Werk

Titel: Geometrische Interpretation der Potenz einer Geraden bezüglich eines Klassenkegel...

Autor: GEISE, GERHARD

Jahr: 1986

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0022|log43

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
22(1986),151-160

GEOMETRISCHE INTERPRETATION DER POTENZ EINER GERADEN BEZÜGLICH EINES KLASSENKEGELSCHNITTS

Herrn Dr. H. Günther zum 65. Geburtstag gewidmet

Gerhard Geise

Die mehrfach angegangene Problematik einer befriedigenden geometrischen Interpretation der Potenz eines Punktes bezüglich einer Kurve 2. Ordnung (Ordnungskegelschnitt) hat 1963 durch A. Loeffler /1/ eine schöne Lösung gefunden (s. auch /2/). Über die Potenz einer Geraden bezüglich einer Kurve 2. Klasse (Klassenkegelschnitt) ist in der eingesehenen Literatur (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) nichts gefunden worden; was es hierüber gibt, scheint nicht ohne weiteres zugänglich zu sein. Jedenfalls kann eine geometrische Deutung überraschender- und erfreulicherweise, trotz Fallunterscheidungen, recht einfach angegeben werden. Das Ergebnis ist am Ende in Satz 3 zusammengestellt (Abschnitt 3). Es fällt auf, daß diese geometrische Interpretation auf höhere Dimensionen übertragen werden kann (was hier nicht ausgeführt wird), während dies für die Loefflersche Deutung der Potenz eines Punktes bezüglich eines Ordnungskegelschnitts nicht möglich ist /2/.

Zur Vorbereitung wird einiges über Bewegungsinvarianten, Normierungen und Bestimmungsstücke von Kurven 2. Klasse bereitgestellt (Abschnitte 1 und 2). (Die Betrachtungen schließen inhaltlich an /3/ an und ergänzen diese, sind jedoch unabhängig davon gehalten.)

1. Bewegungsinvarianten und Normierungen von Klassenkegelschnitten. Sei $\hat{c}$ eine Kurve 2. Klasse mit der Gleichung

$$\hat{c}: \quad \sigma = (u_o \mid u_1 \;\; u_2) \left[\begin{array}{c|cc} b_{oo} & b_{o1} & b_{o2} \\ \hline b_{1o} & b_{11} & b_{12} \\ b_{2o} & b_{21} & b_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_o \\ \hline u_1 \\ u_2 \end{array}\right] = \hat{u}^T \tilde{B} \hat{u} \qquad (1)$$

$$= (u_o \mid \underline{u}^T) \left[\begin{array}{c|c} b_{oo} & \underline{b}^T \\ \hline \underline{b} & B \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_o \\ \hline \underline{u} \end{array}\right] = b_{oo}u_o^2 + 2\underline{b}^T\underline{u}u_o + \underline{u}^T B \underline{u}$$

bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems der projektiv-abgeschlossenen euklidischen Ebene; es bedeutet $\hat{u} = (u_0 \;\; u_1 \;\; u_2)^T = (u_0 \mid \underline{u}^T)^T$ den (projektiven) Koordinatenvektor einer Geraden $\hat{u}$, für eigentliche Geraden ist $\underline{u}$ ein Stellungsvektor, $\tilde{B}$ ($= \tilde{B}^T$) ist die sogenannte große, B die kleine Formmatrix von $\hat{c}$. Bei der durch

$$\tilde{x} = \left[\begin{array}{c|c} x_0 & \\ \hline x_1 & \\ x_2 & \end{array}\right] \longrightarrow \tilde{x}' = \left[\begin{array}{c|c} x_0' & \\ \hline x_1' & \\ x_2' & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \underline{o}^T \\ \hline \underline{v} & D \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} x_0 & \\ \hline x_1 & \\ x_2 & \end{array}\right] =: \tilde{D}\tilde{x}$$

mit orthogonaler Matrix D beschriebenen Bewegung oder kartesischen Koordinatensystem-Transformation ändern sich die Geradenkoordinaten von $\hat{u}$ gemäß

$$\hat{u} \longrightarrow \hat{u}' = \tilde{D}^{T-1}\hat{u} \;,$$

so daß die Gleichung (1) von $\hat{c}$ übergeht in

$$\hat{c}: \quad \sigma = \hat{u}'^T \tilde{B}' \hat{u}' \quad \text{mit} \quad \tilde{B}' = \tilde{D}\tilde{B}\tilde{D}^T \quad \text{und}$$

$$\tilde{B}' = \left[\begin{array}{c|c} b_{oo} & (b_{oo}\underline{v} + D\underline{b})^T \\ \hline b_{oo}\underline{v} + D\underline{b} & b_{oo}\underline{v}\underline{v}^T + \underline{v}(D\underline{b})^T + (D\underline{b})\underline{v}^T + DBD^T \end{array}\right]. \tag{2}$$

Demnach ist b_{oo} eine und im Falle $b_{oo} = \sigma$ auch noch $\| \underline{b} \|$ eine Bewegungsvariante.

Wir betrachten nur reguläre Kegelschnitte ($\det \tilde{B} \neq \sigma$). Der durch den Klassenkegelschnitt $\hat{c}$ festgelegte Ordnungskegelschnitt sei mit $\tilde{c}$ bezeichnet, und c stehe für beide als (regulärer) Kegelschnitt 'schlechthin'. Es hat c die Ordnungsgleichung

$$\tilde{c}: \quad \sigma = \tilde{x}^T \hat{A} \tilde{x} \quad \text{mit} \quad \hat{A} \mathrel{\dot{=}} \tilde{B}^{-1}, \quad \tilde{x} = (x_0 \;\; x_1 \;\; x_2)^T = (x_0 \mid \underline{x}^T)^T,$$

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{c|cc} a_{oo} & a_{o1} & a_{o2} \\ \hline a_{1o} & a_{11} & a_{12} \\ a_{2o} & a_{21} & a_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_{oo} & \underline{a}^T \\ \hline \underline{a} & A \end{array}\right], \text{ oder}$$

$$\tilde{c}: \quad \sigma = a_{oo}x_o^2 + 2\underline{a}^T\underline{x}x_o + \underline{x}^T A \underline{x} \;. \tag{3}$$

($\dot{=}$ steht für 'projektiv-gleich', d.i. 'bis auf einen von Null verschiedenen Faktor'.)

Die auf die uneigentliche Gerade $\hat{w} = (1 \quad 0 \quad 0)^T$ ausgeübte Polarität bezüglich c liefert unmittelbar: Es ist $b_{oo} \neq 0$ charakteristisch für Mittelpunktkegelschnitte; der Mittelpunkt hat den (projektiven) Koordinatenvektor $\tilde{m} = (b_{oo} \quad b_{o1} \quad b_{o2})^T$. Genau für $b_{oo} = 0$ liegt eine Parabel vor; deren uneigentlicher Punkt ist $\tilde{m} = (0 \quad b_{o1} \quad b_{o2})^T$, ihre Achse $\hat{a}$ hat in $\underline{b} = (b_{o1} \quad b_{o2})^T$ einen Richtungsvektor. Dies motiviert die

Definition 1. Normierung der Gleichungen von (regulären) Kurven 2. Klasse $\hat{c}$. Ist c eine Ellipse oder Hyperbel ($b_{oo} \neq 0$), so werde auf

$$b_{oo} = 1 \tag{4}$$

normiert. Ist c eine Parabel ($b_{oo} = 0$), so werde die Normierung

$$\|\underline{b}\| = 1 \tag{5}$$

verabredet.

Zur Vereinfachung werde künftig $b_{1o} =: b_1$, $b_{2o} =: b_2$, also $\underline{b} = (b_1 \quad b_2)^T$ gesetzt.

2. Bestimmungsstücke von Klassenkegelschnitten. Die Bestimmungsstücke für einen Mittelpunktkegelschnitt seien Mittelpunkt $\underline{m}$, (normierte) Richtungsvektoren $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$ der Achsen und halbe Achsenlängen a, b, für eine Parabel Scheitel $\underline{s}$, (normierter) Richtungsvektor $\underline{r}$ der Achse und Parameter p. Ihre Ermittlung kann für einen Klassenkegelschnitt $\hat{c}$: $0 = \hat{u}^T\tilde{B}\hat{u}$ durch Wechsel zur Gleichung des Kegelschnitts c als Ordnungskegelschnitt $\tilde{c}$: $0 = \tilde{x}^T\hat{A}\tilde{x}$ mit $\hat{A} \doteq \operatorname{adj} \tilde{B}$ auf bekannte Berechnungsalgorithmen zurückgeführt werden. Es ist jedoch reizvoll und zum Teil sogar bequemer (vgl. obiges 'Ablesen' von Mittelpunkt für Ellipse/Hyperbel bzw. uneigentlichem Punkt für Parabel aus $\tilde{B}$), von der Gleichung des Klassenkegelschnitts $\hat{c}$ auszugehen. Da es sich lediglich um das Lösen einfacher Übungsaufgaben handelt, genügt eine Zusammenstellung der Ergebnisse. Lediglich zur Parabel sei bemerkt, daß die der Klassenparabel angehörenden Minimalgeraden den Brennpunkt $\underline{f}$ festlegen und aus diesem und dem Scheitel $\underline{s}$ eine Darstellung $2(\underline{s} - \underline{f})^T\underline{b} = p$ für den Parameter p folgt.

Satz 1. Bestimmungsstücke eines regulären Kegelschnitts c aus einer normierten Gleichung des Klassenkegelschnitts

$\hat{c}$: $0 = \hat{u}^T\tilde{B}\hat{u}$, entweder $\tilde{B} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \underline{b}^T \\ \hline \underline{b} & B \end{array}\right]$ oder $\tilde{B} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \underline{b}^T \\ \hline \underline{b} & B \end{array}\right]$, $\|\underline{b}\| = 1$.

1) Mittelpunktkegelschnitt c:

- Es ist der Mittelpunkt $\underline{m} = \underline{b} = (b_1 \quad b_2)^T$.
- Die (symmetrische) Matrix
  $A^* := B - \underline{b}\underline{b}^T$ (6)
  ist regulär; ihre Eigenwerte seien λ_1, λ_2, zugehörige normierte Eigenvektoren $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$.
- Genau dann ist c eine Ellipse, wenn A^* negativ-definit ist. O.B.d.A. kann $\lambda_1 \leqq \lambda_2 < 0$ angenommen werden. Dann ist
  $\underline{r}_2$ Richtungsvektor der Hauptachse,
  $a := \sqrt{-\lambda_1}$ halbe Hauptachsenlänge,
  $\underline{r}_1$ Richtungsvektor der Nebenachse,
  $b := \sqrt{-\lambda_2}$ halbe Nebenachsenlänge.
- Genau dann ist c eine Hyperbel, wenn A indefinit ist. O.B.d.A. sei $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ gesetzt. Dann ist
  $\underline{r}_2$ Richtungsvektor der Hauptachse,
  $a := \sqrt{-\lambda_1}$ halbe Hauptachsenlänge,
  $\underline{r}_1$ Richtungsvektor der Nebenachse,
  $b := \sqrt{\lambda_2}$ halbe Nebenachsenlänge.
  $\underline{u}^T A^* \underline{u} = 0$ genau dann, wenn $\underline{u}$ Stellungsvektor einer Asymptote ist.

2) Parabel c.

- Es ist der uneigentliche Punkt $\tilde{m} = (0 \quad b_1 \quad b_2)^T$, ein (normierter) Richtungsvektor der Parabelachse $\hat{a}$ ist
  $\underline{r} = \underline{b} = (b_1 \quad b_2)^T$.
- Der Scheitel hat die Darstellung (mit E als 2·2-Einheitsmatrix)
  $\underline{s} = (B - \frac{1}{2}\underline{b}^T B \underline{b} \cdot E)\underline{b}$, (7)
  der Brennpunkt ist
  $\underline{f} = \frac{1}{2}(B - \operatorname{adj} B)\underline{b}$, (8)
  der Parameter ergibt sich (vorzeichenbehaftet) zu
  $p = \underline{b}^T \cdot \operatorname{adj} B \cdot \underline{b}$. (9)

Bemerkungen. 1) Es ist reizvoll, in weitere Details zu gehen und auch Konstruktives einzubringen. Beispielsweise (Bild 1) kann der Scheitel $\underline{s}$ einer Parabel so konstruiert werden: Die zur Parabelachse $\hat{a}$ senkrechte Gerade $\hat{q} = (0 \mid \underline{b}^T)^T$ durch den Koordinaten-

ursprung $\underline{o}$ hat den Pol $\tilde{q} = \tilde{B}\tilde{q} = (1 \mid (B\underline{b})^T)^T$ oder in kartesischen Koordinaten $\underline{q} = B\underline{b}$, der (bekanntlich) ein Punkt der Achse $\hat{a}$ ist. Die Lotstrecke aus $\underline{q}$ auf $\hat{q}$ ist für jede der beiden aus $\underline{q}$ an die Parabel c gelegte Tangente Subtangente, die (bekanntlich) vom Scheitel $\underline{s}$ halbiert wird; damit ergibt sich auch auf diesem Wege

$$\underline{s} = B\underline{b} - \tfrac{1}{2}((B\underline{b})^T\underline{b})\cdot\underline{b}.$$

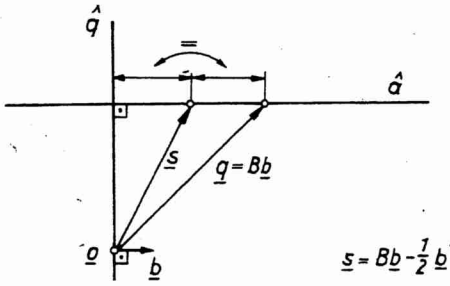

Bild 1

$$\underline{s} = B\underline{b} - \tfrac{1}{2}\underline{b}^T B\underline{b}\cdot\underline{b}$$

2) Die Matrix $A^* = B - \underline{b}\underline{b}^T$ nach (6) wird noch wesentlich verwendet werden. Ihr Zusammenhang zu $\tilde{H}$ ist angegeben, der zur Matrix $\tilde{A}$ aus (3) ist

$A^* = \text{adj } A$.

3. Eine geometrische Interpretation der Potenz einer Geraden bezüglich eines Klassenkegelschnitts. Zunächst wird festgelegt:

Definition 2. Potenz einer (eigentlichen) Geraden $\hat{u}$ bezüglich eines Klassenkegelschnitts $\hat{c}$. Es seien eine Gerade $\hat{u}$ durch $\hat{u} = (u_o \mid \underline{u}^T)^T$ in Hessescher Normalform ($\|\underline{u}\| = 1$) und ein Klassenkegelschnitt $\hat{c}$ mit normierter Gleichung gegeben. Dann heißt die Zahl

$\hat{p}(\hat{u} \mid \hat{c}) := \hat{u}^T\tilde{B}\hat{u}$

die Potenz $\hat{p}$ der Geraden $\hat{u}$ bezüglich der Kurve 2. Klasse $\hat{c}$.

Eine Bedeutung der Potenz ist aus folgender Aussage schon bekannt:

Satz 1 (/4/, S. 47). Die Gerade $\hat{u}$ ist eine $\left\{\begin{array}{l}\text{Passante}\\ \text{Tangente}\\ \text{Sekante}\end{array}\right.$ des (regulären) Kegelschnitts c, je nachdem $\det \tilde{B}\cdot\hat{u}^T\tilde{B}\hat{u} \left\{\begin{array}{l}>\\ =\\ <\end{array}\right. 0$ bezüglich $\hat{c}$ gilt. Insbesondere liefert die uneigentliche Gerade $\hat{w} = (1 \;\; 0 \;\; 0)^T$:

Es ist c eine $\left\{\begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Parabel}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix}\right.$, je nachdem $\det \tilde{B}\cdot\hat{w}^T\tilde{B}\hat{w} \left\{\begin{matrix}>\\ =\\ <\end{matrix}\right. 0$ für die normierte Matrix von $\hat{c}$ gilt.

Folgende Betrachtungen führen für eigentliche Geraden weiter ($\hat{u}$ und $\tilde{B}$ stets normiert vorausgesetzt).

1) c sei ein Mittelpunktkegelschnitt. Es ist

$$\tilde{B}\hat{u} =: \tilde{p} =: (\tilde{p}_0 \;\; \tilde{p}_1 \;\; \tilde{p}_2)^T =: (\tilde{p}_0 \mid \underline{\tilde{p}}^T)^T \quad \text{mit}$$

$$\tilde{p}_0 = u_0 + u_1 b_1 + u_2 b_2 = u_0 + \underline{u}^T\underline{b}\,, \tag{11}$$

$$\underline{\tilde{p}} = \begin{bmatrix}\tilde{p}_1\\ \tilde{p}_2\end{bmatrix} = u_0\underline{b} + B\underline{u}.$$

$\tilde{p}$ ist der Pol der Geraden $\hat{u}$ bezüglich $\hat{c}$. Dabei ist $\tilde{p}_0$ der (vorzeichenbehaftete) Abstand des Kegelschnitt-Mittelpunktes $\underline{m} = \underline{b}$ von der Geraden $\hat{u}$; er sei mit

$$d(\underline{m},\hat{u}) := \tilde{p}_0$$

bezeichnet. – Es sind die Fälle $\hat{u} \not\ni \underline{m}$ und $\hat{u} \ni \underline{m}$ zu unterscheiden.

1a) Sei $\hat{u}$ nicht Gerade durch den Mittelpunkt $\underline{m}$. Dann ist

$$\hat{u}^T\tilde{B}\hat{u} = \hat{u}^T\tilde{p} = \tilde{p}_0\cdot(u_0 \;\; u_1 \;\; u_2)\begin{bmatrix}1\\ \tilde{p}_1/\tilde{p}_0\\ \tilde{p}_2/\tilde{p}_0\end{bmatrix} =: \tilde{p}_0\cdot(u_0 \;\; u_1 \;\; u_2)\begin{bmatrix}1\\ p_1\\ p_2\end{bmatrix}, \tag{12}$$

worin $\underline{p} = (p_1 \;\; p_2)^T$ der in kartesischen Koordinaten angegebene Pol $\underline{p}$ von $\hat{u}$ bezüglich $\hat{c}$ ist, und man erhält

$$\hat{p}(\hat{u} \mid \hat{c}) = \hat{u}^T\tilde{B}\hat{u} = d(\underline{m},\hat{u})\cdot d(\underline{p},\hat{u}), \tag{13}$$

das ist das Produkt der (vorzeichenbehafteten) Abstände der Geraden $\hat{u}$ vom Mittelpunkt $\underline{m}$ des Kegelschnitss $\hat{c}$ und vom Pol $\underline{p}$ von $\hat{u}$ (Bild 2). Die Bedeutung des Vorzeichens von $\hat{p}$ ergibt sich aus Satz 2. – Wird $\hat{u}$ parallel zu sich so verschoben, daß der Abstand von einem beliebig gewählten festen Punkt der Ebene (z.B. dem Koordinatenursprung $\underline{o}$) beliebig groß wird, dann ist das auch für die Potenz $\hat{p}$ der Fall. Man erhält

$$\lim_{|u_0|\to\infty} \frac{\hat{u}^T\tilde{B}\hat{u}}{u_0^2} = \lim_{|d(\underline{o},\hat{u})|\to\infty} \frac{d(\underline{m},\hat{u})\cdot d(\underline{p},\hat{u})}{d^2(\underline{o},\hat{u})} = \hat{w}^T\tilde{B}\hat{w} = 1\,. \tag{13'}$$

Wird endlich $\hat{u}$ parallel zu sich so verschoben, daß $d(\underline{m},\hat{u})$ gegen ∞ geht, so wächst $d(\underline{p},\hat{u})$ über alle Grenzen; in der Grenze wird

ein endlicher Wert erhalten, dessen Bedeutung im nächsten Fall untersucht wird.

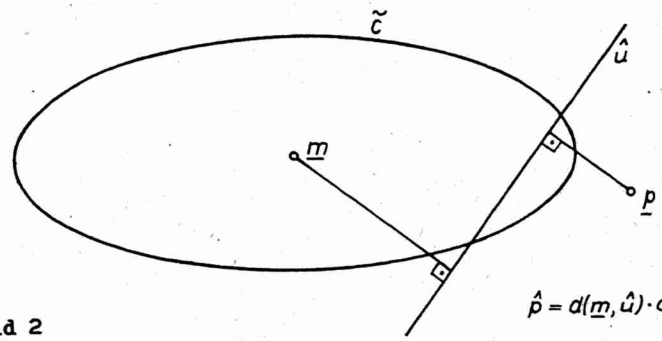

Bild 2

1b) Sei $\hat{u}$ eine Gerade durch den Mittelpunkt $\underline{m}$ (Durchmessergerade von c). Dann ist der Pol

$$\tilde{p} = \tilde{B}\hat{u} = (\sigma \quad \tilde{p}_1 \quad \tilde{p}_2)^T \quad \text{mit} \quad \tilde{p}_o = u_o + \underline{u}^T\underline{b} = \sigma \tag{14}$$

(erwartungsgemäß) ein uneigentlicher Punkt, und es ist $\underline{\tilde{p}} := (\tilde{p}_1 \quad \tilde{p}_2)^T$ ein Richtungsvektor für alle (eigentlichen) Geraden durch $\tilde{p}$ (Bild 3; wir heften $\underline{\tilde{p}}$ in $\underline{m}$ an); $\underline{\tilde{p}}$ gibt die bezüglich c konjugierte Richtung zu der durch $\hat{u}$ oder $\underline{b}^\perp := (-b_2 \quad b_1)^T$ angegebenen Richtung an. Für $\underline{\tilde{p}}$ erhält man aus (14)

$$\underline{\tilde{p}} = A^*\underline{u}. \tag{15}$$

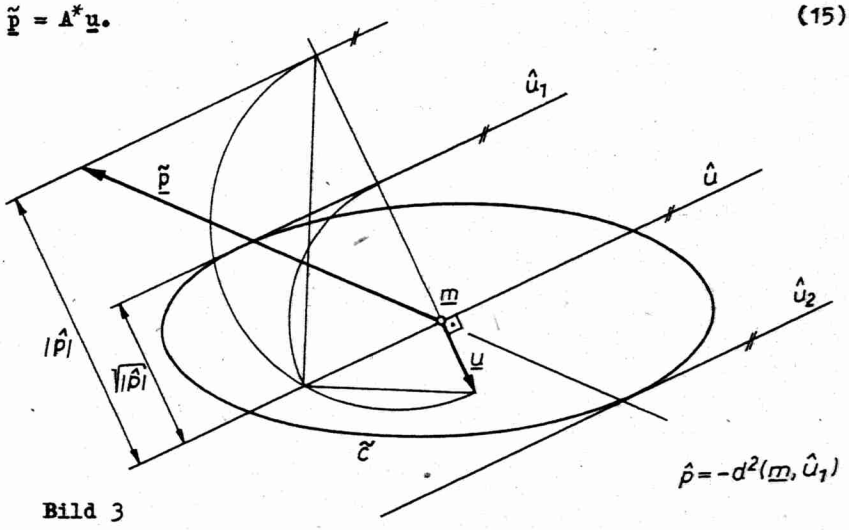

Bild 3

Unter den zur Geraden $\hat{u} = (u_o \mid \underline{u}^T)^T$ parallelen Geraden $\hat{v} = (v_o \mid \underline{u}^T)^T$ sind genau jene Geraden von $\hat{c}$ (sie seien mit $\hat{u}_{1/2} = (v_{o1/2} \mid \underline{u}^T)^T$ bezeichnet), für die

$$v_{o1/2} = u_o \pm \sqrt{-\underline{u}^T A^* \underline{u}}$$

gilt. Damit ergibt sich in diesem Fall $\hat{u} \ni \underline{m}$:

$$\hat{p}(\hat{u}|\hat{c}) = \hat{u}^T \tilde{B} \hat{u} = \hat{u}^T \tilde{p} = \underline{u}^T \tilde{\underline{p}} = \underline{u}^T A^* \underline{u} \qquad (16)$$

als (formal) negatives Quadrat des Abstandes der zu $\hat{u}$ parallelen Geraden $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ des Klassenkegelschnitts $\hat{c}$ vom Mittelpunkt $\underline{m}$:

$\hat{p}(\hat{u}|\hat{c}) = -d^2(m,\hat{u}_1)$, worin $\hat{u}_1$ eine zu $\hat{u}$ parallele Tangente von $\hat{c}$ ist,

$$\begin{cases} > : \hat{u}_1 \text{ existiert nicht reell} \\ = 0: \hat{u} \text{ ist Asymptote } (\hat{u} = \hat{u}_1) . \\ < : \hat{u}_1 \text{ existiert reell} \end{cases}$$

Im Schnitt von $\hat{u}_1$ und $\hat{u}_2$ mit der Geraden durch $\underline{m}$, die $\tilde{\underline{p}}$ als Richtungsvektor hat, erhält man Punkte von $\tilde{c}$. (Bild 3.)

2) φ sei eine Parabel. Auch hier folgt aus der Darstellung des Pols $\tilde{p}$ von $\hat{u}$ bezüglich $\hat{c}$:

$$\tilde{p} = \tilde{B}\hat{u} = \begin{bmatrix} p_o \\ \hline p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}^T \underline{u} \\ \hline u_o \underline{b} + B\underline{u} \end{bmatrix}$$

eine Fallunterscheidung.

2a) Es sei $\underline{b}^T \underline{u} \neq 0$, d.h. $\hat{u}$ nicht parallel zur Parabelachse $\hat{a}$. Ist α der Winkel zwischen $\hat{a}$ und der zu $\hat{u}$ normalen Richtung, so hat man $\underline{b}^T \underline{u} = \cos\alpha$ und

$\tilde{p} = \cos\alpha \cdot (1 \quad p_1 \quad p_2)^T$, worin $\underline{p} := (p_1 \quad p_2)^T := (\tilde{p}_1/\tilde{p}_o \quad \tilde{p}_2/\tilde{p}_o)^T$ den Pol von $\hat{u}$ bezüglich der Parabel $\hat{c}$ in kartesischen Koordinaten angibt. Damit ergibt sich

$$\hat{p}(\hat{u}|\hat{c}) = \hat{u}^T \tilde{B} \hat{u} = d(\underline{p},\hat{u}) \cdot \cos\alpha$$

als senkrechte Projektion des Abstandslotes der Geraden $\hat{u}$ von ihrem Pol $\underline{p}$ auf die Parabelachse $\hat{a}$. (Bild 4.) Die Vorzeicheninterpretation ist wieder mit Hilfe des Satzes 2 hinzuzufügen.

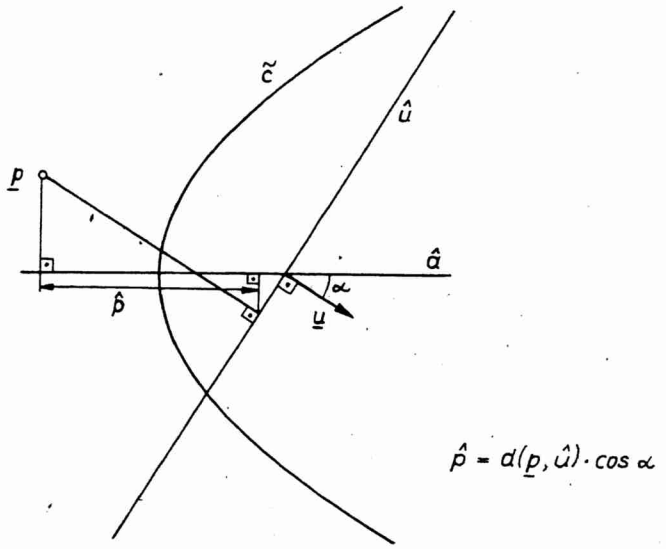

Bild 4

2b) Sei $\underline{b}^T\underline{u} = 0$, also $\hat{u}$ eine zur Parabelachse $\hat{a}$ parallele Gerade (Durchmessergerade von c). Man hat mit $\underline{u} := \underline{b}^{\perp} := (-b_2 \quad b_1)^T$ nach kurzer Rechnung

$$\hat{p}(\hat{u}|\hat{c}) = \hat{u}^T\tilde{B}\hat{u} = (\underline{b}^{\perp})^T B\underline{b}^{\perp} = \underline{b}^T \cdot \operatorname{adj} B \cdot \underline{b} = p, \qquad (17)$$

d.i. der Parameter der Parabel (vgl. (9)), unabhängig von u_o.

Zusammenfassung:

Satz 3. Sei $\hat{c}$ ein (regulärer) Klassenkegelschnitt; besitzt c einen Mittelpunkt, so sei er mit $\underline{m}$ bezeichnet. Für die (eigentliche) Gerade $\hat{u}$, die nicht Durchmesser von c ist, sei $\underline{p}$ der Pol bezüglich $\hat{c}$. Es sei $d(\underline{x},\hat{u})$ der aus einer Hesseschen Normalform von $\hat{u}$ sich ergebende (vorzeichenbehaftete) Abstand des Punktes $\underline{x}$ von der Geraden $\hat{u}$. – Die Potenz $\hat{p}(\hat{u}|\hat{c})$ der Geraden $\hat{u}$ bezüglich der Kurve 2. Klasse $\hat{c}$ hat folgende geometrische Deutung:

$\hat{c}$ \ $\hat{u}$	nicht Durchmesser von c	Durchmesser von c
Ellipse Hyperbel	$\hat{p} = d(\underline{m},\hat{u})\cdot d(\underline{p},\hat{u})$	$\hat{p} = -d^2(\underline{m},\hat{u}_1)$ 1) 2)
Parabel	$\hat{p} = d(p,\hat{u})\cdot\cos\alpha$ 3)	$\hat{p} = p$ 4)

Erläuterungen: 1) $\hat{u}_1$: zu $\hat{u}$ parallele Gerade von $\hat{c}$.

2) $\hat{p} = \mathcal{O}$: $\hat{u}$ ist Asymptote.

3) Senkrechte Projektion des Abstandes $d(\underline{p},\hat{u})$ auf die Parabelachse.

4) p: Parameter der Parabel c.

5) $\hat{p} = \mathcal{O}$: $\hat{u} \in \hat{c}$.

6) $\hat{p} \neq \mathcal{O}$: Vorzeicheninterpretation nach Satz 2.

LITERATUR

/1/ Loeffler, A.: Sur la puissance d'un point par rapport à une conique. Elemente der Mathematik 18(1963), 25-28.

/2/ Geise, G.: Tangentenvierecke von Kreisen. Beiträge zur Algebra und Geometrie 21(1986), 83-90.

/3/ Geise, G.: Ausgleichs-Klassenkegelschnitte. Beiträge zur Algebra und Geometrie 22(1986), 143-150.

/4/ Blaschke, W.: Projektive Geometrie. Wolfenbüttel und Hannover 1948.

Manuskripteingang: 21. 11. 1985

VERFASSER:

Gerhard Geise, Technische Universität Dresden, Sektion Mathematik