Werk

Titel: Eine Vervollständigung der Chowvarietät der Punktetripel

Autor: Schröder, O.

Jahr: 1989

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0029|log20

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
29(1989),101-120

EINE VERVOLLSTÄNDIGUNG DER CHOWVARIETÄT DER PUNKTETRIPEL

Olaf Schröder

Herrn Prof.Dr.O.Krötenheerdt zum 60.Geburtstag gewidmet

0. Einleitung In [3] haben wir die Chowvarietät der ungeordneten Punktetripel, die in der projektiven Ebene liegen, beschrieben und gezeigt, daß sie bezüglich der Bedingungen P, T und G, die sich in natürlicher Weise im Vergleich mit den Schubertdreiecken der geordneten Punktetripel, s. [4] , ergeben, nicht PGL(3)-vollständig ist. In dieser Arbeit wollen wir eine singularitätenfreie und zur Chowvarietät der ungeordneten Punktetripel birational äquivalente Varietät $C^{(5)}$ konstruieren, die bezüglich der Bedingungen P, T und G die Eigenschaft, PGL(3)-vollständig zu sein, besitzt. Am Schluß der Arbeit geben wir alle 5-dimensionalen und alle minimalen stabilen Untervarietäten von $C^{(5)}$ an. Zur Konstruktion von $C^{(5)}$ bedienen wir uns im wesentlichen der von Sterz in [5] angegebenen Abbildungen. Der $\mathbb{P}^9$, der Parameterraum der ebenen Kurven 3. Ordnung, wurde in [5] mit einer Folge von Aufblasungen bezüglich einer Berührungsbedingung vervollständigt. Fassen wir die Chowvarietät der Punktetripel als Menge von Linienkurven dritter Ordnung auf, so liegt es nahe, die von Sterz angegebenen Abbildungen heranzuziehen.

Als Korollar zeigen wir im Abschnitt 6, daß die zu den Schubertdreiecken analoge Vervollständigung, also die Varietät (1,p,g), s. [3] , wie Semple in [4] schon vermutete, nicht singularitätenfrei ist. In Anlehnung an die Arbeit [4] werden auch wir unsere Varietäten Modelle nennen.

1. Definitionen und Grundlagen In dieser Arbeit sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Auf der Chowvarietät C der Punktetripel definierten wir in [3] die

Bedingungen L, P, T und G. Einem regulären, also nicht kollinearen, Punktetripel (λ) in der projektiven Ebene $\mathbf{P}_K^2$ und mit der zugeordneten Form

$$\lambda_{ijk}u^iu^ju^k \in K[U^0,U^1,U^2] \quad , \tag{1.1}$$

ordneten wir eindeutig das Geradentripel (π), der Verbindungsgeraden von (λ) zu, welches Nullstellenmenge der Form

$$\pi^{ijk}X_iX_jX_k \in K[X_0,X_1,X_2] \tag{1.2}$$

ist. (Wir verwenden hier und im weiteren die Summenkonvention, wobei die Indizes die Menge $\{0,1,2\}$ durchlaufen.) Diese Zuordnung ist eindeutig umkehrbar und stellt auf der offenen Untermenge U der regulären Punktetripel von C einen biregulären Morphismus σ, mit $\sigma(\lambda) = (\pi) \in \check{\mathbf{P}}_K^9$, $(\lambda) \in U$, dar. Der Zariskiabschluß des Bildes $\lambda(U)$ im $\check{\mathbf{P}}_K^9$ sei die Varietät (p).

Als eine Bedingung L bezeichnen wir eine Untervarietät von C, die für ein vorgegebenes $(u) \in \check{\mathbf{P}}_K^2$ durch eine Form

$$L_{ijk}u^iu^ju^k \in K[L_{000},\ldots,L_{222}] \tag{1.3}$$

ausgeschnitten wird. Eine Untervarietät von (p), die Nullstellenmenge einer Form

$$P^{ijk}X_iX_jX_k \in K[P^{000},\ldots,P^{222}] \quad , \tag{1.4}$$

für einen vorgegebenen Punkt $(x) \in \mathbf{P}_K^2$, ist, bezeichnen wir mit P'. Eine Bedingung P ist eine Untervarietät von C, die gleich der eigentlich Transformierten einer Untervarietät P' bei dem Morphismus σ^{-1} ist.

Einem regulären Punktetripel (λ) ordnen wir eindeutig ein Linienkegelschnittnetz zu, welches von den Gleichungen

$$\Lambda \cdot \begin{pmatrix} u^0u^0 \\ u^0u^1 \\ \vdots \\ u^2u^2 \end{pmatrix} = 0, \text{ mit} \tag{1.5}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{000} & 2\lambda_{001} & 2\lambda_{002} & \lambda_{011} & 2\lambda_{012} & \lambda_{022} \\ \lambda_{001} & 2\lambda_{011} & 2\lambda_{012} & \lambda_{111} & 2\lambda_{112} & \lambda_{122} \\ \lambda_{002} & 2\lambda_{012} & 2\lambda_{022} & \lambda_{112} & 2\lambda_{122} & \lambda_{222} \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

Diese Zuordnung liefert einen biregulären Morphismus von U in die Graßmannvarietät G(2,5). Wir nummerieren die Spalten von von 1 bis 6 durch. Dann sei τ_{ijk}, $i<j<k$; $i,j,k \in \{1,\ldots,6\}$, die dreireihige Unterdeterminante von Λ mit den Spalten i,j und k. In Λ ersetzen wir die λ_{ijk} durch Unbestimmte L_{ijk} und bezeichnen die zugehörigen dreireihigen Unterdeterminanten entsprechend mit T_{ijk}. Eine Bedingung T ist eine Untervarietät von C, die durch eine Form

$$\sum_{P_i \in I} (-1)^{j(P_i)} T_{i_1 i_2 i_3} \tau_{i_4 i_5 i_6} \in K[L_{000},\ldots,L_{222}], \quad (1.6)$$

ausgeschnitten wird, wobei $j(P_i)$ die Anzahl der Inversionen der Permutation $P_i=(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)$ sei und I die Menge aller Permutationen mit $i_1<i_2<i_3$ und $i_4<i_5<i_6$. Eine Bedingung G ist eine zu einer Bedingung T duale Bedingung, s.a. [3].

Die Varietäten $C^{(i)}$, $i=1,\ldots,5$, werden wir mittels allgemeiner Nullstellen beschreiben. Liegt eine Varietät mit der allgemeinen Nullstelle $(x_0:\ldots:x_n) \in \mathbb{P}^n_\Omega$, Ω ein Universalkörper der K und genügend viele Unbestimmte über K enthält, nicht auf der Hyperebene $x_i=0$, so ist die mit $x_i=1$ normalisierte affine allgemeine Nullstelle, kurz a.a.N., mit $(x_0/x_i:\ldots:1:\ldots:x_1/x_i) \in \mathbb{P}^n_\Omega$ ebenfalls allgemeine Nullstelle dieser Varietät, s.a. [2].

Bemerkung 1.1.: Zur Untersuchung der $\mathfrak{G}$-Vollständigkeit einer Varietät Q bezüglich einer einfachen, d.h. $\operatorname{codim}_Q B=1$, Bedingung B konnten wir uns auf die minimalen stabilen Untervarietäten von Q beschränken, s.a. [3]. Unter unseren Voraussetzungen ist $\mathfrak{G}=PGL(3,K)$. Das bedeutet insbesondere, daß in unserem Fall die Gruppe PGL(3,K) auf Q Automorphismen induziert. Womit Q genau dann singularitätenfrei ist, wenn alle minimalen stabilen Untervarietäten von Q nicht singulär auf Q sind.

2. Das Modell $C^{(1)}$ Wir geben zuerst eine allgemeine Nullstelle der Chowvarietät C der ungeordneten Punktetripel an.

Hilfssatz 2.1.: Die a.a.N. (1,I), mit

$l_{000}=1$, $l_{001}=c$, $l_{002}=e$, $l_{011}=(A^2-Q^2)+c^2$, $l_{012}=(A^2-Q^2)d+ce$,
$l_{022}=(A^2-Q^2)(-B^2+d^2)+e^2$, $l_{111}=(A^2-Q^2)(2Q+3c)+c^3$,
$l_{112}=(A^2-Q^2)(2AB+2dQ+2cd+e)+c^2e$,

$$l_{122}=(A^2-Q^2)(2B^2Q+4dAB+2d^2Q-B^2c+cd^2+2de)+ce^2,$$
$$l_{222}=(A^2-Q^2)(2AB^3+6dB^2Q+6d^2AB+2d^3Q-3B^2e+3d^2e)+e^3, \qquad (2.1)$$

c, e, d, A, B, $Q\in\Omega$ Unbestimmte über K, ist eine a.a.N. von C.

Beweis: In der a.a.N. (1,I) substituieren wir:

$$c=a_o,\ e=b_o,\ A=\frac{a_1^2}{2a_2}-\frac{a_2^2}{2a_1},\ Q=-\frac{a_1^2}{2a_2}-\frac{a_2^2}{2a_1}, \qquad (2.2)$$

$$B=\frac{b_2}{2a_2}-\frac{b_1}{2a_1},\ d=\frac{b_2}{2a_2}+\frac{b_1}{2a_1},$$

und erhalten die a.a.N. (1,0) von C aus [3] . Es sei C' die zu (1,0) zugehörige Varietät. Mit (2.2) haben wir einen surjektiven Ringhomomorphismus von $K[(1,1)]\longrightarrow K[(1,0)]$ definiert. Also ist die 6-dimensionale Varietät C Untervarietät der 6-dimensionalen Varietät C'. Woraus C=C' folgt.

Die erste Aufblasung der Punktkurven dritter Ordnung wurde in [5] mittels eines Connex konstruiert. Wir dualisieren auf den Fall der Linienkurven 3. Ordnung. Dies wollen wir im folgenden immer stillschweigend tun. Für eine Linienkurve, die der Gleichung

$l_{ijk}u^iu^ju^k=0$, $(u^o:u^1:u^2)\in P_K^2$, genügt, ist die zugehörige Gleichung des Connex

$$B_{rs}^{ij}u^ru^sx_ix_j=0. \qquad (2.3)$$

Die Gleichung transformiert sich zweifach kovariant und zweifach kontravariant, s. [5] . Die B_{rs}^{ij} sind Formen in den l_{ijk}.

$$B_{rs}^{ii}=\frac{1}{2}(l_{rjj}l_{skk}-2l_{rjk}l_{sjk}+l_{rkk}l_{sjj}), \qquad (2.4)$$
$$B_{rs}^{ij}=\frac{1}{2}(l_{rik}l_{sjk}-l_{rij}l_{skk}+l_{rjk}l_{sik}-l_{rkk}l_{sij}),$$

$i,j,k\in\{0,1,2\}$; $i\neq j\neq k\neq i$; $r,s\in\{0,1,2\}$.

Da die B_{rs}^{ij} symmetrisch sind:

$$B_{rs}^{ij}=B_{sr}^{ij}=B_{rs}^{ji}=B_{sr}^{ji}, \qquad (2.5)$$

können wir uns auf die Angabe der 36 Formen B_{rs}^{ij}, $i\leqq j$ und $r\leqq s$, beschränken. Die Untervarietät $A_2\subset C$, der Dreifachpunkte, ist die Nullstellenmenge der Formen (2.4). Wir setzen die a.a.N. (1,I) in (2.4) ein und erhalten die Koordinaten b_{rs}^{ij} einer allgemeinen Nullstelle $(b,I')\in P_\Omega^{35}$.

In (b,I') ist $b^{22}_{oo}=(A^2-Q^2)$. Außerdem enthalten auch alle anderen b^{ij}_{rs} in (b,I') den Faktor (A^2-Q^2). Die mit $b^{22}_{oo}=1$ normalisierte a.a.N. bezeichnen wir mit (b,I).

Definition 2.2.: Das Modell $C^{(1)} \subset \mathbb{P}^9_K \times \mathbb{P}^{35}_K$ sei die zu der a.a.N. $(1,b,I):=((1,I),(b,I)) \in \mathbb{P}^9_\Omega \times \mathbb{P}^{35}_\Omega$ gehörige Varietät. Die Abbildung $p_1: C^{(1)} \longrightarrow C$ sei die Projektionsabbildung $p_1(1,b)=(1)$.

Wir geben alle b^{ij}_{rs} von (b,I) an, die nicht für $A^2-Q^2=c=e=0$ verschwinden.

$b^{22}_{oo}=1$, $b^{12}_{oo}=-d$, $b^{11}_{oo}=-B^2+d^2$, $b^{22}_{o1}=Q+c$, $b^{12}_{o1}=-AB-dQ-cd$,
$b^{11}_{o1}=QB^2+2dAB+d^2Q-B^2c+cd^2$, $b^{22}_{o2}=AB+dQ+e$, $b^{12}_{o2}=-B^2Q-2dAB-d^2Q-de$,
$b^{11}_{o2}=AB^3+3dB^2Q+3d^2AB+d^3Q-B^2e+d^2e$. (2.6)

Alle anderen b^{ij}_{rs} sind Formen in den b^{ij}_{rs} aus (2.6).

Bemerkung 2.3.: Für ein $g \in PGL(3,\Omega)$, mit $g(u)=\bar{u}$ und $g(x)=\bar{x}$ für $(u) \in \check{\mathbb{P}}^2_\Omega$ und $(x) \in \mathbb{P}^2_\Omega$, können wir die Transformationsgleichungen in der Form $\bar{u}^j = a^j_i u^i$ und $\bar{x}_i = \alpha^j_i x_j$ mit $a^k_i \alpha^j_k = \sigma^j_i$,

$\sigma^j_i = \begin{cases} 1 \text{ für } i=j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$, schreiben. Es sei $g \in PGL(3,\Omega)$ speziell gewählt: $\bar{u}^0 = u^0 + cu^1 + eu^2$, $\bar{u}^1 = u^1 + du^2$, $\bar{u}^2 = u^2$. (2.7)

Dieses g transformiert die a.a.N. $(\bar{1},I)$, mit

$\bar{1}_{ooo}=1$, $\bar{1}_{oo1}=0$, $\bar{1}_{oo2}=0$, $\bar{1}_{o11}=(A^2-Q^2)$, $\bar{1}_{o12}=0$, $\bar{1}_{o22}=(A^2-Q^2)(-B^2)$,
$\bar{1}_{111}=(A^2-Q^2)(2Q)$, $\bar{1}_{112}=(A^2-Q^2)(2AB)$, $\bar{1}_{122}=(A^2-Q^2)(2B^2Q)$,
$\bar{1}_{222}=(A^2-Q^2)(2AB^3)$, (2.8)

in die a.a.N. (1,I). Ebenfalls können wir in (b,I) für die Unbestimmten c=d=e=0 setzen und erhalten eine a.a.N. $(\bar{b},I)$. Mit g wie oben, $b^{ij}_{kl} = a^r_k a^s_l \alpha^i_m \alpha^j_n \bar{b}^{mn}_{rs}$, wird die a.a.N. $(\bar{b},I)$ in die a.a.N. (b,I) transformiert. Diese Art der Vereinfachung werden wir im weiteren öfter anwenden.

Satz 2.4.: Das Modell $C^{(1)}$ ist nicht singularitätenfrei. Die Punkte der Untervarietät mit der a.a.N. $(1,b,I)|_{A=Q=0}$, die man aus (1,b,I) erhält indem man A=B=0 setzt, sind singulär auf $C^{(1)}$.

Beweis: Wir betrachten den affinen Koordinatenring $K[(1,b,I)]$. Dieser ist isomorph zu dem Ring

$$K[c,e,d,A^2,Q,AB,B^2] \cong K[X_1,X_2,\ldots,X_7] / (X_6^2 - X_4X_7).$$

Die singulären Punkte der Hyperfläche, die Nullstellenmenge der Form $X_5^2-X_4X_7$ in $\mathbb{P}_K^7$ ist, sind die Punkte mit $x_4=x_6=x_7=0$.

Satz 2.5.: (i) Die Abbildung p_1: $C^{(1)} \longrightarrow C$ ist auf $C \setminus A_2$ biregulär, A_2 ist die Untervarietät der Dreifachpunkte.
(ii) Das Urbild $p_1^{-1}(A_2)$ ist eine 5-dimensionale Untervarietät von $C^{(1)}$.
(iii) Die Fasern $p_1^{-1}(a)$, $a \in A_2$, sind alle zueinander biregulär isomorph und jede dieser Fasern besitzt selbst singuläre Punkte.
(iv) Die Vereinigung aller singulären Punkte der Fasern $p_1^{-1}(A_2)$, $a \in A_2$, ist eine Varietät mit der a.a.N. $(1,b,I)|_{A=Q=0}$.

Beweis: Die Gruppe PGL(3), im weiteren sei PGL(3):=PGL(3,K), induziert auf $C^{(1)}$ bireguläre Isomorphismen.
(i): In [5] wurde gezeigt, daß die Formen (2.4) die Nullstellenmenge A_2 besitzen.
(ii): Die Untervarietät $A_2 \subset C$ ist singularitätenfrei, da auf A_2 die Gruppe PGL(3) transitiv operiert. Da p_1^{-1} eine birationale Abbildung ist, ist das Bild einer singularitätenfreien Untervarietät wieder eine Varietät, s. [2]. Mit $(A^2-Q^2)=0$ in $(1,b,I)$ ist eine a.a.N. von $p_1^{-1}(A_2)$ gegeben, woraus die Dimensionsbehauptung folgt.
(iii) und (iv): Die Gruppe induziert zwischen den Fasern von $p_1^{-1}(A_2)$ bireguläre Isomorphismen, da die Gruppe PGL(3) auf A_2 transitiv operiert. Wir betrachten eine Faser und setzen dazu in $(1,b,I)$ für c=e=0 und A=Q. So erhalten wir den Koordinatenring

$$K[d,B^2,Q,BQ] \cong K[X_1,X_2,X_3,X_4]/(X_4^2-X_3^2X_2) \ .$$

Woraus die Behauptungen folgen.

In [3] gaben wir eine allgemeine Nullstelle (p,0) der Varietät $(p) \in \mathbb{P}_K^9$ an. Mit der Substitution (2.2), auf (p,0) angewandt, und nach Multiplikation aller Koordinaten mit $(A^2-Q^2)^{-1}$ erhalten wir die allgemeine Nullstelle (p,I). Wir geben die verkürzte Darstellung $(\bar{p},I)$ an:

$$\bar{p}_{222}=A,\ \bar{p}_{122}=-BQ,\ \bar{p}_{112}=AB^2,\ \bar{p}_{111}=-B^3Q,\ \bar{p}_{022}=-B(A^2-Q^2),\ \bar{p}_{012}=0,$$
$$\bar{p}_{011}=B^3(A^2-Q^2),\ \bar{p}_{002}=0,\ \bar{p}_{001}=0,\ \bar{p}_{000}=4B^3(A^2-Q^2)^2 \ . \qquad (2.9)$$

3. Das Modell $C^{(2)}$ Die Untervarietät mit der a.a.N. $(1,b,I)|_{A=Q=0}$ heiße B_4. B_4 spielt eine ausgezeichnete Rolle auf $C^{(1)}$,

wie in Satz 2.5. (iv) gezeigt wurde. Wir gehen weiter wie in [5] vor, wo eine zu B_4 biregulär äquivalente Untervarietät mit derselben a.a.N. Zentrum der zweiten Aufblasung ist. Dazu bilden wir wie in [5] das antisymmetrische Produkt aus der zu einer Geraden $(w) \in \check{\mathbb{P}}_K^2$ gebildeten Polarengleichung $l_{ijk}w^i u^j u^k = 0$ und dem Connex $b^{rs}_{mn} v^m v^n x_r x_s = 0$:

$$G_{ijk\ mn}^{\ \ \ rs} w^i u^j u^k v^m v^n x_r x_s = (l_{ijk} w^i u^j u^k)(b^{rs}_{mn} v^m v^n x_r x_s) - (l_{imn} w^i v^m v^n)(b^{rs}_{jk} u^j u^k x_r x_s). \qquad (3.1)$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung sind lineare Formen in l_{ijk} und b^{rs}_{mn}:

$$G_{ijk\ mn}^{\ \ \ rs} = l_{ijk} b^{rs}_{mn} - l_{imn} b^{rs}_{jk} . \qquad (3.2)$$

Da $G_{ijk\ mn}^{\ \ \ rs} = -G_{imn\ jk}^{\ \ \ rs}$ ist, können wir uns, wie in [5] , auf die Angabe der 270 Formen $G_{ijk\ mn}^{\ \ \ rs}$ mit $i,j,k,m,n,r,s \in \{0,1,2\}$ und $j \leqq k$, $m \leqq n$, $r \leqq s$, $j < m$ oder $j = m$ und $k < n$, beschränken.

Bemerkung 3.1.: Die Formen (3.2) verschwinden auf $C^{(1)}$ genau auf der Untervarietät B_4, wie aus dem analogen Beweis aus [5] folgt.

Wir ergänzen die Formen (3.2) durch eine weitere Reihe von Formen. Ein Linienelement (x,u), welches der Gleichung $b^{ij}_{kl} x_i x_j u^k u^l = 0$ des allgemeinen Connex und $u^i x_i = 0$ genügt, ordnet der Geraden (u) im allgemeinen zwei verschiedene Punkte (x) zu. Diese zwei Punkte fallen genau dann zusammen, wenn die Gleichung

$$P^{ijklmn} x_i x_j x_k x_l x_m x_n = 0 \qquad (3.3)$$

erfüllt ist, s [5]. Aus den L_{ijklmn} aus [5] erhält man die P^{ijklmn}, indem man obere und untere Indexes vertauscht. Die P^{ijklmn} sind ausschließlich Formen in den b^{st}_{qr}, die ebenfalls auf der Untervarietät B_4 verschwinden.

Weiter wie in [5] bilden wir die in zwei Klassen eingeteilte Reihe homogener Formen:

$$(1)_{M_{ijk\ lm}^{\ \ \ rs}\ \alpha\beta}^{\ \ \ \gamma\delta} = G_{ijk\ lm}^{\ \ \ rs}\ b^{\gamma\delta}_{\alpha\beta},$$
$$(2)_{M^{ijklmn}_{\ \ \ \alpha\beta\gamma}} = P^{ijklmn}\ l_{\alpha\beta\gamma} . \qquad (3.4)$$

Die a.a.N. (1,b,I) setzen wir in (3.4) ein, und erhalten eine allgemeine Nullstelle (x,I) einer Varietät in $\mathbb{P}_K^{9999}$ mit:

$$^{(1)}m_{000}\,{}^{22}_{01}\,{}^{22}_{00} = Q,\quad ^{(1)}m_{000}\,{}^{22}_{02}\,{}^{22}_{00} = AB+dQ,$$

$$^{(1)}m_{000}\,{}^{11}_{01}\,{}^{22}_{00} = QB^2+2dAB+d^2Q,\quad ^{(1)}m_{000}\,{}^{11}_{02}\,{}^{22}_{00} = AB^3+3dQB^2+3d^2AB+d^3Q,$$

$$^{(1)}m_{100}\,{}^{22}_{01}\,{}^{22}_{00} = -(A^2-Q^2)+cQ,\quad ^{(2)}m^{222222}_{000} = A^2. \tag{3.5}$$

Alle übrigen Koordinaten sind Elemente des Ideals, welches von Elementen aus (3.5) in dem Ring $K[c,d,e,A,B,Q]$ erzeugt wird. Zusätzlich zu den Koordinaten in (3.5) geben wir noch folgende verkürzte Koordinaten, wie in (2.9), an:

$$^{(2)}\bar{m}^{122222}_{000} = -ABQ,\quad 5\cdot{}^{(2)}\bar{m}^{112222}_{000} = 3B^2Q^2+2A^2B^2,$$

$$^{(2)}\bar{m}^{111222}_{000} = -AB^3Q,\quad 5\cdot{}^{(2)}\bar{m}^{111122}_{000} = 3A^2B^4+2B^4Q^2,$$

$$^{(2)}\bar{m}^{111112}_{000} = -AB^5Q,\quad ^{(2)}\bar{m}^{111111}_{000} = B^6Q^2. \tag{3.6}$$

<u>Definition 3.2.:</u> Das Modell $C^{(2)} \subset \mathbb{P}^9_K \times \mathbb{P}^{35}_K \times \mathbb{P}^{9999}_K$ sei die zu der allgemeinen Nullstelle $(l,b,m,I):=((l,b,I),(m,I)) \in \mathbb{P}^9_\Omega \times \mathbb{P}^{35}_\Omega \times \mathbb{P}^{9999}_\Omega$ zugehörige Varietät. Die Abbildung $p_2: C^{(2)} \longrightarrow C^{(1)}$ sei die Projektionsabbildung $p_2(l,b,m)=(l,b)$.

Bevor wir das Singularitätsverhalten von $C^{(2)}$ untersuchen, substituieren wir

$$A=\mathring{a}\mathring{q},\quad Q=\mathring{q} \text{ und } B=\mathring{b}, \tag{3.7}$$

in (l,b,m,I) und multiplizieren die m-Koordinaten mit $\mathring{q}^{-1}$. Dann erhalten wir die a.a.N. (l,b,m,II) mit den schon in (3.5) angeführten Koordinaten:

$$^{(1)}m_{000}\,{}^{22}_{01}\,{}^{22}_{00} = 1,\quad ^{(1)}m_{000}\,{}^{22}_{02}\,{}^{22}_{00} = \mathring{a}\mathring{b}+d,$$

$$^{(1)}m_{000}\,{}^{11}_{01}\,{}^{22}_{00} = \mathring{b}^2+2d\mathring{a}\mathring{b}+d^2,\quad ^{(1)}m_{000}\,{}^{11}_{02}\,{}^{22}_{00} = \mathring{a}\mathring{b}^3+3d\mathring{b}^2+3d^2\mathring{a}\mathring{b}+d^3,$$

$$^{(1)}m_{100}\,{}^{11}_{01}\,{}^{22}_{00} = -(\mathring{a}^2\mathring{q}-\mathring{q})+c,\quad ^{(2)}m^{222222}_{000} = \mathring{a}^2\mathring{q}. \tag{3.8}$$

<u>Satz 3.3.:</u> Das Modell $C^{(2)}$ besitzt singuläre Punkte. Speziell alle Punkte der Untervarietäten von $C^{(2)}$, die durch die a.a.Nullstellen $(l,b,m,II)|_{\mathring{a}=\mathring{b}=0}$ und $(l,b,m,II)|_{\mathring{b}=\mathring{q}=0}$ definiert werden, sind auf $C^{(2)}$ singulär.

<u>Beweis:</u> Der affine Koordinatenring $K[(l,b,m,II)]$ ist isomorph zu dem Ring

$$K[c,e,d,q,b^2,ab,a^2q] \cong K[X_1,\dots,X_7]/(X_6^2X_4-X_5X_7)\,.$$

Von dem Ideal $(X_6^2X_4-X_5X_7)$ bilden wir das Jacobiideal und erhalten die Behauptung.

Die 4-dimensionale Untervarietät mit der a.a.N. $(1,b,m,II)\big|_{\mathring{a}=\mathring{b}=0}$ heiße $D_4^{(2)}$, und die 3-dimensionale Untervarietät mit der a.a.N. $(1,b,m,II)\big|_{\mathring{b}=\mathring{q}=0}$ heiße E_3.

Satz 3.4.: Die Abbildung p_2: $C^{(2)} \longrightarrow C^{(1)}$ ist birational, und p_2^{-1} ist auf $C^{(1)} \setminus B_4$ biregulär. Das Bild von B_4 bei p_2^{-1} ist eine 5-dimensionale Untervarietät $\tilde{B}_5 \subset C^{(2)}$, die die a.a.N. $(1,b,m,II)\big|_{\mathring{q}=0}$ besitzt.

Beweis: Der erste Teil folgt mit Bemerkung 3.1. und der Konstruktion von $C^{(2)}$. Die Untervarietät $B_4 \subset C^{(1)}$ besitzt zwei Orbits, die 3-dimensionale stabile Untervarietät V_3 von B_4 und die offene Menge $B_4 \setminus V_3$. V_3 ist die Untervarietät von B_4 mit der a.a.N. $(1,b,I)\big|_{A=B=0}$. Mit Bemerkung 1.1. reicht es, zum Nachweis der Singularitätenfreiheit von B_4, den Koordinatenring $K[(1,b,I)]/(A,Q)$ zu betrachten. Es ist

$$K[(1,b,I)]/(A,Q) \cong K[c,d,e,B^2],$$

und damit ist B_4 singularitätenfrei. Demnach ist $p_2^{-1}(B_4)$ eine Varietät, s.a. [2]. Mit (3.7) besitzt $\tilde{B}_5$ auch die angegebene a.a.N.

Zur Bestimmung der minimalen stabilen Untervarietäten benötigen wir später folgenden Satz.

Satz 3.5.: Von den Koordinaten λ_{ijk}, β_{ij}^{rs}, $^{(1)}\mu_{ijk\ lm\ \alpha\beta}^{rs\ \gamma\delta}$, $^{(2)}\mu_{ijklmn\ \alpha\beta\gamma}$ eines Punktes $(\lambda,\beta,\mu) \in C^{(2)}$ ist immer eine Koordinate $^{(1)}\mu_{ijk\ lm\ \alpha\beta}^{rs\ \gamma\delta} \neq 0$.

Beweis: Es seien alle $^{(1)}\mu_{ijk\ lm}^{rs} = 0$ und ein $^{(2)}\mu_{ijklmn\ \alpha\beta\gamma} \neq 0$. Dann kann man sicher ein $g \in PGL(3)$ finden, so daß alle $^{(1)}\mu_{ijk\ lm\ \alpha\beta}^{rs\ \gamma\delta} = 0$ bleiben und $^{(2)}\mu_{ooo}^{222222} \neq 0$ ist. Dies ist aber nicht möglich, da das zu der a.a.N. $(1,b,m,I)$ mehrfach homogene assoziierte Ideal die Form

$$^{(2)}\mu_{ooo}^{222222} + {}^{(1)}\mu_{1oo\ o1\ oo}^{22\ 22} - {}^{(1)}\mu_{ooo\ o1\ o1}^{22\ 22} \qquad (3.9)$$

enthält. In (m,I) ist $^{(1)}m_{ooo\ o1\ o1}^{22\ 22} = Q^2+cQ$.

Bemerkung 3.6.: Auf E_3 sind alle ${}^{(2)}m^{ijklmn}_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

Die Substitution (3.7) wenden wir auf die allgemeine Nullstelle (p,I) an und erhalten nach Multiplikation aller Koordinaten mit $\mathring{q}^{-1}$ die allgemeine Nullstelle (p,II). Wir geben die verkürzte Darstellung $(\bar{p},II)$ an:

$\bar{p}_{222}=\mathring{a}$, $\bar{p}_{122}=-\mathring{b}$, $\bar{p}_{112}=\mathring{a}\mathring{b}^2$, $\bar{p}_{111}=-\mathring{b}^3$, $\bar{p}_{o22}=-\mathring{b}(\mathring{a}^2\mathring{q}-\mathring{q})$, $\bar{p}_{o12}=0$,
$\bar{p}_{o11}=\mathring{b}^3(\mathring{a}^2\mathring{q}-\mathring{q})$, $\bar{p}_{o22}=0$, $\bar{p}_{oo1}=0$, $\bar{p}_{ooo}=4\mathring{b}^3(\mathring{a}^2\mathring{q}-\mathring{q})(\mathring{a}^2\mathring{q}^2-\mathring{q}^2)$. (3.10)

4. Das Modell $C^{(3)}$ Mit der Konstruktion von $C^{(3)}$ wollen wir die singuläre Untervarietät E_3 auf $C^{(2)}$ beseitigen. Dazu betrachten wir die Formen $G_{ijk}{}^{rs}_{lm}$ und ${}^{(2)}M^{ijklmn}_{\alpha\beta\gamma}$ auf $C^{(2)}$, s.a. [5].

Satz 4.1.: Auf $C^{(2)}$ besitzen die Formen $G_{ijk}{}^{rs}_{lm}$ und ${}^{(2)}M^{ijklmn}$ die Nullstellenmenge $\tilde{B}_5 \subset C^{(2)}$.

Beweis: Aus der Konstruktion der Abbildung p_2 folgt, daß die Nullstellenmenge der Formen $G_{ijk}{}^{rs}_{lm}$ und ${}^{(2)}M^{ijklmn}_{\alpha\beta\gamma}$ in der Untervarietät $p_2^{-1}(B_4)$ enthalten sein muß. Andererseits verschwinden obige Formen auf der a.a.N. $(1,b,m,II)\big|_{\mathring{q}=0}$, also auf $\tilde{B}_5$.

Wir bilden die in zwei Klassen eingeteilte Reihe homogener Formen, s. [5]:

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}N_{ijk}{}^{rs}_{lm\,abc\,de}{}^{fg}_{\alpha\beta} &= G_{ijk}{}^{rs}_{lm} \cdot {}^{(1)}M_{abc\,de}{}^{fg}_{\alpha\beta}, \\
{}^{(2)}N^{ijklmn}_{abc\,\alpha\beta\gamma}{}^{\mu\nu}_{\delta\varepsilon} &= {}^{(2)}M^{ijklmn}_{abc} \cdot L_{\alpha\beta\gamma} \cdot B^{\mu\nu}_{\delta\varepsilon}. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

In (4.1) setzen wir die a.a.N. (1,b,m,II) ein, wobei wir die $G_{ijk}{}^{rs}_{lm}$ als Formen in den L_{ijk} und B^{rs}_{ij} auffassen, multiplizieren alle Koordinaten mit $\mathring{q}^{-1}$ und erhalten die a.a.N. (n,II), einer zu C birational äquivalenten Varietät in $P_K^{2725199}$.

Definition 4.2.: Das Modell $C^{(3)} \subset P_K^9 \times P_K^{35} \times P_K^{9999} \times P_K^{2725199}$ sei die zu der a.a.N. $(1,b,m,n,II) := ((1,b,m,II),(n,II)) \in P_\Omega^9 \times P_\Omega^{35} \times P_\Omega^{9999} \times P_\Omega^{2725199}$ zugehörige Varietät. Die Abbildung $p_3\colon C^{(3)} \longrightarrow C^{(2)}$ sei die Projektionsabbildung $p_3(1,b,m,n)=(1,b,m)$.

Wir geben eine Auswahl der Koordinaten von (n,II) an:

${}^{(1)}n_{ooo\,o1\,ooo\,o1\,oo} = 1$, ${}^{(1)}n_{ooo\,o2\,ooo\,o1\,oo} = \mathring{a}\mathring{b}+d$,

$$(1)n_{000\ 01\ 000\ 01\ 00}^{11\ \ \ 22\ 22} = \mathring{b}^2+2d\mathring{a}\mathring{b}+d^2, \quad (2)n_{000\ 000\ 00}^{222222\ \ \ 22} = \mathring{a}^2. \tag{4.2}$$

Auch das Modell $C^{(3)}$ ist noch nicht singularitätenfrei.

Satz 4.3.: Die Untervarietät mit der a.a.N. $(1,b,m,n,II)\,|\,\mathring{a}=\mathring{b}=0$ ist singulär auf $C^{(3)}$.

Beweis: Der affine Koordinatenring $K[(1,b,m,n,II)]$ ist isomorph zu dem Ring

$$K[c,e,d,\mathring{q},\mathring{a}^2,\mathring{b}^2,\mathring{a}\mathring{b}] \cong K[X_1,\ldots,X_7]/(X_5X_6-X_7^2).$$

Damit erhält man sofort die Behauptung.

Satz 4.4.: Die Abbildung p_3: $C^{(3)} \longrightarrow C^{(2)}$ ist birational und p_3^{-1} ist auf $C^{(2)} \setminus \tilde{B}_5$ biregulär. Das Bild von $\tilde{B}_5$ bei p_3^{-1} ist eine 5-dimensionale Untervarietät B_5 von $C^{(3)}$ mit der a.a.N. $(1,b,m,n,II)\,|\,\mathring{q}=0$.

Beweis: Die Biregularität von p_3^{-1} auf $C^{(2)} \setminus \tilde{B}_5$ folgt aus Satz 4.1.. Die Abbildung p_3 ist laut Konstruktion birational. Es ist B_5 singularitätenfrei, da $K[(1,b,m,II)]/(\mathring{q})$ isomorph zu einem Polynomring in 5 Unbestimmten ist. Damit ist das Bild von $\tilde{B}_5$ bei p_3^{-1} eine Untervarietät, s. [2], und diese ist offesichtlich B_5.

Einen analogen Satz zu 3.5. gibt es in bezug auf $C^{(3)}$ nicht. Mit der a.a.N. $(1,b,m,n,II)$ sieht man, daß es ein $(\lambda,\beta,\mu,\nu) \in C^{(3)}$ gibt, deren Koordinate $(1)\nu_{ijk\ lm\ abc\ de}^{rs\ \ fg\ \gamma\delta}\neq 0$ ist und alle $(2)\nu_{ijklmn\ abc}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta\gamma\ \delta\varepsilon} = 0$ sind. Es kann aber auch der umgekehrte Fall eintreten. Dazu geben wir eine weitere a.a.N. an. In der a.a.N. $(1,b,I)$ substituieren wir

$$A=\check{a}\check{q}, \quad B=\check{b}\check{q}, \quad Q=\check{a}\check{q}^2 . \tag{4.3}$$

Dann erhalten wir entsprechend wie bisher die a.a.N. $(1,b,m,n,II,2)$ mit den Koordinaten:

$$(1)m_{000\ 01\ 00}^{22\ 22} = 1, \quad (1)m_{000\ 02\ 00}^{22\ 22} = \check{b}+d,$$

$$(1)m_{000\ 02\ 00}^{11\ 22} = \check{q}^2\check{b}^3+3d\check{q}^2\check{b}^2+3d^2\check{b}+d^3, \quad (1)m_{100\ 01\ 00}^{22\ 22} = -(\check{a}-\check{a}\check{q}^2)+c,$$

$$(2)m_{000}^{222222} = \check{a} \text{ und } (1)n_{000\ 01\ 000\ 01\ 00}^{22\ \ \ 22\ 22} = \check{q}^2,$$

$$(2)n_{000\ 000\ 00}^{222222\ \ \ 22} = 1. \tag{4.4}$$

Diese a.a.N. erfaßt nun Punkte, zum Beispiel $(1,b,m,n,II,2)\,|\,\check{a}=\check{b}=c=d=e=\check{q}=0$, deren Koordinaten in der ersten Klasse

$^{(1)}\nu_{ijk\,lm\,abc\,de\,\alpha\beta}^{\;\;rs\;\;\;\;\;\;fg\,\gamma\delta}$ für einen Punkt $(\lambda,\beta,\mu,\nu)\in C^{(3)}$ sämtlich verschwinden. Die a.a.N. (l,b,m,n,II,2) erfaßt keine singulären Punkte auf $C^{(3)}$, da der Ring $K[(l,b,m,n,II,2)]$ isomorph zu einem Polynomring ist. Für (l,b,m,n,II) werden wir auch (l,b,m,n, II,1) schreiben. Für die singulären Punkte von $C^{(3)}$ verschwindet die zweite Klasse der Koordinaten $^{(2)}\nu^{ijklmn}_{abc\,\alpha\beta\gamma\,\delta\varepsilon}^{\;\;\mu\nu}$.

5. Das Modell $C^{(4)}$ Die Projektion der Untervarietät mit der a.a.N. $(l,b,m,n,II)|_{\mathring{a}=\mathring{b}=0}$ von $C^{(3)}$ auf C ist die stabile Untervarietät $D_4\subset C$, welche von denjenigen Punktetripeln erzeugt wird, von denen jeweils zwei Punkte zusammenfallen. Die Untervarietät $D_4\subset C$ ist Ausartungsvarietät bezüglich der Bedingung P, s. [3]. D_4 ist sogar gleich dem Durchschnitt $D_4=\bigcap_{g\in PGL(3)} gP$ für eine Bedingung P von C.

Mit $D_4^{(i)}$, $i\in\{1,2,3\}$, bezeichnen wir die eigentlich Transformierten von $D_4^{(i-1)}$, $D_4^{(0)}:=D_4$, bei den Abbildungen p_i^{-1}. Da die Ausartungsmenge $D_4^{(3)}$ mit der Untermenge der singulären Punkte auf $C^{(3)}$ zusammenfällt, liegt es nahe, zur Auflösung der Singularitäten auf $C^{(3)}$ die Vervollständigung mit den Geradentripeln heranzuziehen. Im allgemeinen ist der Zusammenhang zwischen der Auflösung von Singularitäten und Vervollständigungen nicht aufgeklärt.

Definition 5.1.: Das Modell $C^{(4)}\subset \mathbb{P}_K^9\times\mathbb{P}_K^{35}\times\mathbb{P}_K^{9999}\times\mathbb{P}_K^{2725199}\times\check{\mathbb{P}}_K^9$ sei die zu der allgemeinen Nullstelle (l,b,m,n,p,II):=((l,b,m, n,II),(p,II))$\in\mathbb{P}_\Omega^9\times\mathbb{P}_\Omega^{35}\times\mathbb{P}_\Omega^{9999}\times\mathbb{P}_\Omega^{2725199}\times\check{\mathbb{P}}_\Omega^9$ zugehörige Varietät. Die Abbildung p_4: $C^{(3)}\longrightarrow C^{(2)}$ sei die Projektionsabbildung $p_4(l,b,m,n,p)=(l,b,m,n)$.

In der allgemeinen Nullstelle (l,b,m,n,p,II) substituieren wir:

$$\mathring{a}=\check{a},\ \mathring{b}=\check{a}\check{b} \text{ und } \mathring{q}=\check{q}\ . \tag{5.1}$$

Die Reihe der p-Koordinaten multiplizieren wir mit $\check{a}^{-1}$ und erhalten die a.a.N. (l,b,m,n,p,III). Die verkürzten p-Koordinaten dieser a.a.N. sind:

$$\bar{p}_{222}=1,\ \bar{p}_{122}=-\check{b},\ \bar{p}_{112}=\check{a}^2\check{b}^2,\ \bar{p}_{111}=-\check{a}^2\check{b}^3,\ \bar{p}_{022}=-\check{b}(\check{a}^2\check{q}-\check{q}),\ \bar{p}_{012}=0,$$
$$\bar{p}_{011}=\check{a}^2\check{b}^3(\check{a}^2\check{q}-\check{q}),\ \bar{p}_{002}=0,\ \bar{p}_{001}=0,\ \bar{p}_{000}=4\check{a}^2\check{b}^3\check{q}^3(\check{a}^2-1)^2. \tag{5.2}$$

Die Unbestimmte $\check{a}$ kommt in (l,b,m,n,p,III) nur in geraden

Potenzen vor. Dies sieht man, wenn man (1,I) betrachtet und die Abbildungen p_1, p_2, p_3 und p_4, insbesondere die zugehörigen Substitutionen, verfolgt. Aus Formgründen substituieren wir in der a.a.N. (1,b,m,n,p,III)

$$\overset{\vee}{a}^2=\tilde{a},\ \overset{\vee}{q}=\tilde{q} \text{ und } \overset{x}{b}=\tilde{b}, \tag{5.3}$$

und erhalten die a.a.N. (1,b,m,n,p,IV).

Die a.a.N. (1,b,m,n,p,II,2):=((1,b,m,n,II,2),(p,II,2)) ist in entsprechender Weise definiert, indem wir die Substitution (4.3) in (p,I) einsetzen und normalisieren. Die verkürzten Koordinaten der a.a.N. (p,II,2) sind:

$$\bar{p}_{222}=1,\ \bar{p}_{122}=-\overset{\vee}{b}\overset{\vee}{q}^2,\ \bar{p}_{112}=\overset{\vee}{q}^2\overset{\vee}{b}^2,\ \bar{p}_{111}=-\overset{\vee}{b}^3\overset{\vee}{q}^3,\ \bar{p}_{022}=-\overset{\vee}{b}(\overset{\vee}{a}\overset{\vee}{q}^2-\overset{\vee}{a}\overset{\vee}{q}^4),$$
$$\bar{p}_{012}=0,\ \bar{p}_{011}=\overset{\vee}{b}^3\overset{\vee}{q}^2(\overset{\vee}{a}\overset{\vee}{q}^2-\overset{\vee}{a}\overset{\vee}{q}^4),\ \bar{p}_{002}=0,\ \bar{p}_{001}=0,$$
$$\bar{p}_{000}=4\overset{\vee}{a}\overset{\vee}{b}^3\overset{\vee}{q}^2(\overset{\vee}{a}\overset{\vee}{q}^2-\overset{\vee}{a}\overset{\vee}{q}^4)^2. \tag{5.4}$$

Zunächst beweisen wir folgenden Satz.

Satz 5.2.: Das Modell $C^{(4)}$ besitzt genau zwei minimale stabile Untervarietäten.

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß es zwei minimale stabile Untervarietäten gibt. Danach zeigen wir, daß jede stabile Untervarietät eine dieser minimalen stabilen Untervarietäten enthalten muß.

(i): Es sei $(\lambda_1,\beta_1,\mu_1,\nu_1,\pi_1)\in C^{(4)}$ mit $c=d=e=\tilde{a}=\tilde{q}=\tilde{b}=0$ in (1,b,m,n,p,IV). Die Menge $S_1=\{g(\lambda_1,\beta_1,\mu_1,\nu_1,\pi_1);\ g\in PGL(3)\}$ ist algebraisch, d.h. $S_1=\overline{S}_1$. Diese Behauptung erhält man, wenn man auf den zu dem Punkt $(\lambda_1,\beta_1,\mu_1,\nu_1,\pi_1)$ zugehörigen Gleichungen, s.a. [5],

$$u^0u^0u^0=0, \tag{5.5}$$
$$u^0u^0x_2x_2=0, \tag{5.6}$$
$$w^0u^0u^0v^0v^1x_2x_2t^0t^0y_2y_2=0, \tag{5.7}$$
$$w^0u^0u^0v^0v^1x_2x_2t^0t^0y_2y_2q^0q^0z_2z_2=0, \tag{5.8}$$
$$x_2x_2x_2=0, \tag{5.9}$$

die Gruppe PGL(3) operieren läßt. Aus $S_1=\overline{S}_1$ folgt, daß S_1 minimale stabile Untervarietät ist. Für $(\lambda_2,\beta_2,\mu_2,\nu_2,\pi_2)\in C^{(4)}$, mit $c=d=e=\overset{\vee}{a}=\overset{\vee}{q}=\overset{\vee}{b}=0$ in (1,b,m,n,p,II,2) ist die Menge $S_2=\{g(\lambda_2,\beta_2,\mu_2,\nu_2,\pi_2);\ g\in PGL(3)\}$ ebenfalls minimale stabile Untervarietät mit $S_2=\overline{S}_2$, da die zu $(\lambda_2,\beta_2,\mu_2,\nu_2,\pi_2)$ zugehörigen Gleichungen mit (5.5-5.7), (5.9) und

$$x_2x_2x_2x_2x_2x_2u^0u^0u^0v^0v^0v^0w^0w^0x_2x_2=0, \tag{5.10}$$

gegeben sind.

(ii): Es sei S eine stabile Untervarietät von $C^{(4)}$ und $(\lambda,\beta,\mu,\nu,\pi) \in S$. Dann gibt es zwei Fälle:

a.) Es sind mindestens ein λ_{ijk}, ein β^{ij}_{kl}, ein $^{(1)}\mu_{ijk\ lm}^{rs\ \gamma\delta}$, ein $^{(1)}\nu_{ijk\ lm\ abc\ de}^{rs\ \ \ fg\ \gamma\delta}$ und ein π^{ijk} verschieden von Null.

b.) Es sind mindestens ein λ_{ijk}, ein β^{ij}_{kl}, ein $^{(1)}\mu_{ijk\ lm}^{rs\ \gamma\delta}$, ein $^{(2)}\nu_{ijklmn\ abc\ \alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \ \ \ \ \ \mu\nu}$ und ein π^{ijk} verschieden von Null.

Dies ist eine Folgerung des Satzes 3.5. und der Ausführungen am Ende von Kapitel 4. Die stabile algebraische Menge

$S' = \overline{\{g(\lambda,\beta,\mu,\nu,\pi);\ g \in PGL(3)\}}$ enthält aber S_1 oder S_2.

Damit können wir folgenden Satz beweisen:

Satz 5.3.: Das Modell $C^{(4)}$ ist singularitätenfrei.

Beweis: Nach Satz 5.2. besitzt $C^{(4)}$ genau zwei minimale stabile Untervarietäten, die wir jeweils durch eigentliche Parameterspezialisierungen der a.a.N. (1,b,m,n,p,IV) bzw. der a.a.N. (1,b,m,n,p,II,2) erreichen können. Mit Bemerkung 1.1. reicht es, für die affinen Koordinatenringe $K[(1,b,m,n,p,IV)]$ und $K[(1,b,m,n,p,II,2)]$ die Regularität nachzuweisen. Dies ist aber der Fall, da beide Ringe isomorph zu einem Polynomring in den jeweiligen Unbestimmten über K sind.

Satz 5.4.: Die Abbildung $p_4: C^{(4)} \longrightarrow C^{(3)}$ ist birational und p_4^{-1} ist auf $C^{(3)} \setminus D_4^{(3)}$ biregulär. Das Bild von $D_4^{(3)}$ bei p_4^{-1} ist eine 5-dimensionale Untervarietät Untervarietät $D_5^{(4)}$ von $C^{(4)}$ mit der a.a.N. $(1,b,m,n,p,IV)\big|_{\tilde{a}=0}$.

Beweis: Der erste Teil der Behauptung folgt aus den Ausführungen am Anfang dieses Kapitels. Es ist auch $D_4^{(3)}$ glatt, ohne daß wir dies im einzelnen zeigen. Damit ist nach [2] $p_4^{-1}(D_4^{(3)})$ eine Untervarietät von $C^{(4)}$. Die angegebene a.a.N. von $p_4^{-1}(D_4^{(3)})$ erhält man sofort mit der a.a.N. (1,b,m,n,p,III) und der Substitution (5.1).

Bemerkung 5.5.: Die Bedingungen $L^{(o)}:=L$, $P^{(o)}:=P$, $T^{(o)}:=T$ und $G^{(o)}:=G$ haben wir in [3] zunächst nur auf der Ausgangsvarietät C definiert. Auf den Modellen $C^{(i)}$, $i \in \{1,\ldots,5\}$ verstehen wir unter den Bedingungen $L^{(i)}$, $P^{(i)}$, $T^{(i)}$ und $G^{(i)}$ die eigentlich Transformierten der Bedingungen $L^{(i-1)}$, $P^{(i-1)}$, $T^{(i-1)}$ und $G^{(i-1)}$

bei den Abbildungen p_i^{-1}.

Satz 5.6.: Das Modell $C^{(4)}$ ist bezüglich der Bedingungen $L^{(4)}$ und $P^{(4)}$ vollständig und bezüglich der Bedingungen $T^{(4)}$ und $G^{(4)}$ unvollständig.

Beweis: Nach Satz 1.5. und 1.6. aus [3] ist eine Varietät bezüglich einer einfachen Bedingung B, codim B=1, genau dann vollständig, wenn B keine minimale stabile Untervarietät enthält.

(i) Bedingung L: Für jede minimale stabile Untervarietät von $C^{(4)}$ gibt es ein $(\lambda,\beta,\mu,\nu,\pi) \in C^{(4)}$ mit $\lambda_{ooo}=1$ und alle anderen $\lambda_{ijk}=0$. Die Bedingung L sei diejenige Untervarietät von $C^{(4)}$, die durch die Gleichung $l_{ooo}=0$ ausgeschnitten wird mit vorgegebenen (u)=(1:0:0). Damit ist $(\lambda,\beta,\mu,\nu,\pi) \notin L$, woraus die Behauptung folgt.

(ii) Bedingung P: Der Beweis verläuft analog wie unter (i) und sei hier deshalb weggelassen.

(iii) Bedingung T: Es sei S_1 wie im Beweis zu Satz 5.2. mit der a.a.N. $(1,b,m,n,p,IV)\big|_{\tilde{a}=\tilde{q}=\tilde{b}=0}$. Die 1-Koordinaten dieser a.a.N. setzen wir in die Matrix Λ aus (1.5) ein. Man rechnet leicht nach, daß alle dreireihigen Unterdeterminanten dieser Matrix verschwinden. Auf S_1 verschwindet also eine Form (1.6) für ein beliebiges τ. Also ist S_1 in T enthalten.

(iv) Bedingung G: Der Beweis verläuft analog wie unter (iii) und der Matrix (3.10) aus [3].

6. Das Modell $C^{(5)}$ In die Matrix Λ aus (1.5) setzen wir die 1-Koordinaten der a.a.N. $(1,\ldots,p,IV):=(1,b,m,n,p,IV)$ ein. Die dreireihigen Unterdeterminanten t_{ijk} von Λ seien die Koordinaten einer allgemeinen Nullstelle (t,IV'), s.a. [3], einer zu C birational äquivalenten Untervarietät der Graßmannschen Mannigfaltigkeit G(2,5).

Definition 6.1.: Das Modell $C^{(5)} \subset \mathbb{P}_K^9 \times \mathbb{P}_K^{35} \times \mathbb{P}_K^{9999} \times \mathbb{P}_K^{2725199} \times \check{\mathbb{P}}_K^9 \times \mathbb{P}_K^{19}$ sei die zu der allgemeinen Nullstelle $(1,b,m,n,p,t,IV'):=((1,\ldots,p,IV),(t,IV')) \in \mathbb{P}_\Omega^9 \times \ldots \times \mathbb{P}_\Omega^{19}$ zugehörige Varietät. Die Abbildung $p_5: C^{(5)} \longrightarrow C^{(4)}$ sei die Projektionsabbildung $p_5(1,\ldots,t)=(1,\ldots,p)$.

Anstatt der t-Koordinaten von $C^{(5)}$ geben wir die oben

beschriebene Matrix an. Dabei beschränken wir uns auf die verkürzte Darstellung, s. Bemerkung 2.4.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (\tilde{a}\tilde{q}^2-\tilde{q}^2) & 0 \\ 0 & 2(\tilde{a}\tilde{q}^2-\tilde{q}^2) & 0 & 2(\tilde{a}\tilde{q}^2-\tilde{q}^2)\tilde{q} & 4(\tilde{a}\tilde{q}^2-\tilde{q}^2)\tilde{a}\tilde{q}\tilde{b} \\ 0 & 0 & -2(\tilde{a}\tilde{q}^2-\tilde{q}^2)\tilde{a}\tilde{b}^2 & 2(\tilde{a}\tilde{q}^2-\tilde{q}^2)\tilde{a}\tilde{q}\tilde{b} & 4(\tilde{a}\tilde{q}^2-\tilde{q}^2)\tilde{a}\tilde{q}\tilde{b} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -(\tilde{a}\tilde{q}^2-\tilde{q}^2)\tilde{a}\tilde{b}^2 \\ 2(\tilde{a}\tilde{q}^2-\tilde{q}^2)\tilde{a}\tilde{b}\tilde{q} \\ 2(\tilde{a}\tilde{q}^2-\tilde{q}^2)\tilde{a}^2\tilde{b}^3\tilde{q} \end{matrix} \Bigg) \quad . \tag{6.1}$$

Wir formen (6.1) in (6.1') um, wobei sich die dreireihigen Unterdeterminanten nur bis auf einen homogenen Faktor ändern:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (\tilde{a}\tilde{q}^2-\tilde{q}^2) & 0 & -(\tilde{a}\tilde{q}^2-\tilde{q}^2)\tilde{a}\tilde{b}^2 \\ 0 & 1 & 0 & \tilde{q} & 2\tilde{a}\tilde{b}\tilde{q} & \tilde{a}\tilde{b}^2\tilde{q} \\ 0 & 0 & -\tilde{b} & \tilde{q} & 2\tilde{b}\tilde{q} & \tilde{a}\tilde{b}^2\tilde{q} \end{pmatrix} \quad . \tag{6.1'}$$

Die dreireihigen Unterdeterminanten von (6.1') seien die verkürzten t-Koordinaten der allgemeinen Nullstelle (1,...,t,IV).

Satz 6.2.: Die Abbildung $p_5: C^{(5)} \longrightarrow C^{(4)}$ ist eine Aufblasung. Zentrum der Aufblasung ist die 4-dimensionale singularitäten-freie Untervarietät $Z_4 \subset C^{(4)}$ mit der a.a.N. $(1,\ldots,p,IV)|_{\tilde{b}=\tilde{q}=0}$. Der exzeptionelle Divisor sei $Z_5 := p_5^{-1}(Z_4)$.

Beweis: (i): Wir zeigen zuerst, daß Z_4 eine stabile Untervarietät von $C^{(4)}$ ist. Dazu ziehen wir die zu der a.a.N. $(1,\ldots,p,IV)|_{\tilde{b}=\tilde{q}=0}$ zugehörigen allgemeinen Gleichungen heran, von denen wir die verkürzte Darstellung angeben:

$$\begin{aligned} &u^0u^0u^0=0,\ u^0u^0x_2x_2=0,\ w^0u^0u^0v^0v^1x_2x_2t^0t^0y_2y_2=0, \\ &w^0u^0u^0v^0v^1x_2x_2r^0s^0s^0t^0t^1y_2y_2q^0q^0z_2z_2=0, \\ &\tilde{a}\cdot x_2x_2x_2x_2x_2x_2u^0u^0u^0v^0v^0v^0w^0w^0y_2y_2=0,\ x_2x_2x_2=0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Mit den Transformationen aus 2.4. erhalten wir allgemeine Gleichungen, die bezüglich PGL(3) invariant sind, also ist Z_4 stabil.

(ii): Die Abbildung p_5^{-1} ist auf $C^{(4)} \setminus Z_4$ ein biregulärer Morphismus. Dazu bezeichnen wir mit U_1 und U_2 die affinen offenen

Umgebungen, die zu der a.a.N. (1,...,p,IV) bzw. zu der a.a.N. (1,...,p,II,2) gehören. Die Familie der Umgebungen $\mathcal{U} = \{g_1U_1, g_2U_2; g_1, g_2 \in PGL(3)\}$ ist dann eine Überdeckung von $C^{(4)}$. Denn die minimalen stabilen Untervarietäten S_1 und S_2 aus Satz 5.2. werden von $\mathcal{U}$ überdeckt und damit auch ganz $C^{(4)}$. Würde es ein $z \in C^{(4)}$ geben, das von $\mathcal{U}$ nicht überdeckt wird, dann würde auch $V = \{gz;\ g \in PGL(3)\}$ mit $\mathcal{U}$ disjunkt sein. Der Abschluß $\overline{V}$ enthält aber eine minimale stabile Untervarietät S_1 oder S_2. Mit $W = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ ist $W \cap \overline{V}$ auf $\overline{V}$ eine offene nichtleere Untermenge. Also ist $W \cap \overline{V} \cap V \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Annahme. Für U_1 und U_2 kann man nun leicht zeigen, daß $p_5^{-1}|_{U_i}$ auf $C^{(4)} \cap U_i \setminus Z_4$, $i \in \{1,2\}$, ein biregulärer Morphismus ist.

(iii): Es ist Z_4 nicht singulär auf $C^{(4)}$ nach Satz 5.3.. Z_4 ist ebenfalls singularitätenfrei, da für U_1 und U_2 die zugehörigen affinen Koordinatenringe Polynomringe sind.

(iv): Die Fasern $p_5^{-1}(z)$, $z \in Z_4$, sind 1-dimensionale projektive Räume, wie man mit (6.1') auf U_1 sofort sieht. Für U_2 erhält man dasselbe Ergebnis, woraus die Behauptung für ganz Z_4 folgt. Damit ist p_5 nach [1] eine Aufblasung.

In der allgemeinen Nullstelle (1,...,t,IV) substituieren wir

$$\tilde{b}=b,\ \tilde{q}=bq,\ \tilde{a}=a, \tag{6.4}$$

multiplizieren die t-Koordinaten mit $-b^{-1}$ und erhalten für (6.1'):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (aq^2b^2-q^2b^2) & 0 & -(aq^2b^2-q^2b^2) \\ 0 & 1 & 0 & qb & 2aqb^2 & ab^3q \\ 0 & 0 & 1 & -q & -2bq & -ab^2q \end{pmatrix} . \tag{6.5}$$

Diese a.a.N. heiße (1,...,t,V,1,1). Mit der Substitution

$$\tilde{b}=bq,\ \tilde{q}=q,\ \tilde{a}=a \tag{6.6}$$

bekommen wir analog eine a.a.N. (1,...,t,V,1,2). Zur Untersuchung der Vollständigkeitseigenschaften benötigen wir den:

Satz 6.3.: Das Modell $C^{(5)}$ besitzt genau 4 minimale stabile Untervarietäten und genau 5 fünfdimensionale stabile Untervarietäten.

Beweis: (i): Setzen wir in der a.a.N. (1,...,t,V,1,1) alle Parameter gleich Null, so erhalten wir den Punkt $(s_{11}) \in C^{(5)}$.

Auf die gleiche Weise erhalten wir mit der a.a.N. $(1,\ldots,t,V,1,2)$ den Punkt $(s_{12}) \in C^{(5)}$. Mit der a.a.N. $(1,\ldots,p,II,2)$ konstruiert man analog zwei affine allgemeine Nullstellen für $C^{(5)}$. Diese seien $(1,\ldots,t,III,2,1)$ und $(1,\ldots,t,III,2,2)$. Setzen wir auch hier die Parameter gleich Null, so erhalten wir zwei Punkte (s_{21}) mit $t_{o12}=1$ und (s_{22}) mit $t_{o13}=1$. Die Mengen $S_{ij} = \{g(s_{ij}); g \in PGL(3)\}$, $i,j \in \{1,2\}$, sind minimale stabile Untervarietäten von $C^{(5)}$. Um dies zu zeigen, analysieren wir, wie die Gruppe PGL(3) auf $C^{(5)}$ operiert. Zwei Punkte $(\lambda^1,\ldots,\tau^1) \in C^{(5)}$ und $(\lambda^2,\ldots,\tau^2) \in C^{(5)}$, mit $\tau^1_{o12}=1$ und alle anderen $\tau^1_{ijk}=0$ und $\tau^2_{o13}=1$ und alle anderen $\tau^2_{ijk}=0$, liegen in verschiedenen Orbits. Das zu (τ^1) zugehörige Linienkegelschnittnetz wird von den Linienkegelschnitten mit den Gleichungen $u^ou^o=0$, $u^ou^1=0$ und $u^ou^2=0$ erzeugt. Das zu (τ^2) zugehörige Linienkegelschnittnetz wird von Linienkegelschnitten mit den Gleichungen $u^ou^o=0$, $u^ou^1=0$ und $u^1u^1=0$ erzeugt. Es gibt keine projektive Transformation, die eines dieser beiden Linienkegelschnittnetze in das andere überführen kann. Somit liegen auch $(\lambda^1,\ldots,\tau^1) \in C^{(5)}$ und $(\lambda^2,\ldots,\tau^2) \in C^{(5)}$ in verschiedenen Orbits. Da die Projektion von S_{ij} bei p_5 minimale stabile Varietäten sind, sind es auch die S_{ij}. Denn außer den S_{ij}, $i,j \in \{1,2\}$, können bei p_5 keine weiteren minimalen stabilen Untervarietäten entstehen, da p_5 eine Aufblasung ist, mit $\mathbb{P}^1_K$ als allgemeiner Faser.

(ii): Auf C gibt es genau eine 5-dimensionale stabile Untervarietät. Diese parametrisiert die Untermenge der kollinearen Punktetripel und sei mit $H_5^{(o)}$ bezeichnet. Wir wollen jeweils die eigentlich Transformierten von $H_5^{(i-1)}$ bei p_i^{-1}, $i \in \{1,\ldots,5\}$, mit $H_5^{(i)}$ bezeichnen. Auf $C^{(1)}$ gibt es zusätzlich zu $H_5^{(1)}$ nach Satz 2.5. die stabile Untervarietät $A_5^{(1)}$. Auf $C^{(2)}$ kommt $\tilde{B}_5$ hinzu. Auf $C^{(3)}$ wird $\tilde{B}_5$ zu $B_5^{(3)}$. Auf $C^{(4)}$ kommt $D_5^{(4)}$ und auf $C^{(5)}$ kommt Z_5 hinzu. Das diese Untervarietäten stabil sind, folgt daraus, daß alle p_i äquivariant sind, d.h. $p_i(g(s))=g(p_i(s))$ für alle $s \in C^{(i)}$ und $g \in PGL(3)$.

Das Modell $C^{(5)}$ schließt unseren Vervollständigungsprozeß ab, denn es gilt:

Satz 6.4.: Das Modell $C^{(5)}$ ist bezüglich der Bedingungen $L^{(5)}$, $P^{(5)}$, $T^{(5)}$ und $G^{(5)}$ vollständig.

Beweis: (i): Für die Bedingungen $L^{(5)}$ und $P^{(5)}$ ist alles klar.
(ii) Bedingung $T^{(5)}$: Auf $C^{(5)}$ ist eine Bedingung $T^{(5)}$ die Lösungsmenge einer Gleichung

$$\sum_{P_i \in I} (-1)^{j(P_i)} t_{i_1 i_2 i_3} \tau_{i_4 i_5 i_6} = 0. \qquad (6.7)$$

Wir zeigen, daß für die minimalen stabilen Untervarietäten S_{ij}, $i,j \in \{1,2\}$, gilt $S_{ij} \notin T^{(5)}$. Dazu betrachten wir die Punkte $s_{ij} \in C^{(5)}$, für die man leicht jeweils ein τ wie in §1 angeben kann, so daß (6.7) nicht erfüllt ist.
(iii) Bedingung $G^{(5)}$: In die Matrix Π aus [3,§3] setzen wir die p-Koordinaten der a.a.N. (1,...,t,IV,1,1) ein. Mit einigen Umformungen, die die Unterdeterminanten nur bis auf einen homogenen Faktor ändern, erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} -4ab^4q^2(a-1) & 0 & 0 & -ab^2 & 0 & 1 \\ -2b^3q^2(a-1) & b^3q(a-1) & 0 & -b & 1 & 0 \\ 2b^2q^2(a-1) & bq & -q & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6.8)$$

Für s_{11} sind die dreireihigen Unterdeterminanten von (6.8) gleich Null bis auf $g_{456}=1$. Man kann nun ein γ angeben, so daß die Gleichung

$$\sum_{P_i \in I} (-1)^{j(P_i)} g_{i_1 i_2 i_3} \gamma_{i_4 i_5 i_6} = 0, \qquad (6.9)$$

s. [3], nicht erfüllt ist. Damit ist $S_{11} \notin G^{(5)}$. Für S_{12}, S_{21} und S_{22} erhält man ebenfalls $S_{ij} \notin G^{(5)}$ mit den entsprechenden a.a.N..

Zum Schluß wollen wir zeigen, daß das Modell (1,p,g) nicht singularitätenfrei ist. Die dreireihigen Unterdeterminanten g_{ijk} von (6.8) seien die Koordinaten der a.a.N. (g,V,1,1), in verkürzter Darstellung, einer zu C birational äquivalenten Varietät in G(2,5). Die projektion p, der a.a.N. (1,...,g,V,1,1):=((1,..., t,V,1,1),(g,V,1,1)) auf den mehrfach projektiven Raum $\mathbb{P}^9_\Omega \times \check{\mathbb{P}}^9_\Omega \times \mathbb{P}^{19}_\Omega$ mit p(1,b,m,n,p,t,g)=(1,p,g) ist eine a.a.N. der Varietät (1,p,g) in $\mathbb{P}^9_K \times \check{\mathbb{P}}^9_K \times \mathbb{P}^{19}_K$ und sei mit (1,p,g,V,1,1) bezeichnet.

Korollar 6.5.: Das Modell (1,p,g) ist nicht singularitätenfrei.

Beweis: Wir betrachten den affinen Koordinatenring:

$$K[(1,p,g,V,1,1)] \cong K[(c,e,d,q,b,ab^2,aq^2)]$$
$$= K[X_1,\ldots,X_7] / (X_6X_4-X_7X_5).$$

Letzterer Ring ist aber nicht regulär.

LITERATUR

[1] GRIFFITHS, P., and HARRIS, J.: Principles of algebraic geometry. Wiley, New York 1978.

[2] HODGE, W.V.D., and PEDOE, D.: Methods of algebraic geometry. Vol. I-III. Cambridge University Press, London 1954.

[3] SCHRÖDER, O.: Die Chowvarietät der ungeordneten Punktetripel. Beitr. Alg. Geom. 28(1989), 5-16.

[4] SEMPLE, J.G.: The triangle as a geometric variable. Mathematika 1(1954), 80-88.

[5] STERZ, U.: Berührungsvervollständigung für ebene Kurven dritter Ordnung. II. Konstruktion einer Vervollständigung durch Aufblasungen. Beitr. Alg. Geom. 17(1984), 115-150.

Manuskripteingang: 28.03.1989

OLAF SCHRÖDER
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Sektion Mathematik
Halle/S.
DDR - 4010