ЈЕДНА КАРАКТЕРИСТИЧНА ОСОБИНА КОНИЧНИХ ПРЕСЕКА

РАНКО БОЈАНИЋ, БЕОГРАД

1. Нека је у размаку (a, b) дефинисана конвексна функција $F(t)$, која у свакој тачки тог размака има одређен извод. У томе случају први став о средњим вредностима

$$F(y) - F(x) = (y - x) F'(\xi) \tag{1}$$

једнозначно одређује функцију $\xi = \xi(x, y)$ која за свако $x < y$ размака (a, b) задовољава двоструку неједначину

$$x < \xi(x, y) < y. \tag{2}$$

Из (2) видимо да је $\xi(x, y)$ *средина* од x и y, док из (1) следи да ова средина мора бити симетрична по x и y. Међутим свакој симетричној средини $\xi(x, y)$ не мора одговарати функција $F(x)$ таква да образац (1) буде задовољен. Оне симетричне средине за које тај образац важи, звачемо кратко ξ *функције*.

R. Rothe[1]) је дао потребне услове које мора задовољавати функција двеју променљивих x и y да би била ξ функција и поступак којим се може проверити да ли тој функцији заиста одговара функција $F(t)$ таква да образац (1) буде задовољен. J. Карамата[2]) је испитивао сличан проблем за класу симетричних средина дефинисаних познатим обрасцем

$$\varphi(\xi) = \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}, \tag{3}$$

где функција $\varphi(t)$ не опада у посматраном размаку. Он је показао да средина $\xi(x, y)$ облика (3) може бити једна ξ функција само кад је $\varphi'(t)$ облика

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}, \tag{4}$$

---

[1]) *R. Rothe, Zum Mittelwertsatze der Differentialrechnung, Mathematische Zeitschrift, 9 стр. 300, 1921 год.*

[2]) J. Карамата, Неки специјални случајеви првог става о средњим вредностима, Весник Друштва математичара и физичара НР Србије бр. 3—4 стр. 83. (1949).

где су A, B и C произвољне константе, и да се у том случају функција $F(t)$ добива везом

$$F''(t) = C_1 \varphi'^3(t). \tag{5}$$

Међутим, као што сам то касније показао[3]), услов (4) је *потребан* и *довољан* да би симетрична средина облика (3) била једна ξ функција.

Из једначина (4) и (5) следи да је

$$F(t) = \frac{4C_1}{4AC - B^2}\sqrt{At^2 + Bt + C} + C_2 t + C_3,$$

ако је

$$4AC - B^2 = 0,$$

$$F(t) = \frac{C_1}{\sqrt{A}}\,\frac{1}{2At + B} + C_2 t + C_3,$$

ако је

$$4AC - B^2 = 0 \text{ и } A > 0, \tag{6}$$

односно,

$$F(t) = \frac{C_1}{C\sqrt{C}}\,t^2 + C_2 t + C^3$$

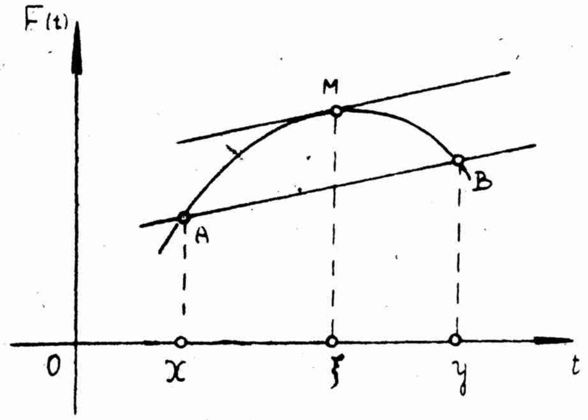
ако је

$$4AC - B^2 = 0, \quad \text{и} \quad A = 0, \quad (C > 0).$$

Према томе, функције овог облика задовољавају истовремено једначине

$$F(y) - F(x) = (y - x)\,F'(\xi)$$
$$\varphi(\xi) = \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \tag{7}$$

Другим речима, систем симултаних функционалних једначина (7) допушта само она решења $F(t)$ која су облика (6). Како су то једначине коничних пресека, то ми је циљ да у овом чланку дам геометриску интерпретацију система (7) и да покажем да је он карактеристичан коничне пресеке.



Сл. 1

2.1. Као што је познато геометриски смисао прве једначине система (7), тј. једначине (1) је овај: нека је $\widehat{AB}$ лук конквексне криве, тј. лук диаграма конвексне функције $F(t)$. На томе луку постоји једна и само

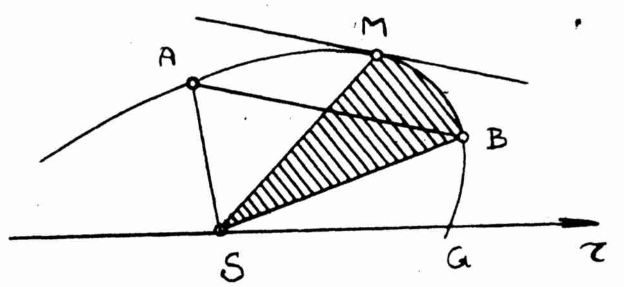
[3]) *R. Bojanić*, Sur la formule des accroissements finis, Publications Mathématiques. (у штампи)

једна тачка M апсцисе ξ таква да је тангента у тој тачки паралелна тетиви AB (в. сл. 1). Ту тачку M зваћемо теме лука $\widehat{AB}$.

2.2 Једначином (3), тј. другом једначином система (7) изражена је једна особина коничних пресека која се састоји у следећем:

Ако са $\widehat{AB}$ означимо лук коничног пресека, са M теме лука $\widehat{AB}$ и са S средиште коничног пресека, за које ћемо претпоставити да није у бесконачности (в. сл. 2), тада је

површина $SBM =$ *површина* SAM. (8)



Сл. 2

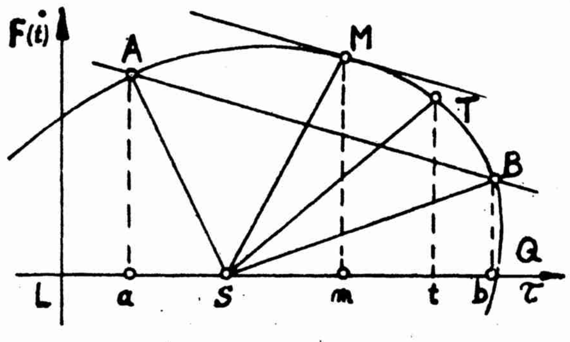
Ово следи из чињенице да код коничних пресека права SM полови све тетиве које су паралелне тетиви AB.

Да бисмо показали да из (8) следи друга једначина система (7), повуцимо кроз S произвољну праву $S\tau$ која сече посматрану криву у тачки Q, (в. сл. 2). Тада са слике видимо да је

$$\text{површина } SQM = \frac{\text{површина } SQA + \text{површина } SQB}{2}. \qquad (9)$$

Изаберимо затим на правој $S\tau$ произвољну тачку L и узмимо је за почетак координатног система коме је права $L\tau$ апсцисна оса (в. сл. 3). Ако уочимо произвољну тачку T лука посматране криве, и са t означимо њену апсцису у односу на овај координатни систем, тада је површина ограничена правом SQ, луком QT и правом ST извесна функција од t:

$$\text{површина } SQT = \varphi(t).$$



Сл. 3

Ако, на послетку, са a, b и m обележимо апсцисе тачака A, B и M, образац (9) постаје

$$\varphi(m) = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}. \qquad (10)$$

Значи да је код коничних пресека овом функционалном једначином изражена веза између површина исечака.

3. Да би једначине (1) и (10) биле испуњене симултано, праву $S\tau$ која пролази кроз средиште S коничног пресека постављамо паралелно оси Ot, а за тачку L узимамо њен пресек са ординатном осом. У том случају ако уместо a, b и m ставимо x, y и ξ, једначина (10) своди се на једначину (3), из чега се јасно види геометриска интерпретација система (7) (в. сл. 4).

4. Као илустрацију тачке (2.2) посматрајмо два најједноставнија случаја и то јединични круг и равнострану хиперболу.

Ако са θ означимо лук QT јединичног круга

$$x^2 + y^2 = 1,$$

код кога је

$$F(t) = \sqrt{1-t^2},$$

онда је (в. сл. 5),

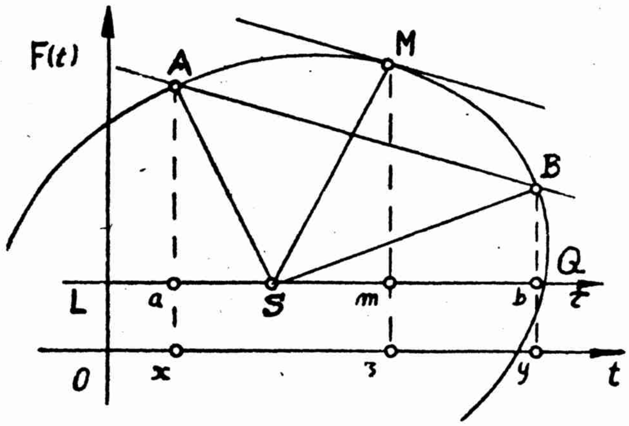
$$t = \cos\theta.$$

Међутим је

$$\text{површина } OQT = \theta/2,$$

па је

$$\varphi(t) = \theta/2.$$



Сл. 4

Како је

$$\theta = \arccos t,$$

то је

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \arccos t,$$

и образац (10) своди се на

$$\arccos \xi = \frac{\arccos x + \arccos y}{2}.$$

Код равностране хиперболе

$$x^2 - y^2 = 1,$$

где је

$$F(t) = \sqrt{t^2-1},$$

сличним поступком налазимо да се образац (10) своди на

$$\operatorname{arcosh} \xi = \frac{\operatorname{arcosh} x + \operatorname{arcosh} y}{2}.$$

5. Испитајмо овде случајеве кад горњи општи поступак престаје да важи. То су углавном они случајеви код којих је

$$4AC - B^2 = 0,$$

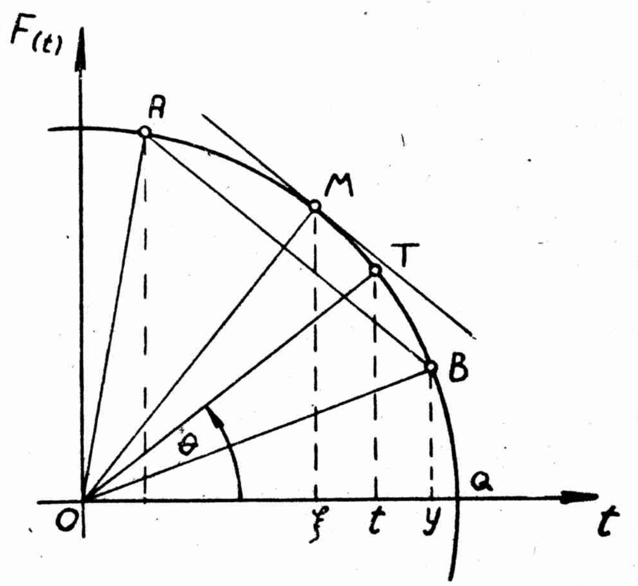
и који се налазе у цитираној расправи *Ј. Карамате.*

Први такав случај наступа кад се средиште коничног пресека налази у бесконачности, тј. кад се овај своди на параболу. Претходна дефиниција функције $\varphi(t)$ губи смисао јер су површине исечака неограничене. Према томе, потребно је да видимо на шта се у том случају своди образац (10). За то је довољно да посматрамо само случај кад је парабола дата једначином

$$y = \sqrt{x}$$

тј. кад је

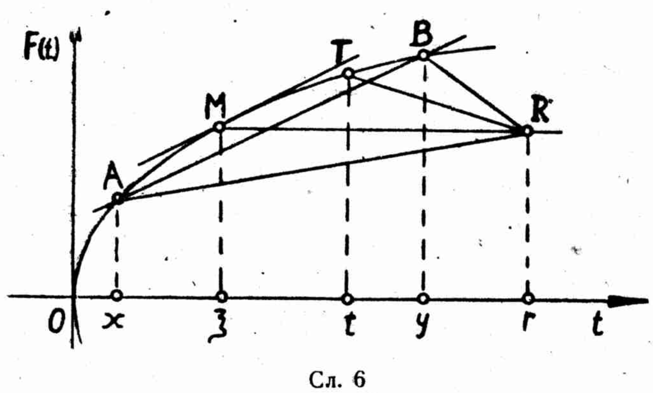
$$F(t) = \sqrt{t}.$$



Сл. 5

Уочимо на њој произвољну тачку T апсице t, (в. сл. 6). Ако са R означимо произвољну тачку на диаметру тетиве AB, а са r њену апсцису, тада је

$$\textit{површина } OTRrO = \frac{2}{3} t\sqrt{t} + (r-t)\frac{\sqrt{t}+\sqrt{\xi}}{2}.$$



Сл. 6

Како је

$$\textit{површина } OMRrO = \frac{\textit{површина } OARrO + \textit{површина } OBRrO}{2},$$

то је

$$\frac{2}{3}\xi\sqrt{\xi}+(r-\xi)\sqrt{\xi}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}x\sqrt{x}+(r-x)\frac{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}y\sqrt{y}+(r-y)\frac{\sqrt{y}+\sqrt{\xi}}{2}\right\}.$$

Поделимо овај образац са r и пустимо да $r\to\infty$. Он се тада своди на

$$2\sqrt{\xi}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}}{2}+\frac{\sqrt{y}+\sqrt{\xi}}{2},$$

$$\sqrt{\xi}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}.$$

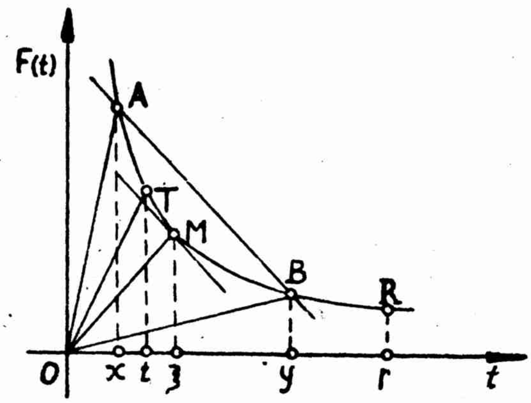
Напоменимо да бисмо сличним поступком добили да је

$$\xi=\frac{x+y}{2},$$

кад је $F(t)=t^2$.

Може се међутим десити да се средиште S коничног пресека не налази у бесконачности, а да површина којом смо дефинисали функцију $\varphi(t)$ постаје неограничена. То је, на пример, случај код хиперболе чија је једначина

$$y=1/x,$$



Сл. 7.

тј. кад је

$$F(t)=1/t,$$

јер је у овом случају тачка Q у бесконачности.

Да бисмо видели на шта се у овом случају своди образац (8), уочимо на посматраној кривој тачку R апсцисе r. (в. сл. 6)

Тада је

$$\textit{површина } OrRT=\frac{1}{2}+\ln r-\ln t,$$

и образац (8) постаје

$$\ln r-\ln\xi=\frac{\ln r-\ln x+\ln r-\ln y}{2},$$

$$\ln\xi=\frac{\ln x+\ln y}{2}, \tag{9}$$

тј.

$$\xi=\sqrt{xy}.$$

Из (9) следи да је

$$\textit{површина } AMx\xi=\textit{површина } BMy\xi,$$

тј. да права ξM полови површину $AMBxy$.

UNE PROPRIÉTÉ CARACTERISTIQUE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ

par R. Bojanić, Beograd

RESUMÉ

Dans la Note précédante, Karamata[1]) a montré que la fonction $\xi=\xi(x, y)$, définie par

$$\varphi(\xi)=\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}, \tag{1}$$

ne peut satisfaire en même temps la formule relative au théorème de la moyenne

$$F(y)-F(x)=(y-x)F'(\xi), \tag{2}$$

que lorsque $\varphi'(t)$ est de la forme

$$\varphi'(t)=\frac{1}{\sqrt{At^2+Bt+C}}, \tag{3}$$

A, B et C étant des constantes arbitraires.

En partant de ce fait, l'auteur montre que le système d'équations fonctionelles (1) et (2) est caracteristique pour les séctions coniques, c. à d. que seules les courbes du second degré, dont l'équation explicite est donnée par $y=F(x)$, satisfont simultanement ce système d'équations, la fonction $\varphi(t)$ étant nécéssairement définiée par (3). Dans cette Note, l'auteur donne l'intérpretation géométrique des équations fonctionelles (1) et (2) et montre qu'elles reposent sur la propriété suivante des diamètres conjugés des séctions coniques.

Soit $\widehat{AB}$ l'arc d'une séction conique dont le centre S est supposé à distance finie, et soit M le point dont la tangente est paralèle à la corde $\overline{AB}$ (voir fig. 2). On a dans ce cas

$$\textit{surface } SBM = \textit{surface } SMA, \tag{4}$$

qui résulte du fait que SM et Mt donnent les diréctions de deux diamètres conjugués de la séction conique considérée. En désignant ensuite par Q le point d'intérséction d'une droite quelconque passant par S avec la séction conique, on aura d'après (4)

$$\textit{surface } SQM = \frac{1}{2}\{\textit{surface } SQA + \textit{surface } SQB\}.$$

C'est justement cette propriété qui se trouve exprimée analytiquement par le système d'équations fonctionelles (1) et (2).

---

[1]) Karamata J. — Sur certains cas particuliers du premier théorème de la moyenne. Bul. de la Soc. math. et phys. de la R. P. S. I, 3—4, p. (1949). Voir de même Bojanić R. — Sur la formule des accroissement finn. Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sciences III. (1949), sous presse.