ЈЕДАН ДОКАЗ POINCARÉ-ОВЕ ОПШТЕ ФОРМУЛЕ ЗА ЗАТВОРЕНЕ ОРИЈЕНТИСАНЕ ПОВРШИНЕ У ТРОДИМЕНЗИОНОМ ЕУКЛИДСКОМ ПРОСТОРУ

МИЛИЦА ИЛИЋ-ДАЈОВИЋ, Београд

1. Општа Poincaré-ова формула за површине у $(n+1)$-димензионом простору, која даје бројну вредност Euler-ове карактеристике $\chi(K)$ изражену Betti-јевим бројевима, гласи

$$\chi(K) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \alpha^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} R_{\pi}^{\nu},$$

где су α^{ν} ν-димензиони елементи комплекса K, а R_{π}^{ν} су Betti-јеви ν-димензиони бројеви модула π [1].

За затворене оријентисане површине генуса $\gamma = p$ у тродимензионом еуклидском простору, бројеви R_{π}^{ν} имају вредности $R_{\pi}^{0} = R_{\pi}^{2} = 1$ и $R_{\pi}^{1} = 2p$, тако да у том случају Poincaré-ова формула [1] гласи

$$\sum_{\nu=0}^{2} (-1)^{\nu} \alpha^{\nu} = 2(1-p).$$

Овде ћу за ову формулу за тај специјалан случај кад је комплекс K затворена оријентисана површина генуса $\gamma = p$ у тродимензионом еуклидском простору дати нов једноставан доказ који се темељи на схватању да се затворена оријентисана површина генуса $\gamma = p$, која је хомеоморфна са генералисаним торусом генуса $\gamma = p$ (тј. са p рупа), може на известан начин образовати од p полиедара хомеоморфних са торусом $(\gamma = 1)$.

Пре него што пређем на доказ, задржаћу се на следећим претходним напоменама:

A. Нека је Ω_1 полиедар хомеоморфан са торусом. Као што је познато, максималан број (број конексије) Jordan-ових кривих на торусу које тај торус не распарчавају јесте 2. Торус расечен дуж таквих двеју кривих (које, разуме се, имају једну заједничку тачку) може се тополошки пресликати на четвороугао.

Расецимо полиедар Ω_1 дуж таквих двеју затворених полигоналних линија l и m, које су састављене од h, односно k ивица полиедра Ω_1, и деформисањем без прекида и без слепљивања тачака развијмо га у равну мрежу ω_1. Сваком полигону, ивици, односно темену расеченог полиедра Ω_1 једнозначно одговара полигон, ивица, односно теме равне мреже ω_1 и обратно.

Ако је α_1^0 број темена, α_1^1 број ивица и α_1^2 број страна полиедра Ω_1, онда равна мрежа ω_1 има $\alpha_1^0 + h + k + 1$ теме, $\alpha_1^1 + h + k$ ивица и α_1^2 полигона. Узимајући у обзир да за равну мрежу отвореног простог полиедра важи

$$\sum_{\nu=0}^{2} (-1)^{\nu} \alpha_0^{\nu} = 1,$$

добијамо да је за полиедар Ω_1, хомеоморфан са торусом, Euler-ова карактеристика једнака нули, то јест

$$\sum_{\nu=0}^{2} (-1)^{\nu} \alpha_1^{\nu} = 0.$$

B. Као што је познато, Euler-ова карактеристика за полигон, као тополошка инваријанта, остаје неизмењена ако се на полигону изведу елементарне операције (једнодимензиона и дводимензиона подела, као и инверзне операције једнодимензионо и дводимензионо спајање ([2] и [3]). Ове операције се могу извршити и са елементима полиедра Ω.

Услед једнодимензионе поделе једне ивице полиедра број темена α_0 полиедра повећава се за 1, број ивица α^1 повећава се за 2, а број полигона α^2 повећава се за 1. Дводимензионом поделом једног полигона дуж једне његове дијагонале повећавају се само α^1 за 1 и α^2 за 1, док се α^0 не мења.

Једнодимензионим спајањем брише се једно теме полиедра. Притом се: 1) или α^0 смањује за 1, α^1 смањује за $n-1$ (n је број ивица којима је посматрано теме заједничко), а α^2 смањује за $n-2$; 2) или α^0 смањује за 1 и α^1 смањује за 1, док број α^2 остаје неизмењен; 3) или α^0 смањује за 1 а α^2 повећава за 1, док се α^1 не мења.

Дводимензионим спајањем брише се заједничка ивица два полигона. Притом се: 1) или α^0 смањује за 2, α^1 смањује за 3 и α^2 смањује за 1; 2) или α^0 смањује за 2, α^1 смањује за 5 и α^2 смањује за 3; 3) или број α^0 остаје неизмењен, док се α^1 и α^2 смањују сваки за 1.

Отуда је јасно да се извођењем поменутих елементарних операција коначно много пута Euler-ова карактеристика $\alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2$ полиедра неће променити.

2. Доказ. Нека имамо p полиедра $\Omega_{1\mu}$ ($\mu=1,2,\ldots,p$), од којих свака два имају по два полигона P_{k_λ} са истим бројем ивица, а то увек можемо постићи путем извођења елементарних операција, које не утичу на промену тополошких инваријаната посматраних полиедара $\Omega_{1\mu}$.

Нека два полиедра, рецимо Ω_{11} и Ω_{12}, имају по један полигон са P_{k_1} ивица; отстранимо и један и други полигон P_{k_1} и прилепимо оба слободна руба један на други тако да се поклопе одговарајуће ивице и одговарајућа темена. Добићемо полиедар Ω_2 хомеоморфан са генералисаним торусом генуса $\gamma=2$. Ако полиедру Ω_2 уклонимо полигон P_{k_2} и то исто учинимо и са неким трећим полиедром Ω_{13} и рубове оба отвора прилепимо један на други на горе описани начин, добићемо полиедар хомеоморфан са генералисаним торусом генуса $\gamma=3$. После $p-1$ операције уклањања по два полигона P_{k_λ} ($k_\lambda=1,2,\ldots,p-1$) и прилепљивања тако добијених слободних рубова свих p полиедара $\Omega_{1\mu}$, добићемо полиедар Ω_p хомеоморфан са генералисаним торусом генуса $\gamma=p$ (тј. са p рупа). Обележимо са $\alpha_{1\mu}^0$ број темена полиедра $\Omega_{1\mu}$, са $\alpha_{1\mu}^1$ број ивица, а са $\alpha_{1\mu}^2$ број полигона истог полиедра. Тада ће, с обзиром на $p-1$ операцију уклањања полигона P_{k_λ} и прилепљивања њихових рубова, број α_p^2 полигона полиедра Ω_p бити

$$\alpha_p^2=\sum_{\mu=1}^{p}\alpha_{1\mu}^2-2(p-1),$$

број α_p^1 ивица полиедра Ω_p биће

$$\alpha_p^1=\sum_{\mu=1}^{p}\alpha_{1\mu}^1-\sum_{\lambda=1}^{p-1}k_\lambda,$$

а број α_p^0 темена полиедра Ω_p

$$\alpha_p^0=\sum_{\mu=1}^{p}\alpha_{1\mu}^0-\sum_{\lambda=1}^{p-1}k_\lambda.$$

На тај се начин непосредно добија за Euler-ову карактеристику χ горе наведена Poincaré-ова формула за затворену оријентисану површину генуса $\gamma=p$ у тродимензионом еуклидском простору:

$$\sum_{\nu=0}^{2}(-1)^\nu\alpha_p^\nu=2(1-p).$$

3. Јасно је да се, полазећи од схватања на коме се темељи горњи доказ — да се полиедар Ω_p образован од p полиедара $\Omega_{1\mu}$