Werk

Titel: Lockere gitterförmige k-fache Kreis- und Kugelüberdeckungen

Autor: Horváth, J.

Jahr: 1985

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0020|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
20(1985),59-95

Lockere gitterförmige k-fache Kreis- und Kugelüberdeckungen

JENŐ HORVÁTH

1. Einführung

Eine Menge von abgeschlossenen Kugeln bildet eine k-fache Überdeckung im n-dimensionalen euklidischen Raum (E^n), wenn jeder Punkt des Raumes zu mindestens k Kugeln gehört. Wir betrachten eine k-fache Kugelüberdeckung in E^n ($n \geq 2$), mit Kugeln vom Radius R. Mit $\ell_k^n(R)$ bezeichnen wir das Supremum der Radien der Kugeln, die wir in den mindestens (k+1)-fach überdeckten Teilen des Raumes einlagern können. Dieses Supremum wird die Lockerheit der gegebenen k-fachen Kugelüberdeckung genannt [1].
L. Fejes Tóth [1] hat die folgenden Fragen aufgeworfen. Wie klein kann die Lockerheit der k-fachen Kugelüberdeckungen bei gegebenen Werten von n, k, R sein, wenn wir alle k-fachen Überdeckungen betrachten. Bei welchen k-fachen Überdeckungen tritt das Minimum der Lockerheit auf? Wir nennen diese Kugelüberdeckungen lockere k-fache Kugelüberdeckungen. In [2] haben wir uns mit der Lockerheit von gitterförmigen k-fachen Kreis- bzw. Kugelüberdeckungen in den Fällen k = = 2,3,4 in der Ebene bzw. k=2 im Raum beschäftigt. Wir haben das folgende gezeigt. Wenn wir den Deckkreis- bzw. Deckkugelradius R geeignet wählen, dann gibt es immer einen mindestens (k+1)-fach überdeckten Teil bei einer beliebigen k-fachen Überdeckung, in dem wir einen Kreis bzw. eine Kugel mit dem Radius R-1 einlagern können. Der Verfasser hat später bemerkt, daß es andere mindestens (k+1)-fach überdeckte Ebenen- bzw. Raumteile bei den Extremalfiguren in [2] gibt, in denen man Kreise bzw. Kugeln mit größerem

Radius als R-1 einlagern kann. (Leider war die Veränderung nicht mehr möglich, weil der Artikel schon in der Druckerei war.) Deshalb sind die in [2] aufgeführten Werte in den Fällen n=2, k=2,4 und n=3, k=2 (die Sätze 1.2., 3.2., und 4.2.) nur untere Schranken für die Lockerheit. Die lockere gitterförmige 3-fache Kreisüberdeckung ist nur H_3 (2.2. Satz), weil die Lockerheit von H_2 größer als $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$ ist.

In dieser Arbeit bestimmen wir das Minimum der Lockerheit der gitterförmigen k-fachen Kreis- bzw. Kugelüberdeckungen in den Fällen n=2, k=2,4 und n=3, k=2 und wir geben auch die Kreis- bzw. Kugelüberdeckungen an, wo das Minimum auftritt.

2. Bezeichnungen. Ein Lemma

Wir führen den Begriff der relativen Lockerheit ein. Es sei $\ell_k^n(R)$ die Lockerheit einer gegebenen k-fachen Überdeckungen von Kugeln mit dem Radius R. Der Quotient

$$\lambda_k^n(R) = \frac{\ell_k^n(R)}{R} \qquad (1)$$

wird relative Lockerheit genannt. Es ist offenbar, daß die relative Lockerheit gegenüber den Ähnlichkeitsabbildungen invariant ist, und die Bestimmung des Minimums der Lockerheit und der relativen Lockerheit in E^n äquivalente Aufgaben sind.

Es sei O der Ursprungspunkt eines Koordinatensystems der Ebene oder des Raumes. Mit demselben Symbol A,B,...,X... bezeichnen wir den Punkt und seinen Orstvektor. |X| bezeichnet die Länge des Vektors X. Mit dem Symbol (AB) bzw. (ABC) bezeichnen wir das Gitter mit dem Ursprungspunkt O in der Ebene bzw. im Raum, das durch die Vektoren A und B bzw. A, B und C bestimmt ist. Mit (AB) bzw. (ABC)

bezeichnen wir also die Menge der Punkte $xA+yB$ bzw. $xA+yB+zC$, wobei x, y, z ganze Zahlen sind.
Schlagen wir Kreise bzw. Kugeln mit dem Radius R um die Gitterpunkte von (AB) bzw. (ABC), so bekommen wir eine Kreis- bzw. Kugellagerung, die wir mit $L[(AB),R]$ bzw. $L[(ABC),R]$ bezeichnen. Wenn $L[(AB),R]$ bzw. $L[(ABC),R]$ k-fache Überdeckungen sind, dann verwenden wir die Bezeichnungen ${}_kL[(AB),R]$ bzw. ${}_kL[(ABC),R]$. Mit $\ell_k[(AB),R]$ bzw. $\ell_k[(ABC),R]$ und mit $\lambda_k[(AB),R]$ bzw. $\lambda_k[(ABC),R]$ bezeichnen wir die Lockerheit und die relative Lockerheit von ${}_kL[(AB),R]$ bzw. ${}_kL[(ABC),R]$.
Es sei ein Gitter in der Ebene mit den zwei kürzesten Gittervektoren A, B gegeben und wir nehmen an, daß der Winkel dieser zwei Gittervektoren nicht stumpfwinklig ist, d.h. die folgenden Bedingungen für die Vektoren A und B bestehen:

$$|A| \leq |B| \leq |B-A|$$
$$\sphericalangle(AOB) \leq \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Ein Gitter hat normale Darstellung, wenn (2) für das Gitter gilt. Im folgenden verwenden wir auch die Bezeichnungen $|A| = a$ und $|B| = b$.
Es bezeichne $k(P,R)$ den abgeschlossenen Kreis (die abgeschlossene Kugel) vom Radius R und mit dem Mittelpunkt P. Der Rand von $k(P,R)$ sei $\hat{k}(P,R)$. Wenn $R=1$ ist, dann verwenden wir die Bezeichnungen $k(P)$ bzw. $\hat{k}(P)$, d.h. $k(P) = k(P,1)$. Der durch die Punkte P, Q, R bestimmte Kreis bzw. die durch die Punkte P, Q, R, S bestimmte Kugel wird mit $k[PQR]$ bzw. $k[PQRS]$ bezeichnet. Für die entsprechende Kreislinie bzw. Kugelfläche verwenden wir die Bezeichnung $\hat{k}[PQR]$ bzw. $\hat{k}[PQRS]$. Den Radius von $k[PQR]$ bzw. $k[PQRS]$ bezeichnen wir mit $r[PQR]$ bzw. $r[PQRS]$.

Lemma. Es seien in E^n Kugeln mit den Radien R_1 bzw. R_2 derart gegeben, daß $R_1 > R_2$, $\{k(O_i,R_2)\}$ eine k-fache Überdeckung in E^n und $\ell_k^n(R_2) \leq R_2$ ist. Dann gilt für die k-fache Überdeckung $\{k(O_i,R_1)\}$

$$\lambda_k^n(R_1) \geq \lambda_k^n(R_2). \tag{3}$$

D.h., die relative Lockerheit von $\{k(O_i,R_1)\}$ ist nicht kleiner als die von $\{k(O_i,R_2)\}$.

Beweis. Es sei

$$R_1 = R_2 + x \qquad (x > 0). \tag{4}$$

Zuerst zeigen wir, daß

$$\ell_k^n(R_1) \geq \ell_k^n(R_2) + x \tag{5}$$

gilt. Wir betrachten die n-dimensionale Kugel $k(O,\rho)$, die in einem durch die Kugeln von $\{k(O_i,R_2)\}$ mindestens (k+1)-fach überdeckten Teil von E^n liegt. Es sei $P \in k(O,\rho)$ und P' sei der Punkt der Halbgerade OP, für den

$$OP' = \frac{\rho+x}{\rho}\, OP$$

gilt. $P' \in k(O,\rho+x)$ gilt offenbar. Wenn $P \in k(O_i,R_2)$ $(\in \{k(O_i,R_2)\})$ ist, dann gilt $P' \in k(O_i,R_1)$ $(\in \{k(O_i,R_1)\})$. Es gilt nämlich

$$O_iP' \leq O_iP+PP' \leq R_2 + \frac{x}{\rho}\, OP \leq R_2 + \rho\frac{x}{\rho} = R_1 .$$

Daraus folgt, daß die Kugel $k(O,\rho+x)$ in einem Raumteil liegt, der durch die Kugeln von $\{k(O_i,R_1)\}$ mindestens (k+1)-mal

überdeckt ist. Deshalb gilt (5).
Aus (5) und aus der Ungleichhung $R_2 \geq \ell_k^n(R_2)$ folgt

$$\frac{\ell_k^n(R_1)}{R_1} \geq \frac{\ell_k^n(R_2)+x}{R_2+x} \geq \frac{\ell_k^n(R_2)}{R_2}. \qquad (6)$$

Wenn die scharfe Ungleichung $R_2 > \ell_k^n(R_2)$ zutrifft, dann gilt $\lambda_k^n(R_1) > \lambda_k^n(R_2)$. □

3. n=2 k=2

3.1. Wir setzen voraus, daß das Gitter (AB) eine normale Darstellung hat und $L[(AB), \frac{2}{\sqrt{3}}]$ eine 2-fache Überdeckung ist. Es sei K der Mittelpunkt von $k[OAB]$. Nach [2] liegt $k(0, \frac{2}{\sqrt{3}} -1)$ oder $k(K, \frac{2}{\sqrt{3}} -1)$ in einem mindestens 3-fach überdeckten Ebenenteil. Beim Gitter
$H_1 (H_1 = (AB) : |A| = 1, |B| = \sqrt{3}$ und $A \perp B)$. Kann man am 0 und um $K = \frac{A+B}{2}$ einen Kreis im mindestens 3-fach überdeckten Teil schlagen, dessen Radius kleiner oder gleich $\frac{2}{\sqrt{3}} -1$ ist.
Wir betrachten die Kreise $k(0, \frac{2}{\sqrt{3}})$, $k(A, \frac{2}{\sqrt{3}})$, $k(B, \frac{2}{\sqrt{3}})$, $k(A+B, \frac{2}{\sqrt{3}})$ beim Gitter $H_1 = (AB)$. Es seien

$$X = \widehat{k}(0, \tfrac{2}{\sqrt{3}}) \cap \widehat{k}(A, \tfrac{2}{\sqrt{3}}), \quad Y = \widehat{k}(B, \tfrac{2}{\sqrt{3}}) \cap \widehat{k}(A+B, \tfrac{2}{\sqrt{3}}),$$
$$Z = \widehat{k}(0, \tfrac{2}{\sqrt{3}}) \cap \widehat{k}(B, \tfrac{2}{\sqrt{3}}), \quad V = \widehat{k}(A, \tfrac{2}{\sqrt{3}}) \cap \widehat{k}(A+B, \tfrac{2}{\sqrt{3}}) \qquad (7)$$

die Punkte des Parallelogrammes OA(A+B)B. Es ist leicht zu prüfen, daß die Kreise $k[XYZ]$ und $k[XYV]$ von den obigen vier Kreisen mindestens 3-fach überdeckt sind und

$$r[XYZ] = r[XYV] > \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$$

gelten. Daraus folgt

$$\lambda_2[(AB), \frac{2}{\sqrt{3}}] > 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}1339746\ldots$$

3.2. Es sei $H_1^{\mathbb{E}} = (A^{\mathbb{E}}B^{\mathbb{E}})$ das folgende Gitter: $A^{\mathbb{E}} \perp B^{\mathbb{E}}$, $r[A^{\mathbb{E}}(-A^{\mathbb{E}})B^{\mathbb{E}}] = 1$ und $|B^{\mathbb{E}}| = b_0$, wo b_0 die Lösung der Gleichung

$$b^3 - 4b^2 + 9b - 8 = 0 \qquad b \in [1,2] \tag{8}$$

($b_0 = 1{,}5331768\ldots$, $a_0 = |A^{\mathbb{E}}| = 0{,}8460038\ldots$) ist. Es ist leicht einzusehen, daß $L[(A^{\mathbb{E}}B^{\mathbb{E}}),1]$ eine 2-fache Überdeckung in E^2 bildet und

$$\ell_2[(A^{\mathbb{E}}B^{\mathbb{E}}),1] = \lambda_2[(A^{\mathbb{E}}B^{\mathbb{E}}),1] = 0{,}1539962\ldots > 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{9}$$

gilt.

Bemerkung. Es seien $X^{\mathbb{E}}$, $Y^{\mathbb{E}}$, $Z^{\mathbb{E}}$, $V^{\mathbb{E}}$ die den Punkten X, Z, V entsprechenden Punkte bei $H_1^{\mathbb{E}} = (A^{\mathbb{E}}B^{\mathbb{E}})$ (vgl. (7)). Dann gilt

$$r[X^{\mathbb{E}}Y^{\mathbb{E}}Z^{\mathbb{E}}] = r[X^{\mathbb{E}}Y^{\mathbb{E}}V^{\mathbb{E}}] = 1 - |A^{\mathbb{E}}| = 0{,}1539962\ldots \tag{9a}$$

Wir werden später sehen, daß (9) die Gültigkeit von (9a) nach sich zieht. Wir werden dabei auch erkennen, daß $k[X^{\mathbb{E}}Y^{\mathbb{E}}Z^{\mathbb{E}}]$ den Kreis $k(A^{\mathbb{E}})$ bzw. $k(A^{\mathbb{E}}+B^{\mathbb{E}})$ in dem Punkt $X^{\mathbb{E}}$ bzw. $Y^{\mathbb{E}}$ berührt.

Satz 1. Die relative Lockerheit von Gitterförmigen 2-fachen Kreisüberdeckungen ist nicht kleiner als die Lockerheit der Überdeckung $H_1^{\mathbb{E}}$ (vgl. 3.2.). Die Gleichheit tritt nur bei $H_1^{\mathbb{E}}$ und bei den zu $H_1^{\mathbb{E}}$ ähnlichen Überdeckungen auf.

Vor dem Beweis des Satzes 1. sehen wir einige Hilfssätze ein.

<u>Hilfssatz 3.1.</u> Es sei ein Gitter (AB) von normaler Darstellung gegeben, bei dem $A \perp B$ und $0{,}8 \leq r[A(-A)B] \leq 1$ ist. Es seien

$$X = \hat{k}(0) \cap \hat{k}(A)\,, \quad Y = \hat{k}(B) \cap \hat{k}(A+B)\,, \qquad Z = \hat{k}(0) \cap \hat{k}(B)\,, \quad V = \hat{k}(A) \cap \hat{k}(A+B) \tag{10}$$

die Punkte des Rechtecks $OA(A+B)B$. Der Kreis k_1 ist der kleinere von den Kreisen, die durch Y und Z hindurchgehen und die den Kreis k(A) berühren. Der Kreis k_2 ist der kleinere von den durch Z laufenden Kreisen, die die Kreise k(A) und k(A+B) berühren. Wir setzen die Kreislinie $\hat{k} = \hat{k}[A(-A)B]$ und den Punkt $B \in \hat{k}$ fest. Bewegen wir die Punkte A und (-A) auf $\hat{k}$ (Abb.1) derart, daß $A \perp B$ gilt und $|A|$ abnimmt, dann hat diese Lageänderung die folgende Eigenschaften:

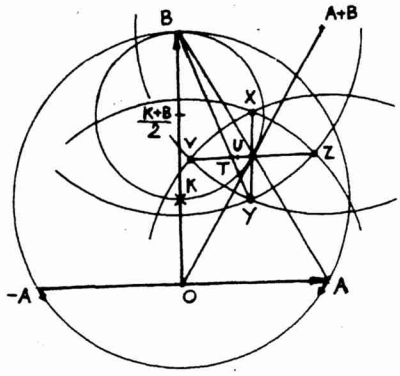

Abb. 1.

3.1.1. 1-a nimmt ab.

3.1.2. $|Z - \frac{A+B}{2}|$ nimmt im Fall $b < \frac{2r}{2-r}$ ab und nimmt im Fall $b > \frac{2r}{2-r}$ zu, wo $r = r[A(-A)B]$ ist.

3.1.3. Wenn $r[XYZ] \geq 1-a$ ist, dann gilt

$$b^2 \leq 4a^2 - a^4\,. \tag{11}$$

3.1.4. Wenn (11) gilt, dann nimmt $r[XYZ] = r[XYV]$ ab.

3.1.5. Die Radien von k_1 und k_2 nehmen ab.
3.1.6. Wenn die Gleichheit in (11) auftritt, dann berührt $k[XYV]$ im Punkt X bzw. Y den Kreis $k(0)$ bzw. $k(B)$, weiterhin berührt $k[XYZ]$ in X bzw. Y den Kreis $k(A)$ bzw. $k(A+B)$.
3.1.7. Wenn $r[XYZ] \geq 1-a$ gilt, dann liegen die Kreise $k[XYZ]$ und $k[XYV]$ in den durch die Kreise $k(0)$, $k(A)$, $k(B)$, $k(A+B)$ mindestens 3-fach überdeckten Teilen der Ebene.

Beweis. Wir betrachten die Behauptungen nacheinander. Die Behauptung von 3.1.1. ist eine einfache Folgerung der im Hilfssatz gegebenen Lageänderung.
3.1.2. Es bezeichne K den Mittelpunkt von $k[A(-A)B]$. Ist $A \in \hat{k}(K,r)$, dann gilt $\frac{A+B}{2} \in \hat{k}(\frac{K+B}{2}; \frac{r}{2})$. Es seien $g \perp B$ und $\frac{K+B}{2} \in g$ (Abb. 2.) Der Punkt W_0 wird so gewählt, daß $W_0 \in g$ und $|B-W_0| = 1-\frac{r}{2}$ gelten. Der Kreis $k(W_0, \frac{r}{2})$ berührt $k(B)$ im Punkt Z_0. Wir fällen das Lot auf B von dem Punkt Z_0. Es sei $\frac{A_0+B}{2}$ $(A_0 \in \hat{k})$ der Schnittpunkt dieses Lotes und der Kreislinie $\hat{k}(\frac{K+B}{2}, \frac{r}{2})$ im Rechteck $OA(A+B)B$. Aus der Definition von W_0 folgt

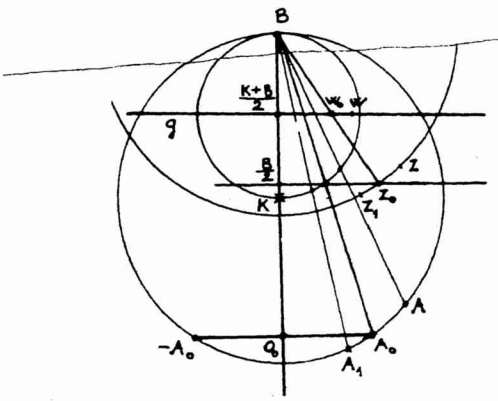

Abb. 2.

$$\left|\frac{K+B}{2} - W_0\right| = \left|\frac{A_0+B}{2} - Z_0\right|.$$

Bewegen wir den Punkt A auf $\hat{k}$ ausgehend von A_0 in die

eine oder andere Richtung, dann ist $\frac{A+B}{2} \in \widehat{k}(\frac{k+B}{2}, \frac{r}{2})$ und $Z \in \widehat{k}(B)$. Es sei W der Punkt, für den $W \in g$ und $|W-Z| = \frac{r}{2}$ gilt. Aus der Definition von W_o volgt, daß es einen Punkt $Z_1 \in \widehat{k}(B)$ gibt, für den $|W-Z_1| = \frac{r}{2}$ und

$$\left|\frac{A+B}{2} - Z\right| = \left|\frac{K+B}{2} - W\right| = \left|\frac{A_1+B}{2} - Z_1\right| \qquad (12)$$

gilt, wo $A_1 (\in \widehat{k})$ der dem Punkt Z_1 entsprechende Punkt ist. Umgekehrt, wenn $W \in g$ und $\left|\frac{K+B}{2} - W\right| \geq \left|\frac{K+B}{2} - W_o\right|$ gilt, dann gibt es Punkte $Z, Z_1 \in \widehat{k}(B)$, für die $|W-Z| = |W-Z_1| = \frac{r}{2}$ und (12) gilt. Aus den bisherigen folgt schon 3.1.2., wenn wir zeigen, daß $|B| = \frac{2r}{2-r}$ im Fall $A = A_o$ ist. Aus den Gleichungen

$$\left|\frac{K+B}{2} - W_o\right| = \sqrt{1-r}$$

$$\left|\frac{B_o}{2} - Z\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4-b^2}$$

ergibt sich mit einer einfachen Rechnung, daß $b = \frac{2r}{2-r}$ ist.

3.1.3. Aus $A \perp B$ folgt $X-Y \perp V-Z$ und wegen $b \geq a$ ist $|V-Z| \geq |X-Y|$. Es seien $|V-Z| = 2v$ und $|X-Y| = 2x$. Aus einfachen Rechnungen ergibt sich, daß

$$\rho = r[XYZ] = \frac{x^2+v^2}{2v} \qquad (13)$$

ist, und weiterhin gilt

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{4-a^2} - b), \\ v &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{4-b^2} - a). \end{aligned} \qquad (14)$$

Wir können die Ungleichungen $r[XYZ] \geq 1-a$ mit Hilfe von (13) und (14) abhängig von a und b aufschreiben. Dann

quadratieren wir diese Ungleichung 2-mal und zwischendurch ordnen wir die Ungleichung um. Wir führen aber nur äquivalente Umformungen durch. Endlich haben wir die Ungleichung

$$(b^2+a^2-8)(b^2-4a^2+a^4) \geq 0.$$

Weil $a^2+b^2 < 8$ ist, gilt (11) offenbar.

3.1.4. Es sei b_0 der zum Punkt Z_0 gehörige Wert von $|B|$ (vgl. 3.1.2). So ist $b_0 = \frac{2r}{2-r}$. Es ist leicht auszurechnen, daß $r = \frac{a^2+b^2}{2b}$ ist. Daraus folgt

$$a^2 = b(2r-b) \tag{15}$$

Wir nehmen an, daß die Gleichheit in (11) auftritt. Substituieren wir (15) in (11), so bekommen wir die Gleichung

$$b^3 - 4rb^2 + 4r^2b + 5b - 8r = 0, \tag{16}$$

wo $0{,}8 \leq r \leq 1$ ist. Für die Funktion

$$f(b) = b^3 - 4rb^2 + 4r^2b + 5b - 8r \qquad b \in [0,2]$$

gilt $f(0) = -8r < 0$ und $f(2) = 2(2r-3)^2 > 0$. Die erste Ableitung von f ist

$$f'(b) = 3b^2 - 8rb + 4r^2 + 5 > 0,$$

folglich nimmt $f(b)$ zu und es gibt genau ein $b_1 \in (0,2)$ so, daß $f(b_1) = 0$ gilt.

Wir zeigen, daß $b_0 > b_1$ ist. Diese Ungleichung ist mit $f(b_0) > f(b_1) = 0$ äquivalent.

Es gilt

$$f(b_0) = \frac{1}{(2-r)^3}\left[4r^4-4r^3-15r^2+28r-12\right] = \frac{1}{(2-r)^3}\, g(r).$$

Mit einer einfachen Rechnung ergibt sich, daß $g(r) > 0$ im Fall $r \in [0{,}8,1]$ ist. Das bedeutet aber, daß

$$b_0 > b_1 \quad \text{und} \quad a_0 < a_1 \tag{17}$$

gilt.
Wir verwenden die Bezeichnungen von 3.1.3. $r[XYZ]$ nimmt ab, wenn x und v abnehmen. x nimmt offenbar ab. Weil (11) gilt, ist $b_1 > b$. Anderseits ist $b_0 > b_1$ und wir wissen, daß auch $v = \left|\frac{A+B}{2} - Z\right|$ für $b < b_0$ nach 3.1.2. abnimmt. Folglich nimmt $r[XYZ]$ ab.
3.1.5. Die Abnahme der Radien von k_1 und k_2 ist eine einfache Folgerung der Abnahme von x und v.
3.1.6. Wir nehmen an, daß die Gleichheit in (11) gilt, d.h., $r[XYZ] = r[XYV] = 1-a$ ist. Es sei U der Mittelpunkt von $k[XYV]$. Wir zeigen, daß

$$B\,\frac{B}{2}\,U\triangle \sim Y\,\frac{A+B}{2}\,U\triangle \tag{18}$$

gilt. Daraus folgt, daß die Punkte B, U und Y auf derselben Geraden liegen, d.h., $k[XYV]$ den Kreis $k(B)$ im Punkt Y berührt. (18) gilt, wenn

$$\frac{\left|\frac{B}{2} - U\right|}{\frac{b}{2}} = \frac{\left|\frac{A+B}{2} - U\right|}{x} \tag{19}$$

ist. Es ist leicht einzusehen, daß (19) richtig ist. Wir können nämlich (13) und (14) in (19) substituieren und verwenden, daß die Gleichheit in (11) zutrifft.
1.3.7. Es sei T der Schnittpunkt der Geraden VZ und BY (Abb. 1.) Wenn die Gleichheit in (11) gilt, dann ist $U = T$, wo U der Mittelpunkt von $k[XYV]$ (vgl. 3.1.6.) war. Im Fall $U = T$ gilt $\sphericalangle(TVY) = \sphericalangle(VYT)$. Während der Anwendung der Lageänderung, die wir im Hilfssatz definiert haben, nimmt $\sphericalangle(VZY) = \sphericalangle(ZVY)$ ab. Daraus folgt, daß $\sphericalangle(XYV)$ zunimmt. $\sphericalangle(OBY) = \sphericalangle(XYT)$ nimmt ab, deshalb wächst $\sphericalangle(TYV) = \sphericalangle(XYV) - \sphericalangle(XYZ)$. In der Endlage gilt $\sphericalangle(YVT) = \sphericalangle(VYT)$ (In (11) tritt die Gleichheitung). Folglich war zuvor $\sphericalangle(TVY) > \sphericalangle(VYT)$. Deshalb gilt $|Y-T| > |V-T|$ und daraus

ergibt sich $|V-U| > |V-T|$. Aus dieser Ungleichung folgt schon die Behauptung 3.1.7. □

Hilfssatz 3.2. Es sei (AB) ein Gitter von normaler Darstellung. Wenn $r[A(-A)B] \leq 1$ ist, dann bildet die Kreislagerung $L[(AB),1]$ eine gitterförmige 2-fache Kreisüberdeckung. Im Fall $r[A(-A)B] > 1$ kann $L[(AB),1]$ keine 2-fache Kreisüberdeckung sein.

Der Beweis des Hilfssatzes 3.2. ist sehr einfach, deshalb verzichten wir auf seine Ausführung.

Hilfssatz 3.3. Es sei (AB) ein Gitter mit normaler Darstellung und mit $A \not\perp B$, $0{,}8 \leq r = r[A(-A)B] \leq 1$. Weiterhin verwenden wir die Bezeichnungen des Hilfssatzes 3.1.
Ändern wir das Gitter (AB) dadurch ab, in dem wir bei festgehaltenen Gitterpunkten O, A den Punkt B um O mit wachsendem $\alpha = \sphericalangle(AOB)$ $(60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$ drehen, so nimmt $r[XYZ] = r[XYV]$ ab.

Beweis. Wegen $a \leq b$ und $60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ist $|V-Z| = 2\left|\frac{A+B}{2} - Z\right| \geq |X-Y|$, deshalb gilt $\sphericalangle(XYZ) \leq 90^\circ$. Weil B auf $\widehat{k}(0,b)$ bewegt wird, bewegt sich der Punkt $\frac{A+B}{2}$ auf der Kreislinie $\widehat{k}(\frac{A}{2}, \frac{b}{2})$ gegen die Symmetrieachse des gleichschenkligen Dreiecks OAX (Abb. 3.). Folglich nimmt $\left|\frac{A+B}{2} - X\right| = \left|\frac{A+B}{2} - Y\right|$ ab.
Wir zeigen, daß auch $\left|\frac{A+B}{2} - Z\right|$ (Abb. 3.a) ab nimmt.
Aus $\alpha \leq 90^\circ$ folgt $\left|\frac{A+B}{2}\right| \geq \left|\frac{A+B}{2} - B\right|$. Weil sich $\frac{A+B}{2}$ auf $\widehat{k}(\frac{A}{2}, \frac{b}{2})$ gegen die Symmetrieachse von OAX bewegt, nimmt $\left|\frac{A+B}{2}\right|$ ab und $\left|\frac{A+B}{2} - B\right|$ zu. Während der Anwendung dieser Lageänderung nimmt der Inhalt des Dreiecks OAB zu, deshalb nimmt auch der Abstand des Punktes $\frac{A+B}{2}$ von der

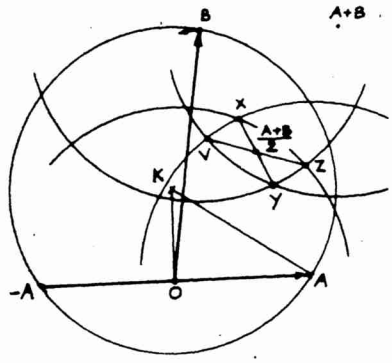

Abb. 3

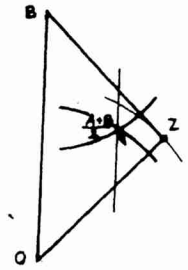

Abb. 3.a.

Geraden OB (vgl. Abb. 3.a.) zu. Daraus folgt schon die Abnahme von $\left|\frac{A+B}{2} - Z\right|$.

Es gilt $\sphericalangle(X\ \frac{A+B}{2}\ Z) > 90^\circ$ und dieser Winkel nimmt offenbar ab. So nimmt $\sphericalangle(Z\ \frac{A+B}{2}\ Y)\ (< 90^\circ)$ zu.

Wir haben gesehen, daß $\left|\frac{A+B}{2} - X\right|$ und $\left|\frac{A+B}{2} - Z\right|$ abnehmen, $\sphericalangle(XZY) \leq 90^\circ$ gilt und $\sphericalangle(Y\ \frac{A+B}{2}\ Z)\ (< 90^\circ)$ zunimmt. Daraus folgt, daß $r[XYZ]$ abnimmt. □

<u>Hilfssatz 3.4.</u> Es gelten die Voraussetzungen über ein Gitter (AB) aus Hilfssatz 3.3., und wir betrachten die in Hilfssatz 3.1. eingeführten Kreise k_1, k_2.
Nehmen wir bei festem Basisvektor A die im 3.3. beschriebene Lageänderung von B vor, so impliziert die Zunahme von α die Abnahme der Radien der Kreise k_1, k_2.

<u>Beweis.</u> Die obige Lageänderung ist äquivalent damit, daß wir die Punkte A und A+B fixieren und den Punkt O um A mit der Abnahme von $\sphericalangle(OA(A+B))$ drehen.
Es seien $Q = \hat{k}(A) \cap \hat{k}(A+B)$ und $Q \neq V$ (Abb. 4.). Das Viereck $Q(\frac{A+B}{2})\frac{B}{2}Z$ ist ein Parallelogramm, deshalb bewegt sich Z auf der Kreislinie $\hat{k}(Q,a)$ während der Anwendung der

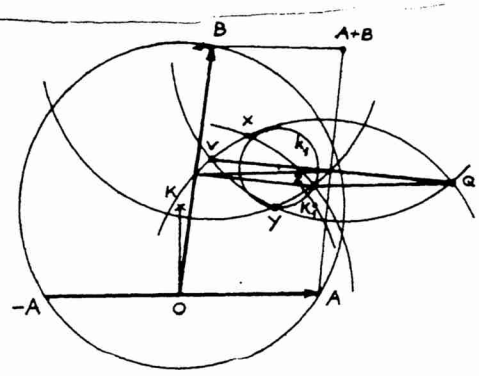

Abb. 4.

neuen, zur ursprünglichen äquivalenten Lageänderung Z bewegt sich in das Innere der ursprünglichen Kreises k_2, deshalb nimmt der Radius k_2 ($Z \in \widehat{k}_2$, k_2 berührt k(A) und k(A+B)) ab.
Der kleinere Bogen $\widehat{YZ}$ des Kreises k_1 liegt außerhalb des Kreises k(B) und innerhalb des Kreises k(A+B).
Bei der entsprechenden Drehung von O kommen Y und Z in das Innere des ursprünglichen Kreises k_1. Das bedeutet aber, daß der Radius von k_1 abnimmt. □

Der Beweis des Satzes 1. Wir setzen voraus, daß das Gitter (AB) eine normale Darstellung hat und $r[A(-A)B] = 1$ gilt. Aus dem Hilfssatz 3.2. folgt, daß $L[(AB),R] = {}_2L[(AB),R]$ im Fall $R \geq 1$ ist. Wenn $\ell_2[(AB),R] \geq R$ ist, dann gilt $\lambda_2[(AB),R] \geq 1$, d.h., die Lockerheit von ${}_2L[(AB),R]$ kann nicht minimal sein. (Die relative Lockerheit von $H_1^{\mathbb{R}}$ ist 0,1539962... .)
Ist $\ell_2[(AB),R] < R$, dann folgt

$$\lambda_2[(AB),R] > \lambda_2[(AB),1]$$

aus dem Lemma. Deshalb genügt es die Lockerheit von ${}_2L[(AB),1]$ zu untersuchen.
Es sei K_1 der Mittelpunkt des Kreises $k[OA(A+B)]$. Aus $|B| \leq |B-A|$ folgt $K_1 \notin k(B) \setminus \widehat{k}(B)$. $K_1 \in \widehat{k}(B)$ gilt nur im Fall $|B| = |B-A|$. Daraus folgt, daß $Z \in \widehat{XK}_1$ ($\widehat{XK}_1 \subset \widehat{k}(O)$) gilt (Abb. 4.).

Wir können annehmen, daß $a \geq a_0 = 0{,}8460038\ldots$, wo $a_0^2 = 2b_0 - b_0^2$ ist und $b_0 = 1{,}5331768\ldots$ die Lösung der Gleichung (8) ist. Andernfalls würde $1-a > 1-a_0 = 0{,}1539962\ldots$ gelten. Weil $k(0, 1-a)$ immer in einem mindenstens 3-fach überdeckten Teil liegt, wäre die Lockerheit $> 1-a_0$.
Wenn $A \perp B$ und $a \geq a_0$ sind, dann liegen $k[XYV]$, k_1 und k_2 wegen 3.1.6. in dem durch die Kreise $k(0)$, $k(A)$, $k(B)$, $k(A+B)$ mindestens 3-fach überdeckten Teil. Wegen 3.1.3. gilt auch

$$r[XYV] \geq 1-a. \tag{20}$$

Die Gleichheit in (20) tritt nur für H_1^* auf.
Es seien $60^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ und $a \geq a_0$. Betrachten wir die Kreise $k[XYV]$, $k[XYZ]$ (Abb. 3.), k_1 ($Y, Z \in \widehat{k_1}$ und k_1 berührt $k(A)$, vgl. Abb. 4.) und k_2 ($Z \in \widehat{k_2}$, k_2 berührt $k(A+B)$ und $k(A)$, s. Abb. 4.). Wir nehmen diejenigen unter den vorigen Kreisen, die in irgendeinem mindestens 3-fach überdeckten Teil liegen. Fixieren den Basisvektor A und drehen B um 0 bis zur Lage $\alpha = 90^\circ$. Inzwischen ändert sich das Gitter (AB) entsprechend der Änderung von B. In der Endlage bekommen wir das Gitter $(A\bar{B})$, wo $A \perp \bar{B}$ und $|\bar{B}| = b$ gelten. Aus den Hilfssätzen 3.3. und 3.4. folgt, daß die Radien von $k[XYZ]$, k_1 und k_2 abnehmen. (Das ist unabhängig davon, ob diese Kreise mindestens 3-fach überdeckt sind oder nicht.)
Während der Anwendung der obigen Lageänderung nimmt $r[A(-A)B]$ ab, deshalb bleibt die Überdeckung in jeder Lage 2-fach. Es sei $R_0 = r[A(-A)\bar{B}] < 1$. Aus dem Hilfssatz 3.2. folgt, daß $L[(A\bar{B}), R_0] = {}_2L[(A\bar{B}), R_0]$ ist. Aus dem Lemma ergibt sich

$$\lambda_2[(A\bar{B}), R_0] < \lambda_2[(A\bar{B}), 1].$$

Vergrößern wir die Überdeckung ${}_2L[(A\bar{B}), R_0]$ im Verhältnis $\frac{1}{R_0} > 1$, so bekommen wir die Überdeckung ${}_2L[(A_1B_1), 1]$. Es

gilt offenbar $\lambda_2[(AB),R_o] = \lambda_2[(A_1B_1),1]$, $r[A_1(-A_1)B_1] = 1$ und $|A_1| > a \geq a_o$.
Wenden wir die Punkte 3, 4, 5 und 7 des Hilfssatzes 3.1. auf ${}_2L[(A_1B_1),1]$ an, so ergibt sich, daß die Lockerheit von H_1^* minimal ist. Es ist offenbar, daß die relative Lockerheit für die zu H_1^* ähnlichen Überdeckungen dieselbe ist. □

4. n=2 k=4

4.1. In [2] haben wir die Gitter (AB) von normaler Darstellung in 5 Klassen eingeteilt. Wir haben gezeigt, daß die Kreise $k(0, \frac{2}{\sqrt{3}}-1)$ oder $k(K_1, \frac{2}{\sqrt{3}}-1)$ bei der Überdeckung ${}_4L[(AB), \frac{2}{\sqrt{3}}]$ in vier von den fünf Klassen mindestens 5-fach überdeckt ist, wo K_1 der Mittelpunkt des Kreises $k[0(2A)B]$ ist. Bei den Gittern vom fünften Typ (der Fall c.2.3. auf der Seite 164 in [2]) haben wir gezeigt, daß entweder der Kreis $k(0,R^*-1)$ oder $k(K_1,R^*-1)$ bei der Überdeckung ${}_4L[(AB),R^*]$ in einem mindestens 5-fach überdeckten Teil liegt, wo $R^* = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{133}{3}}$ und K_1 der Mittelpunkt von $k[0(2A)B]$ ist.
Wir betrachten das Gitter H_6 ($A \perp B$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = 1$). Die Radien der Kreise $k(0,R^*-1)$ und $k(A + \frac{B}{2}, R^*-1)$ kann man bei H_6 nicht vergrößern. Aus dem bisherigen folgt, daß die relative Lockerheit der Überdeckung bei den Gittern von ersten vier Typen mindestens $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}1339746...$ ist und die relative Lockerheit bei dem Gitter von fünften Typ mindestens $1 - \frac{1}{R^*} = 0{,}0988729...$ ist.
Es seien X, Y, V und Z die Punkte des Rechtecks $0(2A)(2A+B)B$ bei dem Gitter $H_6 = (AB)$, für die

$$X = \hat{k}(0,R^*) \cap \hat{k}(2A,R^*), \quad Y = \hat{k}(B,R^*) \cap \hat{k}(2A+B,R^*),$$
$$Z = \hat{k}(0,R^*) \cap \hat{k}(B,R^*), \quad V = \hat{k}(2A,R^*) \cap \hat{k}(2A+B,R^*) \tag{21}$$

gilt.

Es ist leicht zu kontrollieren, daß die in (21) vorkommenden vier Kreise, weiterhin $k(A,R^*)$ und $k(A+B,R^*)$ die Kreise $k[VZX]$ und $k[VZY]$ mindestens 5-fach überdecken und

$$r[VZX] = r[VZY] > R^*-1$$

gilt. Das bedeutet aber, daß die relative Lockerheit von H_6 größer als $1 - \frac{1}{R^*}$ ist.

4.2. Das Gitter $H_6^* = (A^*B^*)$ wird folgenderweise definiert: Es seien $A^* \perp B^*$, $r[O(2A^*+B^*)(A^*+2B^*)] = 1$ und $|B^*| = b_0$, wo b_0 die Lösung der Gleichung

$$b^8 - 33b^6 + 300b^4 - 944b^2 + 576 = 0 \qquad (22)$$

im Interwall $(0,1)$ ($b_0 = 0{,}8905085\ldots$, $|A^*| = a_0 = 0{,}797365\ldots$) ist $L[(A^*B^*),1] = {}_4L[(A^*B^*),1]$ gilt in E^2, und es ist

$$\ell_4[(A^*B^*),1] = \lambda_4[(A^*B^*),1] = 1-b_0 = 0{,}1094915 \qquad (22.a)$$

Bemerkung. Wenden wir die Bezeichnung (21) auf das Gitter $H_6^* = (A^*B^*)$ an, so gilt

$$r[V^*Z^*X^*] = r[V^*Z^*Y^*] = 1-b_0. \qquad (23)$$

Später werden wir sehen, daß (23) und die Gleichung (22) mit der Bedingung $r[O(2A^*+B^*)(A^*+2B^*)] = 1$ äquivalent ist. Wir werden auch einsehen, daß $k[V^*Z^*X^*]$ die Kreise $k(2A+B)$ bzw. $k(B)$ in den Punkten V^* bzw. Z^* berührt.

Satz 2. Die relative Lockerheit von gitterförmigen 4-fachen Kreisüberdeckungen ist nicht kleiner als die Lockerheit von H_6^* (vgl. 4.2.). Die Gleichheit tritt nur bei H_6^* und bei den zu H_6^* ähnlichen Überdeckungen auf.

Vor dem Beweis des Satzes 2. zeigen wir einige Hilfssätze.

Wir beweisen aber nur die Hilfssätze, deren Beweise von den Beweisen der Hilfssätze 3.1.-3.4. wesentlich verschieden sind.

Hilfssatz 4.1. Wir setzen voraus, daß das Gitter (AB) eine normale Darstellung hat und $A \perp B$, $\sqrt{2}a \geq b \geq a$, $r[O(2A+B)(A+2B)] = 1$ gilt. Es seien X, Y, Z, V die in (21) definierten Punkte (Abb. 5.). Der Kreis k_1 sei der kleinere von den durch Y und Z hindurchgehenden Kreisen, die den Kreis k(2A) berühren. Der Kreis k_2 ist der kleinere von den Kreisen, die die Kreise k(O) und k(2A) berühren und deren Rand den Punkt Y enthält.

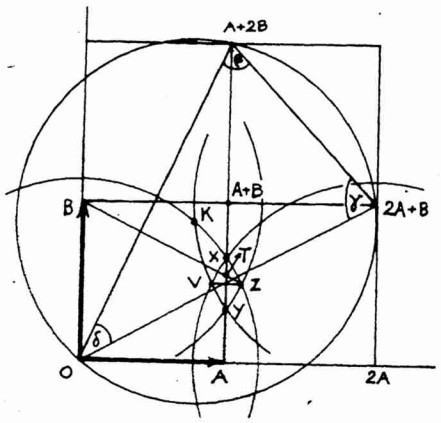

Abb. 5.

Ändern wir das Gitter (AB) folgenderweise: Wir fixieren den Kreis $k = k[O(2A+B)(A+2B)]$ und den Punkt 2A+B von A+2B auf $\hat{k}$ mit der Zunahme der Abstände vom Punkt 2A+B auf solche Weise, daß die Bedingung $A \perp B$ erhalten bleibt. Die Behauptungen sind:

4.1.1. $|B| = b$ nimmt ab.

4.1.2. Ist $r[VZX] = r[VZY] \geq 1-b_o$, dann gilt

$$4a^2 \leq 4b^2 - b^4. \tag{24}$$

4.1.3. $r[VZX] = r[VZY]$ nimmt ab.

4.1.4. Die Radien von k_1 und k_2 nehmen ab.

4.1.5. Tritt die Gleichheit in (24) auf, dann berührt k[VZX] den Kreis k(B) im Punkt Z und den Kreis k(2A+B) im

Punkt V. Weiterhin berührt $k[VZY]$ den Kreis $k(0)$ bzw. $k(2A)$ im Punkt Z bzw. V.

4.1.6. Wenn $r[VZX] \geq 1-b$ gilt, dann überdecken $k(0)$, $k(A)$, $k(2A)$, $k(B)$, $k(A+B)$ und $k(2A+B)$ die Kreis $k[VZX]$ und $k[VZY]$ gemeinsam mindestens 5-fach.

Beweis. Die Behauptung 4.1.1. ist eine einfache Folgerung der im Hilfssatz definierten Gittertransformation.

4.1.2. Aus $A \perp B$ folgt $X-Y \perp V-Z$. Wegen $2a > b$ gilt $|V-Z| < |X-Y|$. Es seien $|V-Z| = 2v$ und $|X-Y| = 2x$. Mit einer einfachen Rechnung ergeben sich

$$\rho = r[VZX] = \frac{x^2+v^2}{2x} \tag{25}$$

und

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1-a^2} - \frac{b}{2}, \\ v &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} - a. \end{aligned} \tag{26}$$

Wir substituieren (25) und (26) in die Ungleichung

$$r[VZX] \geq 1-b. \tag{27}$$

Dann quadratieren wir die Ungleichung (27) zweimal und führen äquivalenten Umformungen durch. Endlich bekommen wir die folgende mit (27) äquivalente Ungleichung

$$(4a^2+b^2-4)(4a^2-4b^2+b^4) \geq 0$$

Weil $4a^2+b^2-4 < 0$ ist, ergibt sich (24) aus dieser Ungleichung. Die Gleichheit tritt nur im Fall $r[VZX] = 1-b$ auf.

4.1.3. $r[VZX]$ nimmt ab, wenn x und v während der Anwendung der Gittertransformation abnehmen. Es seien $\delta = \sphericalangle((2A+B)O(A+2B))$, $\beta = \sphericalangle(O(A+2B)(2A+B))$ und $\gamma = \sphericalangle(O(2A+B)(A+2B))$ (Abb. 5.). Es ist offenbar, daß

$$\gamma \geq \beta > \delta.$$

gilt. Wegen $r[O(2A+B)(A+2B)] = 1$ gilt

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(\sin^2\delta + \sin^2\beta) - \sin^2\gamma} \quad ,$$
$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2(\sin^2\delta + \sin^2\gamma) - \sin^2\beta} \quad . \tag{28}$$

Aus $A \perp B$ folgt $a^2+b^2 = 4\sin^2\delta$, d.h., es gilt

$$\sin^2\beta + \sin^2\gamma = 5\sin^2\delta \tag{29}$$

mit der Anwendung von (28). Aus $\sqrt{2}a \geq b$ folgt $\gamma \leq 90^\circ$ und

$$\sin\beta \geq \sqrt{2}\sin\delta. \tag{30}$$

Dann substituieren wir (30) in (29), und es ergibt sich

$$\sqrt{3}\sin\delta \geq \sin\gamma$$

d.h., die Ungleichungen

$$\sqrt{3}\sin\delta \geq \sin\gamma \geq \sin\beta \geq \sqrt{2}\sin\delta > \sin\delta \tag{31}$$

gelten.

Aus der Definition der Gittertransformation folgt, daß γ während ihrer Anwendung abnimmt, δ und β aber zunehmen. Deshalb nehmen die entsprechenden Winkel ihr Minimum bzw. Maximum für $\gamma = 90^\circ$ oder im Fall $\gamma = \beta$ $(a = b)$ an. Mit einfachen Rechnungen bekommen wir die folgenden Ungleichungen

$$\begin{aligned} &\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2} \\ &\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} \geq \beta \geq \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \\ &\arcsin\frac{3}{5} \geq \delta \geq \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{32}$$

Im folgenden untersuchen wir die Gittertransformation in Abhängigkeit von δ. (Mit Strich bezeichnen wir die ersten Ableitungen.) Aus $\delta + \beta + \gamma = \pi$ ergibt sich

$$\beta' + \gamma' = -1 \tag{33}$$

und aus (29) bekommen wir

$$\beta' \sin 2\beta + \gamma' \sin 2\gamma = 5 \sin 2\delta. \tag{34}$$

Hinsichtlich der Gleichheit (33) folgt aus (34) die Ungleichung

$$\beta'(\sin 2\beta - \sin 2\gamma) = \sin 2\gamma + 5 \sin 2\delta \geq 5 \sin 2\delta.$$

Daraus ergibt sich

$$\beta' \sin(\gamma - \beta) \geq 5 \sin \delta .$$

$\gamma - \beta$ ist maximal, wenn $\gamma = 90^\circ$ und $\beta = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$ gelten. Dann ist $\sin(\gamma - \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, und es gilt

$$\beta' \frac{1}{\sqrt{3}} \geq \beta' \sin(\gamma - \beta) \geq 5 \sin \delta \geq 5 \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Daraus ergibt sich

$$\beta' \geq 5 \quad \text{und} \quad \gamma' \leq -6 \tag{35}$$

Aus (28) und (32) folgt, daß

$$\begin{aligned} &\tfrac{3}{5}\sqrt{2} \leq b \leq \tfrac{2}{3}\sqrt{2}, \\ &\tfrac{3}{5}\sqrt{2} \geq a \geq \tfrac{2}{3} \end{aligned} \tag{36}$$

ist.

Jetzt zeigen wir, daß v und x abnehmen.

Wir substuieren (28) in (26) und bekommen

$$\begin{aligned} v = \tfrac{1}{3}\sqrt{9 + \sin^2\beta - 2\sin^2\delta - 2\sin^2\gamma} - \\ - \tfrac{2}{3}\sqrt{2\sin^2\delta + 2\sin^2\beta - \sin^2\gamma}. \end{aligned} \tag{37}$$

Die erste Ableitung von (37) ist

$$v' = \frac{1}{9}\left[\frac{\beta'\sin 2\beta - 2\sin 2\delta - 2\gamma'\sin 2\gamma}{2\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}} - 2\,\frac{2\sin 2\delta + 2\beta'\sin 2\beta - \gamma'\sin 2\gamma}{a}\right]. \tag{38}$$

Es gilt offenbar

$$\beta'\sin 2\beta - 2\sin 2\delta - 2\gamma'\sin 2\gamma < \\ < 8\sin 2\delta + 8\beta'\sin 2\beta - 4\gamma'\sin 2\gamma. \tag{39}$$

Weil a und $\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}$ beide zunehmen, wenn δ zunimmt, sind beide Seiten der Ungleichung (39) positiv. Aus (26) folgt

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}} < \frac{1}{a}. \tag{40}$$

Wir multiplizieren die Ungleichungen (39) und (40). Nach äquivalenten Unformungen ergibt $v' < 0$, d.h., v nimmt während der Anwendungen der Gittertransformation ab.
Mit Hilfe von (28) können wir (26) wie folgt auf schreiben:

$$x = \frac{1}{3}\left[\sqrt{9+4\sin^2\gamma - 8\sin^2\delta - 8\sin^2\beta} - \sqrt{2\sin^2\delta + 2\sin^2\gamma - \sin^2\beta}\right]. \tag{41}$$

Die erste Ableitung ist

$$x' = \frac{1}{18}\left[\frac{4\gamma'\sin 2\gamma - 8\sin 2\delta - 8\beta'\sin 2\beta}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{2\sin 2\delta + 2\gamma'\sin 2\gamma - \beta'\sin 2\beta}{\frac{b}{2}}\right]. \tag{42}$$

$\sqrt{1-a^2}$ und b nehmen ab, deshalb sind die Zählen beider Brüche in (42) negativ. Nun können wir (42) folgendermaßen aufschreiben:

$$x' = \frac{1}{18}\left[\frac{4\gamma'\sin 2\gamma - 8\sin 2\delta - 8\beta'\sin 2\beta}{1-a^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta'\sin 2\beta - 2\sin 2\delta - 2\gamma'\sin 2\gamma}{\frac{b}{2}}\right]. \qquad (43)$$

Wir möchten zeigen, daß $x' < 0$ gilt. Der erste Bruch in (43) ist negativ. Deshalb können wir eine obere Abschätzung geben, wenn wir den maximalen Wert des Nenners, d.h. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ als Nenner betrachten. Der zweite Bruch in (43) ist positiv und es gilt $\min \frac{b}{2} = \frac{3}{5\sqrt{2}}$. Wir können diesen zweiten Bruch von oben abschätzen, wenn wir $\frac{3}{5\sqrt{2}}$ als Nenner betrachten. Deshalb gilt

$$x' < \frac{1}{6}\left[\frac{4\gamma'\sin 2\gamma - 8\sin 2\delta - 8\beta'\sin 2\beta}{\sqrt{5}} + \right.$$
$$\left. + 5\sqrt{2}\,\frac{\beta'\sin 2\beta - 8\gamma'\sin 2\gamma - 2\sin 2\delta}{9}\right] =$$
$$= \frac{1}{54\sqrt{5}}\left[2\gamma'\sin 2\gamma\,(18-5\sqrt{10}) + \beta'\sin 2\beta\,(5\sqrt{10}-72) - 2\sin 2\delta\,(36+5\sqrt{5})\right]$$

Mit Rücksicht auf (35) und (32) ergibt sich $x' < 0$. Folglich nimmt auch x ab.

4.1.4. ist eine einfache Folgerung der Abnahme von x und v.

4.1.5. wird nicht eingehend dargelegt. Ähnlicherweise wie bei 3.1.6. kann man auch hier zeigen, wenn die Gleichheit in (24) auftritt, dann liegen z.B. der Mittelpunkt U des Kreises $k[VZX]$, weiterhin die Punkte Z und B auf derselben Geraden.

4.1.6. Es sei U der Mittelpunkt von $k[VZX]$. Mit T bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden BZ und A(A+B) (Abb. 5.). Auf Grund von 4.1.5., wenn die Gleichheit in (24) auftritt, dann gilt $U = T$. Der Kreis $k[VZX]$ ist mindestens 5-fach bedeckt, wenn T kein äußerer Punkt der Strecke UX ist. Das ist aber mit der Ungleichung

$$\frac{\left|A + \frac{B}{2} - U\right|}{\left|A + \frac{B}{2} - Z\right|} \leq \frac{\left|A + B - U\right|}{|A|} \qquad (44)$$

äquivalent. Wir substituireren (25) und (26) in (44)$_*$ Mit äquivalenten Umformungen bekommen wir die Ungleichung

$$(4b^2-4a^2-b^4)(b^2+4-4a^2-4b\sqrt{1-a^2}) \geq 0$$

Diese Ungleichung gilt aber wegen (24) und $b^2+4-4a^2-4b\sqrt{1-a^2} = x^2 > 0$. □

Hilfssatz 4.2. Es sei (AB) ein Gitter mit normaler Darstellung und mit $r[O(2A+B)(A+2B)] = 1$.
Sind A, B und A+B die einzigen Gitterpunkte im Inneren von $k[O(2A+B)(A+2B)]$ (dies ist mit der Gültigkeit der Ungleichung $0 \leq \cos\alpha \leq \frac{a}{2b} - \frac{b}{4a}$ äquivalent), dann bildet die Kreislagerung $L[(AB),1]$ eine 4-fache Kreisüberdeckung und für $R < 1$ ist $L[(AB),R]$ höchstens eine 3-fache Überdeckung.

Beweis. Im Fall $R < 1$ ist z.B. der Mittelpunkt von $k[O(2A+B)(A+2B)]$ höchstens 3-fach überdeckt, deshalb kann $L[(AB),R]$ höchstens eine 3-fache Überdeckung sein. Wegen des Symmetrie des Gitters ist es leicht zu beweisen, daß $L[(AB),1]$ eine 4-fache Überdeckung (vgl. Abb. 6.) ist. □

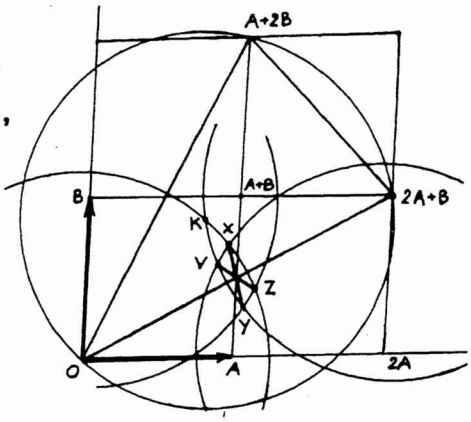

Abb. 6.

Hilfssatz 4.3. Es sei (AB) eine Gitter mit normaler Darstellung und $r[O(2A+B)(A+2B)] = 1$ sowie mit A, B, A+B als einzige Gitterpunkte im offener Kreis $k[O(2A+B)(A+2B)]$.
Weiterhin verwenden wir die Bezeichnungen des Hilfssatzes 4.1. Ändern wir das Gitter (AB) dadurch ab, in dem wir bei fest-

gehaltenen Gitterpunkten 0, A den Punkt B um 0 mit wachsendem $\alpha = \sphericalangle(AOB)$ bis $\alpha = 90^\circ$ drehen, so nehmen $r[VZX] = r[VZY]$ und die Radien von k_1 und k_2 ab.

Der Beweis kann analog zu den Beweisen der Hilfssätze 3.3. und 3.4. geführt werden (Abb. 6.)

Der Beweis des Satzes 2. Es sei (AB) ein Gitter von normaler Darstellung und es sei $L[(AB),1]$ eine 4-fache Kreisüberdeckung. Wir betrachten einen durch mindestens drei Gitterpunkte hindurchgehenden Kreis, der höchstens drei Gitterpunkte in seinem Inneren enthält. Mit $k[PQT]$ bezeichnen wir diesen Kreis. $r[PQT] \leq 1$ gilt offenbar. Andern-falls wäre der Mittelpunkt von $k[PQT]$ höchstens 3-fach überdeckt. Abhängig davon, welche Gitterpunkte im Kreis $k[PQT]$ enthalten sind und welche auf seinem Rand liegen, unterscheiden wir 5 Fälle. (Im jedem Fall geben wir auch die entsprechenden Kreise aus [2] an.)

1. Der Kreis $k[(2A)(-2A)B]$ enthält die Gitterpunkre A, 0, (-A) in seinem Inneren, die weiteren Gitterpunkte sind äußere Punkte oder Randpunkte von $k[(2A)(-2A)B]$. Diese Bedingungen gelten für $k[(2A)(-2A)B]$, wenn $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{2}$ ist ($k[(2A)(-2A)B]$ in [2]).
2. $k[O(3A)(2A+B)]$ enthält nur die Punkte A, 2A, A+B in seinen Inneren. Das gilt, wenn $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ist ($k[A(-2A)B]$ in [2]).
3. $k[(2A)B(-B)]$ enthält nur die Gitterpunkte 0, A, A-B in seinem Inneren, was im Fall $\frac{a}{b} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\frac{a}{2b} - \frac{b}{4a} \leq \cos\alpha \leq \frac{b}{4a}$ gilt. (Der entsprechende Kreis in [2] ist $k[B(-B)(-2A)]$.)
4. $k[B(-B)(2A-B)]$ enthält nur die Gitterpunkte 0, A, A-B in seinem Inneren. Das gilt, wenn $\frac{a}{2b} \geq \cos\alpha \geq \frac{b}{4a}$ ist (in [2] der Kreis $k[B(-B)(2A-B)]$.
5. In Inneren des Kreises $k[O(2A+B)(A+2B)]$ liegen nur die Gitterpunkte A, B, A+B. Das gilt nur im Fall $0 \leq \cos\alpha \leq$

$\leq \frac{a}{2b} - \frac{b}{4a}$ (in [2] der Kreis $k[B(-2A)(-A-B)]$).

Weil $L[(AB),1] = {}_4L[(AB),1]$ ist, gilt $r[(2A)(-2A)B] \leq 1$, $r[O(3A)(2A+B)] \leq 1$, $r[(2A)B(-B)] \leq 1$, $r[B(-B)(2A-B)] \leq 1$, $r[O(2A+B)(A+2B)] \leq 1$ in den entsprechenden Fällen.

1-4. In [2] haben wir gezeigt, wenn $|A| \geq \frac{1}{2}$, $|B| \geq 1$ und $r[O(2A)B] \geq 1$ für das Gitter (AB) gilt, dann sind die Radien der betrachteten Kreise mindestens $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Wir untersuchen in den Fällen 1.-4. die 4-fache Überdeckung $L[(AB), \frac{2}{\sqrt{3}}]$. Es sei K der Mittelpunkt des Kreises $k[O(2A)B]$. Wenn mindestens eine von den Ungleichungen $a \leq \frac{1}{2}$, $b \leq 1$ $r[O(2A)B] \leq 1$ gilt, dann liegt $k(O, \frac{2}{\sqrt{3}} - 1)$ oder $k(K, \frac{2}{\sqrt{3}} - 1)$ in einem mindestens 5-fach überdeckten Teil. Wenn jede von den Ungleichung $a > \frac{1}{2}$, $b > 1$ und $r[O(2A)B] > 1$ gilt, dann sind die Radien der in den Punkte 1.-4. gegebenen Kreise größer als $\frac{2}{\sqrt{3}}$, d.h., $L[(AB), \frac{2}{\sqrt{3}}]$ ist höchstens eine 3-fache Überdeckung.

Folglich ist $\ell_4[(AB), \frac{2}{\sqrt{3}}] \geq \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$ in den Fällen 1.-4., d.h., es gilt

$$\lambda_4[(AB), \frac{2}{\sqrt{3}}] \geq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > 1 - b_o ,$$

wo $1-b_o$ die Lockerheit von H_6^* ist.

5. Es sei $r[O(2A+B)(A+2B)] = 1$. Aus dem Hilfssatz 4.2. folgt, daß $L[(AB),R] = {}_4L[(AB),R]$ im Fall $R \geq 1$ ist. Wenn $\ell_4[(AB),R] \geq R$ ist, dann gilt $\lambda_4[(AB),R] \geq 1$. Folglich sind wegen $1-b_o < 1$ diese Fälle nicht interessant.

Ist $\ell_4[(AB),R] < R$, dann folgt

$$\lambda_4[(AB),R] > \lambda_4[(AB),1] \qquad (R > 1)$$

aus dem Lemma. Deshalb ist genügt es, die Überdeckungen ${}_4L[(AB),1]$ zu unterzuchen. Wir können annehmen, daß $b \geq b_o$ gilt, wo b_o die Lösung der Gleichung (22) im Interwall

(0,1) ist. Die Lockerheit ist nämlich mindestens 1-b, weil k(0,1-b) immer in einem mindestens 5-fach überdeckten Teil liegt. Andernfalls gilt $1-b > 1-b_0$, d.h., die Lockerheit ist größer als die Lockerheit von H_6^*.
Sind $A \perp B$ und $b \geq b_0$, dann liegen die Kreise $k[VZX]$, k_1 und k_2 in den durch die Kreise $k(0)$, $k(A)$, $k(2A)$, $k(B)$, $k(A+B)$ und $k(2A+B)$ mindestens 5-fach überdeckten Teilen (Hilfssatz 4.1.). Wegen 4.1.2. gilt

$$r[VZX] \geq 1-b$$

und die Gleichheit tritt nur für H_6^* auf.
Es sei $0 < \cos\alpha \leq \frac{a}{2b} - \frac{b}{4a}$. Daraus folgt $\sqrt{2}a > b$.
Wir betrachten die Kreise $k[VZX]$, k_1 ($Y,Z \in \hat{k}_1$ und k_1 berührt $k(2A)$), k_2 ($Y \in \hat{k}_2$ und k_2 berührt $k(0)$ und $k(2A)$ (vgl. Abb. 6. und den Hilfssatz 4.1.) und diejenige von ihnen, die in irgend einem mindestens 5-fach überdeckten Teil liegen. Wir fixieren den Basisvektor A und drehen B um 0 bis zur Lage $\alpha = 90^\circ$. Das Gitter (AB) ändert sich entsprechend der Änderung von B. In der Endlage bekommen wir das Gitter $(A\bar{B})$, für das $A \perp \bar{B}$ und $|\bar{B}| = b$ gilt.
Aus dem Hilfssatz 4.3. folgt, daß die Radien der drei Kreise $k[VZX]$, k_1 und k_2 abnehmen. (Auch im Fall, wenn ein Kreis höchstens 4-fach überdeckt ist.)
$r[0(2A+B)(A+2B)]$ nimmt während der Anwendung der Gittertransformation ab. Es sei $r[0(2A+\bar{B})(A+2\bar{B})] = R_0$, wobei R_0 kleiner als 1 ist. Wegen des Hilfssatzes 4.2. ist auch $L[(A\bar{B}),R_0] = {}_4L[(A\bar{B}),R_0]$. Deshalb ergibt sich

$$\lambda_4[(A\bar{B}),R_0] < \lambda_4[(A\bar{B}),1]$$

aus dem Lemma. Wir vergrößern die Kreisüberdeckung ${}_4L[(A\bar{B}),R_0]$ mit dem Verhältnis $\frac{1}{R_0} > 1$. Es sei (A_1B_1) das entsprechende Gitter. Es gilt offenbar $\lambda_4[(AB),R_0] = \lambda_4[(A_1A_1),1]$, $r[0(2A_1+B_1)(A_1+2B_1)] = 1$ und $|B_1| > b_0$.

Wir wenden die im Hilfssatz 4.1. definierte Gittertransformation auf (A_1B_1) an. Nach den Punkten 3., 4. und 6. des Hilfssatzes 4.1. ergibt sich, daß die Lockerheit von $L[(A_1B_1),1]$ abnimmt. Die relative Lockerheit wird für H_6^{*} und natürlich für die zu H_6^{*} ähnlichen Überdeckungen minimal. □

5. n=3 k=2

5.1. Man kann jedes Gitter im Raum mit den drei kürzesten linear unabhängigen Gittervektoren A, B und C derart angeben, daß auch die Ungleichungen $|A| \leq |B| \leq |C|$, $\measuredangle(AOB) \leq 90^\circ$, $\measuredangle(BOC) \leq 90^\circ$ gelten. Es sei K der Mittelpunkt des Kreises k[OAB]. In [2] haben wir gezeigt, wenn $L\left[(ABC), \frac{\sqrt{13}}{3}\right]$ eine 2-fache Überdeckung bildet, dann liegt die Kugel $k(O, \frac{\sqrt{13}}{3} - 1)$ oder die Kugel $k(K, \frac{\sqrt{13}}{3} - 1)$ in mindestens 3-fach überdeckten Teil. Beim Gitter $H_7 = (A'B'C')$ ($|A'| = 1$, $|B'| = |C'| = |B'-C'| = \sqrt{3}$, $B' \perp A' \perp C'$) können wir keine Kugel um 0, bzw. $K = \frac{A+B}{2}$ schlagen, deren Radius größer als $\frac{\sqrt{13}}{3} - 1$ ist. Wir betrachten die Gitterebene O'A'B' von H_7 und die Kreise $k(O, \frac{\sqrt{13}}{3})$, $k(A, \frac{\sqrt{13}}{3})$, $k(B, \frac{\sqrt{13}}{3})$, $k(A+B, \frac{\sqrt{13}}{3})$ in dieser Ebene. Die im Rechteck OA(A+B)B liegende Schnittpunkte dieser Kreislinien sind

$$X = \hat{k}(O, \tfrac{\sqrt{13}}{3}) \cap \hat{k}(A, \tfrac{\sqrt{13}}{3}), \quad Y = \hat{k}(B, \tfrac{\sqrt{13}}{3}) \cap \hat{k}(A+B, \tfrac{\sqrt{13}}{3}),$$

$$Z = \hat{k}(O, \tfrac{\sqrt{13}}{3}) \cap \hat{k}(B, \tfrac{\sqrt{13}}{3}), \quad V = \hat{k}(A, \tfrac{\sqrt{13}}{3}) \cap \hat{k}(A+B, \tfrac{\sqrt{13}}{3}). \tag{46}$$

Es ist leicht zu kontrollieren, daß die Kreise $k[XYZ]$ und $k[XYV]$ durch die obigen vier Kreisen mindestens 3-fach überdeckt sind und die Ungleichung

$$r[XYZ] = r[XYV] > \frac{\sqrt{13}}{3} - 1$$

gilt. Daraus folgt, daß die Kugeln $k(O, \frac{\sqrt{13}}{3})$, $k(A, \frac{\sqrt{13}}{3})$

$k(A+B, \frac{\sqrt{13}}{3})$ und $k(B, \frac{\sqrt{13}}{3})$ z.B. die Kugel mit dem Großkreis $k[XYZ]$ mindestens 3-fach überdecken. Folglich ist

$$\lambda_2[(A'B'C'), \tfrac{\sqrt{13}}{3}] > 1 - \frac{3}{\sqrt{13}} = 0{,}167997\ldots$$

d.h. die Lockerheit von ${}_2L[(A'B'C'), \frac{\sqrt{13}}{3}]$ ist größer als $\frac{\sqrt{13}}{3} - 1$.

5.2. Das Gitter $H_7^* = (A^*B^*C^*)$ wird folgenderweise definiert. Es seien $B^* \perp A^* \perp C^*$, $|A^*| = a_0 = 0{,}8029313\ldots$, $|B^*| = |C^*| = |B^*-C^*| = b_0 = 1{,}47077679\ldots$, wo a_0 und b_0 die positiven Lösungen des Gleichungsystems

$$b^2 = 4a^2 - a^4 \tag{47}$$

$$a^4 + b^4 + a^2b^2 = 3b^2 \tag{48}$$

für $a_0 \in (0,1)$ sind. Es ist leicht zu zeigen, daß $L[(A^*B^*C^*),1]$ eine 2-fache Überdeckung im E^3 bildet und

$$\ell_2[(A^*B^*C^*),1] = \lambda_2[(A^*B^*C^*),1] = 1-a_0 = 0{,}1970687\ldots \tag{49}$$

ist. Wie in (7) oder (46) können wir die Punkte X^*, Y^*, Z^* und V^* in der Ebene $O^*A^*B^*$ definieren. Wir bemerken, daß

$$r[X^*Y^*Z^*] = r[X^*Y^*V^*] = 1-a_0 \tag{50}$$

gilt und weiterhin z.B. $k[X^*Y^*Z^*]$ die Kreise $k(A^*)$ bzw. $k(A^*+B^*)$ in den Punkten X^* bzw. Y^* berührt.

Satz 3. Die relative Lockerheit von Gitterförmigen 2-fachen Kugelüberdeckung ist nicht kleiner als die Lockerheit der Überdeckung H_7^* (vgl. 5.2.). Die Gleichheit tritt nur bei H_7^* und bei den zu H_7^* ähnlichen Überdeckungen auf.

Beweis. Es sei A der kürzeste Gittervektor des 3-dimensionalen Gitters (ABC). Die Basisvektoren B und C werden spä-

ter zweckmäßig gewählt. Bildet $L[(ABC),1]$ eine 2-fache Überdeckung in E^3, dann liegt die Kugel $k(0, 1-a)$ in einem mindestens 3-fach überdeckten Teil des Raumes.
Wenn $a < a_0$ ist (a_0 ist durch die Gleichungen (47) und (48) bestimmt), dann ist $\lambda_2[(ABC),1] > 1-a_0$ wegen der Ungleichung $1-a > 1-a_0$, d.h., die Lockerheit von ${}_2L[(ABC),1]$ ist größer als die Lockerheit von H_7^*.
Im folgenden nehmen wir an, daß $a \geq a_0$ gilt. $a \leq 1$ gilt offenbar, andernfalls wäre 0 nur einfach überdeckt.
a) Wir betrachten die Kugellagerung $L[(ABC),1]$ für die

$$C \perp A \perp B, \qquad |B| = |C| = |B-C| = b$$
$$1 \geq a \geq a_0, \qquad r[A(-A)BC] = 1 \tag{51}$$

gilt. Es ist leicht einzusehen, daß $L[(ABC), 1] = {}_2L[(ABC),1]$ ist. Mit einfachen Rechnungen ergibt sich, daß (48) im Fall $r[A(-A)BC] = 1$ gilt. Aus (48) und $a \geq a_0$ folgt die Ungleichung $b^2 \leq 4a^2 - a^4$ (vgl. auch (11)). Wir verwenden die Bezeichnungen (7) (vgl. auch Hilfssatz 3.1.) in der Ebene OAB. Aus der letzteren Ungleichung folgt, daß die Kreise $k[XYZ]$, $k[XYV]$, k_1 und k_2 durch die Kreise $k(0)$, $k(A)$, $k(A+B)$, $k(B)$ mindestens 3-fach überdeckt sind. (Siehe auch 3.1.5. und 3.1.7.). Daraus folgt, daß die Kugeln mit den Großkreisen $k[XYZ]$, $k[XYV]$, k_1 und k_2 durch die Kugeln $k(0)$, $k(A)$, $k(B)$ und $k(A+B)$ mindestens 3-fach überdeckt sind. Aus 3.1.3. und 3.1.4. folgt

$$r[XYZ] = r[XYV] \geq 1-a,$$

wo die Gleichheit nur für H_7^* auftritt. Neben der Erfüllung der Bedingungen (51) vermindern wir a bis zum Wert a_0. In diesem Fall gilt (48).
Im Fall $a \geq a_0 > 0{,}8$ gilt $b^2 \leq 4a^2 - a^4$ (vgl. 3.1.3.). Aus $a_0 > 0{,}8$, sowie aus 3.1.2., 3.1.4. und 3.1.5. folgt, daß $r[XYZ] = r[XYV]$, die Radien von k_1 und k_2 abnehmen und jeder von ihnen im Fall $a = a_0$ sein Minimum annimmt.

Dann gilt (47), d.h., $r[XYZ]$ wird beim Gitter H_7^3 minimal und $r[XYZ] = 1-a_0$ gilt in diesem Fall.
Wenn wir die mindestens 3-fach überdeckten Teile des Raumes in ${}_2L[(A^3B^3C^3),1]$ untersuchen, dann können wir keine Kugel mit größeren Radius als $1-a_0$ in einem der mindestens 3-fach überdeckten Teilen einlagern.
b) Es sei (ABC) ein Gitter, für das $L[(ABC),1]$ eine 2-fache Überdeckung in E^3 bildet. A war also der kürzeste von den Gittervektoren. Es sei B derjenige Gittervektor, für den der Radius der Kreises $k[A(-A)B]$ minimal ist. Wir zeigen, daß es einen Kreis in der Ebene OAB oder in einer anderen Gitterebene gibt, dessen Radius nicht kleiner als $1-a_0$ ist und der durch die Kreise von $L[(AB),1]$ oder durch die Einheitskreise in der anderen Ebene mindestens 3-fach überdeckt ist. Wir sehen auch ein, daß der Wert $1-a_0$ nur für H_7^3 auftritt.
Mit Π bezeichnen wir die Ebene, für die $O \in \Pi$ und $A \perp \Pi$ gilt. Nun projizieren wir das Gitter (ABC) auf Π. Wir bekommen ein 2-dimensionales Gitter $(B'C')$ als Projektionsbild von (ABC) (Abb. 7.). C und damit auch C' werden im folgenden zweckmäßig gewählt. Wir betrachten die Kugel G, deren Großkreis $k[A(-A)B]$ ist. Innerhalb G liegt nur der Gitterpunkt O aus (ABC). Auf den Rand von G kann noch ein

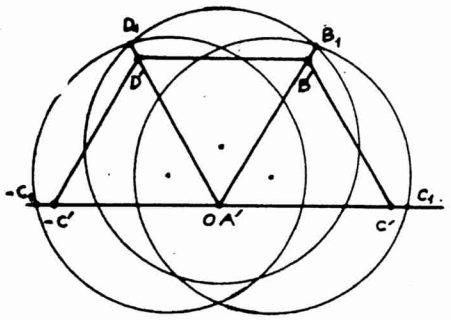

Abb. 7.

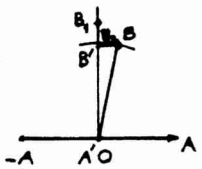

Abb. 7.a.

Gitterpunkt liegen, wenn $|A| = |B|$ gilt. Wir blasen die Kugel G gleichmäßig derart auf, daß A, (-A) und B die Punkte der Kugeloberfläche bleiben und wir betrachten auch das Spiegelbild der Kugel an der Ebene OAB. Wir vergrößern diese Kugeln bis zu der Lage, wo mindestens eine von den zwei an der Ebene OAB symmetrischen Kugeln auf ihren Rand noch einen weiteren Gitterpunkt hat. Dieser Gitterpunkt wird mit C bezeichnet und wird als der dritte Basisvektor des Gitters gewählt. Es sei C' das Projektionsbild von C. Jetzt vergrößern wir die andere Kugel. Kommt ein Gitterpunkt, z.B. D auf ihren Rand, dann beenden wir die Vergrößerung. Mit D' bezeichnen wir das Projektionsbild von D. Wir untersuchen die Lage von D' im Gitter (B'C').

b) 1. Es sei $D' = B' - C'$ (Abb. 7.). Dann gilt $\sphericalangle (C'OB') < 90^\circ$. Andernfalls würde (-C) wegen $r[A(-A)BC] \leq r[A(-A)BD]$ im Inneren von $k[A(-A)BD]$ liegen. Weil es keinen weiteren Gitterpunkt außer O im Inneren der Kreise $k[A(-A)B]$, $k[A(-A)C]$ und $k[A(-A)D]$ gibt, sind die Abstände der Punkte B, C und D von nicht größer als $\frac{a}{2}$. Es gilt auch, daß die zweiten kürzesten Gittervektoren in den Gittern (AB), (AC) (AD) nacheinander B, C und D sind.

Nach Einführung der Bezeichnungen $B = B' + \beta A$, $C = C' + \gamma A$, $D = D' + \delta A$ $(-\frac{1}{2} \leq \beta, \gamma, \delta \leq \frac{1}{2})$ kann man mit einer kurzen Rechnung das folgende zeigen. Enthalten die Kugeln $k[A(-A)BC]$ und $k[A(-A)BD]$ keinen weiteren Gitterpunkt außer O in ihrem Inneren, dann liegt nur O von den Gitterpunkten innerhalb der Kugel $k[A(-A)D(-C)]$.

Wir betrachten die Kugeln $k[A(-A)BC]$, $k[A(-A)BD]$, $k[A(-A)D(-C)]$ und ihre gespiegelte an O. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß

$$r[A(-A)BD] \geq \max\left(r[A(-A)BC], r[A(-A)D(-C)]\right) \qquad (52)$$

ist. (Im folgenden wenden wir nicht an, daß $r[A(-A)B]$ der kleinste unter den Gitterkreisen war, die einen Gitterpunkt

in ihrem Inneren enthalten.) Weil $L[(ABC),1] = {}_2L[(ABC),1]$ ist, gilt

$$r[A(-A)BD] \leq 1. \tag{53}$$

Aus (52) folgt

$$\measuredangle(B'OD') \geq \max\ [\measuredangle(C'OB'),\ \measuredangle(D'O(-C'))]. \tag{54}$$

Wir untersuchen nun den Fall, in dem die scharfe Ungleichung in (54) auftritt. Dazu wenden wir die folgende Gittertransformation auf (ABC) an.

Es sei das ebene Gitter (AB) fix. Wir drehen das Gitter (AD) um die Gerade von OA und betrachten in jeder Lage das entsprechende Gitter. Endlich erreichen wir ein Gitter, für das die Gleichheit in (54) zuerst auftritt. Wir setzen zunächst voraus, daß

$$\measuredangle(B'OD') = \measuredangle(B'OC') \geq \measuredangle(D'O(-C') \tag{55}$$

gilt. Während der vorigen Drehung nimmt $r[A(-A)BD]$ ab. In der Endlage gilt

$$1 > r[A(-A)BD] = r[A(-A)BC] \geq r[A(-A)D(-C)]\ ; \tag{56}$$

das Viereck OC'B'D' ist ein Rhombus, weiterhin sind $\ell_2[(AB),1]$ und $\ell_2[(AD),1]$ unverändert. (Wir bemerken, daß auch die Gitterpunkte C+A oder C-A auf den Rand der Kugel $k[A(-A)BC]$ kommen können. In diesem Fall wird C+A oder C-A als der Punkt C gewählt.)

Ist $\measuredangle(B'OD') = \measuredangle(B'OC') > 60^\circ$, d.h. die scharfe Ungleichung tritt in (55) auf, dann wenden wir die folgende Gittertransformation auf (ABC) an. Wir fixieren das Gitter (AB) und bewegen den Punkt D (und damit auch das Gitter (ABC)) auf der zu der Ebene OAB orthogonalen Gerade bis der Lage, in der

$$\measuredangle(B'OD') = \measuredangle(B'OC') = \measuredangle(D'O(-C')) = 60^\circ \tag{57}$$

gilt. Während der Anwendung der Gittertransformation nimmt $r[A(-A)BD] = r[A(-A)BC]$ ab, $\ell_2[(AB),1]$ ändert sich nicht und in der Endlage gilt

$$1 > r[A(-A)BD] = r[A(-A)BC] = r[A(-A)D(-C)]. \qquad (58)$$

Wegen (57) sind die Dreiecke OB'C', OB'D', OD'(-C') regulär und kongruent. Es seien B_1, C_1 und D_1 die Schnittpunkder Halbgeraden. OB', OC' und OD' mit den Kreislinien $k[A(-A)B]$, $k[A(-A)C]$ bzw. $k[A(-A)D]$. Aus (57) und (58) folgt, daß die Dreiecke OB_1C_1, OB_1D_1, $OD_1(-C_1)$ regulär und kongruent sind.
Wir wenden uns dem Gitter (AB_1C_1) zu. $D_1 = C_1 - B_1$ gilt offenbar, weiterhin ist

$$r[A(-A)BC] = r[A(-A)B_1C_1] = r[A(-A)B_1D_1] = r[A(-A)D_1(-C_1)] < 1. \qquad (59)$$

Wir sehen ein, daß

$$\ell_2[(ABC),1] \geq \ell_2[(AB_1C_1),1] \qquad (60)$$

gilt. Nun betrachten wir das Gitter (AB). Es gilt $L[(AB),1] = {}_2L[(AB),1]$. In der Ebene OAB drehen wir den Gittelpunkt B um O auf die Gerade OB_1. So bekommen wir den Punkt B_2. Es sei A fix, und wir verschieben den Punkt B_2 in B_1 (Abb. 7.a.). Es gilt offenbar $L[(AB_1),1] = {}_2L[(AB_1)1]$. Nach den Hilfssätzen 3.3. und 3.4. ist

$$\ell_2[(AB),1] \geq \ell_2[(AB_2),1]. \qquad (61)$$

Es ist leicht einzusehen, daß

$$\ell_2[(AB_2),1] \geq \ell_2[(AB_1),1] \qquad (62)$$

gilt. Anderseits sind

$$\ell_2[(ABC),1] \geq \ell_2[(AB),1] \qquad (63)$$

und

$$\ell_2\left[(AB_1C_1),1\right] = \ell_2\left[(AB_1),1\right] \qquad (64)$$

(Man kann (64) in Punkt a. finden.) Aus (61)-(64) folgt (60). Die Gleichheit in (60) tritt nur für $B = B_1$ und $C = C_1$ auf. Gelten die letzteren Gleichheiten nicht, dann ist

$$R = r\left[(A(-A)B_1C_1)\right] < 1.$$

Wir betrachten die Kugellagerung $L\left[(AB_1C_1),R\right]$. Es ist klar, daß $L\left[(AB_1C_1),R\right] = {}_2L\left[(AB_1C_1),R\right]$ ist. Aus dem Lemma folgt die Ungleichung

$$\lambda_2\left[(AB_1C_1),1\right] > \lambda_2\left[(AB_1C_1),R\right]. \qquad (65)$$

Vergrößern wir ${}_2L\left[(AB_1C_1),R\right]$ im Verhältnis $\frac{1}{R} > 1$ wie beim beweis des Satzes 1. und 2., so bekommen wir ${}_2L\left[(A_3B_3C_3),1\right]$, für die

$$\lambda_2\left[(A_3B_3C_3),1\right] = \lambda_2\left[(AB_1C_1),R\right]$$

gilt. ${}_2L\left[(A_3B_3C_3),1\right]$ ist genau die im Punkte a. beschriebene Überdeckung, deren Lockerheit für H_7^x minimal ist.

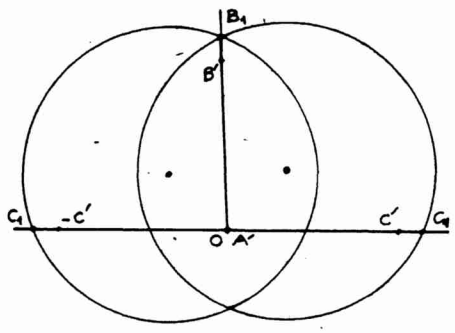

Abb. 8.

b) 2. Es sei $D' = -C'$ (Abb. 8.). Aus der Definition von C (siehe vor dem Punkt b.) folgt

$$r\left[A(-A)BC\right] \leq$$

$$\leq r\left[A(-A)B(-C)\right] \leq 1 \qquad (66)$$

Wir haben gesehen, daß $\sphericalangle(C'OB') \leq 90^\circ$ ist. Wenn $\sphericalangle(C'OB') < 90^\circ$ ist, dann wenden wir die folgende Transformation auf (ABC) an. Wir fixieren (AC) und drehen das Gitter (AB)

um die Achse OA bis zu der Lage, in der $\sphericalangle (C'OB') = 90^\circ$ gilt. Während der Anwendung der Gittertransformation nimmt $r[A(-A)BC]$ ab, nimmt $r[A(-A)B(-C)]$ zu und in der Endlage gilt $r[A(-A)BC] = r[A(-A)B(-C)]$. $\ell_2[(AB),1]$ und $\ell_2[(AC),1]$ änderten sich nicht. Ist z.B. $|C'| > |B'|$, dann transformieren wir das Gitter (ABC) weiter. Wir fixieren das Gitter (AB) und verschieben C in der zu der Ebene OAB orthogonalen Richtung bis zu der Lage $|C'| = |B'|$. Es ist offenbar, das $r[A(-A)BC]$ abnimmt und $\ell_2[(AB),1]$ unverändert ist.

Es seien B_1 und C_1 die Schnittpunkte der Halbgeraden OB' und OC' mit der Kreislinie $\widetilde{k}[A(-A)B]$ bzw. $\widetilde{k}[A(-A)C]$. Statt der Überdeckung ${}_2L[(ABC),1]$ betrachten wir die Überdeckung ${}_2L[(AB_1C_1),1]$ wie im Punkt b)1. Es ist einzusehen, daß die Ungleichungen (61)-(64) gelten, d.h., auch (60) gilt. Dann nehmen wir ${}_2L[(AB_1C_1),R]$ statt ${}_2L[(AB_1C_1),1]$, wo $R = r[A(-A)BC] = r[A(-A)B_1C_1] < 1$ ist. Daraus folgt (65). Endlich wenden wir die Ähnlichkeit mit dem Verhältnis $\frac{1}{R}$ auf $L[(AB_1C_1),R]$ an. So bekommen wir die folgende 2-fache Überdeckung $L[(A_3B_3C_3),1]$:

$$0{,}8 < a_0 \le a = |A_3| \le |B_3| = |C_3| = b$$
$$A_3 \perp B_3 \perp C_3 \perp A_3 \quad . \tag{67}$$

Aus $r[A_3(-A_3)B_3C_3] = 1$ folgt

$$a^4 + b^4 = 2b^2 \quad . \tag{68}$$

Wir vermindern a bis a_0, so daß die Bedingungen (68) und (67) erfüllt bleiben. In zwischen nimmt b zu. Aus dem Hilfssatz 3.1. folgt, daß $\ell_2[(A_3B_3),1]$ abnimmt. Im Fall $a = a_0$

gilt $b^2 < 4a^2 - a^4$ (vgl. auch (11)). Nach dem Punkt 3.1.3. des Hilfssatzes 3.1. gilt

$$r[X_3Y_3Z_3] > 1-a_0,$$

wo X_3, Y_3, Z_3 die den Punkten X, Y, Z entsprechenden Punkte in Gitter (A_3B_3) sind (vgl. (7)). Daraus folgt

$$\ell_2[(A_3B_3C_3),1] = \ell_2[(A_3B_3),1] > 1-a_0,$$

d.h., die dem Punkt b)2. entsprechenden Überdeckungen sind nicht locker.

Es ist leicht einzusehen, daß nur die vorigen zwei Möglichkeiten für die Lage von D' vorkommen können. □

Literatur

[1] Fejes Tóth, L., Close packing und loose covering with balls, Publ. Math. Debrecen 23(1976), 323-326.

[2] Horváth, J., Über die Enge der gitterförmigen k-fachen Packung, die Lockerheit der gitterförmigen k-fachen Überdeckung und die k-Enge der gitterförmigen Punktmenge, Beiträge zur Alg. und Geom. 16(1983), 139-172.

Manuskripteingang: 27. 8. 1984

Verfasser:

Jenő Horváth, Math. Institut der Eötvös-Loránd-Universität Budapest