Werk

Titel: Über die Erzeugung konvexer Polygone in der projektiven Ebene

Autor: Thron, R.

Jahr: 1985

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0020|log22

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
20(1985),97-104

ÜBER DIE ERZEUGUNG KONVEXER POLYGONE IN DER PROJEKTIVEN EBENE

Reinhard Thron

1. Einleitung und Ergebnisse

Im euklidischen Raum ist bekanntlich jedes konvexe Polyeder die konvexe Hülle seiner Extremalpunkte (vgl. [3]).
Im folgenden wird eine analoge Aussage für die projektive Ebene bewiesen.

Hierzu seien Π die projektive Ebene und f eine Abbildung von $\Pi \times \Pi$ in die Potenzmenge $P(\Pi)$ von Π mit folgenden Eigenschaften für $x,y \in \Pi$:
(0) $f(x,y) = \{x\}$ für $x = y$.
(1) Für $x \neq y$ sind $f(x,y)$ und $f(y,x)$ die beiden verschiedenen Strecken mit den Endpunkten x und y (vgl. [5]).

Sei $X \subseteq \Pi$. Dann heißt X eine Π-konvexe Menge, wenn aus $x,y \in X$ stets $f(x,y) \subseteq X$ oder $f(y,x) \subseteq X$ folgt (vgl. [2]).
$K(\Pi)$ sei die Menge der Π-konvexen Teilmengen von Π.

Weiter heißt Y eine Π-konvexe Hülle von $X \subseteq \Pi$, wenn $X \subseteq Y \in K(\Pi)$ gilt, und aus $X \subseteq Z \subseteq Y$ sowie $Z \in K(\Pi)$ stets $Z = Y$ folgt.

Es gilt der
Satz 1. Zu jedem $X \subseteq \Pi$ und zu jedem $V \in K(\Pi)$ mit $X \subseteq V$ existiert eine Π-konvexe Hülle Y von X mit $Y \subseteq V$. □
Wegen $\Pi \in K(\Pi)$ existiert somit stets eine Π-konvexe Hülle einer Menge $X \subseteq \Pi$. Offensichtlich ist eine Π-konvexe Hülle nicht eindeutig bestimmt, und der Durchschnitt von Π-konvexen Mengen ist nicht immer Π-konvex.

Eine Abbildung T von $P(\Pi)$ in $P(\Pi)$ heißt ein Hüllenoperator auf $P(\Pi)$, wenn für $X,Y \in P(\Pi)$ gilt (vgl. [6]):
(2) $X \subseteq T(X)$.
(3) Aus $X \subseteq Y$ folgt $T(X) \subseteq T(Y)$.
(4) $T(T(X)) = T(X)$.

Es existiert kein Hüllenoperator auf $P(\Pi)$, der jeder Teilmenge $X \subseteq \Pi$ eine ihrer Π-konvexen Hüllen zuordnet. Anderenfalls sei T ein solcher Hüllenoperator. Nun seien $x,y \in \Pi$ mit $x \neq y$. Dann ist offensichtlich $T(f(x,y)) = f(x,y)$ und $T(f(y,x)) = f(y,x)$. Weiter gilt $\{x,y\} \subseteq f(x,y)$ und $\{x,y\} \subseteq f(y,x)$. Hieraus folgen wegen der Monotonie von T die Inklusionen $T(\{x,y\}) \subseteq T(f(x,y)) = f(x,y)$ und $T(\{x,y\}) \subseteq T(f(y,x)) = f(y,x)$. Also ist $T(\{x,y\}) \subseteq f(x,y) \cap f(y,x) = \{x,y\}$ und $x = y$ im Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq y$.

Sei Y eine Π-konvexe Hülle von $X \subseteq \Pi$. Dann heißt ein $x \in \Pi$ ein Y-isolierter Punkt von X, wenn gilt:
(5) $x \in X$, und es existiert ein $Z \in K(\Pi)$ mit $(X \setminus \{x\}) \subseteq Z \subsetneq Y$.

$\lfloor X \rfloor_Y$ sei die Menge der Y-isolierten Punkte von X.

Es gilt der
Satz 2. Ist Y eine Π-konvexe Hülle einer endlichen Menge $X \subseteq \Pi$, so ist Y auch eine Π-konvexe Hülle von $\lfloor X \rfloor_Y$. □

Weiter gilt der
Satz 3. Ist Y eine Π-konvexe Hülle einer endlichen Menge $X \subseteq \Pi$, so ist $\lfloor X \rfloor_Y = \lfloor Y \rfloor_Y$ und
$\lfloor Y \rfloor_Y = \{y: y \in Y, (Y \setminus \{y\}) \in K(\Pi)\}$. □

Sei $Y \subseteq \Pi$. Dann heißt Y ein Π-konvexes Polygon, wenn Y eine Π-konvexe Hülle einer endlichen Teilmenge von Π ist.

Aus den Sätzen 2 und 3 folgt offensichtlich der

Satz 4. Ist Y ein Π-konvexes Polygon, dann ist Y eine Π-konvexe Hülle von $[\, Y \,]_Y$. □

Ist T ein Hüllenoperator auf $P(\Pi)$, und gilt $X \in P(\Pi)$, so heißt ein $x \in \Pi$ ein T-isolierter Punkt von X, wenn $x \in X$ und $x \notin T(X \setminus \{x\})$ gelten (vgl. [6]). $[\, X \,]_T$ sei die Menge der T-isolierten Punkte von X.

Schließlich gilt der

Satz 5. Sei Y eine Π-konvexe Hülle einer endlichen Menge $X \subseteq \Pi$. Dann existiert ein Hüllenoperator T auf $P(\Pi)$ mit

$[\, X \,]_Y = [\, X \,]_T$ und $T([\, X \,]_T) = T(X) = Y$. □

2. Beweis von Satz 1

Sei $C = \{ W: X \subseteq W \in K(\Pi),\ W \subseteq V \}$. Für jede bezüglich der Mengeninklusion geordnete Teilmenge $D \subseteq C$ gilt dann $\bigcap D \in C$. Zunächst ist offensichtlich $X \subseteq \bigcap D \subseteq V$. Weiter ist $\bigcap D \in K(\Pi)$: Aus $x,y \in \bigcap D$ folgt $x,y \in W$ für $W \in D$. Gilt nun $f(x,y) \subseteq W$ und $f(y,x) \subseteq W$ für alle $W \in D$, so folgt $f(x,y) \subseteq \bigcap D$ und $f(y,x) \subseteq \bigcap D$, d.h. $\bigcap D \in K(\Pi)$. Existiert o.B.d.A. ein $W \in D$ mit $f(x,y) \notin W$, dann gilt aber $f(y,x) \subseteq Z$ für $Z \subseteq W$, $Z \in D$. Somit ist $f(y,x) \subseteq \bigcap D$ und $\bigcap D \in K(\Pi)$. Nach dem Satz von HAUSDORFF-BIRKHOFF (vgl. [4]) existiert nun eine maximale geordnete Teilmenge $D \subseteq C$.
Wegen der Maximalität von D folgt $\bigcap D \in D$, d.h., $Y = \bigcap D$ ist eine Π-konvexe Hülle von X mit $Y \subseteq V$. □

3. Beweis von Satz 2

Für $Y \subseteq \Pi$ seien $\overline{Y}$ die topologische Hülle, R(Y) die Menge der Randpunkte sowie I(Y) die Menge der inneren Punkte von Y (vgl. [1]). Nach KNESER [2] gelten nun die folgenden Aussagen für $Y \subseteq \Pi$:

(A1) Es ist $Y \in K(\Pi)$ genau dann, wenn $(\overline{\Pi} \setminus Y) \in K(\Pi)$.

(A2) Ist $Y \in K(\Pi)$, so gilt $\overline{Y} \in K(\Pi)$.

(A3) Ist $Y \in K(\Pi)$ und $I(Y) = \emptyset$, so ist Y in einer Geraden enthalten.

(A4) Ist $Y \in K(\Pi)$ und $I(Y) \neq \emptyset$ sowie $I(\Pi \setminus Y) \neq \emptyset$, so gilt $(\overline{Y} \setminus R(\overline{Y})) \subsetneqq Y \subsetneqq \overline{Y}$.

(A5) Ist $Y \in K(\Pi)$ und $I(Y) \neq \emptyset$ sowie $I(\Pi \setminus Y) \neq \emptyset$, so gilt eine der folgenden Aussagen:

a) $I(\overline{Y})$ enthält eine Gerade.

b) $I(\overline{\Pi \setminus Y})$ enthält eine Gerade.

c) $\overline{Y}$ ist ein Winkelraum, d.h. einer der beiden Teile, in die Π durch zwei verschiedene Geraden zerlegt wird.

Es sei Y eine Π-konvexe Hülle einer endlichen Menge $X \subseteq \Pi$: Zunächst sei $I(Y) = \emptyset$. Dann existiert eine Gerade g mit $Y \subseteq g$. Hieraus folgt sofort die Existenz von $x,y \in X$ mit $Y = f(x,y)$ und $[X]_Y = \{x,y\}$, d.h., Y ist eine Π-konvexe Hülle von $[X]_Y$, oder es ist $\emptyset = X = [X]_Y = Y$.

Nun sei $I(Y) \neq \emptyset$. Weil X endlich ist, gilt offensichtlich $I(\Pi \setminus Y) \neq \emptyset$. Es sei $x \in X$ und $x \notin [X]_Y$. Dann ist Y eine Π-konvexe Hülle von $X \setminus \{x\}$. Hieraus folgt die Inklusion $[X \setminus \{x\}]_Y \subseteq [X]_Y$: Anderenfalls existiert ein $y \in [X \setminus \{x\}]_Y$ mit $y \in [X]_Y$. So gilt $y \in (X \setminus \{x\})$, und es existiert eine Π-konvexe Menge Z mit

(*) $(X \setminus \{x,y\}) \subseteq Z \subsetneq Y$,

wobei $x \neq y$ gilt. Außerdem ist Y eine Π-konvexe Hülle von $(X \setminus \{x,y\}) \cup \{x\}$ und von $(X \setminus \{x,y\}) \cup \{y\}$. Insbesondere existiert eine Π-konvexe Hülle $W \subseteq Y$ von $(X \setminus \{x,y\})$ mit $x \notin W$ und $y \notin W$. Zunächst gilt $y \notin W$ für jede Π-konvexe Hülle $W \subseteq Y$ von $(X \setminus \{x,y\})$. Denn aus $y \in W$ folgt, daß W eine Π-konvexe Hülle von $X \setminus \{x\}$ ist, d.h. $W = Y$. Wegen (*) ist dies aber ein Widerspruch zur Hülleneigenschaft von W. Weiter existiert eine Π-konvexe Hülle

$W \subseteq Y$ von $(X \setminus \{x,y\})$ mit $x \notin W$. Anderenfalls gilt für jede Π-konvexe Hülle W die Beziehung $x \in W$. Dann ist aber W auch eine Π-konvexe Hülle von $X \setminus \{y\}$. Wegen $y \notin [X]_Y$ folgt hieraus $W = Y$. Wegen (*) ist dies aber ein Widerspruch zur Hülleneigenschaft von W. Also existiert schließlich eine Π-konvexe Hülle W von $(X \setminus \{x,y\})$ mit $x,y \notin W$ und $W \subseteq Y$. Insgesamt ist also $x \neq y$, Y eine Π-konvexe Hülle von $(X \setminus \{x,y\}) \cup \{x\}$ und von $(X \setminus \{x,y\}) \cup \{y\}$, und es existiert eine Π-konvexe Hülle $W \subseteq Y$ von $(X \setminus \{x,y\})$ mit $x,y \notin W$.
Nun sind drei Fälle zu unterscheiden:

(I) $I(\overline{Y})$ enthält eine Gerade g. Dann kann man wegen der Endlichkeit von X o.B.d.A. $g \cap X = \emptyset$ annehmen. Weiter gilt, daß die topologische Hülle $\overline{\Pi \setminus Y}$ von $\Pi \setminus Y$ ein Polygon in der euklidischen Ebene $\Pi \setminus g$ ist, nämlich die topologische Hülle einer größten konvexen Menge in $\Pi \setminus g$, die mit X elementfremd und beschränkt ist. Denn zu jeder konvexen Menge $Z \subseteq \Pi \setminus g$ mit $Z \cap X = \emptyset$ und Z beschränkt existiert offensichtlich eine konvexe Menge $Z^* \supseteq Z$, deren topologische Hülle ein konvexes Polygon in $\Pi \setminus g$ ist, und wobei $Z^* \cap X = \emptyset$ gilt.

Weiter ist im Inneren jeder Seite von $\overline{\Pi \setminus Y}$ ein Punkt von X enthalten. Denn anderenfalls widerspricht dies der Hülleneigenschaft von Y. Der Durchschnitt einer Geraden, die eine Seite von $\overline{\Pi \setminus Y}$ enthält, mit Y ist eine Strecke, bei der ein Endpunkt ein Punkt von X ist, der im Inneren der Seite von $\overline{\Pi \setminus Y}$ liegt. Aus den Eigenschaften von x und y folgt einerseits, daß x und y Endpunkte solcher Strecken sind. Andererseits folgt aber aus den Eigenschaften von x und y, daß x im Inneren einer solchen Strecke mit einem Endpunkt y, und y im Inneren einer solchen Strecke mit einem Endpunkt x enthalten ist. Das ist aber unmöglich.

(II) $I(\overline{\Pi \setminus Y})$ enthält eine Gerade g. Dann ist aber Y ein konvexes Polygon in der euklidischen Ebene $\Pi \setminus g$. Hieraus folgt die Existenz eines Punktes $a \in W$, wobei o.B.d.A. $x \in f(a,y) \subseteq \Pi \setminus g$ und $y \in f(a,x) \subseteq \Pi \setminus g$ gilt. Hieraus folgt aber $x = y$ im Widerspruch zu $x \neq y$.

(III) $\overline{Y}$ ist ein Winkelraum und der Scheitel des Winkelraumes gehört zu Y. Weiter liegen dann auf einer Randgeraden des Winkelraumes wenigstens zwei Punkte von X und auf der anderen Randgeraden des Winkelraumes wenigstens ein Punkt von X. Anderenfalls widerspricht dies der Hülleneigenschaft von Y. Weiter ist offensichtlich der Durchschnitt einer Randgeraden mit Y eine Strecke mit zwei Endpunkten aus X oder eine Strecke mit einem Endpunkt aus X und dem Scheitel als anderem Endpunkt. Aus den Eigenschaften von x und y folgt einerseits, daß x und y verschiedene Endpunkte der genannten Strecken sind. Andererseits folgt aber auch, daß x im Inneren einer Strecke mit einem Endpunkt y liegt, was jedoch nur möglich ist, wenn x der Scheitel ist. Entsprechend folgt, daß y im Inneren einer Strecke mit einem Endpunkt x liegt, woraus folgt, daß y der Scheitel ist. Hieraus folgt der Widerspruch $x = y$.

Nun wird gezeigt, daß für jede endliche Menge X gilt: Ist Y eine Π-konvexe Hülle von X, so ist Y auch eine Π-konvexe Hülle von $[\, X \,]_Y$. Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann existiert eine kleinste natürliche Zahl n, für die eine Menge X mit $\mathrm{card}(X) = n$ existiert, bei der Y eine Π-konvexe Hülle von X jedoch keine Π-konvexe Hülle von $[\, X \,]_Y$ ist. Offensichtlich ist $n \geq 3$. Angenommen, X ist eine solche Menge. Dann ist aber $[\, X \,]_Y \neq X$, denn anderenfalls ist entgegen der Voraussetzung Y doch eine Hülle von $[\, X \,]_Y$. Aus $[\, X \,]_Y \subsetneq X$ folgt die Existenz eines $x \in X$ mit $x \notin [\, X \,]_Y$. Somit ist Y eine Π-konvexe Hülle von $X \setminus \{ x \}$ und nach Voraussetzung über n auch eine Π-konvexe Hülle von $[\, X \setminus \{x\} \,]_Y$. Wegen $[\, X \setminus \{ x \} \,]_Y \subseteq [\, X \,]_Y \subseteq Y$ ist schließlich Y eine Π-konvexe Hülle von $[\, X \,]_Y$. □

4. Beweis von Satz 3

Sei $x \in [\, Y \,]_Y$. Dann gilt $x \in Y$, und es existiert eine Π-konvexe Menge Z mit $(Y \setminus \{x\}) \subseteq Z \subsetneq Y$. Hieraus folgt $x \in X$ und $(X \setminus \{x\}) \subseteq Z \subsetneq Y$. Also ist $[\, Y \,]_Y \subseteq [\, X \,]_Y$. Nun sei $x \in [\, X \,]_Y$, d.h. $x \in X$, und es existiert ein Π-konvexes Z mit $(X \setminus \{x\}) \subseteq Z \subsetneq Y$. Angenommen, es ist $x \notin [\, Y \,]_Y$. Dann existiert keine Π-konvexe Menge Z mit $(Y \setminus \{x\}) \subseteq Z \subsetneq Y$. Somit existieren $u,v \in (Y \setminus \{x\})$ mit $x \in f(u,v)$ und $f(v,u) \not\subseteq Y$. Folglich gibt es kein Π-konvexes Z mit $((X \cup \{u,v\}) \setminus \{x\}) \subseteq Z \subsetneq Y$. Also ist $[\, X \cup \{u,v\} \,]_Y \subsetneq [\, X \,]_Y$. Weil Y eine Π-konvexe Hülle von $[\, X \cup \{u,v\} \,]_Y$ und X ist, und $[\, X \cup \{u,v\} \,]_Y \subseteq X$ gilt, ergibt sich $[\, X \,]_Y \subseteq [\, X \cup \{u,v\} \,]_Y$ im Widerspruch zu $[\, X \cup \{u,v\} \,]_Y \subsetneq [\, X \,]_Y$. Schließlich ist

$$[\, Y \,]_Y = \{y: y \in Y. \text{ Es existiert ein } Z \in K(\Pi) \text{ mit } (Y \setminus \{y\}) \subseteq Z \subsetneq Y\} =$$

$$= \{y: y \in Y, (Y \setminus \{y\}) \in K(\Pi)\}. \quad \square$$

5. Beweis von Satz 5

Sei $x,y \in Y$ und $f(x,y) \subseteq Y$ sowie $(f(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap [\, Y \,]_Y \neq \emptyset$. Dann folgt, daß die topologische Hülle von Y ein Winkelraum ist, wobei für den Scheitel s gilt $(f(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap [\, Y \,]_Y = \{s\}$.

Hieraus folgt $f(y,x) \subseteq Y$ und $(f(y,x) \setminus \{x,y\}) \cap [\, Y \,]_Y = \emptyset$. Also existiert eine Abbildung g von $\Pi \times \Pi$ in $P(\Pi)$ mit:

$g(x,y) = f(x,y)$, falls $x \notin Y$ oder $y \notin Y$;

$g(x,y) = f(x,y)$, falls $f(x,y) \subseteq Y$ und

$$(f(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap [\, Y \,]_Y = \emptyset \ ;$$

$g(x,y) = f(y,x)$, falls $f(x,y) \notin Y$ oder
$(f(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap [\,Y\,]_Y \neq \emptyset$
mit $x,y \in Y$.

Nun betrachte man den Hüllenoperator T auf $P(\mathfrak{M})$ mit $T(W) = \bigcap \{Z: W \subseteq Z \in P(\mathfrak{M})\}$. Aus $x,y \in Z$ folgt $g(x,y) \subseteq Z$. für $W \in P(\mathfrak{M})$ (vgl. [6]). Nach Definition von T gilt zunächst $T(X) \subseteq Y$. Wegen $T(X) \in K(\mathfrak{M})$ und der Hülleneigenschaft von Y folgt weiter $T(X) = Y$. Analog folgt $T([\,X\,]_Y) = Y$.
Nun sei $x \in [\,X\,]_Y = [\,Y\,]_Y$. Dann gilt auch $x \in [\,X\,]_T$. Anderenfalls ist $x \in T(X \setminus \{x\}) \subseteq T(Y \setminus \{x\}) = Y$.
Mithin gibt es $u,v \in (Y \setminus \{x\})$ mit $x \in g(u,v) \subseteq Y$. Hieraus folgt aber nach Definition von g bzw. T die Beziehung $x \notin [\,Y\,]_Y$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $[\,Y\,]_Y \subseteq [\,X\,]_T$. Umgekehrt sei nun $x \in [\,X\,]_T$. Dann ist $x \notin T(X \setminus \{x\})$. Wegen $T(X \setminus \{x\}) \in K(\mathfrak{M})$ und $(X \setminus \{x\}) \subseteq T(X \setminus \{x\}) \subsetneq Y$ ist somit $x \in [\,X\,]_Y$. Also ist insgesamt $[\,X\,]_T = [\,X\,]_Y$. Schließlich folgt hieraus und aus $T([\,X\,]_Y) = Y$ die Beziehung $T([\,X\,]_T) = Y$. □

LITERATUR

[1] FRANZ, W.: Topologie. Berlin 1968.

[2] KNESER, H.: Eine Erweiterung des Begriffes "konvexer Körper". Mathematische Annalen 82(1921), 287-296.

[3] LEICHTWEISS, K.: Konvexe Mengen. Berlin 1980.

[4] RÉDEI, L.: Algebra. Leipzig 1959.

[5] RÉDEI, L.: Begründung der euklidischen und nicht-euklidischen Geometrien. Leipzig 1965.

[6] SCHMIDT, J.: Einige grundlegende Begriffe und Sätze aus der Theorie der Hüllenoperatoren. In: Ber. Math. Tagung, Berlin 1953.

Manuskripteingang: 1.9.1984

REINHARD THRON, Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule "N.K. Krupskaja" Halle