Werk

Titel: Über Kongruenzrelationen in Zerlegungsstrukturen

Autor: JARITZ, R.

Jahr: 1983

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0015|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
15 (1983), 7–16

Über Kongruenzrelationen in Zerlegungsstrukturen

RENATE JARITZ

Für die algebraische Beschreibung geometrischer Sachverhalte wird der klassischen Zerlegungstheorie euklidischer Polyeder und ihren verschiedenen Verallgemeinerungen in neueren Untersuchungen häufig ein abstrakter Strukturbegriff in Form der Theorie der Polyeder- und Zerlegungsstrukturen an die Seite gestellt, wie das von HERTEL in [4] und [6] dargelegt wird. Dieser Strukturbegriff hat sich für die Klärung zahlreicher Probleme, insbesondere bei der Untersuchung von Abbildungen zur Charakterisierung von Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit, als tragfähig erwiesen. Im folgenden wird versucht, Zerlegungsstrukturen vom abstrakt algebraischen Standpunkt aus, ohne unmittelbaren Bezug zu geometrischen Begriffen und Fragestellungen, zu charakterisieren. Insbesondere gelingt es, für die Einführung der spezifischen Relation der Zerlegungsgleichheit, welche ursprünglich offenbar der Geometrie entlehnt ist, eine Begründung rein algebraischer Natur in Form gewisser Minimalitätsbedingungen anzugeben. Durch Abschwächung der für partielle Strukturen gebräuchlichen Assoziativitäts- und Kommutativitätsforderungen sowie deren enge Bindung an Relationen werden Klassen von Kongruenzrelationen charakterisiert, deren zugehörige kanonische Homomorphismen gerade Halbgruppen bzw. kommutative Halbgruppen als Bilder von Zerlegungsstrukturen liefern. Dabei spielen Zerlegungsgleichheitsrelationen wiederum eine bemerkenswerte Rolle. Für die aus der Geometrie bekannte Ergänzungsgleichheit gelingt im Unterschied zur Zerlegungsgleichheit unter abstrakten Bedingungen der Nachweis des Subtraktionssatzes. Es ergibt sich ein klares Bedingungsgefüge zwischen den Eigenschaften von Zerlegungsgleichheitsrelationen (einschließlich Ergänzungsgleichheit) und den Eigenschaften homomorpher Bilder von Zerlegungsstrukturen, speziell bei der Begründung eines Inhaltsbegriffes.

1. Zur allgemeinen Charakterisierung von Zerlegungsstrukturen

Den Ausgangspunkt der Untersuchungen bildet ein *partielles Gruppoid*, worunter eine beliebige Menge mit einer partiellen binären Operation verstanden wird. In diesem partiellen Gruppoid sei eine (binäre) Relation gegeben, von der hier vorausgesetzt werde, daß sie Äquivalenzrelation ist. Der Übergang von einer beliebigen anderen Relation zu einer geeigneten Äquivalenzrelation ist in [9] ausführlich beschrieben. Auf der Grundlage der gegebenen Relation werden weitere Relationen konstruiert, deren spezifische Eigenschaften den Hauptgegenstand der Untersuchungen ausmachen.

Unter einer *binären Relation* in einem partiellen Gruppoid $(M, +)$ wird eine beliebige Teilmenge R der Menge $M \times M$ aller geordneten Paare verstanden. Eine Relation wird im weiteren meist durch ein Symbol (z. B. $\sim, \equiv, \stackrel{z}{=}$) bezeichnet, wobei $(x, y) \in R_{\sim}$ gleichbedeutend mit $x \sim y$ sei und zur Vereinfachung auch das entsprechende Symbol (also z. B. $\sim$) als Relation bezeichnet wird.
Die Abhängigkeit einer Relation $\approx$ von einer gegebenen Relation wird durch die folgende Definition gekennzeichnet.

Definition 1. Eine Relation $\approx$ heißt *Relation modulo* $\sim$ in einer Menge M genau dann, wenn für alle $a, b \in M$ aus $a \sim b$ stets $a \approx b$ folgt, d. h., $R_{\sim} \subseteq R_{\approx}$ ist.

Besondere Aufmerksamkeit soll den Kongruenzrelationen in einem partiellen Gruppoid $(M, +)$ gewidmet werden, was vor allem mit ihrer engen Beziehung zu Homomorphismen zusammenhängt.

Definition 2. Eine Relation $\equiv$ heißt *Kongruenzrelation* in $(M, +)$ genau dann, wenn folgendes gilt:

(1) $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation in M (d. h. reflexiv, symmetrisch und transitiv).

(2) Es gilt der folgende Additionssatz für $\equiv$:

(ADD$_{\equiv}$) Für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in M$, für die $a_1 \equiv b_1$ und $a_2 \equiv b_2$ und $a_1 + a_2$ erklärt und $b_1 + b_2$ erklärt ist, gilt $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2$.

Für ein beliebiges partielles Gruppoid $(M, +)$, in dem eine Relation $\sim$ gegeben ist (d. h. $R_{\sim} \subseteq M \times M$), werde die Menge aller Kongruenzrelationen modulo $\sim$ in $(M, +)$ mit $\mathfrak{R}_{\sim}$ bezeichnet. Diese Menge $\mathfrak{R}_{\sim}$ ist nicht leer, denn die Allrelation $R_A = M \times M$ ist eine Kongruenzrelation in $(M, +)$, und es gilt $R_{\sim} \subseteq R_A$. Der Durchschnitt $K_0 = \bigcap_{K \in \mathfrak{R}_{\sim}} K$ aller Elemente aus $\mathfrak{R}_{\sim}$ ist wiederum eine Kongruenzrelation modulo $\sim$ in $(M, +)$. Die Relation K_0 besitzt die Eigenschaft, in dem in der nachfolgenden Definition angegebenen Sinne das minimale Element in $\mathfrak{R}_{\sim}$, d. h. minimale Kongruenzrelation modulo $\sim$ in $(M, +)$, zu sein.

Definition 3. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Menge von Relationen in einem partiellen Gruppoid $(M, +)$. $R_0 \in \mathfrak{R}$ heißt *minimale Relation* in $\mathfrak{R}$ genau dann, wenn für alle $R \in \mathfrak{R}$ aus $(x, y) \in R_0$ stets $(x, y) \in R$ folgt, also $R_0 \subseteq R$ ist.

In den von HERTEL eingeführten Zerlegungsstrukturen (siehe [4, 6]), deren Definition hier — dem abstrakt algebraischen Ausgangspunkt entsprechend — etwas allgemeiner gefaßt wird, läßt sich die minimale Kongruenzrelation noch genauer charakterisieren.

Definition 4. $(M, +, \sim)$ heißt *Zerlegungsstruktur* genau dann, wenn folgendes gilt:

(1) $(M, +)$ ist ein partielles Gruppoid.

(2) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation in M.

(3) Für alle $a, b \in M$ existiert ein $b' \in M$ mit $b' \sim b$ und $a + b' \in M$ sowie ein $a' \in M$ mit $a' \sim a$ und $a' + b \in M$.

Für die weiteren Untersuchungen sei eine beliebige Zerlegungsstruktur jeweils fest vorgegeben. Durch die nachfolgende Definition werden für beliebige Elemente $a, b \in M$ spezielle Relationen $\simeq$ und $\cong$ erklärt.

Definition 5. Es ist $a \simeq b$ genau dann, wenn es Darstellungen $a = \langle a_1 + \cdots + a_n \rangle_1$ und $b = \langle b_1 + \cdots + b_n \rangle_1$ mit Elementen $a_i, b_i \in M$ gibt, für die $a_i \sim b_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ $(n \in \mathbf{N})$ ist.

Es ist $a \cong b$ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl k und Elemente $c_1, \ldots, c_k \in M$ gibt mit $a = c_1, c_1 \simeq c_2, \ldots, c_k \simeq b$.

Anmerkung. Die symbolische Schreibweise $\langle a_1 + \cdots + a_n \rangle_1$ bedeutet dabei, daß die mehrfache Verknüpfung in der im allgemeinen nicht assoziativen Struktur $(M, +)$ in einer bestimmten, jedoch nicht explizit angegebenen Art und Weise geklammert ist. Gleiche Indizes an der Klammer bedeuten gleiche, unterschiedliche Indizes verschiedene Klammerungen.

Satz 1. *Die Relation $\cong$ ist die minimale Kongruenzrelation modulo $\sim$ in $(M, +, \sim)$.*

Beweis. 1. Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und in Definition 5 auch $n = 1$ zugelassen wurde, ergeben sich Reflexivität und Symmetrie der Relation $\simeq$ sofort aus ihrer Definition, und für beliebige $a, b \in M$ folgt aus $a \sim b$ stets $a \simeq b$.
Außerdem gilt der folgende Additionssatz für $\simeq$:

(ADD$_\simeq$) Für Elemente $a_1, a_2, b_1, b_2 \in M$ mit $a_1 \simeq b_1$ und $a_2 \simeq b_2$ sowie $a_1 + a_2 \in M$ und $b_1 + b_2 \in M$ ist auch $a_1 + a_2 \simeq b_1 + b_2$.

Diese Aussage bestätigt sich leicht, da durch die Voraussetzung $a_1 + a_2 \in M$ und $b_1 + b_2 \in M$ die Existenz geeigneter Verknüpfungen gesichert ist.

2. Die Relation $\cong$ ist eine Relation modulo $\sim$ in M, da für beliebige $a, b \in M$ aus $a \sim b$ stets $a \simeq b$ (siehe 1.) und aus $a \simeq b$ nach Definition 5 für $k = 1$ stets $a \cong b$ folgt. Aus $a \sim b$ folgt also $a \cong b$.

3. $\cong$ ist eine Kongruenzrelation in $(M, +)$. Reflexivität, Symmetrie und Transitivität ergeben sich unmittelbar aus der Definition und der Reflexivität und Symmetrie der Relation $\simeq$. Es läßt sich der folgende Additionssatz nachweisen.

(ADD$_\cong$) Für beliebige $a, b, c, d \in M$ mit $a \cong b$ und $c \cong d$ sowie $a + c \in M$ und $b + d \in M$ folgt $a + c \cong b + d$.

Dazu sei $a \cong b$, $c \cong d$, $a + c \in M$ und $b + d \in M$ für geeignete $a, b, c, d \in M$ vorausgesetzt. Dann gibt es Elemente $p_1, \ldots, p_n \in M$ und $q_1, \ldots, q_m \in M$ mit $a = p_1$, $p_1 \simeq p_2, \ldots, p_n \simeq b$ und $c = q_1$, $q_1 \simeq q_2, \ldots, q_m \simeq d$. Nach Definition 5 existieren Elemente $c_1, \ldots, c_{n+1} \in M$ mit $c_i \sim c$ für alle $i = 1, \ldots, n+1$ und $p_i + c_i \in M$ für $i = 1, \ldots, n$ und $b + c_{n+1} \in M$, so daß wegen 1. und der Gültigkeit von (ADD$_\simeq$) $a + c \simeq p_1 + c_1, p_1 + c_1 \simeq p_2 + c_2, \ldots, p_n + c_n \simeq b + c_{n+1}$ folgt.
Analog existieren Elemente $b_0, b_1, \ldots, b_m \in M$ mit $b_i \sim b$ für $i = 0, 1, \ldots, m$ und $b_0 + c \in M$ sowie $b_i + q_i \in M$ für $i = 1, \ldots, m$, so daß $b_0 + c \simeq b_1 + q_1$, $b_1 + q_1 \simeq b_2 + q_2, \ldots, b_m + q_m \simeq b + d$ ist. Da aber wegen $b_0 \sim b$ und $c_{n+1} \sim c$, also $b \simeq b_0$ und $c_{n+1} \simeq c$ (wegen 1.) nach (ADD$_\simeq$) auch $b + c_{n+1} \simeq b_0 + c$ ist, folgt insgesamt $a + c \cong b + d$. Die Relation $\cong$ ist somit Kongruenzrelation modulo $\sim$.

4. Zum Nachweis der Minimalität der Relation $\cong$ seien eine beliebige Kongruenzrelation $\equiv$ modulo $\sim$ und $a, b \in M$ mit $a \cong b$ vorgegeben. Dann existieren nach Definition 5 eine natürliche Zahl k und Elemente $c_1, \ldots, c_k \in M$ mit $a = c_1$, $c_1 \simeq c_2$, $\ldots, c_k \simeq b$. Gilt jedoch für zwei Elemente $x, y \in M$ die Beziehung $x \simeq y$, so existieren nach Definition 5 Darstellungen $x = \langle x_1 + \cdots + x_n \rangle_1$ und $y = \langle y_1 + \cdots + y_n \rangle_1$ mit $x_i \sim y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Da $\equiv$ eine Relation modulo $\sim$ ist, folgt $x_i \equiv y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und mit dem für die Kongruenzrelation $\equiv$ gültigen Additionssatz $x \equiv y$. Da $\equiv$ überdies reflexiv ist, gilt unter den obigen Voraussetzungen somit $a \equiv c_1$, $c_1 \equiv c_2, \ldots, c_k \equiv b$, woraus sich mit der Transitivität von $\equiv$ schließlich $a \equiv b$ ergibt. Aus $a \cong b$ folgt also $a \equiv b$, womit die Minimalität gezeigt ist.

Die in Definition 5 eingeführte Relation $\simeq$ ist ihrem Charakter nach eine typische „Zerlegungsgleichheitsrelation", wie sie aus der Geometrie bekannt ist. Sie ist jedoch, da an die Operation $+$ des partiellen Gruppoids keinerlei Forderungen gestellt

werden, im allgemeinen nicht transitiv, d. h. auch keine Kongruenzrelation. Es läßt sich jedoch nachweisen, daß sie das minimale Element in der Menge aller reflexiven und symmetrischen Relationen modulo $\sim$ ist, für die ein Additionssatz gilt (siehe [9]). Durch den Übergang zur Relation $\cong$ wird zunächst neben den von der Relation $\simeq$ bekannten Eigenschaften die Transitivität gesichert. Der Gültigkeitsnachweis für den entsprechenden Additionssatz macht die bedeutende Rolle des Axioms (3) der Definition 4 deutlich. Zerlegungsstrukturen erweisen sich damit als geeignetes algebraisches Mittel zur Untersuchung von Zerlegungsgleichheitsproblemen sowohl allgemeiner wie auch geometrischer Art.

2. Halbgruppen als homomorphe Bilder von Zerlegungsstrukturen

Der enge Zusammenhang zwischen Kongruenzrelationen und Homomorphismen (bekanntlich entspricht jedem Homomorphismus eineindeutig eine Kongruenzrelation), besonders aber die Bedeutung von Zerlegungsgleichheitsrelationen für die Einführung von Inhalts- bzw. Maßbegriffen in der Geometrie, legen die Untersuchungen der Homomorphismen von Zerlegungsstrukturen sowie ihrer homomorphen Bilder nahe.

Definition 6. Φ heißt *Homomorphismus der Zerlegungsstruktur* $(M, +, \sim)$ in eine algebraische Struktur $(G, +)$ genau dann, wenn folgendes gilt:

(1) Φ ist eine eindeutige Abbildung von M in G.

(2) Für alle $a, b \in M$ mit $a + b \in M$ gilt $\Phi(a) + \Phi(b) \in G$ und

$$\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b) \qquad \text{(Additivität)}.$$

(3) Für alle $a, b \in M$ folgt aus $a \sim b$ stets

$$\Phi(a) = \Phi(b) \qquad (\sim\text{-Invarianz}).$$

Anmerkung. Die Operationen in $(M, +)$ und $(G, +)$ werden wie üblich mit dem gleichen Symbol $+$ bezeichnet. Es wird meist nur das Bild $H = \Phi(M)$ bzw. $(H, +)$ betrachtet. In diesen Fällen wird Φ als Homomorphismus der Zerlegungsstruktur auf $(H, +)$ bezeichnet.

Die eineindeutige Zuordnung zwischen einer Kongruenzrelation $\equiv$ und einem Homomorphismus Φ, d. h. die Beziehung

$$a \equiv b \text{ genau dann, wenn } \Phi(a) = \Phi(b) \text{ für alle } a, b \in M,$$

wird durch die Formulierung „$\equiv$ gehört zu Φ" bzw. „Φ ist kanonischer Homomorphismus zu $\equiv$" ausgedrückt. $(M/_{\equiv}, +)$ wird als Faktorstruktur der Zerlegungsstruktur $(M, +, \sim)$ nach der Kongruenzrelation $\equiv$ bezeichnet, wobei $M/_{\equiv}$ das Restklassensystem von M nach $\equiv$ ist.

Im Unterschied zu beliebigen partiellen Gruppoiden lassen sich für homomorphe Bilder von Zerlegungsstrukturen einige spezielle Eigenschaften nachweisen.

1. Wegen der $\sim$-Invarianz eines beliebigen Homomorphismus Φ einer Zerlegungsstruktur $(M, +, \sim)$ folgt aus der Beziehung $a \sim b$ (für beliebige $a, b \in M$) stets $\Phi(a) = \Phi(b)$ und damit für die zum Homomorphismus gehörige Kongruenzrelation $\equiv$ auch $a \equiv b$. Die zum Homomorphismus einer Zerlegungsstruktur gehörende Kongruenzrelation ist also stets eine Kongruenzrelation modulo $\sim$.

2. Additivität und $\sim$-Invarianz bewirken im Zusammenhang mit dem Axiom (3) für Zerlegungsstrukturen, daß das homomorphe Bild $(H, +)$ einer Zerlegungsstruktur $(M, +, \sim)$ mit $H = \Phi(M)$ bei einem Homomorphismus Φ stets ein (nichtpartielles) Gruppoid ist, d. h., die Operation $+$ ist in H unbeschränkt ausführbar.

Die minimale Kongruenzrelation $\cong$ modulo $\sim$ spielt bei der Untersuchung der Homomorphismen einer Zerlegungsstruktur $(M, +, \sim)$ eine besondere Rolle.

Satz 2. *Für alle $a, b \in M$ ist $a \cong b$ äquivalent dazu, daß $\Phi(a) = \Phi(b)$ bei allen Homomorphismen Φ der Zerlegungsstruktur $(M, +, \sim)$ ist.*

Beweis. Die Gleichheit der Bilder ergibt sich aus Definition 5 für die Relation $\cong$ und Definition 6. Ist dagegen jetzt für $a, b \in M$ die Beziehung $\Phi(a) = \Phi(b)$ bei allen Homomorphismen Φ der Zerlegungsstruktur, so gilt dies auch für den kanonischen Homomorphismus Φ_0 zur minimalen Kongruenzrelation $\cong$ modulo $\sim$. Also ist $\Phi_0(a) = \Phi_0(b)$ und damit $a \cong b$.

Für partielle Gruppoide lassen sich auf unterschiedliche Art Assoziativitäts- und Kommutativitätseigenschaften fordern. Die üblichen Forderungen (siehe z. B. [1, 8, 10]) bewirken, daß das homomorphe Bild einer Zerlegungsstruktur eine Halbgruppe bzw. kommutative Halbgruppe ist (siehe [9]). Umgekehrt lassen sich jedoch aus Assoziativität und Kommutativität in den Bildstrukturen keine Rückschlüsse auf die entsprechenden Eigenschaften der Zerlegungsstruktur ziehen. Eine solche Übertragung von Eigenschaften gelingt durch eine geeignete Abschwächung der Assoziativitäts- bzw. Kommutativitätsforderungen.

Definition 7.

(1) Eine Zerlegungsstruktur $(M, +, \sim)$ heißt *schwach assoziativ bezüglich einer Relation* $\approx$ in M, wenn für alle $a, a', b, b', c, c' \in M$ mit $a' \sim a$, $b' \sim b$, $c' \sim c$, $(a + b) + c \in M$ und $a' + (b' + c') \in M$ stets $(a + b) + c \approx a' + (b' + c')$ ist.

(2) Eine Zerlegungsstruktur $(M, +, \sim)$ heißt *schwach kommutativ bezüglich einer Relation* $\approx$ in M, wenn für alle $a, a', b, b' \in M$ mit $a' \sim a$, $b' \sim b$, $a + b \in M$ und $b' + a' \in M$ stets $a + b \approx b' + a'$ ist.

Es sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller Kongruenzrelationen modulo $\sim$, bezüglich der die Zerlegungsstruktur schwach assoziativ ist.
Es sei $\mathfrak{B}$ die Menge aller Kongruenzrelationen modulo $\sim$, bezüglich der die Zerlegungsstruktur schwach assoziativ und schwach kommutativ ist.

Satz 3.

(1) *Das Bild einer Zerlegungsstruktur bei einem Homomorphismus ist genau dann eine Halbgruppe, wenn $R_{\equiv} \in \mathfrak{A}$ für die zum Homomorphismus gehörige Kongruenzrelation $\equiv$ gilt.*

(2) *Das Bild einer Zerlegungsstruktur bei einem Homomorphismus ist genau dann eine kommutative Halbgruppe, wenn $R_{\equiv} \in \mathfrak{B}$ für die zum Homomorphismus gehörige Kongruenzrelation $\equiv$ gilt.*

Beweis. (1) Es sei Φ ein beliebiger Homomorphismus der Zerlegungsstruktur $(M, +, \sim)$ und $\equiv$ die zugehörige Kongruenzrelation. Dann gilt:
Es sei $(H, +)$ eine Halbgruppe. Für beliebige $a, b, c \in M$ existieren dann $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in M$ mit $a_1 \sim a$, $a_2 \sim a$, $b_1 = b_2 = b$, $c_1 \sim c$, $c_2 \sim c$ und $(a_1 + b) + c_1 \in M$ und $a_2 + (b + c_2) \in M$. Da Φ ein Homomorphismus der Zerlegungsstruktur ist,

gilt

$$\begin{aligned}\Phi\big((a_1 + b_1) + c_1\big) &= \big(\Phi(a_1) + \Phi(b_1)\big) + \Phi(c_1) = \big(\Phi(a) + \Phi(b)\big) + \Phi(c)\\ &= \Phi(a) + \big(\Phi(b) + \Phi(c)\big) = \Phi(a_2) + \big(\Phi(b_2) + \Phi(c_2)\big)\\ &= \Phi\big(a_2 + (b_2 + c_2)\big).\end{aligned}$$

Dies ist gleichbedeutend mit $(a_1 + b_1) + c_1 \equiv a_2 + (b_2 + c_2)$, da $\equiv$ die zum Homomorphismus Φ gehörige Kongruenzrelation ist. Damit ist $R_{\equiv} \in \mathfrak{A}$.
Es sei jetzt $R_{\equiv} \in \mathfrak{A}$. Für beliebige $A, B, C \in H = \Phi(M)$ ist $(A + B) + C \in H$ und $A + (B + C) \in H$, da $(H, +)$ ein Gruppoid ist. Gilt $A = \Phi(a)$, $B = \Phi(b)$, $C = \Phi(c)$, wobei $a, b, c \in M$ ist, so existieren nach Axiom (3) Elemente $a_1, a_2, c_1, c_2 \in M$ mit $a_1 \sim a$, $a_2 \sim a$, $c_1 \sim c$, $c_2 \sim c$ und $(a_1 + b) + c_1 \in M$ und $a_2 + (b + c_2) \in M$. Da die Zerlegungsstruktur $(M, +, \sim)$ schwach assoziativ bezüglich $\equiv$ ist, gilt $(a_1 + b) + c_1 \equiv a_2 + (b + c_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= \big(\Phi(a) + \Phi(b)\big) + \Phi(c) = \big(\Phi(a_1) + \Phi(b)\big) + \Phi(c_1)\\ &= \Phi\big((a_1 + b) + c_1\big) = \Phi\big(a_2 + (b + c_2)\big)\\ &= \Phi(a_2) + \big(\Phi(b) + \Phi(c_2)\big) = \Phi(a) + \big(\Phi(b) + \Phi(c)\big)\\ &= A + (B + C).\end{aligned}$$

Damit ist die Assoziativität in $(H, +)$ nachgewiesen und $(H, +)$ ist somit eine Halbgruppe.

(2) Wegen (1) ist lediglich zu zeigen, daß die Kommutativität in der Bildstruktur $(H, +)$ äquivalent dazu ist, daß die Zerlegungsstruktur schwach kommutativ bezüglich $\equiv$ ist. Dies bestätigt sich analog zu (1).

Die Frage nach der minimalen Relation in der Menge $\mathfrak{A}$ bzw. der Menge $\mathfrak{B}$, also die Frage nach den minimalen Kongruenzrelationen modulo $\sim$, die als Faktorstruktur der Zerlegungsstruktur eine Halbgruppe bzw. kommutative Halbgruppe erzeugen, führt wiederum auf Zerlegungsgleichheitsrelationen, wie sie bereits von HERTEL in [5] eingeführt wurden.

Definition 8.

(1) Es ist $a \overset{a}{-} b$ genau dann, wenn es (im allgemeinen unterschiedlich geklammerte) Darstellungen $a = \langle a_1 + \cdots + a_n \rangle_1$ und $b = \langle b_1 + \cdots + b_n \rangle_2$ mit Elementen $a_i, b_i \in M$ gibt, für die $a_i \sim b_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ($n \in \mathbf{N}$) ist.

Es ist $a \overset{a}{=} b$ genau dann, wenn es Elemente $c_1, \ldots, c_k \in M$ gibt, mit $a = c_1$, $c_1 \overset{a}{-} c_2, \ldots, c_k \overset{a}{-} b$.

(2) Es ist $a \overset{z}{-} b$ genau dann, wenn es Darstellungen $a = \langle a_1 + \cdots + a_n \rangle_1$ und $b = \langle b_1 + \cdots + b_n \rangle_2$ und eine geeignete Permutation π der Zahlen $1, \ldots, n$ gibt, so daß $a_i \sim b_{\pi(i)}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Es ist $a \overset{z}{=} b$ genau dann, wenn es Elemente $c_1, \ldots, c_k \in M$ gibt, mit $a = c_1$, $c_1 \overset{z}{-} c_2, \ldots, c_k \overset{z}{-} b$.

Satz 4.

(1) *Die Relation $\overset{a}{=}$ ist die minimale Kongruenzrelation modulo $\sim$, bezüglich der die Zerlegungsstruktur schwach assoziativ ist; also minimale Relation in $\mathfrak{A}$.*

(2) *Die Relation $\overset{z}{=}$ ist die minimale Kongruenzrelation modulo $\sim$, bezüglich der die Zerlegungsstruktur schwach assoziativ und schwach kommutativ ist, also minimale Relation in $\mathfrak{B}$.*

Beweis. Beide Aussagen lassen sich analog zu Satz 1 beweisen, wobei jedoch zum Nachweis der Minimalität die beiden folgenden Aussagen benötigt werden:
(I) Für jede Kongruenzrelation $\equiv$ mit $R_{\equiv} \in \mathfrak{A}$ und für Elemente $a_i, a_i' \in M$ $(i = 1, \ldots, n$ und $n \in \mathbf{N})$ mit $\langle a_1 + \cdots + a_n \rangle_1 \in M$ und $\langle a_1' + \cdots + a_n' \rangle_2 \in M$ und $a_i \sim a_i'$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist

$$\langle a_1 + \cdots + a_n \rangle_1 \equiv \langle a_1' + \cdots + a_n' \rangle_2.$$

(II) Für jede Kongruenzrelation $\equiv$ mit $R_{\equiv} \in \mathfrak{B}$ und für Elemente $a_i, a_i' \in M$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit $\langle a_1 + \cdots + a_n \rangle_1 \in M$, $\langle a_1' + \cdots + a_n' \rangle_2$ und $a_i \sim a_{\pi(i)}'$, wobei π eine beliebige Permutation von n Elementen ist, gilt

$$\langle a_1 + \cdots + a_n \rangle_1 \equiv \langle a_1' + \cdots + a_n' \rangle_2.$$

Sie lassen sich durch vollständige Induktion über die Anzahl n der Elemente für eine jeweils fest vorgegebene Kongruenzrelation aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ bestätigen.

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Relationen $\overset{a}{=}$ und $\overset{z}{=}$ lassen sich in Analogie zu Satz 2 formulieren, wobei als Kriterium die Gleichheit der Bilder bei allen Homomorphismen in Halbgruppen bzw. kommutative Halbgruppen fungiert (siehe [4, 5]).

Die vorangegangenen Untersuchungen lassen die aus der Geometrie bekannten und ursprünglich von daher in die abstrakten Untersuchungen übernommenen Zerlegungsgleichheitsrelationen in einem neuen Licht erscheinen. Die klassischen geometrischen Untersuchungen benutzen als Operationen die elementargeometrische Addition, welche sehr starken Assoziativitäts- und Kommutativitätsforderungen genügt, so daß die hier betrachteten Relationen $\simeq$, $\cong$, $\overset{a}{-}$, $\overset{a}{=}$, $\overset{z}{-}$ und $\overset{z}{=}$ zusammenfallen. So ist die dort benutzte Zerlegungsgleichheit (meist wie die Relation $\simeq$ ohne Beachtung der Klammerung definiert) die minimale Kongruenzrelation modulo $\sim$, bezüglich der die Zerlegungsstruktur schwach assoziativ und schwach kommutativ ist. Die Untersuchungen zu Homomorphismen machen ihre aus der Geometrie bekannte entscheidende Rolle für die Begründung von Inhalts- und Maßbegriffen vom abstrakten Standpunkt aus deutlich. Andererseits lassen sich durch die Benutzung geeigneter Relationen (etwa $\overset{a}{=}$ oder $\overset{z}{=}$) in einer beliebigen Zerlegungsstruktur im Hinblick auf homomorphe Bilder in einem gewissen Sinne Assoziativität und Kommutativität induzieren.

3. Zur Rolle der Ergänzungsgleichheit in Zerlegungsstrukturen

Neben den verschiedenen Zerlegungsgleichheitsrelationen spielt insbesondere in geometrischen Zerlegungsstrukturen eine weitere Relation, die Ergänzungsgleichheit, eine Rolle. Sie wird auf der Grundlage einer anderen Relation, in der Regel einer Zerlegungsgleichheitsrelation definiert. Hier wird, wie auch in der Geometrie, die Relation $\overset{z}{=}$ (im weiteren Zerlegungsgleichheit genannt) benutzt.

Definition 9. Zwei Elemente $a, b \in M$ heißen *ergänzungsgleich* $\left(a \overset{e}{=} b\right)$ genau dann, wenn es Elemente $c, d \in M$ gibt, so daß $c \overset{z}{=} d$, $a + c \in M$, $b + d \in M$ und $a + c \overset{z}{=} b + d$ ist.

Die Ergänzungsgleichheit besitzt folgende Eigenschaften:

1. Für alle $a, b \in M$ folgt aus $a \overset{z}{=} b$ stets $a \overset{e}{=} b$.

Beweis. Für beliebige $a, b, c \in M$ mit $a \overset{z}{=} b$ existieren $c_1, c_2 \in M$ mit $c_1 \sim c$, $c_2 \sim c$, $a + c_1 \in M$ und $b + c_2 \in M$. Wegen $R_{\overset{z}{=}} \in \mathfrak{B}$ ist also $c_1 \overset{z}{=} c_2$ und damit auch $a + c_1 \overset{z}{=} b + c_2$, also $a \overset{e}{=} b$.

2. Die Ergänzungsgleichheit ist eine Kongruenzrelation modulo $\sim$ in $(M, +, \sim)$. Daß die Ergänzungsgleichheit eine reflexive und symmetrische Relation modulo $\sim$ ist, ergibt sich aus den Eigenschaften von $\overset{z}{=}$ und Punkt 1. Transitivität und Additionssatz lassen sich unter Anwendung der Definition der Ergänzungsgleichheit und Ausnutzung der Eigenschaften der Zerlegungsgleichheit durch geeignete Umformungen nachweisen.

3. Jede Zerlegungsstruktur ist schwach assoziativ und schwach kommutativ bezüglich $\overset{e}{=}$, was sich aus der Gültigkeit dieser Aussage für die Zerlegungsgleichheit und 1. ergibt.

4. Es gilt ein „Subtraktionssatz" für die Ergänzungsgleichheit:

$(\mathrm{SUB}_{\overset{e}{=}})$ Für beliebige $a_1, a_2, b_1, b_2 \in M$ mit $a_1 + a_2 \in M$ und $b_1 + b_2 \in M$ folgt aus $a_1 + a_2 \overset{e}{=} b_1 + b_2$ und $a_2 \overset{e}{=} b_2$ stets $a_1 \overset{e}{=} b_1$.

Beweis. Es seien also $a_1 + a_2 \overset{e}{=} b_1 + b_2$ und $a_2 \overset{e}{=} b_2$, d. h., es existieren $u, v, w, z \in M$ mit $(a_1 + a_2) + u \overset{z}{=} (b_1 + b_2) + v$ und $a_2 + w \overset{z}{=} b_2 + z$, wobei $u \overset{z}{=} v$ und $w \overset{z}{=} z$. Für geeignete $u_1, v_1 \in M$ mit $u_1 \sim u$, $v_1 \sim v$ gilt dann

$$(a_2 + w) + u_1 \overset{z}{=} (b_2 + z) + v_1. \tag{1}$$

Für geeignete $a_2' \sim a$, $b_2' \sim b$ und $w_1 \sim w$, $z_1 \sim z$ gelten dann die Beziehungen

$$(a_2 + w) + u_1 \overset{z}{=} a_2' + (u + w_1) \tag{2}$$

und

$$(b_2 + z) + v_1 \overset{z}{=} b_2' + (v + z_1). \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt wegen der Transitivität von $\overset{z}{=}$

$$a_2' + (u + w_1) \overset{z}{=} b_2' + (v + z_1). \tag{4}$$

Aus $(a_1 + a_2) + u \overset{z}{=} (b_1 + b_2) + v$ und $w \overset{z}{=} z$ folgt für geeignete $w_2 \sim w$ und $z_2 \sim z$

$$\big((a_1 + a_2) + u\big) + w_2 \overset{z}{=} \big((b_1 + b_2) + v\big) + z_2. \tag{5}$$

Außerdem gelten für geeignete Elemente $a_1' \sim a_1$ und $b_1' \sim b_1$ sowie die bereits festgelegten Elemente a_2', b_2', w_1, z_1 die Beziehungen

$$\big((a_1 + a_2) + u\big) + w_2 \overset{z}{=} a_1' + \big(a_2' + (u + w_1)\big) \tag{6}$$

und

$$\big((b_1 + b_2) + v\big) + z_2 \overset{z}{=} b_1' + \big(b_2' + (v + z_1)\big). \tag{7}$$

Aus (5), (6) und (7) ergibt sich

$$a_1' + \big(a_2' + (u + w_1)\big) \overset{z}{=} b_1' + \big(b_2' + (v + z_1)\big) \tag{8}$$

und daraus mit (4) auch $a_1' \overset{e}{=} b_1'$. Wegen $a_1' \sim a_1$ und $b_1' \sim b_1$ gilt auch $a_1' \overset{e}{=} a_1$, $a_1' \overset{e}{=} b_1'$ und $b_1' \overset{e}{=} b_1$, woraus mit Symmetrie und Transitivität der Relation $\overset{e}{=}$ schließlich $a_1 \overset{e}{=} b_1$, also die Behauptung, folgt.

Anmerkung. Der Nachweis eines „Subtraktionssatzes von links" erübrigt sich, da die Zerlegungsstruktur schwach kommutativ bezüglich $\overset{e}{=}$ ist.

Es sei $\mathfrak{C}$ die Menge aller Kongruenzrelationen modulo $\sim$, bezüglich der die Zerlegungsstruktur $(M, +, \sim)$ schwach assoziativ und schwach kommutativ ist und für die ein Subtraktionssatz gilt.

Satz 5. *Die Ergänzungsgleichheit ist die minimale Relation in* $\mathfrak{C}$.

Beweis. Zum Nachweis der Minimalität sei eine beliebige Kongruenzrelation $\equiv$ mit $R_{\equiv} \in \mathfrak{C}$ vorgegeben. Da offenbar $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ ist, ist $R_{\overset{z}{=}} \subseteq R_{\equiv}$, d. h., für beliebige $a, b \in M$ folgt aus $a \overset{z}{=} b$ stets $a \equiv b$. Ist nun $a \overset{e}{=} b$, so bedeutet dies, daß $c, d \in M$ existieren mit $a + c \overset{z}{=} b + d$ und $c \overset{z}{=} d$. Daraus folgt $a + c \equiv b + d$ und $c \equiv d$, was wegen der Gültigkeit des Subtraktionssatzes $a \equiv b$ nach sich zieht. Damit ist die Minimalität nachgewiesen.

Bei geometrischen Untersuchungen, aber auch in den Untersuchungen zu abstrakten Zerlegungsstrukturen spielt im Unterschied zu den hier angestellten Betrachtungen ein Subtraktionssatz für die Zerlegungsgleichheit eine wichtige Rolle. Durch Hadwiger [2] wurde die Gültigkeit des Subtraktionssatzes für die Relation $\overset{z}{=}$ in der Zerlegungsstruktur des n-dimensionalen euklidischen Raumes (d. h. in der Menge der eigentlichen n-dimensionalen Polyeder mit der elementargeometrischen Addition und einer bezüglich einer beliebigen, die Translationen umfassenden Untergruppe der vollen Bewegungsgruppe definierten $\mathfrak{G}$-Gleichheit, siehe [6]) nachgewiesen. Dies bewirkt insbesondere, daß die Zerlegungsgleichheit $\overset{z}{=}$ und die Ergänzungsgleichheit $\overset{e}{=}$ zusammenfallen. Somit wird in klassischen geometrischen Zerlegungsstrukturen stets mit einer Zerlegungsgleichheitsrelation gearbeitet, die letztendlich die Eigenschaften der minimalen Relation in der oben definierten Menge $\mathfrak{C}$ besitzt.

Zur Formulierung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Ergänzungsgleichheit werden wiederum die homomorphen Bilder der Zerlegungsstruktur herangezogen. Wegen $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ sind die durch die Kongruenzrelationen aus $\mathfrak{C}$ induzierten Faktorstrukturen kommutative Halbgruppen. Der Subtraktionssatz bewirkt die Gültigkeit der (rechten und linken) Kürzungsregel in diesen. Zwei Elemente einer Zerlegungsstruktur sind genau dann ergänzungsgleich, wenn ihre Bilder bei sämtlichen Homomorphismen in kommutative Halbgruppen mit Kürzung übereinstimmen (analog Satz 2).
Da sich kommutative Halbgruppen mit Kürzung isomorph in geeignete abelsche Gruppen einbetten lassen, induzieren die Kongruenzrelationen aus der Menge $\mathfrak{C}$ insbesondere Homomorphismen einer Zerlegungsstruktur in abelsche Gruppen.

In der Geometrie spielt die Ergänzungsgleichheit eine besondere Rolle bei der Einführung eines abstrakten Inhaltsbegriffes. Meist stützt sich ein solcher Inhaltsbegriff auf eine Zerlegungsgleichheitsrelation, also insbesondere die Zerlegungsgleichheit $\overset{z}{=}$. Den Klassen zerlegungsgleicher Elemente werden dabei eineindeutig Elemente eines sogenannten Größensystems zugeordnet. Unter einem *Größensystem* versteht man im allgemeinen eine (additiv geschriebene) geordnete kommutative Halbgruppe, häufig mit Nullelement. Wie Hilbert in [7] zeigt, läßt sich in der reellen euklidischen Ebene auch mit Hilfe der Ergänzungsgleichheit ein Inhaltsbegriff aufbauen, welcher außerdem die bemerkenswerte Eigenschaft besitzt, daß man bei seiner Begründung ohne das Archimedische Axiom auskommt. Wird die Zerlegungsgleichheit für die Inhaltsbegründung benutzt, kommt man dagegen ohne das Archimedische Axiom nicht aus. Die Gültigkeit des Subtraktionssatzes für die

Ergänzungsgleichheit (bzw. für eine beliebige andere Relation aus $\mathfrak{E}$) in Zerlegungsstrukturen gestattet die Einbettung der Faktorstruktur in eine abelsche Gruppe. Einer Idee aus [3] folgend, wird für eine Relation $\equiv$ aus der Menge $\mathfrak{E}$ die Gültigkeit eines Divisionssatzes vorausgesetzt, was die Torsionsfreiheit der abelschen Gruppe bewirkt. Nach einem aus der Theorie der abelschen Gruppen bekannten Zusammenhang (Satz von LEVI) läßt sich damit die abelsche Gruppe anordnen, was die Einführung einer Ordnung im Restklassensystem ermöglicht (siehe auch [9]). Die Gültigkeit des Divisionssatzes für eine Relation aus $\mathfrak{E}$, insbesondere für die Ergänzungsgleichheit, ist somit hinreichend und (wie sich leicht zeigen läßt) auch notwendig dafür, daß sich das zugehörige Restklassensystem anordnen läßt, also ein Größensystem bildet. Damit liegen übersichtliche Bedingungen für die Begründung eines abstrakten Inhaltsbegriffes vor.

LITERATUR

[1] DEVIDÉ, V.: Über eine Klasse von Gruppoiden. Glasnik Mat.-fiz. i. Astron. *10* (1955), 265–286.

[2] HADWIGER, H.: Ergänzungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder. Math. Z. *55* (1952), 292–298.

[3] HERTEL, E., und H. E. DEBRUNNER: Zur Rolle von Subtraktionssatz und Divisionssatz in Zerlegungsstrukturen. Beiträge zur Algebra und Geometrie *10* (1980), 145–148.

[4] HERTEL, E.: Polyederstrukturen. Math. Nachr. *62* (1974), 57–63.

[5] HERTEL, E.: Ein algebraischer Begriff des invarianten Maßes und invariante Integration in abstrakten Räumen. Math. Nachr. *88* (1979), 307–313.

[6] HERTEL, E.: Neuere Ergebnisse und Richtungen der Zerlegungstheorie von Polyedern. Mitt. Math. Ges. DDR 1977, Heft 4 S. 5–22.

[7] HILBERT, D.: Grundlagen der Geometrie, 8. Auflage mit Revisionen und Ergänzungen von P. BERNAYS. B. G. Teubner, Stuttgart 1956.

[8] HOEHNKE, H.-J.: Zur Theorie der Gruppoide I. Math. Nachr. *24* (1962), 137–168.

[9] JARITZ, R.: Kongruenzrelationen in einer Klasse partieller Gruppoide. Dissertation Univ. Jena 1980.

[10] VIEREGGE, H.: Einführung in die klassische Algebra. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

Manuskripteingang: 22. 12. 1980

VERFASSER:

RENATE JARITZ, Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena