Beiträge zur Algebra und Geometrie
15 (1983), 35–41

Über die senkrechten Projektionen regulärer Simplexe

Bernulf Weissbach

1. Übersicht: Aufgaben und Ergebnisse

Die hier mitzuteilenden Überlegungen wurden angeregt durch die Abhandlung „Minimal universal covers in E_n" von H. G. Eggleston [1]. In dieser bemerkenswerten Arbeit wird gezeigt, daß es in euklidischen Räumen E^n, $n \geqq 3$, minimale Deckel mit beliebig großem Durchmesser gibt. *Deckel* wird eine Menge D genau dann genannt, wenn jede Menge M, deren Durchmesser nicht größer als 1 ist, eine zu D kongruente Obermenge besitzt, und ein Deckel heißt *minimal*, wenn keine echte Untermenge von D ein Deckel ist.
Egglestons Beweis stützt sich beträchtlich auf das folgende

Lemma. *Es gibt für $n \geqq 3$ im E^n einen Körper K der festen Breite* 1 *mit folgender Eigenschaft:*
Ist K_u senkrechte Projektion von K auf einen $(n-1)$-dimensionalen Unterraum in Richtung u und wird mit $R(K_u)$ der Halbmesser der Umkugel von K_u bezeichnet, so gilt bezüglich aller Richtungen $\inf R(K_u) > \dfrac{1}{2}$.

Ein Beweis für dieses Lemma wird angedeutet, es ist mir jedoch nicht gelungen, über diese Andeutungen das Lemma zu gewinnen. Darum gebe ich hier einen Satz an, aus dem sich dieses Lemma — mit der Einschränkung $n \geqq 4$ — unmittelbar ableiten läßt. Es gilt:

Satz 1. *Ist S ein reguläres Simplex im E^n $(n \geqq 1)$ mit der Kantenlänge* 1, *so gilt für die senkrechten Projektionen S_u von S auf $(n-1)$-dimensionale Unterräume*

$$\inf R(S_u) \geqq \sqrt{\frac{n-1}{2n+2}}.$$

Da sich ein reguläres Simplex S der Kantenlänge 1 stets — für $n \geqq 3$ sogar auf mannigfache Weise — zu einem Körper K der festen Breite 1 erweitern läßt und dann ja für alle Richtungen $R(K_u) \geqq R(S_u)$ gilt, ergibt sich wegen

$$\frac{n-1}{2n+2} \geqq \frac{1}{4} + \frac{1}{20} \quad \text{für} \quad n \geqq 4$$

das zuvor geannte Lemma, ausgenommen jedoch $n = 3$.
Gestützt auf Satz 1, gelingt es aber auch in diesem Fall, das Lemma zu bestätigen. Es wird nachgewiesen:

Satz 2. *Im E^3 gibt es einen ein Tetraeder der Kantenlänge 1 enthaltenden Körper K der festen Breite 1 mit folgender Eigenschaft: Die Radien der Umkreise aller senkrechten Projektionen von K auf Ebenen sind größer als $\frac{1}{2}$.*

Aus dem Beweisgang wird nebenbei ersichtlich, daß die Menge dieser Radien eine untere Schranke der Gestalt $\frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, besitzen muß.

Der Beweis von Satz 2 nutzt entscheidend, daß die in Satz 1 enthaltene Abschätzung für ungerade Werte von n scharf ist und daß bei bekannter Lage von S leicht alle Richtungen angegeben werden können, für die dann

$$R^2(S_u) = \frac{n-1}{2n+2}$$

ausfällt. Für gerade Werte von n ist die angegebene Schranke offenbar zu grob. Im Zusammenhang damit entstand nun die Frage, ob sich für andere Maßzahlen, die den Projektionen S_u eines regulären Simplex zugeordnet werden können, scharfe Abschätzungen finden lassen. Diesbezüglich wird hier noch folgender Satz bewiesen:

Satz 3. *Ist S ein reguläres Simplex im E^n $(n \geqq 1)$ mit der Kantenlänge 1, so gilt für die Durchmesser $d(S_u)$ der senkrechten Projektionen S_u von S auf $(n-1)$-dimensionale Unterräume*

$$\min d(S_u) = \sqrt{1 - \frac{6}{n(n+1)(n+2)}}.$$

Es sei noch angemerkt, daß nach dem Satz von JUNG

$$\max R(S_u) = \sqrt{\frac{n-1}{2n}}$$

gilt und selbstverständlich $\max d(S_u) = 1$ ist.

2. Beweise

2.1. Um ein reguläres n-dimensionales Simplex S bequem zu beschreiben, bettet man es zweckmäßigerweise in einen $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum E^{n+1} ein. Wird dort ein Punkt mittels rechtwinkliger Koordinaten durch $X = [\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}]$ festgelegt, so ist $S = \operatorname{conv}\{X_1, \ldots, X_{n+1}\}$ mit

$$X_k = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,[\delta_{k1}, \ldots, \delta_{k,n+1}] \tag{1}$$

(δ_{kh} das Kroneckersche Symbol) ein reguläres Simplex der Kantenlänge 1 im n-dimensionalen Raum

$$E_0^n = \left\{[\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}] \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = \frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}. \tag{2}$$

Um nun S auf einen in E_0^n gelegenen $(n-1)$-dimensionalen Raum E_u^{n-1} senkrecht zu projizieren, wird man E_u^{n-1} als Schnitt von E_0^n mit einem weiteren Raum E_u^n der Dimension n erzeugen. Wählt man dabei E_u^n senkrecht zu E_0^n, so kann die Projektion von S auf E_u^{n-1} (in E_0^n) durch senkrechte Projektion von S auf E_u^n erhalten werden.

Da Verschiebungen nicht berücksichtigt werden müssen, soll E_u^n darüber hinaus den Ursprung enthalten. Jeder derartige Raum E_u^n ist unter Beachtung der Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{n+1} u_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n+1} u_i^2 = 1 \tag{3}$$

gemäß

$$E_u^n = \left\{[\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}] \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} u_i \xi_i = 0\right\} \tag{4}$$

in Normalform zu beschreiben.
Ist $\overline{X}_k$ die senkrechte Projektion von X_k auf E_u^n, so ergibt sich aus dem Ansatz

$$\overline{X}_k = X_k + t_k[u_1, \ldots, u_{n+1}]$$

die Darstellung

$$\overline{X}_k = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,([\delta_{k1}, \ldots, \delta_{k,n+1}] - u_k[u_1, \ldots, u_{n+1}]), \tag{5}$$

aus der man sofort noch

$$\|\overline{X}_k\|^2 = \frac{1}{2}(1 - u_k^2) \tag{6}$$

und, für $h \neq k$,

$$\|\overline{X}_h - \overline{X}_k\|^2 = 1 - \frac{1}{2}(u_h - u_k)^2 \tag{7}$$

ablesen kann.
Grundlage des Beweises von Satz 1 bildet nun das folgende

Lemma 1. *Ist X ein beliebiger Punkt aus E_u^{n-1}, so ist mindestens eine der Zahlen $\|X - \overline{X}_k\|^2$, $k = 1, \ldots, n+1$, nicht kleiner als* $\dfrac{n-1}{2n+2}$.

Zum Beweis sei zunächst angemerkt, daß für einen derartigen Punkt

$$\|\overline{X}_k - X\|^2 = \|\overline{X}_k\|^2 + \|X\|^2 - \sqrt{2}\,\xi_k \tag{8}$$

gilt, denn es ist

$$2\langle \overline{X}_k, X\rangle = \sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \delta_{ki}\xi_i - u_k \sum_{i=1}^{n+1} u_i \xi_i\right) = \sqrt{2}\,\xi_k$$

wegen $X \in E_u^n$. Aus der Annahme

$$\frac{n-1}{2n+2} > \|\overline{X}_k - X\|^2 = \|\overline{X}_k\|^2 + \|X\|^2 - \sqrt{2}\,\xi_k$$

für jedes k aus $\{1, \ldots, n+1\}$ würde mithin durch Summation, gestützt auf (3) und (6),

$$0 > \frac{1}{2} + (n+1)\,\|X\|^2 - \sqrt{2} \sum_{k=1}^{n+1} \xi_k$$

folgen. Mit $X \in E_0^n$ und der sich daraus ergebenden Abschätzung

$$\|X\|^2 \geqq \frac{1}{2n+2} \tag{9}$$

hätte dies aber letztlich $0 > 0$ zur Folge.

Es liegt auf der Hand, daß nach diesem Lemma für $S_u = \operatorname{conv}\{\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_{n+1}\}$ jedenfalls

$$R^2(S_u) \geqq \frac{n-1}{2n+2} \tag{10}$$

gilt. Damit ist Satz 1 bewiesen. Wann in dieser Abschätzung Gleichheit eintritt, ist ebenfalls leicht zu zeigen.
Zunächst hätte mit X als Mittelpunkt der Umkugel von S_u

$$\|X - \overline{X}_k\|^2 \leqq \frac{n-1}{2n+2}, \qquad 1 \leqq k \leqq n+1,$$

zu gelten. Summation führt dann auf $(2n+2)\,\|X\|^2 \leqq 1$, und dies ist mit $X \in E_0^n$ nur für

$$\|X\|^2 = \frac{1}{2n+2}, \qquad \xi_k = \frac{\sqrt{2}}{2n+2}, \qquad 1 \leqq k \leqq n+1, \tag{11}$$

vereinbar. Hieraus folgt aber über

$$\frac{n-1}{2n+2} \geqq \|X - \overline{X}_k\|^2 = \|X\|^2 - \sqrt{2}\,\xi_k + \|\overline{X}_k\|^2 = \frac{n}{2n+2} - \frac{1}{2}u_k^2$$

die Abschätzung

$$u_k^2 \geqq \frac{1}{n+1},$$

die wegen (3) nur durch

$$u_k^2 = \frac{1}{n+1}, \qquad 1 \leqq k \leqq n+1, \tag{12}$$

erfüllt werden kann. Da noch die Bedingung $\sum u_i = 0$ zu berücksichtigen ist, kann in (10) Gleichheit nur für ungerade Werte von n eintreten, und zwar genau dann, wenn

$$u_k = \varepsilon_k \frac{1}{\sqrt{n+1}}; \qquad \varepsilon_k \in \{-1, +1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k = 0 \tag{13}$$

gewählt wird.

2.2. Aus den vorangegangenen Ausführungen geht hervor, daß die senkrechte Projektion eines regulären Tetraeders T, dessen Kanten die Länge 1 besitzen, dann und nur dann in einem Kreis vom Radius 1/2 eingeschlossen werden kann, wenn die Bildebene zu zwei windschiefen Kanten von T parallel liegt. Um Satz 2 zu beweisen, genügt es mithin, eine Menge $T^* \supset T$ mit $d(T) = 1$ anzugeben, so daß die Projektionen von T^* in diesen drei Richtungen keine derartigen Überdeckungen gestatten. Dies kann wie folgt geschehen: Es werde T derart im E^3 gelagert, daß $T = \operatorname{conv}(X_0, X_1, X_2, X_3)$ mit

$$X_0 = \left[0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right], \quad X_1 = \left[0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right],$$

$$X_2 = \left[\frac{1}{2}, 0\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\right], \quad X_3 = \left[-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$$

gilt. Wird auf Ebenen durch den Ursprung projiziert, so sind es gerade die Ebenen

$$E_1:\ \xi_1 - \xi_2 = 0, \qquad E_2:\ \xi_1 + \xi_2 = 0, \qquad E_3:\ \xi_3 = 0,$$

in denen das Bild von T in einen Kreis vom Radius $\frac{1}{2}$ eingeschlossen werden kann. Die Mittelpunkte dieser Kreise fallen mit dem Ursprung zusammen. Es sei dann $T^* = \operatorname{conv}(T, Y_1, Y_2, Y_3)$ mit

$$Y_1 = \left[0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right],$$

$$Y_2 = \left[\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4},\ -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4},\ 0\right],$$

$$Y_3 = \left[-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4},\ -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4},\ 0\right].$$

Die Punkte Y_i sind jene Punkte auf der Kugel um X_0 mit dem Radius 1, in denen sie von den Strahlen getroffen wird, die von den Mittelpunkten der Kanten X_0X_i ausgehen und nach den Mitten der Gegenkanten gerichtet sind.
Es ist

$$\|X_0 - Y_i\|^2 = \|X_i - Y_i\|^2 = 1, \qquad \|X_h - Y_k\|^2 = 1 - \frac{\sqrt{6}-1}{2} < 1$$
$$(h \neq k,\ h \neq 0)$$

und

$$\|Y_h - Y_k\|^2 = 1 - \frac{2\sqrt{6}-3}{4} < 1 \qquad (h \neq k);$$

demnach gilt $d(T^*) = 1$. Wird mit $\overline{Y}_i$ die senkrechte Projektion von Y_i auf die Ebene E_i bezeichnet, so ist offenbar $\overline{Y}_i = Y_i$, und da

$$\|\overline{Y}_i\|^2 = \|Y_i\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{8} > \frac{1}{4}$$

ausfällt, liegt $\overline{Y}_i$ außerhalb des Umkreises der auf E_i projizierten Punkte X_k $(k = 0, 1, 2)$. Auf recht einfache Weise (vgl. [2], p. 66) kann T^* zu einem wohlbestimmten Körper der festen Breite 1 erweitert werden.

2.3. Um jene senkrechten Projektionen eines regulären Simplex S zu bestimmen, die kleinsten Durchmesser besitzen, ist nach (7) die Aufgabe

$$\min\left\{\max_{\substack{1\leq h\leq n+1\\ 1\leq k\leq n+1\\ h\neq k}}\left(1 - \frac{1}{2}(u_h - u_k)^2\right)\right\} \tag{14}$$

zu behandeln, wobei alle jene $(n+1)$-Tupel $[u_1, \ldots, u_{n+1}]$ zum Vergleich heranzuziehen sind, die den in (3) angegebenen Bedingungen genügen. Da für

$$\{u_1, \ldots, u_{n+1}\} = \{u_1^*, \ldots, u_{n+1}^*\}$$

offenbar

$$\max_{\substack{1\leqq h\leqq n+1\\1\leqq k\leqq n+1\\h\neq k}}\left(1-\frac{1}{2}(u_h-u_k)^2\right)=\max_{1\leqq h<k\leqq n+1}\left(1-\frac{1}{2}(u_h^*-u_k^*)^2\right)$$

gilt, genügt es, $(n+1)$-Tupel zu betrachten, die auch noch den Bedingungen

$$u_1\leqq u_2\leqq\cdots\leqq u_n\leqq u_{n+1} \tag{15}$$

genügen, und da dann für $h<k$

$$0\leqq u_{h+1}-u_h\leqq u_k-u_h$$

gilt, gelangt man zu

$$\min d^2(S_u)=\min\left\{\max_{1\leqq h\leqq n}\left(1-\frac{1}{2}(u_{h+1}-u_h)^2\right)\right\}.$$

Im Gegensatz zur zuvor behandelten Aufgabe gelingt hier für beliebiges n ($n\geqq 1$) eine scharfe Abschätzung. Grundlage bildet dabei

Lemma 2. *Ist* $u_1\leqq u_2\leqq\cdots\leqq u_{n+1}$,

$$\sum_{i=1}^{n+1}u_i=0\quad\textit{und}\quad\sum_{i=1}^{n+1}u_i^2=1,$$

so ist mindestens eine der Differenzen $u_{h+1}-u_h$, $1\leqq h\leqq n$, *nicht größer als*

$$c_n:=\sqrt{\frac{12}{n(n+1)(n+2)}}.$$

Der Beweis werde wieder mit der Annahme begonnen, daß

$$u_{h+1}-u_h>c_n\quad\text{für}\quad 1\leqq h\leqq n$$

gelte. In diesem Fall muß es eine streng monoton wachsende Folge (v_n) mit $v_0=0$ geben, so daß

$$u_{h+1}-u_h=c_n+v_h-v_{h-1},\qquad 1\leqq h\leqq n,$$

und damit

$$u_k=u_1+(k-1)\,c_n+v_{k-1},\qquad 1\leqq k\leqq n+1, \tag{16}$$

ausfällt. Hieraus ergibt sich einmal

$$0=\sum_{k=1}^{n+1}u_k=(n+1)\,u_1+\frac{n(n+1)}{2}\,c_n+\sum_{k=1}^{n}v_k \tag{17}$$

und zum anderen — mit Rücksicht auf diese Forderung —

$$\begin{aligned}1+(n+1)\,u_1^2&=\sum_{k=1}^{n+1}(u_k-u_1)^2\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,c_n^2+2c_n\sum_{k=1}^{n}kv_k+\left(\sum_{k=1}^{n}v_k\right)^2.\end{aligned} \tag{18}$$

Nun ist es möglich, aus diesen Beziehungen auch noch u_1 zu eliminieren. Man gelangt dann zu

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^2 - \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)^2\right) + c_n\left(2\sum_{k=1}^{n} kv_k - n\sum_{k=1}^{n} v_k\right).$$

Hier ist aber gemäß der Ungleichung von CAUCHY

$$\sum_{k=1}^{n} v_k^2 - \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)^2 \geqq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)^2 > 0,$$

und die strenge Monotonie der Folge (v_n) mit $v_0 = 0$ gestattet, durch Induktion auch auf

$$2\sum_{k=1}^{n} kv_k - n\sum_{k=1}^{n} v_k > 0$$

zu schließen. Die Annahme hat also $0 > 0$ zur Folge.
Da nach dem damit bewiesenen Lemma 2 für mindestens einen Zeiger h $(1 \leqq h \leqq n)$

$$1 - \frac{1}{2}(u_{h+1} - u_h)^2 \geqq 1 - \frac{6}{n(n+1)(n+2)}$$

gilt, ist auch eine von der Wahl der Projektionsrichtung unabhängige untere Schranke für $d^2(S_u)$ gefunden. Es muß nur noch gezeigt werden, daß diese Schranke für gewisse Richtungen erreicht wird. Eine derartige Richtung kann aber anhand des Beweises von Lemma 2 sofort angegeben werden. Ersetzt man die Folge (v_k) durch (0), so erhält man mit

$$u_k = \left(-\frac{n}{2} + k - 1\right)c_n, \qquad 1 \leqq k \leqq n+1,$$

ein allen Nebenbedingungen genügendes $(n+1)$-Tupel, und wegen

$$u_{h+1} - u_h = c_n, \qquad 1 \leqq h \leqq n,$$

ist für die durch $[u_1, \ldots, u_{n+1}]$ gekennzeichnete Richtung (und für die Richtungen $[u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n+1}}]$)

$$d^2(S_u) = 1 - \frac{1}{2}c_n^2.$$

Damit ist auch Satz 3 bewiesen.

LITERATUR

[1] EGGLESTON, H. G.: Minimal universal covers in E^n. Israel J. Math. *1* (1963), 149—155.

[2] JAGLOM, I. M., und W. G. BOLTJANSKI: Konvexe Figuren. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (Übersetzung aus dem Russischen).

Manuskripteingang: 22. 4. 1981

VERFASSER:

BERNULF WEISSBACH, Sektion Mathematik/Physik der Technischen Hochschule Magdeburg