_4 \text{ non } \varepsilon X_{i-1},$$

(2. 4. 1.) $$y_4 \text{ non } \varepsilon X_{i-1} \setminus A_i,$$

$$y_4 \varepsilon X_i,$$

$$y_4 \varepsilon A_{i+1} \cap A_{i-1} \cap CA_{i-2} \setminus A_i,$$

(2. 4. 2.) $$y_4 \varepsilon A_{i-1},$$

(2. 4. 3.) $$y_4 \text{ non } \varepsilon A_{i-1} \setminus X_i,$$

или на основу (2. 4. 1.) и (2. 4. 3.)

$$y_4 \text{ non } \varepsilon (X_{i-1} \setminus A_i) \cup (A_{i-1} \setminus X_i),$$

или на основу једначине (1. i-1)

(2. 4. 4.) $$y_4 \text{ non } \varepsilon A_{i-1}.$$

Како је (2. 4. 4.) у супротности са (2. 4. 2.), то ова претпоставка није тачна, већ је заиста

(2. 4. 5.) $$X_i \cap S_i \subseteq X_{i-1}.$$

Како је „i" један ма који цели индекс, то на основу (2. 1), (2. 2), (2. 3.) и (2. 4.) закључујемо да је тврђење (2. 0) заиста тачно.

3. Из (2. 1. 2.), (2. 2. 3.), (2. 3. 9.) и (1. 2. б,) следује да је

$$X_i \subseteq S_i \cup T_i,$$

према томе сва решења система (*б*) налазе се међу решењима:

(3. 1.) $$X_d = M_d \cup N_d,$$

где је $$M_d \varepsilon P(T_d),$$

$$N_d \varepsilon P(S_d).$$

Како је према (2. 4. 5.)

$$X_{i-1} \supseteq X_i \cup S_i, \text{ то је и}$$

$$X_d \supseteq X_{d+1} \cap S_{d+1},$$

или

$$X_d \supseteq (M_{d+1} \cup N_{d+1}) \cap S_{d+1} = N_{d+1},$$

тј.

$$X_d \supseteq N_{d+1}.$$

Према томе решења система (*б*) налазе се и међу решењима:

(3. 2.) $$X_d = M_d \cup N_d \cup N_{d+1}.$$

Да бисмо показали да је тврђење (*б*) тачно довољно је још показати да сва решења из (3. 2.) задовољавају систем (*б*). Да то покажемо поћи ћемо од делова система (*б*), заменити непознате према обрасцу ($б_1$) и доказати да је систем задовољен.

Како је

$$M_d \subseteq A_d \cup N_{d+1} \setminus A_{d-1},$$

тим пре је и

(3. 3) $$M_d \subseteq A_d \cup A_{d+1}.$$

Како је

$$N_d \subseteq A_{d+1} \cap A_{d-1} \setminus A_d \setminus A_{-2} \subseteq A_{d+1},$$

тим пре је и

(3. 4) $$N_d \subseteq A_d \cup A_{d+1}.$$

Како је

$$N_{d+1} \subseteq A_{d+2} \cap A_d \setminus A_{d+1} \setminus A_{d-1} \subseteq A_d,$$

тим пре је и

(3. 5) $$N_{d+1} \subseteq A_d \cup A_{d+1}.$$

Према (3. 3), (3. 4) и 3. 5) је

$$M_d \cup N_d \cup N_{d+1} \subseteq A_d \cup A_{d+1},$$

а на основу тога

(3. 6) $$M_d \cup N_d \cup N_{d+1}) \cup CA_{d+1} \subseteq A_d.$$

Како је

$$A_d \subseteq A_d,$$

тим пре је

(3. 7) $$C(M_{d+1} \cup N_{d+1} \cup N_{d+2}) \cap A_d \subseteq A_d.$$

На основу (3. 6) и (3. 7) закључујемо:

(3. 8) $$((M_d \cup N_d \cup N_{d+1}) \cap CA_{d+1}) \cup (C(M_{d+1} \cup N_{d+1} \cup N_{d+2}) \cap A_d) \subseteq A_d.$$

Како је

$$N_{d+1} \subseteq A_{d+2} \cap A_d \setminus A_{d+1} \setminus A_{d-1},$$

то је

$$N_{d+1} \cap A_{d+1} = v,$$

а на основу тога

(3. 9) $$M_d \cup N_d \cup N_{d+1}) \cap CA_{d+1} \subseteq N_{d+1}.$$

Како је

$$M_{d+1} \subseteq A_{d+1} \cup A_{d+2} \setminus A_d,$$

$$N_{d+2} \subseteq A_{d+3} \cap A_{d+1} \setminus A_{d+2} \setminus A_d,$$

то је

$$M_{d+1} \cap A_d = v,$$

$$N_{d+2} \cap A_d = v,$$

па је и

$$(M_{d+1} \cup N_{d+2}) \cap A_d = \nu,$$

а па основу тога

(3. 10) $$C(M_{d+1} \cup N_{d+1} \cup N_{d+2}) \cap A_d = (CN_{d+1}) \cap A_d = A_d \setminus N_{d+1}.$$

На основу (3 9) и (3. 10) имамо:

(3.11) $$((M_d \cup N_d \cup N_{d+1}) \cap CA_{d+1}) \cup (C(M_{d+1} \cup N_{d+1} \cup N_{d+2}) \cap A_d) \subseteq A_d.$$

На основу (3. 8) и (3.11) закључујемо да је

(3. 12) $$((M_d \cup N_d \cup N_{d+1}) \cap CA_{d+1}) \cup (C(M_{d+1} \cup N_{d+1} \cup N_{d+2}) \cap A_d = A_d.$$

Из (3. 12) и (3. 2) закључујемо да је заиста тврђење (в) тачно.

4. Ако је у систему (*a*) $A_{d+n} = A_d$, где је n један произвољан природан број, тада је на основу (b_1) исто решење за X_{d+n} као и за X_d. Према томе, ако у систему (*a*) узмемо да је $A_{d+n} = A_d$ и $X_{d+n} = X_d$, тј. узмемо коначни систем од n једначина са n непознатих, он ће такође имати решење по обрасцу (b_1).

4. Ако узмемо да је $n = 1$ добићемо познату једначину Поредског:

$$(X \cap CA) \cup (CX \cap A) = A,$$

која је специјалан случај разматрања под 4, па према томе има за опште решење

$$X = M \cup N \cup N = \nu,$$

јер је

$$M \varepsilon P(A \cup A \setminus A) = P(\nu) \quad \text{или } M = \nu,$$
$$N \varepsilon P(A \cap A \setminus A \setminus A) = P(\nu), \quad \text{или } N = \nu.$$

4. 2. Ако је $n = 2$ имамо систем:

$$(X_1 \cap CA_2) \cup (CX_2 \cap A_1) = A_1$$
$$(X_2 \cap CA_1) \cup (CX_1 \cap A_2) = A_2,$$

који ће на основу (b_1) и 4. имати за опште решење

$$X_1 = M_1 \cup N_1 \cup N_2 = M_1 \cup N,$$
$$X_2 = M_2 \cup N_2 \cup N_1 = M_2 \cup N,$$

где су:

$$M_1 \varepsilon P(A_1 \setminus A_2),$$
$$M_2 \varepsilon P(A_2 \setminus A_1),$$
$$N \varepsilon P((A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2)),$$

јер је

$$M_1 \varepsilon P(A_1 \cup A_1 \setminus A_2) = P(A_1 \setminus A_2),$$
$$M_2 \varepsilon P(A_2 \cup A_1 \setminus A_1) = P(A_2 \setminus A_1),$$
$$N_1 \varepsilon P(A_2 \cap A_2 \setminus A_1 \setminus A_1) = P(A_2 \setminus A_1),$$
$$N_2 \varepsilon P(A_1 \cap A_1 \setminus A_2 \setminus A_2) = P(A_1 \setminus A_2),$$
$$N_1 \cup N_2 \varepsilon P((A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2)).$$

Напомена: Иницијативу за постављање овог проблема дали су Др Ђуро Курепа и Часлав Станојевић.

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME INFINI DES ÉQUATIONS D'ENSEMBLE

par SIMON ĆETKOVIĆ, Beograd

RÉSUMÉ

Dans cet article l'auteur démontre que le système:

$$(X_d \cap CA_{d+1}) \cup (CX_{d+1} \cap A_d) = A_d$$

où d prend les valeurs d'une suite des nombres entiers, a pour la résolution

$$X_d = M_d \cup N_d \cup N_{d+1},$$

où

$$M_d \varepsilon P\,(A_d \cup A_{d+1} \setminus A_{d-1}),$$
$$N_d \varepsilon P\,(A_{d+1} \cap A_{d-1} \setminus A_d \setminus A_{d-2}).$$

Pour résoudre ce problème l'auteur s'est servi de la méthode de division de l'univers en „ensembles disjoints élémentaires", c'est-à-dire en ensembles dont tous les éléments se comportent de la même manière envers un problème donné.

ГЕОМЕТРИСКА ТЕОРИЈА РЕДОВА М. МИЛАНКОВИЋА И НАСТАВА РЕДОВА. [1])

КОНСТАНТИН ОРЛОВ, Београд

Геометриска интерпретација толико се уврежила у поједине делове Математичке анализе да бисмо данас тешко могли и замислити наставу тих одељака без овог моћног средства. Али тако не стоји ствар са свим одељцима. Теорија редова је у свим уџбеницима остала без геометриске интерпретације, што свакако отежава изучавање овог значајног дела Математичке анализе. Неколико слика у целој овој теорији односе се махом на редове са наизменичним члановима, на интегрални Cauchy-ев критериум и на Fourier-ове редове, а то је наравно мало. Међутим постоји, већ скоро пола века, геометриска интерпретација редова, која није нажалост ни потпуна ни савршена, али је једноставна и убедљива. Циљ овог рада је да покаже потребу увођења у наставу ове интерпретације и да истакне предности, које из тога произилазе.

1. Изнећемо најпре историјат и теорију ове интерпретације.

М. Миланковић дао је 1909 године [1] графички начин налажења збира бескрајне геометриске прогресије и тиме је уствари основао геометриску теорију редова. Његов начин интерпретације збира бескрајне геометриске прогресије и њених чланова ушао је у наше и стране средњошколске уџбенике.

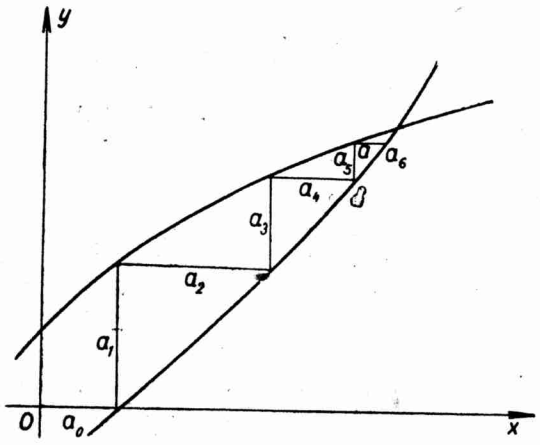
М. Берић је 1921 године [2] проширио ову теорију на редове са позитивним или наизменичним члановима, али за следећих 30 година није више штампан ниједан чланак о овој теорији, нити је она ушла у уџбенике.

Основна идеја ове интерпретације је да сваком реду $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ одговарају две криве, које се зову карактеристичним линијама, како је то претстављено на сл. 1. Ми смо допунили ову интерпретацију [3] на следећи начин, ограничивши се на редове са позитивним члановима. Ми смо пошли обрнутим редом, наиме од карактеристичних линија

[1]) Саопштено на састанку Друштва математичара и физичара, 22-V-1951 г.

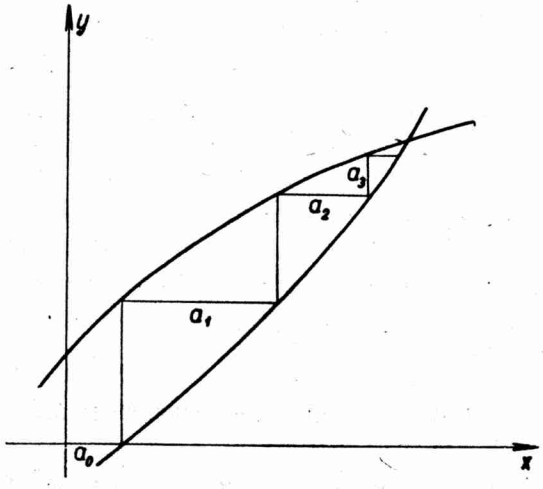
којима одговара ред и предложили смо да карактеристичне линије морају, да би одредиле ред, задовољавати следеће услове:

1) То су једнозачне непрекидне монотоно растуће функције, дефинисане за сваку позитивну вредност x; 2) горња карактеристична линија сече позитивни део Y-осе, а доња карактеристична линија сече позитивни део X-осе; 3) карактеристичне линије могу имати само дискретне заједничке тачке. Кад карактеристичне линије испуњавају ове услове то се чланови реда одређују помоћу изломљене линије $OABCDE\ldots$ и то тако да сваки отсечак паралелан са X-осом одређује по један члан реда, $\overline{OA} = a_0$, $\overline{BC} = a_1$, $\overline{DE} = a_2$ итд. као што се види на слици 2.



Сл. 1

Били смо приморани да уведемо ову незнатну промену, јер она допушта да добијемо доста једноставне формуле за чланове реда, што ће се видети доцније. Најважнији закључци код ове геометриске интерпретације су следећи. Ред је конвергентан ако карактеристичне линије имају бар једну заједничку тачку у првом квадранту, иначе је дивергентан. Збир конвергентног реда једнак је апсциси оне заједничке тачке M, у првом квадранту, која има најмању аппсцису а зове се тачка конвергенције. Две карактеристичне линије једнозначно одређују ред, док обратно не важи. Ми смо предложили за ознаку оваког реда, дефинисаног доњом карактеристичном линијом $\Phi_1(x,y) = 0$ и горњом карактеристичном линвјом $\Phi_2(xy) = 0$ следећи симбол



Сл. 2

$$\sum_{\substack{\Phi_1(x,y)=0 \\ \Phi_2(x,y)=0}} \overrightarrow{(0,0)}\,, \tag{1}$$

јер уопште није било симбола који одређује ред помоћу његових карактеристичних линија. Симбол $\overrightarrow{(0,0)}$ показује да изломљена линија $OABCDE\ldots$ (сл. 2), која даје чланове реда почиње у тачци $(0,0)$ и састоји се од отсечака $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ итд. који иду с лева на десно и одоздо нагоре.[1])

Ако се не уведу различити начини образовања редова помоћу изломљене линије, већ само један, то можемо користити и краћу ознаку за ред (1)

$$\sum_{\substack{\Phi_1(x,y)=0 \\ \Phi_2(x,y)=0}} \,. \tag{2}$$

У истом раду смо извели закључак да је најједноставнији случај одређивања реда помоћу карактеристичних линија тај кад је једначина доње карактеристичне линије решена по x, а једначина горње карактеристичне линије решена по y. У том случају рекли смо да је ред у нормалном облику

$$\sum_{x=\psi(y)}^{y=\varphi(x)} \,. \tag{3}$$

Још смо видели да су чланови реда (3) дати рекурентном формулом

$$S_n = \psi[\varphi(S_{n-1})] \tag{4}$$

где су S_n, односно S_{n-1} збирови од n односно $n-1$ првих чланова реда, док је

$$a_0 = \varphi(0) \tag{5}$$

2. Сматрам да ће ова геометриска интерпретација кад се уведе у наставу, упркос своје непотпуности, олакшати схватање редова, нарочито у почетку проучавања. Да бих то показао ограничићу се овом приликом само на два случаја.

---

[1]) У споменутом раду [3] изнели смо 6 различитих начина да се нацрта изломљена линија, означивши одговарајуће редове помоћу симбола

$$\sum_{\substack{\Phi_1(x,y)=0 \\ \Phi_2(x,y)=0}} \overrightarrow{(0,0)}\,, \quad \sum_{\substack{\Phi_1(x,y)=0 \\ \Phi_2(x,y)=0}} \uparrow(0,0)\,, \quad \sum_{\substack{\Phi_1(x,y)=0 \\ \Phi_2(x,y)=0}} \overrightarrow{(a,b)}\,, \quad \sum_{\substack{\Phi_1(x,y)=0 \\ \Phi_2(x,y)=0}} \uparrow(a,b)\,, \quad \sum_{\substack{\Phi_1(x,y)=0 \\ \Phi_2(x,y)=0}} \overleftarrow{(a,b)}\,, \quad \sum_{\substack{\Phi_1(x,y)=0 \\ \Phi_2(x,y)=0}} \downarrow(a,b)\,.$$

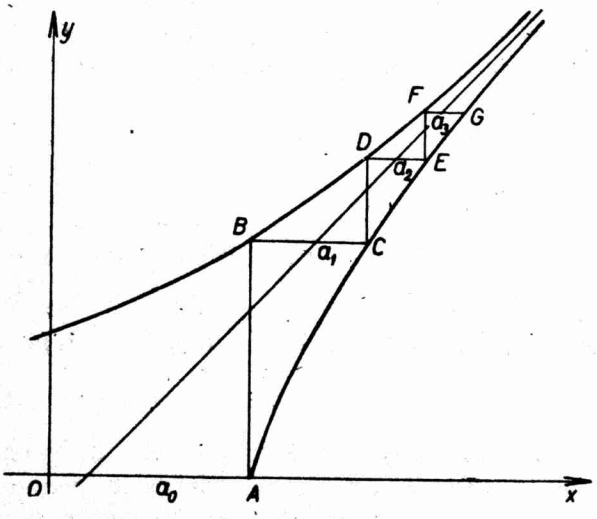
Од свих тих начина повлачења изломљене линије, који су сви корисни с научног гледишта, можемо у настави задржати само први начин о коме смо и говорили.

Познато је да услов

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \tag{6}$$

потребан за конвергенцију реда, али није довољан, што значи да поред конвергентних има и дивергентних редова који га испуњавају. Да би се то доказало наводи се, обично, један дивергентан ред који испуњава горњи услов. Да ли је тиме чињеница потпуно разјашњена? Ми смо стално наилазили код студената на живу жељу да детаљније сазнају о дивергентним редовима који испуњавају горњи услов и та жеља, нажалост, остала је неиспуњена. А какву незгоду претставља непотпуно рашчишћени појам, нарочито у самом почетку нове партије, није потребно истицати. Међутим, геометриска теорија редова даје нам могућност да одмах докажемо следећу једноставну теорему.

Теорема I. *Да би ред био дивергентан а испуњавао услов* $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, *довољно је да његове карактеристичне линије немају у првом квадранту заједничких тачака а имају заједничку косу асимптоту.*



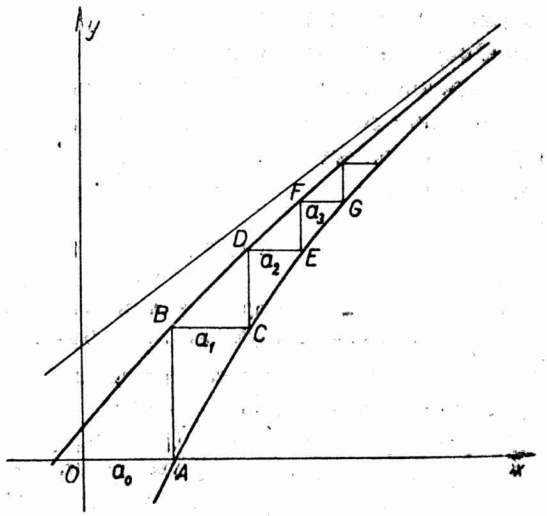
Сл. 3

Доказ ове теореме је врло једноставан (сл. 3, 4, 5).

Ова теорема задовољиће у пуној мери научну радозналост студената, сводећи разлику између конвергентних и дивергентних редова који испуњавају услов (б) на већ добро познату разлику између пресека (или додира) кривих с једне стране и асимптотског приближавања с друге стране. Она такође пружа могућност да се образује, полазећи од карактеристичних линија $x = \psi(y)$, $y = \varphi(x)$ које испуњавају услове теореме I, колико год хоћемо дивергентних редова који задовољавају услов (б).

Друго питање које ћу додирнути је питање збира реда чији су сви чланови рационални. Јасно је да збир таквог реда не мора бити рационалан. Али кад то постаје јасно студентима? Чини нам се, да се то дешава кад се добро одмакне у теорији редова, јер у почетку о томе се уопште не говори. А дотле су студенти изложени опасности

да праве на основу аналогије погрешне закључке. Зацело збир коначног броја рационалних сабирака је и сам рационалан. Једини редови који су из раније познати — бескрајне геометриске прогресије имају исте особине. Морамо признати да ту има доста материјала да се учини погрешан закључак. Међутим јасно је да треба што пре уништити ову могућу заблуду. Учинићемо цело то питање јаснијим и то у самом почетку наставе редова доказивањем следеће теореме.

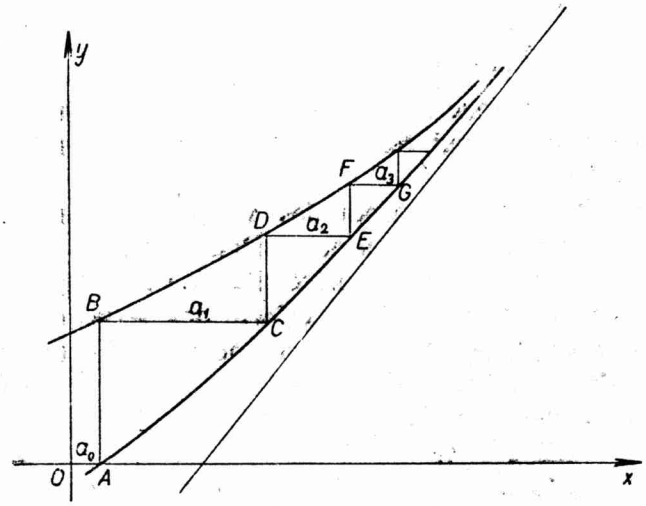


Сл. 4

Т е о р е м а II. *Конвергентан ред*

$$\sum_{x=\psi(y)}^{y=\varphi(x)}$$

где су φ *и* ψ *рационалне функције са рационалним коефицијентима, има све чланове рационалне, а збир му је алгебарски број.*



Сл.. 5

Први део ове теореме доказује се помоћу образаца (4) и (5) а други следује из чињенице да решење једначина

$$y=\varphi(x), \quad x=\psi(y)$$

где су φ и ψ рационалне функције са рационалним коефицијентима, мора бити алгебарски број, а не мора бити рационалан.

Додуше, том теоремом проблем није решен у потпуности, јер није показано да збир реда са рационалним члановима може бити и трансцендентан број, али то није главно у оном тренутку. Главно је разбити могућу заблуду да тај збир мора

бити рационалан број и показати на ригорозан начин разлику између коначних збирова и бесконачних редова. Тиме се у почетку пресецају све аналогије које су студенти склони да праве између ових тако различитих математичких израза.

Овај чланак с једне стране не претендује на потпуност у изношењу предности увођења геометриске теорије редова у наставу, а с друге стране оставља потпуно по страни предности које пружа ова теорија у научном истраживању.

БИБЛИОГРАФИЈА [1])

[1.] *M. Milankovitch*, Bine graphische Darstellung der geometrischen Progressionen. (Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht. XL Heft 6/7 S. 22. 1909).

[2.] *М. Берић*. Размишљања о конвергенцији и дивергенцији редова. (Глас Срп. Акад. Наука XCIII, први разред, 39. с. 104).

[3.] *К. Орлов*. Геометриска теорија редова М. Миланковића. Еквивалентни редови. (Зборник радова Срп. Акад. Наука) (у штампи).

L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES SÉRIES DE M. MILANKOVITCH ET L'ENSEIGNEMENT DE LA THÉORIE DES SÉRIES.

par C. ORLOFF, Beograd

RÉSUMÉ

La théorie des séries est presque sans l'interprétation géométrique dans tous les traités d'Analyse, ce qui rend l'étude de cette partie importante beaucoup plus diffcile.

Cependant, une interprétation géométrique des séries, fondé par M. Milankovitch [1] existe déjà presque depuis un demi-siècle. (Fig. 2).

Le but de cet article est de démontrer la nécessité de l'introduction de cette interprétation dans l'enseignement de la théorie des séries et de souligner les avantages qui en résultent. Pour cela on pourrait donner plusieurs exemples, mais je me bornerai à deux cas.

Il est bien connu que la condition

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \qquad (6)$$

[1]) У времену саопштења и штампања овог чланка изашао је из штампе чланак Ј. Карамате: „О геометриској интерпретацији конвергенције редова М. Миланковића". (Зборник радова Срп. Ак. Наука књ. VII. 1951.), у чијем првом делу износи се до сад необјављени рад М. Миланковића, а у другом размишљања Ј. Карамате о брзини конвергенције редова.

n'est qu'une condition nécessaire pour la convergence de la serie. Pour le prouver, on démontre une série divergente satisfaisant cette condition. Le fait est-il de telle manière complètement éclairci? Nous avons constamment rencontré chez les étudiants un vif désir de connaître les détails sur ces séries divergentes, satisfaisant cette condition, et ce désir reste, malheureusement, insatisfait.

Cependant l'interprétation géométrique nous donne la possibilité de poser le simple théorème suivant.

Théorème I. *Pour qu'une série à termes positifs soit divergente, en satisfaisant la condition* $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, *il suffit que ses lignes caractéristiques n'aient aucun point commun au premier quadrant et qu'elles aient une asymptote renfermant un angle aigu avec l'axe des x.*

La démonstration de ce théorème est très simple (Fig. 3, 4, 5).

Ce théorème ramene la différence entre les séries convergentes et les séries divergentes satisfaisant la condition (6) a la différence déjà bien connue entre l'intersection (ou le contact) des courbes d'un côté et le rapprochement asymptotique de l'autre. D'autre part, en partant des lignes caractéristiques $x = \psi(y)$, $y = \varphi(x)$, satisfaisant les conditions du théorème I, on peut former les séries divergentes satisfaisant la condition (6) tant qu'on le veut.

La seconde question que nous allons aborder est celle de la somme de la série à termes rationels. Il est bien connu que la somme d'une telle série ne doit pas être rationnelle. Mais quand devient cela évident aux étudiants? Il nous semble que cela n'arrive que quand on a poussé assez loin en théorie des séries, car au commencement on n'en parle guêre. Et jusqu'a ce temps les etudiants peuvent faire des analogies bien dangereuses. Vraiment, la somme au nombre fini de termes rationnels est rationnelle elle même. Les seules séries déjà connues - les progressions géométriques infinies ont les mêmes propriétés. Nous devons avouer qu'il y a ici assez de fait pour faire une fausse conclusion.

Nous allons rendre ce problème beaucoup plus clair et cela au commencement même de l'enseignement de la théorie des sêries, en posant le théorème suivant.

Théorème II. *La serie convergente*

$$\sum_{x = \psi(y)}^{x = \varphi(x)}$$

où φ *et* ψ *sont des fonctions rationnelles aux coefficients rationnels, a tous ses termes rationnels et la somme est un nombre algébrique.*

La démonstration de ce théorème est très simple.

Il est vrai que le problème de la somme de la série à termes rationnels n'est pas, complètement résolu par ce théorème, car il existe de telles séries ayant comme somme un nombre transcendant, mais ce n'est pas le principal en ce moment-là. Le principal est de detruire l'erreur possible que la somme d'une telle série doit être rationnelle et de souligner d'une manière rigoureuse la différence entre les sommes finies et les séries. De telle manière sont coupées, encore au commencement toutes les analogies que les étudiants ont l'inclination de faire entre ces deux êtres mathématiques bien différents.

Cet article ne prétend pas d'une part d'être complet et d'épuiser touts les avantages de l'introduction de cette interprétation géométrique dans l'enseignement de la théorie des séries et laisse de côté, d'autre part, les avantages de cette théorie géométrique dans les recherches scientifiques.

ИНВЕРЗИЈА У ПРОСТОРУ ИЗВЕДЕНА ВЕКТОРСКИМ РАЧУНОМ

БОРИВОЈ МИХАЈЛОВИЋ, Панчево

Намера ми је да у овом кратком излагању покажем подесност примене вектора на извесно пресликавање еуклидске равни на себе саму, тачније на извођење ставова који данас имају широку примену у елементарној геометрији, техници, картографији и у осталим областима теориске и примењене математике. Ово пресликавање познато је под именом инверзија.

Према дефиницији инверзијом свака тачка P прелази у тачку P_1 која лежи на правој OP, тако да је

$$OP \cdot OP_1 = \pm d^2$$

Предзнак $+$ ставља се када тачке P и P_1 леже са исте стране тачке 0. То је случај хиперболичне инверзије. У противном случају говоримо о елиптичној инверзији и стављамо предзнак $-$. Образац за инверзију векторски се може да напише као скаларни производ

$$(\vec{r} \cdot \vec{r_1}) = \pm d^2$$

када се стави да је $\vec{r_1} = \frac{\vec{r}}{r} r_1$.

Из ове дефиниције следи:

1) спољашња област у односу на лопту инверзије (инвертор) инверзијом прелази у унутрашњу као и обратно;

2) свака тачка инвертора инверзијом прелази у себе саму;

3) инверзија је инволуторна операција и свака тачка враћа се на своје место када се ова операција два пута узастопно примени.

Докаћемо следеће ставове:

I — Раван кроз 0 инверзијом прелази у себе саму.

Пр. $\vec{a_0}$ орт нормале за дату раван

$\therefore (\vec{r} \cdot \vec{a_0}) = 0$

раван која пролази кроз тачку 0.[1]

[1] Пр. претпоставка; $\because$ јер је, како је; $\therefore$ следи да је, биће.

Пр. $d = 1$

$$\therefore \vec{r} = \frac{\vec{r_1}}{r_1^2}$$

$$\therefore \left(\frac{\vec{r_1}}{r_1^2} \vec{a_0}\right) = 0$$

$$\therefore (\vec{r_1} \cdot \vec{a_0}) = 0$$

Иако је дата раван инверзијом прешла у себе саму није и свака њена тачка, већ само оне за које је $r = 1$.

II — Раван која иде кроз 0 инверзијом прелази у лопту кров 0.

Пр. n дужина нормале за дату раван

$$\therefore (\vec{r} \cdot \vec{a_0}) = n$$

раван која не пролази кроз тачку 0.

$$\therefore \left(\frac{\vec{r_1}}{r_1^2} \cdot \vec{a_0}\right) = n$$

$$\therefore \left(\vec{r_1}\right)^2 - \left(\vec{r_1} \cdot \frac{\vec{a_0}}{n}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\vec{d_0}}{n} = 2\vec{a}$$

$$\therefore (\vec{r_1} - \vec{a})^2 = a^2$$

а то је једначина лопте кроз тачку 0. Средиште и полупречник ове лопте одређени су вектором $\vec{a}$.

III — Лопта кроз 0 инверзијом прелази у раван која не иде кров 0.

$$\therefore (\vec{r} - \vec{a})^2 = a^2$$

$$\therefore \left(\frac{\vec{r_1}}{r_1^2} - \vec{a}\right)^2 = a^2$$

$$\therefore 1 - 2\,(\vec{r_1} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$\therefore (\vec{r_1} \cdot \vec{a_0}) = \frac{1}{2a}.$$

Ова једначина одређује раван која не иде кроз 0. Када $a \to 0$

$$\therefore \lim n = \lim \frac{1}{2a} \to \infty$$

те се може рећи да је тачка 0 слика бескрајно удаљене равни.

IV — Лопта која не иде кроз 0 инверзијом прелази у лопту.

$$\cdot\cdot\cdot\ (\vec{r}-\vec{a})^2 = R^2$$

$$\therefore\ \left(\frac{\vec{r_1}}{r_1^2}-\vec{a}\right)^2 = R^2$$

$$\therefore\ r_1^2\ (a^2-R^2) - 2(\vec{r_1}\cdot\vec{a}) = -1$$

$$\therefore\ (\vec{r_1})^2 - 2\left(\vec{r_1}\cdot\frac{\vec{a}}{a^2-R^2}\right) = -\frac{1}{a^2-R^2}$$

$$\cdot\cdot\cdot\ \vec{a_1} = \frac{\vec{a}}{a^2-R^2};\quad R_1^2 = (\vec{a_1})^2 - \frac{1}{a^2-R^2} = \left(\frac{R}{a^2-R^2}\right)^2$$

$$\therefore\ (\vec{r_1}-\vec{a_1})^2 = R_1^2.$$

Упоређујући дату лопту са добијеном, видимо да њихова средишта леже на заједничкој полуправој која полази из тачке 0 и да средиште дате лопте инверзијом не прелази у средиште лопте добијене инверзијом $\left(\frac{\vec{a}}{a^2}\right)$.

Нека $a \to R$

$$\therefore\ \lim\ (a^2-R^2) = 0$$

$$\cdot\cdot\cdot\ r_1^2\ (a^2-R^2) - 2(\vec{r_1}\cdot\vec{a}) = -1$$

$$\cdot\cdot\cdot\ \lim\ (a^2-R^2) = 0$$

$$\therefore\ 2(\vec{r_1}\cdot\vec{a}) = 1$$

а то је раван, што следи и из става III.

За остале ставове није ни потребан посебан доказ. Они следе као последице из I–IV. То би били следећи ставови:

V — Права у простору или равни кроз 0 инверзијом прелази у себе саму.

Довољно је да ту праву замислимо као пресек две равни кроз 0.

VI — Права у простору или равни која не иде кроз 0 инверзијом прелази у круг кроз 0, који лежи у истој равни са датом правом.

Дату праву замислимо као пресек једне равни кроз 0 и једне која не иде кроз 0.

VII — Круг кроз 0 инверзијом прелази у праву која лежи у истој равни са датим кругом и не иде кроз 0.

Круг кроз 0 замислићемо као пресек равни и лопте кроз 0.

VIII — Круг у равни кроз 0 који не иде кроз 0 инверзијом прелази у круг.

Овакав круг треба замислити као пресек равни кроз 0 и лопте која не иде кроз 0.

IX — Круг у простору који не лежи у равни кроз 0 инверзијом прелази у круг.

Довољно је посматрати пресек равни која не иде кроз 0 и лопте кроз 0.

X — Инверзијом се углови под којим се секу две површине или линије верно пресликавају.

Овде треба да посматрамо угао који заклапају тангенцијалне равни, односно тангенте у тачки пресека.

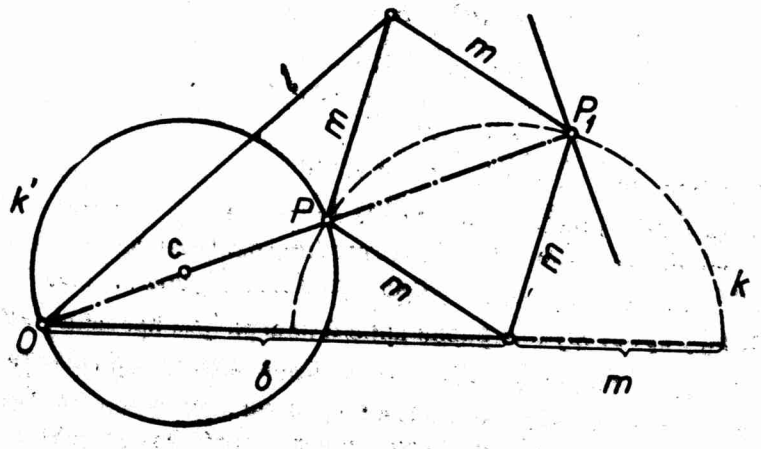
Од какве су користи за елементарну геометрију ови ставови можемо делимично да закључимо из следећих навода:

а) *A. Wicke* у књизи *Konforme Abbildungen* показује како се инверзна тачка може да конструише само шестаром и како се само шестаром може дати круг да преведе у инверзни круг, а одатле следи:

Све конструкције које се изводе лењиром и шестаром могу се конструисати употребом само шестара.

За елементарну геометрију од великог је значаја коришћење ставова инверзије у доказу независности V постулата од H. Poincaré-a (Н. В. Јефимов).

Интересантан је и овај случај примене инверзије у техници:



Кретање тачке по кружном луку треба да претворимо у праволинијско. Ово је откриће француског официра Peaucellier-a из 1864 год. Замислимо круг k кога пресецају две полуправе које полазе из тачке 0 ван датог круга.

Нека је m полупречник круга k и нека први зрак пролази кроз његово средиште. Даљину тачке 0 до средиште круга k означићемо са 1.

$$\therefore OP \cdot OP_1 = 1^2 - m^2$$

то значи да ће према приложеној слици тачка P_1 описивати праву када се тачка P креће по кружном луку k полупречника CP.

Ставови инверзије примењују се у многим деловима математике, па је њихово познавање и откривање нових области у којима би се они могли да користе у домену интереса сваког математичара и физичара.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. Vicke.* Konforme Abbildungen. (1937). Teubner. Berlin. Стр. 5—20, 51—55.
[2] *Н. В. Јефимов.* Виша геометрија. (1949). Београд. Стр. 128—148.
[3] *F. Klein.* Elementarmathematik II. 3 Aufl. (1925). Berlin. Стр. 105—117.
[4] *Simon.* Analytische Geometrie des Raumes. (1919). Berlin. Стр. 75—82.
[5] *O. Kowalevski.* Die Komplexen Veränderlichen uud ihre Funktionen. (1923). Leipzig, Стр. 8—13.
[6] *Bieberbach.* Funktionentheorie. (1922). Teubner. Berlin. Стр. 7—10, 91—110.

INVERSION DANS L'ESPACE PAR CALCUL VECTORIEL

par B. MIHAILOVITCH, Pančevo

RÉSUMÉ

Le but de cet article est de montrer l'avantage de la méthode vectorielle dans la représantation par rayons réciproques en considérant quelques applications. L'article est de caractère méthodologique.

РЕФЕРАТИ И ПРИКАЗИ

POVODOM PRVE GLAVNE SKUPŠTINE INTERNACIONALNE MATEMATIČKE UNIJE U RIMU

Nauka je toliko napredovala a broj naučenjaka u pojedinoj nauci toliko narastao, da se nužno nameće pitanje o saradnji i međusobnom obaveštavanju naučenjaka bar iz iste struke ako već ne i iz bližih struka. Nadalje nauka toliko zadire u sveukupni život čovečanstva, da se moralo postaviti pitanje kako da se najbolje za milijone ljudi iskoriste tekovine do kojih nas dovode: dnevna praksa i pogon te naučni rad kolektiva i pojedinaca. Od malih naučnih kružoka, društava gradskih, pokrajinskih, nacionalnih i državnih došlo se i do internacionalnih društava u pojedinim naukama — do t.zv. internacionalnih unija, pa čak i do internacionalnog Saveta naučnih unija (ICSU — International Council of Scientific Unions) i do UNESCO (United Nations Educational Scientific Cultural Organization).

Članovi pojedine internacionalne naučne unije nisu pojedinci nego države preko svojih određenih organizacija kao što su: naučna društva, akademije i t. d. Naša je država član pojedinih unija preko Akademskog Saveta F.N.R.J.

Posle rata, obrazovana je, među ostalim unijama, i Internacionalna matematička unija (I.M.U.); bilo je doduše pokušaja i pre rata da se dođe do sličnog organa, no shvatanje ljudi posle rata, pogotovo nakon što je obrazovana OUN, mnogo se više približilo uverenju, koliko su danas a pogotovo ubuduće potrebne međunarodne naučne organizacije. Šteta je što ni dodanas nije došlo do pravih internacionalnih naučnih organizacija — internacionalnih bar u onoj meri u kojoj je to OUN.

Prvi poratni međunarodni matematički kongres, održan 30-VIII—6-IX-1950 u Cambridge-u (U.S.A) iskorišten je, pa je inicijativni odbor za I.M.U. sazvao predstavnike pojedinih zemalja (svega 22 zemlje) — neposredno pred kongres, za 27—29 VIII-1950 u New-York-u da se rasmotri pitanje o formiranju Unije. Tada su složena i pravila buduće Unije; tako čl. 1 Pravila glasi:

Cilj Internacionalne matematičke unije — ubuduće Unije — jeste:

a) Da neguje međunarodnu saradnju u matematici;

b) Da podržava i pomaže Internacionalni matematički kongres i druge internacionalne sastanke i predavanja;

c) Da ohrabruje i potpomaže svaku drugu internac. mat. delatnost koja bi pridonosila razvoju matematičke nauke u bilo kojem vidu — čistom, primenjenom ili odgojnom.

Članstvo Unije podeljeno je u 5 grupa: grupe I, II, III, IV i V sa odgovarajućim brojem glasova 1, 2, 3, 4, 5 (čl. 9 Pravila) i određenim brojem uplatnih jedinica za članarinu i to po redu 1, 2, 3, 5 i 8 (čl. 15 Pravila).[1])

[1]) Ovaj put jedinica članarine iznosi 65 dolara godišnje; to znači da članovi (države) iz grupe I—V plaćaju godišnje 65, 130, 195, 325 odn. 520 dolara.

Još je trebalo da Pravila primi 10 država i da Unija formalno proradi. Tada je u New-Yorku izabran i Privremeni odbor (Interim Committee) od ovih matematičara: Bompiani (Ital.), Brelot (Franc.), Hodge (Engl.), Kosambi (Japan), Kuratowski (Poljska), Stone (S.A.D.) i Jessen (Danska; Jessen je preuzeo i dužnost tajnika. Uloga toga komiteta, u kojem su se naročito isticali Stone, Bompiani i Jessen bila je da se Unija organizuje i da se čim pre sazove Generalna Skupština. Unija je obrazovana u jesen 1950 kad je 10 država ratifikovalo pravila. Privremeni odbor odmah je razaslao pristupnice u Uniju. Početkom ove godine Odbor obaveštava, da Unija broji 16 članova i da će se prva glavna skupština Unije održati u Rimu od 6—8 marta 1952. Početkom februara 1952 Sekretarijat Unije obaveštava da bi se na Glavnu skupštinu poslao posmatrač, ako dotle država ne bi postala članom Unije.

Kad je Nacionalni komitet za matematiku u Jugoslaviji na svojoj sednici 26-II-1952 uzeo u pretres pitanje Skupštine u Rimu, odlučio je da se predloži da Jugoslavija na njoj učestvuje i to preko Đ. Kurepe. I tako sam snabdeven potrebnim dokumentima mogao otputovati u ponedeljak 3. III. iz Beograda za Rim. Putovanje je proteklo bez ikakvih prepreka.

Sredu 5-III iskoristio sam da se u Rimu sastanem sa vodećim ljudima Privremenog komiteta Unije, da im uručim pismo Akademskog saveta F.N.R.J. o obrazovanju pri Akademskom savetu našeg nacionalnog komiteta te pismo o tome da ću ja na Skupštini predstavljati Jugoslaviju. U razgovoru o tome kojoj grupi da Jugoslavija pristupi, složili smo se da to bude grupa 2 tako da u Skupštini imamo 2 punovažna glasa od 5 mogućih; do tog smo sporazuma došli, nakon što smo pretresli stanje matematike kod nas, te visinu članarine u pojedinoj grupi članstva. Odmah su preduzete mere da na Skupštini bude istaknuta tabla sa natpisom naše države, da dobijem značku i sve druge papire (karte, prospekte, ulaznice it.d.), ma da je rok za to već prošao, jer je Privremeni odbor već bio zaključio da će na Skupštini učestvovati ovih 18 članova sa odgovarajućim brojem glasova odn. delegata: 1) Australija (1), 2) Austrija (1), 3) Belgija (3), 4) Kanada (1), 5) Kuba (1), 6) Danska (2), 7) Finska (1), 9) Nemačka (4), 10) Grčka (1), 11) Engleska (5), 12) Italija (4), 13) Japan (4), 14) Holandija (2), 15) Norveška (1), 16) Peru (1), 17) Švajcarska (2), 18) S.A.D. (5).

OTVARANJE SKUPŠTINE

Skupština je zakazana za četvrtak 6-III u 10 sati u Palazzo della Farnesina (Lungotevere, odn. Via della Lungara 230). Po prekrasnu vremenu delegati su se počeli okupljati već ranije uživajući u panorami Tibra i vanredno rodnim narandžama u vrtu zgrade u kojoj smo imali većati. Jedni su ulazili sa strane Tibra a drugi sa strane palače Corsini (sedište Accademia Lincei) u kojoj se 1908 održavao IV međunarodni matematički kongres. Uspravne duge mramorne stube vodile su nas na prvi sprat u salu kongresa, gde smo zatekli sve pripravljeno za otvaranje: veliki stol u obliku slova U, označena mesta za države — odn. delegate, spise, papir, olovke i sl. Jugoslavija je bila smeštena između S.A.D. zdesna i Kanade odn. Poljske sleva, jer kanadski delegat nije stigao; sedalo mi je bilo prema desnom kraju dna slova U, sučelice predsedništvu, koje je bilo prema otvoru slova —; krasni umetnički radovi u toj sali — malom remek-delu arhitekture i slikarstva — kao da su nas neprestano podsećali da se nalazimo u gradu koji je čitav jedan golem spomenik, jedinstven u svetu.

Pozdravljanja poznatih delegata te upoznavanje novih delegata, razgovori u grupicama delegata — i tako je došlo 10 h. Tada je predsednik Unione matematica

Italiana i jedan od najistaknutijih radnika u novoj IMU profesor u Rimu Bompiani pozdravio, na engleskom, delegate i pročitao pozdravno pismo što ga je Skupštini uputio domaćin i predsednik Accadeia dei Lincei G. Castelnuovo, valjda najstariji živi matematičar:* „Nadam se da će harmoničke proporcije sale u kojoj će se odvijati vaši radovi inspirisati u vama smisao za meru što je toliko važno u diskusiji kad su pomešana i delikatna internacionalna pitanja" preporučuje taj bivši glavni tajnik Kongresa od 1908 pa napominjući da je tada imao čast da stupi u vezu sa matematičarima kao što su Poincaré, Picard, Darboux, Mittag-Leffler, G. Darwin, Newcomb i dr. izjavljuje da ta imena spominje da bi nas inspirisala u radu jer „događa se nekad da mladi ljudi željni da otvaraju nauci nove puteve gledaju samo prema napred a zaboravljaju na veličine iz prošlosti". Bompiani je tada pročitao pismo i predsednik Tal. akademije četrdesetorice, matematičara Severi-a. Zatim je Bompiani predložio da predsedava Stone (S.A.D.) „kao najzaslužniji za ostvarenje Unije". Stone prilazi predsedničkom mestu i kaže da „neko od američke delegacije ima svoj predlog", na što Hille (S.A.D.) predlaže Francuza Denjoy-a za predsedavajućeg. Pariški profesor Denjoy, kojeg naši matematičari poznaju jer je jesenas u Beogradu, Zagrebu i Ljubljani održao desetak predavanja, zahvaljuje prisutnima a „kao sin latiniteta izražavam svoje zadovoljstvo" što smo se sastali u Rimu, na istom mestu u kojem je 1908 učestvovao na međunar. kongresu i tako služi kao neka spona između ta dva velika međunarodna matem. događaja. Izrazivši mišljenje da je matematika kao ugrožena, otvara sednicu u 10,40 h prelazeći na dnevni red.

DNEVNI RED

I Glavne Skupštine Internacionalne matematičke Unije glasio je prema zaključku od 6-XII-1951 ovako:

1. Izveštaj privremenog komiteta,
2. Izveštaj o projektu za Internacionalni centar za računanje,
3. Poslovnik na Skupštini,
4. Odluke o molbama za prijem u Uniju koje Privremeni komitet nije mogao primiti,
5. Predlog Privremenog komiteta da Unija pristupi u ICSU (International Council of Scientific Unions),
6. Generalna rasprava o delatnosti Unije,
7. Unija i Međunarodni matematički kongres,
8. Internacionalni matematički centar,
9. Određivanje uslova i pogodnosti članova kontributora prema čl. 7, Pravila i predlog V. Britanije da se taj član briše,
10. Pitanje o tome kad Izvršni odbor može da započne i provede glasanja preko pošte u vremenu između zasedanja Skupštine,
11. Promena pravila: Privremeni odbor predlaže da u čl. 24 Statuta mesto „tri" stoji „četiri", da taj član bude u saglasnosti sa §§ 2 i 3 pravilnika,
12. Biranje uprave i odbora Unije. Privremeni odbor predlaže — kao dodatak §§ 12 i 13 Statuta da novi odbor radi od dana održanja Glavne skupštine do 1-I-1955.
13. Ako se t. 5 primi: Biranje za ICSU 2 delegata među članovima izvršnog odbora, ukoliko Unija postane članom ICSU,
14. Određivanje jedinične članarine i regularnog budžeta do sledeće redovne Skupštine. Određivanje projekata koji bi bili finansirani nezavisno od opštih troškova,
15. Određivanje mesta i vremena za sledeću Glavnu skupštinu.

---

* Dodajmo da je Castelnuovo (14. 8. 1865 — 27. 4. 1952) odonda umro.

Dodatak dnevnom redu prema zaključku 22-II-1952 glasio je ovako:

16. Stone-ovi predlozi za diskusiju:

a) Štampanje svetskog godišnjaka matematičara,

b) Štampanje vesnika,

c) Pitanje kako da se putem štampe olakša i pojeftini propagiranje matematičkog znanja,

d) Pitanje o olakšanju razmene lica među narodima;

e) Pitanje pisanja rezime-a i izveštaja,

f) Izdavanja celokupnih dela,

g) Međunarodne matematičke nagrade,

h) Štampanje godišnjaka matematičkih simbola sa definicijama u 5 jezika (engleski, francuski, nemački, talijanski i ruski),

i) Ponovno uspostavljanje Međunarodne komisije za nastavu matematike,

j) Izveštaj a zaposlenju matematičara.

9a. Talijanska delegacija predlaže diskusiju o promenama §§ 2, 12, 13, 26 Statuta.

RAD SKUPŠTINE

Ad 1. Tajnik Privremenog komiteta Jessen (Danska) na engl. daje izveštaj; dosad je Uniji pristupilo 18 država, a molba nekojih kao Argentine i Pakistana nije iz formalnih razloga bila uvažena; prijava Švedske najavljena a stigla je i prijava Jugoslavije. Poljska je poslala posmatrače Kuratovskog i Turskog. Kaže da je od samog početka Unija bila povezana na Uneskom n ICSU-om; a na Skupštini Unesko je predstavljen preko Berker-a (Turska), a ICSU preko Fraser-a (Engl.). Izveštaj je primljen bez diskusije.

Ad 2. Brelot (Fr.) koji je kao delegat Privremenog komiteta bio na raznim sastancima o Mat. centru čita svoj izveštaj iz kojeg se vidi da je još 1946 OUN predlagala naučna istraživanja na međunar. osnovi, pa se nakon mnogih diskusija došlo do predloga da se osnuje prvi Međunarodni centar, i to baš za računanje. U maju i junu 1951 bio je u Parizu prvi sastanak stručnjaka — nas je zastupao Inž. Tomović — 26-XI—2-XII-1951 održano je drugo većanje o istoj stvari ,pa je tada odlučeno da novi Međunar. centar za računanje treba da ima za zadaću: naučno istraživanje, odgojni i savetodavni karakter i razna izračunavanja. Članovi Centra bili bi pojedini članovi OUN, Uneska i sl., a članarina bi iznosila najmanje 2000 a najviše 20.000 dolara — već prema članarini u UNESKO. Centar je pravno osnovan, jer mu je pristupilo 10 članova, međutim konvencija još nije ratifikovana, tako da stvarno Centar još nije stvoren. Italija, Holandija i Švajcarska bile su stavile ponude da bi sedište Centra bilo kod njih; kao najpovoljnija primljena je ponuda Italije, koja osigurava uređaje u Rimu i zajam od 75.000 dolara. Zasad se ne namerava kupovati skupih računskih mašina, jer se s pravom očekuje da će im cena padati. Napominje da su već gotovi i primljeni Statuti Centra i apelira na delegate da njihove zemlje pristupe Centru za računanje.

U diskusiji o vezi između Mat. Unije i Mat. Centra, kaže se da Unija ne može biti član Centra, ro da bliska saradnja mora postojati, što se može osigurati i ugovorom. Predstavnik Uneska izjavljuje da će u Centru biti moguće zaposliti izvestan broj osoba, koje će se odabirati, prema prijavama, iz raznih zemalja.

Ad 3. Usvojen je predlog Jessen-a da poslovnik Uneska važi i za skupštine Mat. Unije.

Ad 4. Tajnik Jessen spominje da zbog nedovoljne preciznosti u prijavama Argentine i Pakistana Privremeni komitet nije mogao da te države primi u Uniju. Zatim pominje da je Jugoslavija poslala svoju prijavu pa Privremeni komitet predlaže da Jugoslavija bude primljena u Uniju i to u grupu 2; ja sam tada rekao da imajući u vidu međunarodnu saradnju uopšte a u nauci napose Jugoslavija želi — a to preko svojeg Akademskog Saveta — biti članom Mat. Unije. Predlog je primljen jednoglasno, pa smo tako mi prvi član Mat. Unije kojeg je izabrala Glavna Skupština Unije, pa ćemo u Uniji imati dva punopravna glasa. Predsedavajući Denjoy popraćuje: „pa Kurepa nije virtualan nego realan delegat na zasedanju". Rezultat je popraćen aplauzom. Time je prepodnevno zasedanje završeno, jer je u 12 h u prizemlju Predsedništvo Akademije Lincei priredilo „Vermouth d'honore".

Istog dana posle podne primjlena je Španjolska (grupa 2) kao član Unije a 9-III primljeni su Argentina (grupa 2) i Pakistan (grupa 2), tako da su danas u Uniji učlanjene 22 države preko raznih naučnih organizacija, kao što su akademije, društva i t.d.

Ad 5. Mat. Unija će poslati molbu za prijem u ICSU.

Ad 6. Ta tačka — debata o delatnosti Unije — trajala je vrlo dugo.

Ad 6a. Primljen je Stone-ov predlog da se izdaje godišnjak matematičara koji bi se od vremena na vreme upotpunjavao. Izrazio sam mišljenje da bi za početak bilo realnije da se izda analogan godišnjak naučenjaka uopšte odn. popis matematičara, fizičara (i eventualno hemičara). U Komitet koji će se brinuti o izdavanju godišnjaka ušli su: Berker (Turska), Brelot (Fran.), Inzinger (Austrija) i Stone (S. A. D.).

Tačke 6b i 6c rešavane su zajedno pa je zaključeno da glasilo Austrijskog mat. društva ostane i dalje glasilom Mat. Unije i da se ta stvar uredi jednim ugovorom. Obrazovan je za to i jedan komitet u koji ulaze Pérès (Fr.), Mac Lane (S.A.D.), Schmid (Nem.) i Hodge (Engl.).

Ad 6d. U debati o razmeni profesora odn. studenata isticana je važnost toga pitanja, pogotovo što s tim u vezi postoje zasad razne poteškoće; potrebna je saradnja sa Uneskom, glasilom Unije, da se članstvo čim bolje upozna sa mogućnostima razmene, stipendijama i sl. Obrazovana je komisija u koju su ušli: Jessen (Danska), Chatelet (Fr.), Davenport (Engl.), Kunugi (Japan) i sekretar Unije ex officio.

Ad 6e. U pitanju štampanja sadržaja i rezimea isticane su finansijske poteškoće; zaključuje se da Zentralblatt für Mathematik i Mathematical Reviews ostanu i dalje vodeći referativni listovi i da im se ukaže pomoć. Komisija, u koju su ušli urednici tih listova Hille i Schmid te Hodge i Pérès osiguraće saradnju.

Ad 6f. U pogledu izdavanja celokupnih dela, zaključeno je da treba postojati saradnja između Unije i pojedinih nac. komiteta. Naglasio sam da je za manje i srednje države saradnja u tom pogledu sa Unijom vrlo dragocena, zbog potrebnog publiciteta, pa da dela dođu na svetsku pozornicu.

Ad 6g. Pitanje nagrade nije definitivno rešeno; Unija će u tom pogledu služiti kao informativni organ.

6h. Kako uredništvo Zentralblatt für Mathematik već ima u pripremi jedan Math. Wörterbuch odlučeno je da se to stanje iskoristi i da se omogući izdavanje dela na bar 5 jezika, a koje bi sadržavalo glavne mat. pojmove, simbole i tekovine. Obrazovana je komisija: Schmid (Nem.), Cartan (Fr.), Temple (Engl.), Sansone (It.).

Ad 6i. *Nastava matematike.* Zaključuje se da se Kamke-ov predlog o uspostavljanju komisije spoji sa pismom poslednjeg tajnika komisije Fehr-a iz Ženeve

(iako ne formalno, ali stvarno bio je i Kamke-ov predlog 6j) spojen sa 6i i Fehrovim dopisom). Diskusija o tim pitanjima trajala je skoro čitav dan. Spomenimo da je na IV mat. kongresu u Rimu 1908 primljen ovaj predlog: „Uvereni u važnost komparativnog uvida u metode i planove matematičke obuke u raznim zemljama Kongres zadužuje profesore Klein-a, Greenhill-a i Fehr-a da kao internacionalna komisija prouče gornje probleme i da donesu razuman izveštaj za sledeći Kongres". Mandat komisije je obnavljan i na sledećim mat. kongresima: Cambridge (Engl), Bolonja, Cirih i Oslo. Komisija je objavila preko 300 izveštaja. Na svojoj poslednjoj sednici, jula 1951, kod Hadamarda (Pariz), predsednika komisije, odlučeno je da se komisija pripoji Uniji i da odbor podnese ostavku.

Kako su delegati imali pri ruci Kamke-ove predloge 6i) i 6j) kao i Fehr-ovo pismo prešlo se odmah na debatu; debatom je rukovodio Danac Nielsen koji je na Skupštinu došao kao predstavnik Finske. Diskusiju sam otvorio ja izjavivši na engleskom a onda na francuskom sledeće: „Drago mi je da mogu reći da se slažem sa Kamke-ovim predlozima. Trostruko pitanje: šta, kada i kako ima da se obučava matematika od prvorazredne je važnosti. Od vremena kad je 1908 osnovana prva Svetska komisija za nastavu matematike, učinjen je golem napredak u logici, fizici i prirodnim naukama uopšte, a nove su tekovine od vitalnog interesa za matematiku kao nauku, a još više za matematičare kao profesiju. Često se govori o izvesnoj krizi u matematici; ta je kriza posledica toga što većina matematičara izbegava da se bavi primenama matematike pa ne poznaje ni najosnovnije probleme u drugim naukama, u fizici napose, koji upravo očekuju mat. obradu. Zna se na pr. za nekoje bitne poteškoće matematičkog karaktera u kvantnoj mehanici, što bi svakako bilo zahvalno polje za rad matematičara. Logički i umetnički pravac nipošto ne iscrpljuju celu oblast matematike jer po mojem mišljenju još ostaje glavno polje matematike, ono koje je povezano sa raznim drugim naukama, gde matematika ulazi kao važno oruđe, jezik i metoda. Takovim povezivanjem matematičar će dobivati poticaja da produbi i proširi domenu matematike i da poveća prestiž matematike i matematičara koji će biti prototip nauke odnosno naučenjaka što i iskazuju grčke reči: matematika i matematičar. Taj se pogled mora održavati u celokupnoj problematici i nastavi matematike, počev od osnovnih škola pa do najviših naučnih ustanova."

Zatim je Stone do kojeg sam sedeo, između ostalog rekao da je pokušaj poslednjih 100 godina da nastava bude opšta dao negativne rezultate, jer da moramo priznati da se svakom ne može uspešno predavati. Još su govorili: Nielsen, Fiala (Švajc.), Cartan (Fr.), Terracini (Ital.), Berker, Pérès, Denjoy, Mac Lane, Temple i dr.

Najzad je obrazovana Internacionalna komisija za nastavu u koju su ušli: Behnke (Nem.), Chatelet (Fr.), Jeffreys (Kanada) i Kurepa (Jugosl.). Skupština prima sa zahvalnošću Fehr-ovu ponudu da se stavi na raspoloženje nove Komisije.

Ad 7. Što se tiče organizovanja internacional. kongresa odlučeno je da Unija znatno pomogne Organizacioni komitet kongresa, koji je izabran 1950 na poslednjem kongresu. Bilo je glasova da bi Unija teško mogla organizovati kongres. Govorilo se i o regionalnim kongresima pod okriljem Unije; takav je nedavno održan u Urugvaju.

Ad 8. Videti t. 2.

Ad 9, 9a. Tačke 9 i 9a izazvale su dosta diskusije. Odlučeno je da Upravni odbor može dvotrećinskom većinom stvoriti mesto trećeg potpretsednika i četvrtog stalnog člana, ukoliko bude jači priliv novih članova (misli se na pristupanje slavenskih i južno-amer. država). popunjenje tih dvaju mesta ima se obaviti pismenim glasanjem. Bompiani je predložio izmenu člana 26 Statuta, „zbog mnogih zemalja, kojih kulturni temelji izviru iz onih u Francuskoj (ili Italiji)", tako da bi

engleski i francuski tekstovi statuta bili autentični i ravnopravni. Taj predlog sa Nielsen-ovim dodatkom da treba razlikovati službene jezike od radnih kojih može biti više, podcrtao sam i ja. Predlog je prihvaćen.

Ad 10. Zaključuje se da se izbori vrše poštom tek izuzetno, i da se tada moraju sprovesti unutar 4 meseca.

Ad 11. Prima se.

Ad 12. U petak 8-og obrazovana je izborna komisija u kojoj su ušli: Kline (S.A.D.), Nörlund (Danska), Conforto (Ital.), Godeaux (Belgija), Kloostermann (Hol.). Njen izvestilac Kline rekao je pred glasanje 9-III, da se izveštaj odn. predlog Komisije sastoji od dva dela. U prvom delu Odbor predlaže da se za predsednika Unije izabere Amerikanac Stone a za potpredsednike Francuz Borel i Nemac Kamke; što se tiče tajnika, Odbor se nije mogao odlučiti za jednog kandidata, pa predlaže da se Skupština odluči bilo za Talijana Bompiani-a, bilo za Holanđanina Koksmu; tajnim glasanjem izabran je Stone predsednikom jednoglasno, Borel i Kamke podpredsednicima (jednoglasno), dok je većinom glasova izabran za tajnika Bompiani. Prilikom brojanja predatih glasova — glasalo se tajno — nastala je nelagodna situacija kad su se predsedavajući i skrutator udaljili iz sale i sami u pokrajnoj sobi prebrojavali glasove; to je dalo povoda da se odmah zatim podnese i primi predlog da su izbori tajni a prebrojavanje javno.

Nakon pauze daje Kandidacioni odbor drugi deo svojeg predloga: onaj o izboru tri stalna člana; Kline izjavljuje da su se sporazumeli da dva budu Iyanaga (Japan) i Jessen (Danska), a da Skupština za trećeg izabere bilo Hodge-a (Engl.) bilo Inzinger-a (Austrija). Tajnim glasanjem izabrani su Iyanaga, Jessen i Hodge za 3 stalna člana Uprave.

Ad 13. Određuje se da članarina iznosi godišnje 65 dolara po glasu (jedinici) i da se uplati do početka juna. Primljen je redovni budžet od 3695 dolara i to: 1.500 dolara za sekretarijat, 500 dolara dnevni i sitni troškovi te 750 dolara za putovanja i sl.; pokrio bi se od članarine (61 jedinica po 65 dolara = 3695 dolara; ostatak od 1215 dolara služio bi kao rezerva za nepredviđene troškove). Nadalje se očekuje da će se za sledeću godinu dobiti od ICSU 5000 dolara za druge delatnosti Unije.

Ad 15. Sledeća Skupština Unije održaće se 1954 u Holandiji u bliskom vremenskom roku za koji bude određeno zasedanje Kongresa.

Time je dnevni red jakljućen.

Prima se predlog da u zapisnik uđu samo rezolucije i rezultati biranja odn. glasanja. Skupština se zahvaljuje Tal. Mat. Društvu te Akademije Lincei za gostoprimstvo, a novi sekretar Bompiani zahvaljuje na izboru i izražava nadu da će odgovoriti zadacima Unije.

Time je trodnevna prva glavna skupština Mat. Unije završena. Bacimo li pogled na taj trodnevni rad, može se reći da se on odvijao u zdravoj atmosferi; diskutovala su se raznovrsna pitanja, a sigurno su se slična pitanja i sl. poteškoće javljale odn. javljaće se i kod drugih raznih međunarodnih naučnih Unija. Napose smatram uspehom da je naša zemlja zastupljena u jednoj od najvažnijih internac. komisija Unije — u komisiji za nastavu matematike. Kako je po komisijama, našim ministarstvima i naučnim društvima matematičara i fizičara bilo dosta reči o nastavi matematike, a obrazovane su i komisije za nastavu u srednjoj školi te komisija za nastavu u visokim školama, mislim da ću imati materijala kojeg ću dalje u ime Jugoslavije moći preneti u tu obnovljenu međunarodnu komisiju pred kojom stoje još veći zadaci nego 1908 kad je osnovana; i obrnuto moći ću preneti k nama iskustva do kojih se u tom pogledu došlo u inostranstvu.

MATEMATIČKI SIMPOSIJ

U vezi sa glavnom Skupštinom Unije organizovalo je Tal. mat. društvo za 10—11-III-1952 u Rimu matematički simposij sa ovim programom:

Ponedeljak 10-3

H. Cartan: Povodom proširenja Hilbertove teoreme o lancima sizigija;
M. Stone: Linearnost i poredak u funkcionalnoj analizi;
R. Cacciopoli: Kvalitativno poopštenje anal. funkcija;
K. Knopp: Prostori nizova i zbirljivost;
Skolem: Primedbe o diofantskoj jednačini $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$.

Utorak 11-III

W. D. Hodge: Problem strukture na kompleksnim varijetetima;
W. Gröbner: Nekoliko primena teorije ideala na algebarsku geometriju;
K. Kunugi: O nekoliko tačaka matematičke analize;
B. Jessen: Najnoviji radovi iz analize u Danskoj;
C. Kuratowski: O problemu produžavanja neprekidnih funkcija u topologiji.

Na predavanja je dolazilo mnogo talijanskih i stranih matematičara, koji i nisu bili delegati na Skupštini.

Kako Skupština tako i simposija bile su organizovane vrlo dobro. Talijani su nastojali da nadmaše sami sebe i to i u organizacionom i u društvenom pogledu. Program i upute izrađeni su u detalje, snabdeli su nas mapama, planovima, besplatnim kartama za sve državne muzeje u Rimu, nedelju su iskoristili da nas odvedu na izlet u poznatu Villa Adriana, Tivoli i Villa d'Este (oko 30 km daleko od Rima), a prvog i poslednjeg dana bili su banketi na kojima se čulo i duhovitih govora u galsko- latinskom duhu kao i originalnih pesama originalnih pevača i svirača.

Učesnici su nastojali da čim bolje iskoriste svoj boravak u Rimu, pa da gledaju kulturne i naučne ustanove. Mnogobrojni muzeji, spomenici i dr. umetnička dela privlačila su našu pažnju u tom velikom Spomenik—Gradu. Mogli smo se uveriti kako su Rim i Italija na putu da u matematici postanu još mnogo jači, a eto Rim je određen da bude i sedište Međunarodnog računskog centra.

Kako sam mišljenja da „Doći u Rim a ne videti Napulj" znači veliki propust, posetio sam i tog starog rimskog rivala, koji se diči svojim svetskim lepim položajem, Vezuvom, i Kapri-em.

Đ. Kurepa

E. Whittaker и G. Robinson: *Течај нумеричке математике — The calculus of observations.* Превела с енглеског Војна Радојчић. Издање Друштва математичара и физичара НР Србије, Београд 1951 г.

У издању нашег Друштва појавио се превод једне изврсне и веома корисне књиге. Она је интересантна како по својој садржини, тако и по начину излагања. Садржина јој је обилна и разнолика, а излагање у већини случајева приступачно и на достојној научној висини.

Превод се састоји из поглавља и у њима се обрађују ове партије: интерполација (I и II); елементи рачуна с разликама и изражавање класичних образаца за интерполацију помоћу разлика (III и IV); низ метода за нумеричко решавање алгебарских и трансцендентних једначина са једном напоменом из Номографије (V и VI); разне методе за нумеричко интегрaљење и сабирање (VII); о нормалној расподели честина (фреквенција) (VIII); метода најмањих крадрата са напоменама за решавање нормалних једначина (IX); пракса *Fourier*-ове анализе (X); методе за изравнање емпиричких података (XI); основе корелације без нарочите примене (XII); одређивање периодичности тригонометријских збирова (XIII); нумеричко решавање диференцијалних једиачина (XIV). Последње поглавље (XV) садржи кратко излагање неколико проблема важних за примену, као: сабирање споро конвергентних редова, још два обрасца за интерполацију, нумеричко израчунавање двоструких интеграла и интегралних једначина и др. На крају су дата решења у тексту аздатих примера, као и неколико табела за потпунију рачунску обраду извесних технички сложенијих задатака.

Из самог прегледа садржине види се да онај, који жели да се у решавању својих проблема користи методама практичне анализе, може у овој књизи наћи обилан избор: интерполацију, све врсте једначина од линеарних, алгебарских. трансцендентних до диференцијалних, *Fourier*-ову аралиэу и, најзад, методе и проблематику које нуди теорија вероватноће, — методу најмањих квадрата, корелацију и изравнање (градуацију).

Две су главне одлике ове књиге: 1) садржином обухвата широки круг читалаца-практичара, 2) начином излагања интересује и тзв. теоријског математичара. Истина, појединци неће можда наћи јаче продубљивање проблематике њихове уже струке, јер су се писци услед ширине на неким важним проблемима мање или мало задржали (нпр. на диференцијалним једначанама), али је то донекле разумљиво, јер ширина иде на штету детаља. И сам приређивач ове књиге *G. Robinson* у предговору наводи да је књига намењена: астрономима, метеоролозима, физичарима, инжењерима, бродоградитељима, актуарима, биометричарима, статистичарима и „чистим" математичарима. У томе и јесте битна разлика између ове књиге и неких других веома добрих и корисних књига намењених практичарима, као нпр.: *Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis,* претежно намењена инжењерима, или *Alfred Henry, Calcul des differences finies et ses applications,* намењена актуарима (оригинал је на енглеском језику).

С друге стране начин излагања *E. Whittaker*-а је жив и интересантан. Имајући у виду круг лица коме је излагање намењено, писац жртвује строго доказивање импре-

сивнијој интерпретацији, но ипак остаје на једној одмереној висини теориског математичара. Међутим, постоје партије које имају чврсту теориску подлогу. То се нарочито односи на поглавља у којима се третирају проблеми о закону случајних грешака. Из тих разлога, као и због саме садржине, књига претставља интерес и за оног „теоријског" математичара који жели да сагледа огроман значај примене математике у разноврсним областима људске научне делатности.

За наше прилике књига има још један значај: наши читаоци, читањем овога превода, упознаће се са методама Рачуна са коначним разликама и Рачуна вероватноће, и конкретно ће схватити значај ових математичких области, утолико пре, што се о њима код нас мало зна.

Преводилац Војна Радојчић уложила је доста труда да превод учини схватљивим нашој публици. Чак је настојала да на нашем језику изрази неке појмове који су се на страном језику већ увукли, као нпр. расподела = дистрибуција, учестаност = фреквенција и др. Превод се исто тако одликује и солидношћу изражавања на нашем језику.

Драгољуб Марковић

САСТАНЦИ ДРУШТВА

LXI

8 јануара 1952 год.

Св. Михајловић, професор:

„О једној значајној тачки код троугла".

LXII

16 јануара 1952 год.

М. Ент, шеф лабораторије за нуклеарну физику у Утрехту (Холандија):

„Енергетски нивои лаких језгара" (на енглеском језику).

LXIII

5 фебруара 1952 год.

Милица Илић-Дајовић, асист. ТВШ:

О Поенкареовом општем ставу за полиедре.

LXIV

19 фебруара 1952 год.

Инж. Иван Шеварац, предавач ТВШ:

О изворима јона.

LXV

26 фебруара 1952 год.

1) Војин Дајовић, предавач Универз.:

О егзистенцији граничних вредности на рубу јединичног круга резултанте двеју функција.

2) Иван Бандић, професор ВПШ:

Геометриска интерпретација једног Ојлер-овог обрасца.

3) Добривоје Михаиловић, предавач Унив:

Примедба на Јакобиев интеграл у астероидном проблему за случај елиптичне путање пертурбирајућег тела.

LXVI

4 марта 1952 год.

Краће слободне теме:

1) Др. Алојзије Ваднал:

О једном начину сумације редова.

2) Др. Златко Јанковић, доцент свеучилишта у Загребу:
Приказ реферата са Конгреса механичара на Бледу:
О елементарном извођењу Лоренцових трансформација у специјалној теорији релативности.

LXVII

11 марта 1952 год.

Мирко Стојаковић, предавач ТВШ:
О једној функцији избора од значаја у примени код машина за рачунање.

LXVIII

18 марта 1952 год.,

Инж. Бора Лилић, доцент ТВШ:
Доказ полазног става геометриске статике.

LXIX

25 марта 1952 год.

Стево Дедијер, научни сарадник Института у Винчи:
Центри нуклеарне физике у Европи.

LXX

8 априла 1952 год.

Др. Ђуро Курепа, свеучилишни проф. у Загребу:
Поводом интернационалне уније математичара.

LXXI

15 априла 1952 год.

Боривоје Рашајски, асист. Унив:
Карактеристичне функције у геометријској теорији система парцијалних једначина.

LXXII

18 априла 1952 год.

Др. Јован Карамата, проф. Унив:
Винерова метода предвиђања појава.

LXXIII

22 априла 1952 год.,

Др. Ђуро Курепа, свеучилишни проф. у Загребу:
Бројеви, матрице и тензори.

LXXIV

29 априла 1952 год.

1). Др. Ђуро Курепа, свеучилишни проф. у Загребу:
Појам простора.

2) Златко Мамузић, асист. ТВШ:
О релативно затвореним и отвореним скуповима у просторима Хаусдорфа.

LXXV

7 маја 1952 год.

Мирослав Тодоровић, асист. Института за испитивање структуре материје:
Одређивање обилности изотопа.

LXXVI

13 маја 1952 год.

Растко Стојановић, асист. Унив:
Диференцијалне једначине кретања чврстог тела у тензорском облику.

LXXVII

20 маја 1952 год.

Симон Ћетковић, асистент ТВШ:
О једној особини једног непребројивог скупа реалних функција.

LXXVIII

27 маја 1952 год.

Краће слободне теме:

1) Др. Тадија Пејовић, проф. Унив:
Извођење биномног обрасца помоћу интегралног рачуна.

2) Мирко Стојаковић, предавач ТВШ:
Геометриско тумачење градијента.

3) Добривоје Михаиловић, предавач Унив.:
О једном специјалном случају проблема двају тела.

4) Богољуб Станковић, асистент при САН:
О једној Лапласовој трансформацији.

LXXIX

3 јуна 1952 год.

Мира Јурић, асист. Института за испитивање структуре материје:
Мерење трагова у фотонуклеарној плочи.