Werk

Titel: Zur besten Beleuchtung konvexer Polyeder

Autor: WEISSBACH, BERNULF; Martini, Horst

Jahr: 1984

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0017|log38

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
17(1984), 151-168

Zur besten Beleuchtung konvexer Polyeder

HORST MARTINI und BERNULF WEIßBACH

1. Die Beschäftigung mit Fragen der Beleuchtung, d. h. mit den Zusammenhängen, die sich zwischen Strahlenbüscheln und Mengen von Punkten herstellen lassen, gehört seit jeher zum festen Bestand der Geometrie. Hier soll der Frage nachgegangen werden, für welche Richtungen bei Beleuchtung durch parallele Strahlen ein vorgegebenes Polyeder des R^n den größten bzw. den kleinsten Lichtstrom aufnimmt; bzw. - in anderer Sprechweise - es wird gefragt, für welche Richtungen die senkrechten Projektionen dieses Polyeders auf Unterräume der Dimension n-1 größten oder kleinsten Inhalt aufweisen. Gebräuchlich ist es, solche Inhalte als Quermaße des Polyeders in der jeweiligen Richtung zu bezeichnen.

Es sei P das zu betrachtende konvexe Polyeder im R^n, $n \geq 2$. Vorausgesetzt wird, daß P innere Punkte besitzt. Die (n-1)-dimensionalen Randzellen von P sollen mit P_i, $i \in \{1,\dots,m\}$, $m \geq n+1$ bezeichnet werden. Die Zelle P_i möge das (n-1)-dimensionale Volumen $v_i > 0$ besitzen. Ferner seien durch die Vektoren a_i mit $\|a_i\| = 1$ die Richtungen äußerer Normalen zu den Wänden von P, in denen die Zellen P_i liegen, bestimmt. Unter ihnen müssen sich n linear unabhängige befinden. Unter diesen Vereinbarungen gilt

$$\sum_{i=1}^{m} v_i a_i =: \sum_{i=1}^{m} a_i^* = 0 \qquad (1)$$

Die Vektoren a_i^* sollen hier Maßvektoren von P genannt werden.

Der Inhalt $\bar{v}_i(a)$ der senkrechten Projektion der Zelle P_i auf den Unterraum R_a^{n-1}, der durch $\langle a,x\rangle = 0$, ($\|a\| = 1$) festgelegt ist, wird durch

$$\bar{v}_i(a) = v_i \left|\langle a_i,a\rangle\right| = \left|\langle a_i^*,a\rangle\right| \tag{2}$$

gemessen. Die relativ inneren Punkte der Projektion von P auf R_a^{n-1} sind Bilder genau zweier Randpunkte dieses voraussetzungsgemäß konvexen Polyeders. Mithin hat die Projektion von P auf R_a^{n-1} den Inhalt

$$\bar{v}(a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left|\langle a_i^*,a\rangle\right| . \tag{3}$$

Um also beste Beleuchtungen von P zu gewinnen, sind für diese, hier zunächst nur auf der Richtungssphäre S^{n-1} ($S^{n-1} = \{a : a \in R^n, \|a\| = 1\}$) des R^n erklärte, dort aber sicher stetige, Funktion diejenigen Stellen zu ermitteln, in denen sie größte bzw. kleinste Werte annimmt.

Da S^{n-1} kompakt ist, sind derartige Stellen vorhanden. Um die Schwierigkeiten, die diese Aufgabe im allgemeinen bereitet, unmittelbar vor Augen zu führen, ist in Abbildung 1 für ein recht einfaches Beispiel im R^2 die Kurve $\bar{v}(a) \cdot a$ dargestellt.

Es sei noch bemerkt, daß die zu behandelnde Aufgabe sich auch auf andere Weise deuten läßt. Sind $a_1^*,\ldots,a_m^*$ Punkte des R^n, so besagt die Forderung (1), daß ihr Schwerpunkt im Ursprung

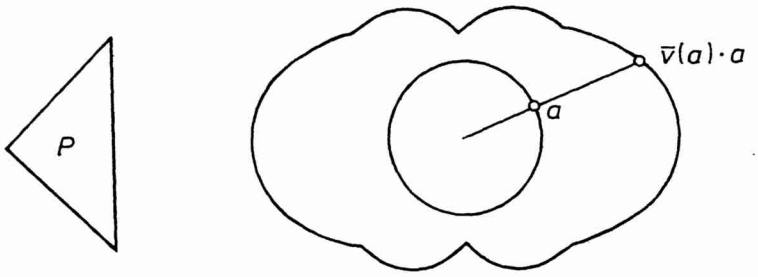


Abb. 1

liegen soll, und durch

$$\bar{v}(a) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left|\langle a_i^*, a\rangle\right| \; ; \; \|a\| = 1 \qquad (4)$$

wird der sog. mittlere Abstand dieser Punkte von einer gewissen Ebene durch den Ursprung gemessen.
Die gestellte Aufgabe kann also auch dahingehend verstanden werden, daß nach jenen Ebenen durch den Schwerpunkt einer endlichen Menge gefragt wird, für die dieser mittlere Abstand möglichst groß bzw. möglichst klein wird.

2. Im folgenden sollen nun Bedingungen zur Kennzeichnung der Stellen hergeleitet werden, an denen $\bar{v}(a)$ extreme Werte annimmt. Dazu ist die geschlossene Darstellung in (3) denkbar ungeeignet. Um zu einer günstigeren Beschreibung zu gelangen, werde zunächst $\bar{v}(a)$ durch

$$\bar{v}(a) =: \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left|\left\langle a_i^*, \frac{a}{\|a\|}\right\rangle\right| , \; a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \qquad (5)$$

in geeigneter Weise fortgesetzt und nun der Definitionsbereich in Hinblick auf die Gestalt von $\overline{v}(a)$ in Teilmengen zerlegt.

Dazu werde, bezogen auf das Polyeder P, jeder nichtleeren echten Teilmenge I von $\{1,\dots,m\} =: N_m$ auf die folgende Weise eine Punktmenge $K(I) \subset R^n \setminus \{0\}$, die u. U. leer ausfallen kann, zugewiesen:

$$K(I) = \{a : a \in R^n \setminus \{0\};\ \langle a_i^*, a\rangle \geq 0,\ i \in I,\ \langle a_i^*, a\rangle < 0,\ i \in N_m \setminus I\}\ . \qquad (6)$$

Sagt man wie üblich, daß die Randzelle P_i von P aus der Richtung $a \neq 0$ beleuchtet wird, wenn $\langle a_i, a\rangle \geq 0$ gilt - für $\langle a_i, a\rangle = 0$ wird dabei von Streiflicht gesprochen - , so sind in $K(I) = K(\{i_1,\dots,i_s\})$ gerade jene Punkte zusammengefaßt, die Richtungen festlegen, aus denen die Randzellen $P_{i_1},\dots,P_{i_s}$, und nur diese, beleuchtet werden. Da aus jeder Richtung wenigstens eine Randzelle beleuchtet wird, es andererseits nicht möglich ist, aus einer Richtung den vollen Rand von P zu beleuchten, konnte darauf verzichtet werden, $K(\emptyset)$ und $K(N_m)$ einzuführen. Unmittelbar aus der Erklärung der Mengen $K(I)$ liest man

$$I_1 \neq I_2 \Longrightarrow K(I_1) \cap K(I_2) = \emptyset \qquad (7)$$

ab, und weil, wie eben bemerkt, jeder Punkt von $R^n \setminus \{0\}$ in mindestens einer Menge $K(I)$ liegen muß, bilden die nichtleeren Mengen $K(I)$ eine Zerlegung von $R^n \setminus \{0\}$.
Da $K(I)$ mit einem Punkt a auch alle Punkte λa für $\lambda > 0$, jedoch den Punkt $-a$ nicht enthält, ist $K(I)$ ein konvexer polyedrischer Kegel mit Spitze in 0, die hier nicht zum Kegel gezählt wird. Über die Ränder dieser Kegel kann im allgemeinen keine nähere Auskunft erteilt werden, ausgenommen etwa, daß $K(\{i\})$ stets offen ist.

Mit dieser Zerlegung von $R^n \setminus \{0\}$ in die Kegel $K(I)$ kann

$$\bar{v}(a) = \sum_{i \in I} \left\langle a_i^*, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \quad ; \quad a \in K(I) \tag{8}$$

geschrieben werden.

Es sei nun a_0 eine Stelle, in der das absolute Minimum von $\bar{v}(a)$ angenommen wird. Dieser Punkt muß in einem wohlbestimmten Kegel $K(I_0)$ liegen, der auch die Punkte λa_0, $(\lambda > 0)$ enthält, in denen $\bar{v}(a)$ ebenfalls minimal wird. Es gilt

Lemma 1. Ist a_0 Minimalstelle von $\bar{v}(a)$, so ist der Strahl $\{a : a = \lambda a_0, \ \lambda > 0\} =: p_0$ ein extremaler Strahl des Kegels $K(I_0)$.

In diesem Lemma kommt mithin auch zum Ausdruck, daß $K(I_0)$ extremale Strahlen enthalten muß. Zum Beweis des Lemmas werde angenommen, daß p_0 nicht extremal in $K(I_0)$ sei. Dann muß dieser Kegel neben a_0 zwei weitere Punkte a_1 und a_2 enthalten, die zwei verschiedene Strahlen mit dem Anfangspunkt 0 bestimmen

$$\mu_1 a_1 \neq \mu_2 a_2 \quad ; \quad \mu_1 > 0, \ \mu_2 > 0, \tag{9}$$

so daß a_0 innerer Punkt der Strecke $a_1 a_2$ ist. Also wäre

$$a_0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \ \lambda_1 > 0, \ \lambda_2 > 0.$$

Wegen (9) müßte dann aber

$$\|a_0\| = \|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2\| < \lambda_1 \|a_1\| + \lambda_2 \|a_2\|$$

gelten, und es wäre

$$\bar{v}(a_o) = \sum_{i \in I_o} \left\langle a_i^*, \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}{\|a_o\|} \right\rangle$$

$$= \frac{\lambda_1 \|a_1\|}{\|a_o\|} \sum_{i \in I_o} \left\langle a_i^*, \frac{a_1}{\|a_1\|} \right\rangle +$$

$$\frac{\lambda_2 \|a_2\|}{\|a_o\|} \sum_{i \in I_o} \left\langle a_i^*, \frac{a_2}{\|a_2\|} \right\rangle$$

$$\geq \frac{\lambda_1 \|a_1\| + \lambda_2 \|a_2\|}{\|a_o\|} \min \left\{ \bar{v}(a_1), \bar{v}(a_2) \right\}$$

$$> \min \left\{ \bar{v}(a_1), \bar{v}(a_2) \right\}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, daß a_o Minimalstelle von $\bar{v}(a)$ sei.

Die in Lemma 1 enthaltene notwendige Optimalitätsbedingung kann ohne weiteres auch in eine andere Form gebracht werden, die mit der Beleuchtung des Polyeders P in unmittelbarem Zusammenhang steht. Dazu bedarf es nur der Bemerkung, daß in den Punkten eines extremalen Strahls eines polyedrischen Kegels

$$K = \left\{ a : \langle a_i, a \rangle \geq 0,\ i \in J_1,\ \langle a_i, a \rangle < 0,\ i \in J_2 \right\}$$

des R^n unbedingt $n-1$ linear unabhängige Einschränkungen

aktiv werden müssen, d. h. für n-1 unabhängige a_i aus J_1 muß $\langle a_i, a\rangle = 0$ gelten. Mithin gewinnt man den

Satz 1. Besitzt das Polytop P bei Beleuchtung aus der Richtung a_0 das geringste Quermaß, so liegen n-1 Wände von P mit unabhängigen Richtungen ihrer Normalen im Streiflicht. (Man vergleiche auch [1], wo ein andersgearteter Beweis für den R^3 geführt wird.)

In geringfügiger Abwandlung des Beweises von Lemma 1 zeigt man, daß $\bar{v}(a)$ in jedem Kegel K(I) konkav ist. Man wird darum, wie bei vielen derartigen Aufgaben, erwarten, daß sich hinreichende Bedingungen zur Kennzeichnung der Maximalstellen finden lassen. Dies ist in der Tat der Fall, und zwar gilt:

Lemma 2. Ist $\left\| \sum_{i \in I_1} a_i^* \right\| \geq \left\| \sum_{i \in I} a_i^* \right\|$ für jede nichtleere Teilmenge I von N_m, so ist $a_1 = \sum_{i \in I_1} a_i^*$ eine Maximalstelle von $\bar{v}(a)$. Sie liegt im Kegel $K(I_1)$.

Der Beweis dieses Lemmas ist erbracht, sobald man gezeigt hat, daß $a_1 = \sum_{i \in I_1} a_i^*$ ein Element von $K(I_1)$ ist, denn dann und nur dann ist für $a \in K(I)$

$$\bar{v}(a) = \left\langle \sum_{i \in I} a_i^*, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \leq \left\| \sum_{i \in I} a_i^* \right\| \leq \left\| \sum_{i \in I_1} a_i^* \right\| = \bar{v}(a_1). \quad (10)$$

Um nun die Aussage $a_1 \in K(I_1)$ zu bestätigen, muß einmal gezeigt werden, daß

$$\left\langle a_i^*, \sum_{i \in I_1} a_i^* \right\rangle \geq 0$$

für jedes $i \in I_1$ gilt. Auf Grund der Voraussetzungen ergibt sich aber sogar die weiter reichende Aussage

$$\left\langle a_i^*, \sum_{i \in I_1} a_i^* \right\rangle \geq \frac{1}{2} \left\| a_i^* \right\|^2 > 0, \; i \in I_1 . \tag{11}$$

Enthält I_1 nur ein Element, ist dies sicher richtig. Enthält I_1 mindestens zwei Elemente und wäre die Aussage (11) falsch, so müßte für einen geeigneten Zeiger $i_1 \in I_1$

$$\left\langle a_{i_1}^*, \sum_{i \in I_1} a_i^* \right\rangle = \left\langle a_{i_1}^*, a_{i_1}^* + \sum_{i \in I_1 \setminus \{i_1\}} a_i^* \right\rangle < \frac{1}{2} \left\| a_{i_1}^* \right\|^2$$

gelten, woraus aber

$$\left\| a_{i_1}^* \right\|^2 + 2 \left\langle a_{i_1}^*, \sum_{i \in I_1 \setminus \{i_1\}} a_i^* \right\rangle < 0$$

zu schließen ist, und es wäre, entgegen der Voraussetzung

$$\sum_{i \in I_1} a_i^{*2} = \left\langle a_{i_1} + \sum_{i \in I_1 \setminus \{i_1\}} a_i^* , a_{i_1}^* + \sum_{i \in I_1 \setminus \{i_1\}} a_i^* \right\rangle$$

$$< \left\| \sum_{i \in I_1 \; \{i_1\}} a_i^* \right\|^2 .$$

Genauso bestätigt man leicht, daß

$$\left\langle a_i^*, \sum_{i \in I_1} a_i^* \right\rangle < 0, \; i \in N_m \setminus I_1$$

gilt, denn wäre eines dieser Skalarprodukte - etwa jenes, das durch den nicht zu I_1 gehörenden Zeiger i_2 gekennzeichnet ist - nicht negativ, so hätte man

$$\left\| \sum_{i \in I_1 \cup \{i_2\}} a_i^* \right\|^2 \geq \left\| a_{i_2}^* \right\|^2 + \left\| \sum_{i \in I_1} a_i^* \right\|^2 > \left\| \sum_{i \in I_1} a_i^* \right\|^2 .$$

Faßt man die Einzelheiten zusammen, so gewinnt man

Satz 2. Ist P ein konvexes Polyeder mit den Maßvektoren a_i^*, $i \in N_m$ und gilt $\left\| \sum_{i \in I_1} a_i^* \right\| \geq \left\| \sum_{i \in I} a_i^* \right\|$ für jede Teilmenge I von N_m, so sind alle Quermaße (der Dimension n-1) von P nicht größer als $\left\| \sum_{i \in I_1} a_i^* \right\|$. Diese Schranke wird erreicht, wenn in Richtung von $a_1 = \sum_{i \in I_1} a_i^*$ projiziert wird. Bei Beleuchtung aus dieser Richtung liegt keine Randzelle im Streiflicht.

3. Durch die im vorangegangenen Abschnitt hergeleiteten notwendigen Optimalitätsbedingungen ergeben sich aus dem ursprünglichen stetigen Extremalproblem diskrete Aufgaben. Um das Minimum von $\overline{v}(a)$ zu ermitteln, müssen höchstens $\binom{m}{n-1}$ Richtungen betrachtet werden, soll hingegen das Maximum bestimmt werden, sind $2^{m-1}-1$ Werte zu vergleichen. (Wegen (1) genügt es, die Werte $\left\| \sum_{i \in I} a_i^* \right\|$ für

$0 < \text{card } I \leq \frac{m}{2}$ zum Vergleich heranzuziehen).

Dieser zweiten Aufgabe läßt sich übrigens eine besonders einprägsame Gestalt geben: Wird

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & , \ i \in I_1 \\ 0 & , \ i \notin I_1 \end{cases}$$

gesetzt, so ist nach Satz 2

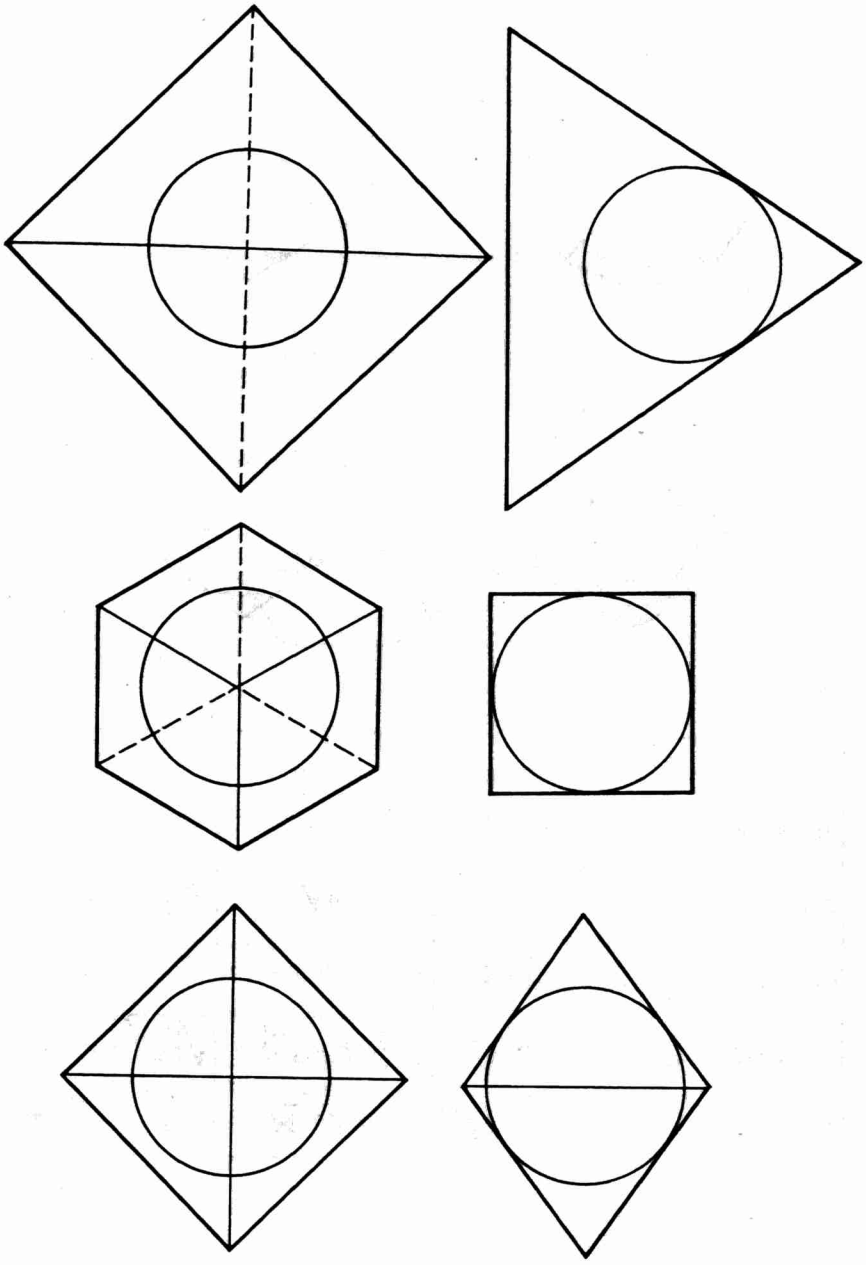
$$\max \bar{v}^2(a) =: \bar{v}^2_{max} = \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \right\|^2 = \sum_{h,k=1}^{m} \langle a_h^*, a_k^* \rangle \lambda_h \lambda_k .$$

Mithin ist $\bar{v}^2_{max}$ als Lösung der Booleschen Optimierungsaufgabe

$$\lambda^T C \lambda = \text{Maximum!} , \quad \lambda_i \in \{0,1\} \tag{12}$$

zu gewinnen, wobei C die - positiv semidefinite - Matrix mit den Elementen $\langle a_h^*, a_k^* \rangle$ ist. Für diese Aufgabe stehen geeignete numerische Verfahren bereit, auf die zurückgegriffen werden kann, sobald das Polyeder unmittelbar vorgegeben ist (und es nur eine mäßige Anzahl von Wänden besitzt).

Für die fünf regulären Polyeder des R^3 sind die besten Projektionen leicht zu gewinnen. In der folgenden Abbildung 2 sind ihre größten und kleinsten Projektionen - jeweils mit dem Bild der Inkugel - wiedergegeben. In der anschließenden Tabelle findet man doe optimalen Quermaße für den Fall, daß die betr. Polyeder einer Kugel vom Radius r = 1 umbeschrieben sind.



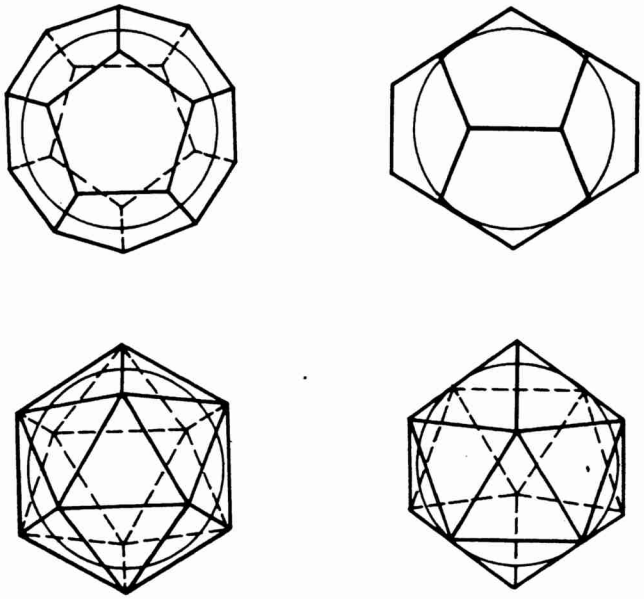


Abb. 2

	$\bar{v}_{min}$	$\bar{v}_{max}$	$\bar{v}_{min} : \bar{v}_{max}$
Tetraeder	$6\sqrt{2}$	12	$\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}707$
Hexaeder	4	$4\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}577$
Oktaeder	$3\sqrt{2}$	6	$\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}707$
Dodekaeder	$\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}(3 - \sqrt{5})$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \approx 0{,}851$
Ikosaeder	$3\sqrt{5(7 - 3\sqrt{5})}$	$3\sqrt{6(7-3\sqrt{5})}$	$\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0{,}913$

Schon bei den Polyedern des R^3 ergeben sich die Projektionen mit kleinstem Inhalt durchaus nicht immer in Richtung einer Kante. Dies wird bereits durch das reguläre Ikosaeder belegt. Auch u. U. vorhandene Symmetrieachsen müssen keinesfalls die Richtungen bester Projektionen aufweisen. Als Beispiel kann das abgestumpfte Oktaeder dienen, dessen Projektion mit größtem Inhalt in Abb. 3 dargestellt ist.

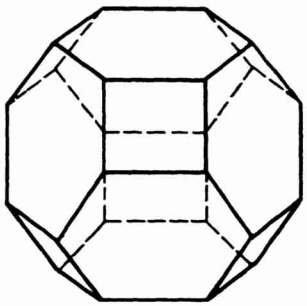


Abb. 3

Eine Übersicht über die besten Projektionen aller halbregulären Polyeder des R^3 in Hinblick auf ihre Symmetriegruppen wird in [3] gegeben.

Die Tragweite der angegebenen Optimalitätsbedingungen mag letztlich ein Blick auf die regulären Polyeder des R^n $(n \geq 5)$ verdeutlichen.

Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse beim Würfel. Ist l seine Kantenlänge, so kann er derart gelagert werden, daß seine $2n$ Maßvektoren durch

$$a_i^* = l^{n-1}(\delta_{1i}, \ldots, \delta_{ni})$$

$$a_{n+i}^* = -l^{n-1}(\delta_{1i}, \ldots, \delta_{ni}) \qquad i = 1, \ldots, n$$

zu beschreiben sind. Es ist dann

$$\sum_{i \in I} a_i^* = l^{n-1}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i(I) \in \{-1, 0, 1\}$$

und folglich

$$\left\| \sum_{i \in I} a_i^* \right\|^2 \leq n\, l^{2n-2}$$

mit Gleichheit für $\varepsilon_i^2 = 1$, $i=1,\ldots,n$. Also ist für den Würfel

$$\bar{v}_{max} = \sqrt{n}\; l^{n-1}$$

und die Richtungen, in denen dieser Wert erreicht wird, weisen vom Mittelpunkt des Würfels nach einer beliebigen Ecke. Sollen $n-1$ Wände des Würfels mit unabhängigen Normalen im Streiflicht liegen, so muß die Beleuchtung offensichtlich in der Richtung einer Normalen erfolgen und es wird

$$\bar{v}_{min} = l^{n-1}.$$

Auch für das reguläre Simplex sind die besten Projektionen leicht zu gewinnen. Haben seine Kanten die Länge l, so haben seine $n+1$ Randzellen den Inhalt

$$v = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

und für seine n+1 Maßvektoren a_i^* gilt bekannterweise

$$\langle a_h^*, a_k^* \rangle = -\frac{v^2}{n} \quad \text{für } h \neq k .$$

Mit card I = : k , $0 \leq k \leq n+1$ ergibt sich demnach

$$\left\| \sum_{i \in I} a_i^* \right\|^2 = v^2\left(k - \frac{k^2-k}{n}\right) = \frac{v^2}{n}\left(\frac{(n+1)^2}{4} - (k - \frac{n+1}{2})^2\right).$$

Ist n ungerade, so erreicht diese Funktion der ganzzahligen Veränderlichen k ihr Maximum für 2k = n+1, ist n gerade, ist dies für 2k = n oder 2k = n+2 der Fall. Gemäß Satz 2 ist folglich

$$\bar{v}_{max} = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \frac{1}{2}\begin{cases} n+1 & , \text{ n ungerade} \\ \sqrt{n(n+2)} & , \text{ n gerade} . \end{cases}$$

Um eine Projektion mit minimalem Inhalt zu gewinnen, muß nach Satz 1 in Richtung einer Kante des Simplex projiziert werden, denn nur dann liegen n-1 Randzellen im Streiflicht. Beleuchtet wird eine einzige Wand und man erhält

$$\bar{v}_{min} = v \cos \alpha ,$$

worin α für den Winkel steht, den eine Höhe des Simplex mit einer anliegenden Kante bildet. Die Höhen eines n-dimensionalen regulären Simplex haben die Länge

$$h = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}\, l,$$

so daß sich

$$\bar{v}_{min} = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} \sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

ergibt. Um die Gestalt der besten Projektionen des Simplex P zu beschreiben, kann man P in gewohnter Weise gemäß

$$P = \operatorname{conv} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \, 1 \, (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{i,n+1}) \, , \; i=1,\ldots,n+1 \right\}$$

in den R^{n+1} einbetten und danach in der vorgeschriebenen Weise projizieren. Man erhält z. B. als eine Projektion mit dem kleinsten Inhalt die konvexe Hülle der Punkte

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \, 1 \, (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{i,n+1}) \, , \; i=1,\ldots,n-1$$

und des Punktes

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \, 1 \, (0,\ldots,0,1,1) \, ,$$

also ein $(n-1)$ dimensionales Simplex von einfacher Struktur.

Für das Kreuzpolytop - seine 2^n Maßvektoren werden bei geeigneter Lage durch

$$a_i^* = \frac{v}{\sqrt{n}} \, (\varepsilon_{i1}, \ldots, \varepsilon_{in}) \, ; \quad \varepsilon_{ij} \in \{-1, +1\}$$

gegeben - können nur Vermutungen geäußert werden.

Die gesicherten Ergebnisse für $n=2, 3, 4$ legen nahe, daß für beliebiges n

$$\bar{v}_{max} = \frac{v}{\sqrt{n}} \cdot 2^{n-1}$$

und

$$\bar{v}_{min} = \frac{v}{\sqrt{n}} \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

gilt. Einer Abhandlung von R. HALL [2] kann man die Abschätzung

$$\bar{v}_{min} > \frac{v}{\sqrt{n}} \cdot 2^{n-1} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}}$$

entnehmen. Dort wird - im wesentlichen, wie eingangs bemerkt, mit obiger Aufgabe gleichwertig - nach jenen Ebenen durch den Mittelpunkt eines Würfels der Kantenlänge 2 gefragt, von denen die Ecken den kleinsten mittleren Abstand c_n besitzen. HALL findet für den Grenzwert c der nichtwachsenden Folge (c_n) sogar die Abschätzung

$$c \geq c_{2n_0} \exp\left(-\frac{\pi^2}{16}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} - \dots - \frac{1}{(2n_0-1)^2}\right)\right),$$

die mit $c_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ auf $c > \sqrt{\frac{3}{7}}$ führt. Um diese Abschätzung zu gewinnen, wird u. a. auf die Stirlingsche Formel zurückgegriffen. Es werden also Verfahren eingesetzt, die der kombinatorischen Natur der Aufgabe nur bedingt entsprechen.

LITERATUR

[1] BOHNE,E.,und H.MARTINI: Extremalaussagen zum Kompositionslichtstrom von Konfigurationen ebener Flächen und konvexen Polyedern bei geometrischer Parallelbeleuchtung. Wiss. Zeitschr. PH Dresden 16(1982)3,67-74.

[2] HALL,R.R.: On a conjecture of Littlewood. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78(1975), 443-445.

[3] MARTINI,H.: Aussagen zum optimalen Kompositionslichtstrom regulärer und halbregulärer Polyeder. Wiss. Zeitschr. PH Dresden 17 (1983), math.-naturwiss. Reihe, 23-32.

Manuskripteingang: 4. 12. 1982

VERFASSER:

HORST MARTINI, Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule Dresden

BERNULF WEIßBACH, Sektion Mathematik/Physik der Technischen Hochschule Magdeburg