Beiträge zur Algebra und Geometrie
30(1990),181-192

LICHTSTÄRKE-INDIKATRIZEN FÜR ISOPHENGISCHE FLÄCHENELEMENTE MIT TRÄGERPUNKTEN AUF EBENEN GLATTEN KURVEN

Prof. Dr. rer. nat. habil. G. Geise zum 60. Geburtstag gewidmet

ERHART BOHNE und PETER KNABE

1. Eine neuere Aufgabe der Beleuchtungsgeometrie besteht in der Konstruktion von Lichtstärke-Indikatrizen I= (X: $\underline{x}= \underline{q}+ v\underline{r}_o$ mit $\underline{r}_o= (\underline{x}-\underline{q})/\|\underline{x}-\underline{q}\|$) geometrischer Beleuchtungen (Q;v), wobei Q die Lichtquelle ist, durch die auf jedem erhellten orientierten Flächenelement (X;$\underline{n}$) (künftig kurz Element genannt) einer Elementmenge **F** des E^3 dieselbe Helligkeitsstärke H(X;$\underline{n}$) erzeugt wird. Diese Elemente heißen isophengische Elemente, und **F** ist isophengische Menge. v(t) ist die zutreffende Lichtstärke-Funktion. **F** sei eine Element-1-Schar bzw. Element-2-Schar. Für $\underline{x}(t)$, $\underline{n}(t)$ bzw. $\underline{x}(u_1,u_2)$, $\underline{n}(u_1,u_2)$ seien alle wünschenswerten analytischen Eigenschaften erfüllt.

Es wird ein einäugiges Sehen (Zentral- oder Parallelsicht) angenommen. Für die Berechnung der Helligkeitsstärke H(X;$\underline{n}$) eines Elements werden bekannte Helligkeitsstärke-Hypothesen verwendet (siehe etwa: /3/,/4/), die bei lichttechnischer Interpretation den Sachverhalt hinreichend genau widerspiegeln. Die Lichtstärke-Indikatrizen sind (an die Lichtquelle angeheftete) Kurven oder Flächen des E^3. Sie lassen sich punktweise ermitteln, durch Approximation vervollständigen oder durch bekannte glatte Kurven oder Flächen näherungsweise ersetzen.

Im folgenden werden Lichtstärke-Indikatrizen I(H,t) für die isophengische Erhellung zylindrischer Streifen ($\underline{x}(t)$, $\underline{n}(t)$) bei einer festen geometrischen Zentralbeleuchtung (Q;v(t)) bzw. Parallelbeleuchtung ($\underline{l}$,v(t)) und einer Zentralsicht (A) aus einem Auge A bzw. Parallelsicht ($\underline{s}$) punktweise berechnet bzw. konstruiert. Die Trägerkurven $\underline{x}(t)$ der zylindrischen

Streifen in den betrachteten Beispielen sind Kegelschnitte oder transzendente ebene Kurven.

Begriffe und Bezeichnungen der Beleuchtungsgeometrie werden aus /1/ übernommen.

2. Problemstellung und Lösung: Mit welcher Lichtstärke $v(t)$ müssen die Elemente $(X;\underline{n})$ einer Menge $\mathbf{F}:= ((X;\underline{n}): \underline{x}(t), \underline{n}(t)\neq \underline{o})$, deren Trägerpunkte X der (ebenen) glatten offenen oder geschlossenen Kurve $\underline{x}(t)= (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$, $-\infty<t<\infty$, angehören, zentral bzw. parallel beleuchtet werden, damit sie alle bei Zentralsicht (A) bzw. Parallelsicht $(\underline{s})$ mit konstanter Helligkeitsstärke $H(X;\underline{n})\geq 0$ gesehen werden können?

Gegeben seien

- von einer Zentralbeleuchtung $(Q;v(t))$ i. Art (siehe hierzu: /1/ oder /2/) die Lichtquelle $Q\neq X$ mit $\underline{q}= (q_1,q_2,q_3)^T$ bzw. von einer Parallelbeleuchtung $(\underline{l};v(t))$ die Lichtrichtung $\underline{l}= (l_1,l_2,l_3)^T$ mit $\underline{l}^2= 1$,
- eine Zentralsicht (A) aus einem Auge $A\notin g(Q,X_2)$ mit $\underline{a}= (a_1,a_2,a_3)^T$ bzw. eine Sehrichtung $\underline{s}= (s_1,s_2,s_3)^T$ mit $\underline{s}^2= 1$,
- eine Helligkeitsstärke-Funktion

$$(1)\qquad H:= H(X;\underline{n}):= \begin{Bmatrix} v(t)\cdot E(\varphi,r)\cdot h(\sigma,s) & \text{für } 0\leq\varphi\leq \pi/2, \\ & 0\leq \sigma\leq \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix},$$

wobei E die zutreffende Beleuchtungsstärke-Funktion; v die gesuchte Lichtstärke-Funktion; h die zutreffende Reflexionsfunktion, die den vom Reflexionsgrad ρ abhängigen Abfall der Intensität des reflektierten Lichtes, welches ins Auge gelangt, beschreibt; $\varphi:=\sphericalangle(\underline{n},-\underline{l})$ den Beleuchtungswinkel; $r:= |\underline{q}-\underline{x}|$ (bei Zentralbeleuchtung) den Abstand der Lichtquelle Q vom Trägerpunkt X; $\sigma:=\sphericalangle(\underline{n},-\underline{s})$ den Sehwinkel und $s:= |\underline{a}-\underline{x}|$ (bei Zentralsicht) den Augabstand von X bedeuten sowie
- eine beliebige glatte ebene oder Raumkurve $\underline{x}(t)= (x_1(t), x_2(t),x_3(t))^T$ für die Trägerpunkte X der Elemente $(X;\underline{n})$, die einen isophengischen zylindrischen Streifen bilden sollen.

Gesucht ist die Lichtstärke $v(t)$ einer ruhenden Lichtquelle Q bzw. der Lichtrichtung $\underline{l}$ mit $l = g(Q,X)$, in Richtung $\underline{x}(t)$ bei vorgegebener konstanter Helligkeitsstärke $H \geq 0$.

Lösung: Aus (1) ergibt sich sofort

$$(2) \qquad v(t) := \begin{cases} H/(E\cdot h) & \text{für} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ & \phantom{\text{für}} \quad 0 \leq \sigma \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } E\cdot h \neq 0.$$

Im folgenden verwenden wir die Helligkeitsstärke-Funktion

$$(3) \qquad H := v\cdot E\cdot h := \begin{cases} v\cdot\cos\varphi\cdot\cos\sigma & \text{für} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ & \phantom{\text{für}} \quad 0 \leq \sigma \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\cos\varphi := (\underline{n},-\underline{l})/\|\underline{n}\|\|-\underline{l}\|$ und $\cos\sigma := (\underline{n},-\underline{s})/\|\underline{n}\|\|-\underline{s}\|$, wobei bei Zentralbeleuchtung für $-\underline{l} := \underline{q}-\underline{x}$ und bei Zentralsicht für $-\underline{s} := \underline{a}-\underline{x}$ zu setzen ist. Mit (2) und (3) erhält man für die Lichtstärke

$$(4) \qquad v(t) := H/(\cos\varphi\cdot\cos\sigma) = H\|\underline{n}^2\|\|-\underline{l}\|\|-\underline{s}\|/((\underline{n},-\underline{l})(\underline{n},-\underline{s}))$$

mit $\cos\varphi\cos\sigma \neq 0$. In den folgenden Beispielen sei die Leitkurve $\underline{x}(t)$ eine ebene glatte Kurve in der x_2x_3-Ebene, in der auch die Lichtquelle Q und das Auge A bzw. der Lichtrichtungsvektor $\underline{l}$ und der Sehrichtungsvektor $\underline{s}$ liegen sollen. Die Elemente $(X;\underline{n})$ bilden bzgl. der x_2x_3-Ebene einen zylindrischen Streifen oder sind von gleicher Stellung $\underline{n} = (0,n_2,n_3)^T$ mit $\underline{n}^2 = 1$. Die Zentralbeleuchtung $(Q;v(t))$ sei von 1. Art.

3. Die Gerade $\underline{x}(t) = (0,t,kt+n)^T$, $-\infty<t<\infty$, $-\infty<k<\infty$, sei Leitkurve für einen zylindrischen isophengischen Streifen $(\underline{x}(t),\underline{n}(t))$ der konstanten Helligkeitsstärke $H \geq 0$, dessen Elemente $(X;\underline{n})$ aus der Lichtquelle $Q(0,-m,0)$ beleuchtet und aus dem Auge $A(0,m,0)$, $m \geq 0$, gesehen werden. Zu bestimmen ist die der Lichtquelle zugeordnete Lichtstärke $v(t)$ in der Richtung $\underline{x}(t)$.

Von Interesse sind nur solche Elemente, die erhellt, d. h. beleuchtet sind und gesehen werden können. Für sie gilt mit

$$
\begin{aligned}
&\underline{n}= (0,-\dot{x}_3,\dot{x}_2)^T/(\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)^{1/2}= (0,-k,1)^T/(1+k^2)^{1/2}, \\
(5)\qquad &-\underline{l}= \underline{q}-\underline{x}= (0,-m-t,-kt-n)^T \text{ und} \\
&-\underline{s}= \underline{a}-\underline{x}= (0, m-t,-kt-n)^T
\end{aligned}
$$

die Gleichung

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad &(X;\underline{n}) \text{ erhellt} \Leftrightarrow (\underline{n},-\underline{l})\geq 0 \text{ und } (\underline{n},-\underline{s})\geq 0 \Leftrightarrow km\geq n \text{ und } -km\geq n; \\
&(X;-\underline{n}) \text{ erhellt} \Leftrightarrow (-\underline{n},-\underline{l})\geq 0 \text{ und } (-\underline{n},-\underline{s})\geq 0 \Leftrightarrow km< n \text{ und } -km< n.
\end{aligned}
$$

Setzt man (5) in (4) ein, so ergibt sich

$$
(7)\qquad v(t)= \frac{(1+k^2)\cdot H\cdot \sqrt{((m+t)^2+(kt+n)^2)((m-t)^2+(kt+n)^2)}}{n^2-k^2m^2}
$$

mit $n^2\neq k^2m^2$.

Satz 1: Alle Elemente $(X;\underline{n})$ von isophengischen zylindrischen Streifen $(\underline{x}(t),\ \underline{n}(t))$ mit den Normalenvektoren $\underline{n}= (0,-k,1)^T/(1+k^2)^{1/2}$, deren Trägerpunkte $X(t)$ auf der Leitgeraden $\underline{x}(t)= (0,t,kt+n)^T$ liegen, müssen bei Zentralsicht (A) aus dem Auge $A(0,m,0)$ und bei Zentralbeleuchtung $(Q;v(t))$ aus der Lichtquelle $Q(0,-m,0)$ mit der Lichtstärke $v(t)$ in Richtung $\underline{x}(t)$ beleuchtet werden, damit sie von A aus mit der konstanten Helligkeitsstärke $H\geq 0$ gesehen werden können. $v(t)$ wird vermöge der nichtrationalen algebraischen Funktion (7) berechnet.

Fig. 1 zeigt eine Schar von Lichtstärke-Indikatrizen $I(H,t):= (X(t):\ \underline{x}(t)= (0,t,v(t))^T)$ für die Werte $k= 1/2$, $m= 2$, $n= -2$ und $H= 0, 1/6, \ldots, 1$. Gilt $k= 0$, d. h., die Trägergerade ist parallel zur x_2-Achse, und ist $A= Q$ mit $\underline{a}= \underline{q}= (0,m,0)^T$, so geht (7) über in

$$
(8)\qquad (C_2) \ldots\ v(t)= \frac{H}{(m-n)^2}\, t^2 + H \quad \text{mit } m\neq n \text{ und } H= \text{const.}
$$

Das ist eine Schar nach oben geöffneter Parabeln mit dem Scharparameter H und gemeinsamer x_3-Achse, den Scheitelpunkten $S_H(0,0,H)$ und den Halbparametern $p_H := (m-n)^2/(2H)$ mit $H \neq 0$. Weitere Sonderfälle, die sich aus den Lagebeziehungen von Auge, Lichtquelle und Trägergeraden ergeben, seien dem Leser überlassen.

4. Ist die Trägerkurve eine geschlossene ebene glatte Kurve, z. B. ein Kreis $\underline{x}(t) := (0, r\cos t, r\sin t)^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$ mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius $r > 0$, so können alle Elemente $(X;\underline{n})$ mit den Normalenvektoren $\underline{n} = (0,-\cos t,-\sin t)^T$ von innen aus $Q(0,q_2,q_3)$ beleuchtet und aus $A(0,a_2,a_3)$ gesehen werden, falls $q_2^2 + q_3^2 < r^2$ und $a_2^2 + a_3^2 < r^2$ gilt. In Analogie zur Ermittlung von Gleichung (7) erhält man die Lichtstärke-Funktion

$$(9) \quad v(t) = \frac{H \cdot \sqrt{((q_2 - r\cos t)^2 + (q_3 - r\sin t)^2)((a_2 - r\cos t)^2 + (a_3 - r\sin t)^2)}}{(r - q_2\cos t - q_3\sin t)(r - a_2\cos t - a_3\sin t)}$$

mit $(r - q_2\cos t - q_3\sin t) \neq (r - a_2\cos t - a_3\sin t)$. Fig. 2 zeigt die Schar der notwendigen Lichtstärke-Indikatrizen $I(H,t)$ bzgl. des Einheitskreises $k_0(0,r=1)$ und einer gegebenen Lage von Q und A im Inneren von k_0, wenn alle Elemente die konstante Helligkeitsstärke $H \geq 0$ haben. Für den Sonderfall $A = Q = 0$, d. h., es ist $a_2 = a_3 = q_2 = q_3 = 0$, folgt aus (9) $v(t) = H$.

Satz 2: Alle von der Lichtquelle $Q = A = 0$ aus mit der Lichtstärke $v = H$ beleuchteten Elemente $(X;\underline{n})$, deren Trägerpunkte X auf dem (Einheits-) Kreis $k_0(Q,r \quad 0)$ liegen und deren Normalenvektoren $\underline{n}$ zum Kreismittelpunkt zeigen, erscheinen dem Auge A isophengisch, d. h., sie haben die gleiche Helligkeitsstärke H. Die Lichtstärke-Indikatrizen $I(H,t)$ bilden eine vom Scharparameter H abhängige Schar konzentrischer Kreise mit dem Mittelpunkt Q.

5. Seien $(\underline{l};v(t))$ eine Parallelbeleuchtung mit dem Lichtrichtungsvektor $\underline{l} = (0,l_2,l_3)^T \neq \underline{o}$, $(\underline{s})$ eine Parallelsicht mit dem Sehrichtungsvektor $\underline{s} = (0,s_2,s_3)^T \neq \underline{o}$ und $\underline{x}(t) = (0,t,\sin t)^T$,

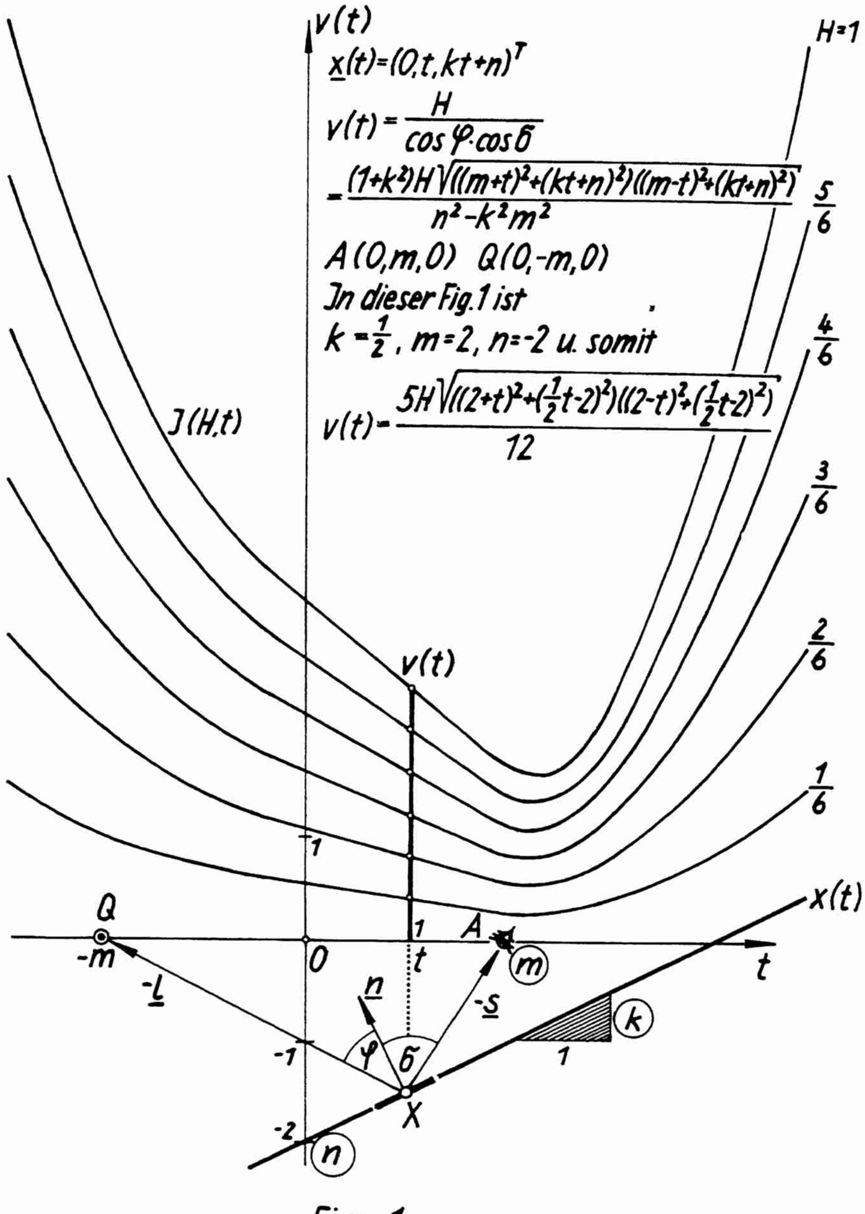

v(t)
x(t)=(0,t,kt+n)^T
v(t) = H / (cos φ·cos σ)
= (1+k²)H √(((m+t)²+(kt+n)²)((m-t)²+(kt+n)²)) / (n²-k²m²)
A(0,m,0) Q(0,-m,0)
In dieser Fig.1 ist
k = 1/2, m=2, n=-2 u. somit
v(t) = 5H √(((2+t)²+(1/2 t-2)²)((2-t)²+(1/2 t-2)²)) / 12
J(H,t)
H=1
5/6
4/6
3/6
2/6
1/6
v(t)
Q
-m
-l
0
t
A
m
n
-s
k
1
φ
σ
X
-1
-2
n
x(t)
t

Fig. 1

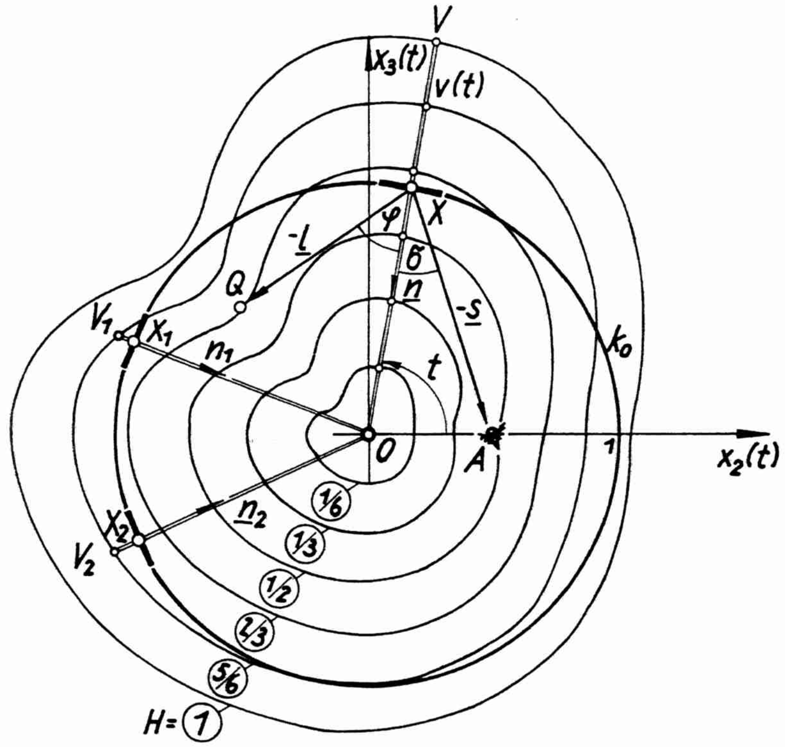

V
$x_3(t)$
$v(t)$
X
φ
σ
$-\underline{l}$
$\underline{n}$
$-\underline{s}$
Q
V_1
X_1
n_1
t
k_0
0
A
1
$x_2(t)$
$\underline{n}_2$
X_2
V_2
1/6
1/3
1/2
2/3
5/6
H= 1

Fig. 2

$-\infty < t < \infty$, eine Sinuskurve als Leitkurve eines isophengischen zylindrischen Streifens $(\underline{x}(t),\ \underline{n}(t))$ mit $\underline{n} = (0, \cos t, -1)^T / (1+\cos^2 t)^{1/2}$, dessen Elemente $(X;\underline{n})$ die konstante Helligkeitsstärke $H \geq 0$ haben. Zu bestimmen ist die Lichtstärke $v(t)$ der Lichtrichtung $\underline{l}$ in Richtung $\underline{x}(t)$ bei gegebener konstanter Helligkeitsstärke H.

Für die $\left\{\begin{array}{l}\text{Lichtrichtungen } \underline{l} \\ \text{Sehrichtungen } \underline{s}\end{array}\right\}$ mit $\left\{\begin{array}{l}135^\circ < \alpha := \sphericalangle(\underline{l},\underline{j}) < 45^\circ,\ \alpha \in [0,\pi] \\ 135^\circ < \beta := \sphericalangle(\underline{s},\underline{j}) < 45^\circ,\ \beta \in [0,\pi]\end{array}\right\}$

gibt es Streifenstücke zwischen $\left\{\begin{array}{l}X_1 \text{ und } X_3 \\ X_4 \text{ und } X_6\end{array}\right\}$, die Elemente

enthalten, die nicht beleuchtet sind und/oder nicht gesehen werden können. Sie liegen im "Licht-" und/oder "Sehschatten".

Mit Hilfe des skalaren Produktes $(\underline{n},\underline{l}) = 0$ erhält man die zu den Punkten $X_1(0, t_1, \sin t_1)$ und $X_2(0, t_2, \sin t_2)$ gehörenden Parameterwerte $t_{1/2} = \mp \arccos(l_3/l_2)$. Die Gerade $g(X_1, X_2)$ ... $\underline{x} = \underline{x}_1 + u\underline{l}$, $-\infty < u < \infty$, schneidet die Sinuskurve in den Punkten $X_1(t_1)$ und $X_3(t_3)$. t_3 wird aus der gemischt-goniometrischen Bestimmungsgleichung

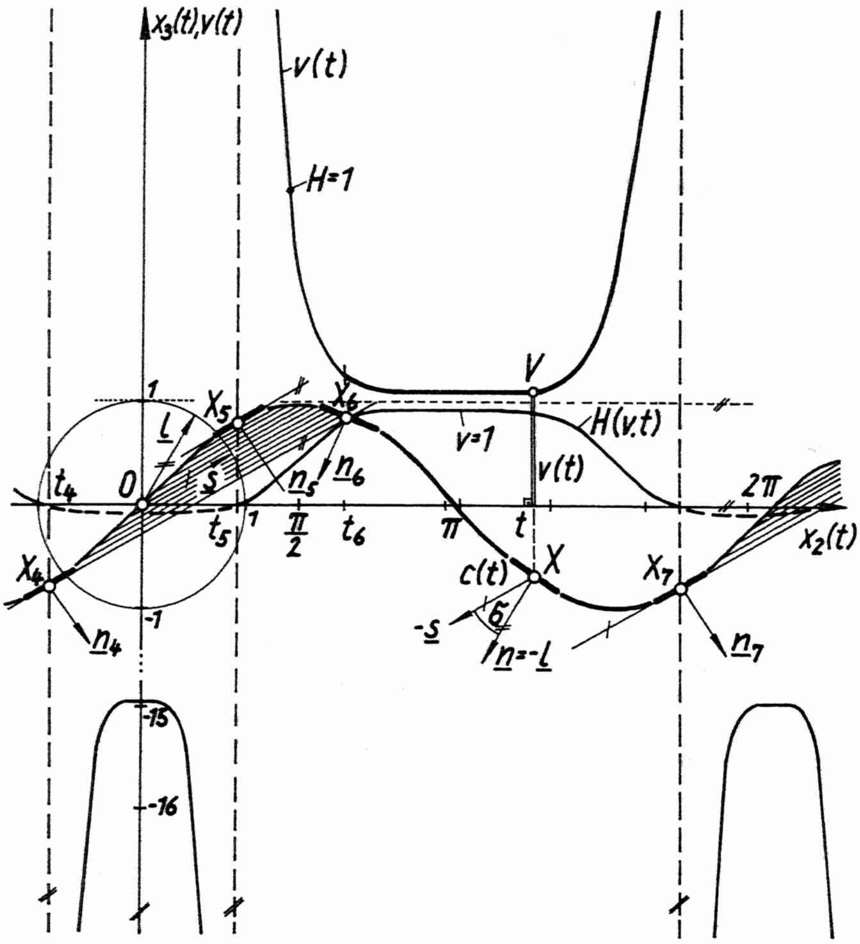
$$(10) \qquad \sin t = (l_3/l_2)t + \sin t_1 - (l_3 t_1)/l_2 \quad \text{mit } l_2 \neq 0$$

näherungsweise graphisch ermittelt und mit dem NEWTONschen Iterationsverfahren beliebig verfeinert.

In analoger Weise erhält man die Punkte $X_i(0, t_i, \sin t_i)$ $(i = 4,5,6)$, wenn man vom skalaren Produkt $(\underline{n},\underline{s}) = 0$ ausgeht. Aus (4) ergibt sich mit den Vektoren $\underline{n}$, $-\underline{l}$ und $-\underline{s}$ die Gleichung

$$(11) \qquad v(t) = \frac{H}{\cos\varphi \cdot \cos\sigma} = \frac{H(1+\cos^2 t)}{(l_3 - l_2\cos t)(s_3 - s_2\cos t)}$$

mit $l_3 \neq l_2 \cos t$ und $s_3 \neq s_2 \cos t$. Fig. 3 zeigt den Verlauf der Lichtstärke-Indikatrizen $I(H,t)$ für die Vektoren
$\underline{l} = (0, l_2, l_3)^T = (0, \cos 60^\circ, \sin 60^\circ)^T = (0,\ 1/2,\ \sqrt{3}/2)^T$ und
$\underline{s} = (0, s_2, s_3)^T = (0, \cos 30^\circ, \sin 30^\circ)^T = (0,\ \sqrt{3}/2,\ 1/2)^T$.



x3(t),v(t)
v(t)
H=1
V
X5
X6
H(v,t)
l
v=1
v(t)
s
n5
n6
t4
0
2π
t5
1
π/2
t6
π
t
x2(t)
X4
c(t)
X
X7
-1
-s
σ
n=-l
n4
n7
-15
-16

Fig. 3

Satz 3: Alle Elemente $(X;\underline{n})$ eines isophengischen zylindrischen Streifens $(\underline{x}(t), \underline{n}(t))$ konstanter Helligkeitsstärke $H \geq 0$ mit der Leitkurve $\underline{x}(t) = (0,t,\sin t)^T$ und den Normalenvektoren $\underline{n}(t) = (0,\cos t,-1)^T/(1+\cos^2 t)^{1/2}$ müssen bei Parallelbeleuchtung $(\underline{l};v(t))$ und Parallelsicht $(\underline{s})$ mit der Lichtstärke $v(t)$ beleuchtet werden, die sich mit Hilfe der transzendenten Funktion (11) berechnen läßt.

6. Die Lichtstärken können mit dem folgenden ATARI-BASIC-Programm elementweise berechnet werden (zweckmäßig wurde $y := x_2$ und $z = x_3$ definiert). Danach kann mit Hilfe der Wertepaare $(t,v(t))$ die Lichtstärke-Indikatrix punktweise konstruiert werden. Das Programm bietet folgende Vorteile:

- Es können andere Funktionen für die Trägerkurven, z. B. Kegelschnitte, transzendente und weitere bekannte Kurven höherer Ordnung durch Angabe ihrer Parameterdarstellungen (Zeile 240) benutzt werden.
- Alle Elemente werden durch die Angabe des Parameters t und der Lichtstärke v in zwei Klassen selektiert:
  - die erhellten Elemente; im Zeichen "$(X;\underline{n})$ H" (Zeile 710),
  - die dunklen Elemente; im Zeichen "$(X;\underline{n})$ D" (Zeile 720).

  Die Beleuchtungsgrenzelemente $BG(X;\underline{n})$ bzw. Sehgrenzelemente $SG(X;\underline{n})$ werden zusätzlich mit BG bzw. SG im Programm gekennzeichnet (Zeilen 730, 740).
- Das Programm kann bei bekannter Lichtstärke v in Richtung $\underline{x}(t)$ nach geringer Modifizierung zur Berechnung der Helligkeitsstärke $H(X;\underline{n}) = v\cdot E\cdot h$ bei geometrischer Erhellung genutzt werden.

```
20 REM ISOPHENGISCHE ERHELLUNG VON ELEMENTMENGEN DURCH
30 REM KONSTRUKTION VON LICHTSTAERKE-INDIKATRIZEN
102 REM EINGABEN
110 REM HELLIGKEITSSTAERKE H
115 REM AUGE A(0,A2,A3) LICHTQUELLE Q(0,Q2,Q3)
120 REM PARAMETERINTERVALL T0<=T<=T1 MIT SCHRITTWEITE W
130 REM TRAEGERKURVE C=C(T)...Y=Y(T),Z=Z(T)
140 INPUT T0,T1,W,H,A2,A3,Q2,Q3
202 REM BERECHNUNG DES LICHTRICHTUNGSVEKTORS L(T)=(0,L2,L3)
204 REM UND SEHRICHTUNGSVEKTORS S(T)=(0,S2,S3)
225 DEG
230 FOR T=T0 TO T1 STEP W
240 Y=COS(T):Z=SIN(T):REM LEITKURVE C(T)...Y=Y(T),Z=Z(T)
250 L2=Q2-Y:L3=Q3-Z:S2=A2-Y:S3=A3-Z
305 REM BERECHNUNG DES NORMALENEINHEITSVEKTORS N(T)=(0,N2,N3)
310 REM DES ELEMENTS (X(T);N(T))
330 REM YP,ZP SIND DIE"PUNKT"-ABLEITUNGEN VON Y(T), Z(T) NACH T
350 YP=-SIN(T):ZP=COS(T):G=SQR(YP*YP+ZP*ZP)
370 N2=ZP/G:N3=-YP/G:REM N ZEIGT NACH AUSSEN
402 REM TEST: ELEMENT (X;N) BELEUCHTET?
410 P1=N2*L2+N3*L3:REM SKALARPRODUKT P1=(N,L)
420 IF P1<0 THEN 720
430 IF P1=0 THEN 730
502 REM TEST: ELEMENT (X;N) SICHTBAR?
510 P2=N2*S2+N3*S3:REM SKALARPRODUKT P2=(N,S)
520 IF P2<0 THEN 720
530 IF P2=0 THEN 740
610 REM  BERECHNUNG DER LICHTSTAERKE V(T)
620 E=P1/SQR(L2*L2+L3*L3)
630 H1=P2/SQR(S2*S2+S3*S3):REM H1:=h
640 V=H/(E*H1):V=INT(V*1000+0.5)/1000
702 REM SELEKTIERUNG DER ERHELLTEN ELEMENTE
710 ? "T=";T,"(X;N) H V=";V:GOTO 800
720 ? "T=";T,"(X;N) D V UNDEF":GOTO 800
730 ? "T=";T,"(X;N) D V UNENDL BG ":GOTO 800
740 ? "T=";T,"(X;N) D V UNENDL SG ":GOTO 800
800 NEXT T
900 GOTO 140
```

Literatur:

/1/ Bohne, E./ Geise, G.: Zur Begriffswelt der Beleuchtungsgeometrie. Beiträge zur Algebra und Geometrie 20(1985), 117-122.

/2/ Bohne, E./ Möller, R.: Einführung in die Beleuchtungsgeometrie. Dresdner Reihe zur Lehre, Pädagogische Hochschule "K.F.W. Wander" Dresden, 12/1986.

/3/ Knabe, P.: Über eine neue Helligkeitsstärke-Indikatrix für spitz gestreute Reflexion an geometrisch erhellten Flächenelementen. Wiss. Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule "K.F.W. Wander" Dresden, Mathematisch-naturwiss. Reihe 20(1986), 9-15.

/4/ Wenger, E.: 3D-Graphik - Einführung und Grundbegriffe. Teil 4. Mitteilungen der Austrian Computer Graphics Association ACGA. CAD Computergraphik und Konstruktion 33(1984), 20-28.

Manuskripteingang: 6.9.1989

VERFASSER:

ERHART BOHNE, PETER KNABE
Pädagogische Hochschule 'K.F.W. Wander' Dresden
Sektion Mathematik
Wigardstr. 17
DDR - 8060 Dresden