Beiträge zur Algebra und Geometrie
14 (1983), 87—91

Die p-l-s-Kegelschnitte auf der Grundlage des mittelbaren Superoskulierens

KONRAD DRECHSLER und ULRICH STERZ

1. Einleitung

Mengen von Kegelschnitten, die vorgegebene Kurven berühren, können trotz allgemeiner Lage dieser Kurven Bestandteile zu hoher Dimension enthalten. Man begegnet dieser Schwierigkeit in der Regel [7, 8] dadurch, daß man die einen komplexen projektiven 5-Raum $\mathbf{C}P_5$ erfüllende Menge aller Kegelschnitte[1]) der Ebene dP_2 in der Untervarietät $P_{(1)}$ der Menge der Doppelgeraden zu einer Varietät M_5 Cer „vollständigen" Kegelschnitte aufbläst.
Dies reicht nicht aus, wenn man Berührungen höherer Ordnung einbezieht [5, 7, 3]. Wir haben deshalb eine weitere Aufblasung beschrieben [1], die für jede Berührungsordnung geeignet ist [3], und dafür die Homologiegruppen und Schnittformeln hergeleitet [2]. Diese Aufblasung wurde in einem Produktraum $M_5 \times \tilde{S}$ realisiert, in dem die Koordinaten in $\tilde{S}$ die Koeffizienten einer Chowform von einer Kurve in einem 14-dimensionalen projektiven Raum sind. Da diese unübersichtlich sind, haben wir die Aufblasung nur lokal in den Blättern einer affinen Überdeckung angeben können. Die Schwierigkeiten ergaben sich dadurch, daß der verwendete Zyklus der Kegelschnitte in M_5, die einen vorgegebenen Kegelschnitt superoskulieren, eine Kodimension größer als 1 hat.
Die von uns in [4] eingeführte Hyperfläche der Kegelschnitte, die einen vorgegebenen Kegelschnitt mittelbar superoskulieren, ist durch eine Gleichung 6. Ordnung in $\mathbf{C}P_5$ definiert, deren Koeffizienten eine übersichtlichere und globale Beschreibung der Aufblasung gestatten.

2. Die Aufblasung zur Varietät der p-l-s-Kegelschnitte

Die Varietät M_5 der vollständigen Kegelschnitte — von uns auch *p-l-Kegelschnitte* genannt — läßt sich in einem Produkt $\mathbf{C}P_5 \times \mathbf{C}L_5$ realisieren, wobei $\mathbf{C}P_5$ und $\mathbf{C}L_5$ komplexe projektive 5-Räume sind, deren Koordinaten $p = (p_1, \ldots, p_6)$ bzw. $l = (l_1, \ldots, l_6)$ in symmetrischen Matrizen

$$((p)) = \begin{pmatrix} p_1 & p_4 & p_5 \\ p_4 & p_2 & p_6 \\ p_5 & p_6 & p_3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad ((l)) = \begin{pmatrix} l_1 & l_4 & l_5 \\ l_4 & l_2 & l_6 \\ l_5 & l_6 & l_3 \end{pmatrix}$$

angeordnet seien.

---

[1]) Diese Kegelschnitte nennen wir Punktkegelschnitte oder p-Kegelschnitte.

Sind p_i für $i = 1, \ldots, 6$ über $\mathbf{C}$ unbestimmt und l_i proportional zu den Adjunkten $Ad_i(p, p)$ der Matrix $\big((p)\big)$, so ist (p, l) ein allgemeiner Punkt von M_5. Das Tupel l beschreibt als Koeffiziententupel einer quadratischen Form die Tangentenmenge an den p-Kegelschnitt p und heißt deshalb ein zu p gehörender Linienkegelschnitt (l-Kegelschnitt).
Das Zentrum $(P \mid P_{(1)})$ der Aufblasung $\chi: M_5 \to \mathbf{C}P_5$ ist durch $Ad_i(p, p) = 0$ für $i = 1, \ldots, 6$ charakterisiert. Das Zentrum einer weiteren Aufblasung $\psi: N_5 \to M_5$, die auch für Berührungen höherer Ordnung verwendet werden kann, muß die 3-Untervarietät $(M \mid P_{(1)}L_{(1)})$ von M_5 sein, die durch $Ad_i(p, p) = 0$ und $Ad_i(l, l) = 0$ für $i = 1, \ldots, 6$ gegeben ist [3].

Wir betrachten nun die Formen

$$S_{ijk}(l, p) = p_i p_j Ad_k(l, l) \text{ und } S^{ijk}(p, l) = l_i l_j Ad_k(p, p) \tag{2.1}$$

für $(i, j, k) \in I = \{(i, j, k): i, j, k = 1, \ldots, 6;\, i \leq j\}$,
deren Verschwinden ebenfalls die Untervarietät $(M \mid P_{(1)}L_{(1)})$ beschreibt und die alle homogen vom 2. Grad in p_i und l_i sind.
Es seien (p, l) ein allgemeiner Punkt von M_5 und S_N ein komplexer projektiver N-Raum mit den Koordinaten $s = (s_{ijk}, s^{ijk})$, wobei $N = 251$ und $(i, j, k) \in I$ sind.

Definition. Es sei N_5 die 5-dimensionale Untervarietät von $M_5 \times S_N$, die durch den allgemeinen Punkt (p, l, s) mit $s_{ijk} = S_{ijk}(l, p)$ und $s^{ijk} = S^{ijk}(p, l)$ gegeben ist. Die Punkte von N_5 heißen *p-l-s-Kegelschnitte*.

Die Varietät N_5 ist eine Untervarietät von $\mathbf{C}P_5 \times \mathbf{C}L_5 \times S_N$ und genügt als solche den Gleichungen, die man aus

$$\big((p)\big)\big((l)\big) = \varepsilon\big((\delta)\big)^{1)} \tag{2.2}$$

erhält, wenn man ε eliminiert[2]), und den Gleichungen

$$p_\lambda p_\mu p_\nu s_{ijk} = p_i p_j p_k s_{\lambda\mu\nu}, \tag{2.3}$$

$$l_\lambda l_\mu Ad_\nu(p, p)\, s_{ijk} = p_i p_j Ad_k(l, l)\, s^{\lambda\mu\nu}, \tag{2.4}$$

$$l_\lambda l_\mu l_\nu s^{ijk} = l_i l_j l_k s^{\lambda\mu\nu} \tag{2.5}$$

für $(i, j, k) \in I$ und $(\lambda, \mu, \nu) \in I$.

Lemma. *Jede Lösung von* (2.2), …, (2.5) *ist ein Punkt von* N_5.

Beweis. Es sei (π, λ, σ) eine Lösung von (2.2), …, (2.5). Dann folgt aus (2.3) und (2.5)

$$\sigma_{ijk} = \pi_i \pi_j \pi_k \beta \tag{2.6}$$

und

$$\sigma^{ijk} = \lambda_i \lambda_j \lambda_k \alpha \tag{2.7}$$

für $(i, j, k) \in I$ und geeignete α, β, wobei $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ist. Damit wird (2.4) zu

$$Ad_\nu(\pi, \pi)\, \pi_k \beta = Ad_k(\lambda, \lambda)\, \lambda_\nu \alpha. \tag{2.8}$$

Der Anteil (π, λ) ist als Lösung von (2.2) ein Punkt von M_5 [8].

---

[1]) $\big((\delta)\big)$ ist die Einheitsmatrix.
[2]) Das sind die Gleichungen für M_5 in $\mathbf{C}P_5 \times \mathbf{C}L_5$.

Sind $Ad_k(\pi, \pi)$ und $Ad_k(\lambda, \lambda)$, $k = 1, \ldots, 6$, nicht alle null, so ergibt sich

$$\sigma_{ijk} = \pi_i \pi_j Ad_k(\lambda, \lambda), \qquad \sigma^{ijk} = \lambda_i \lambda_j Ad_k(\pi, \pi). \tag{2.9}$$

Das ergibt sich in diesem Fall auch aus (2.1). Also ist (π, λ, σ) Punkt von N_5.
Sind aber $Ad_k(\pi, \pi)$ und $Ad_k(\lambda, \lambda)$ alle null, so liefert (2.4) keine Bedingung, und (2.6), (2.7) sind für alle $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ Lösung.
Andererseits sind im allgemeinen l proportional zu $Ad(p, p)$ und p proportional zu $Ad(l, l)$:

$$al_\nu = Ad_\nu(p, p), \qquad bp_i = Ad_i(l, l). \tag{2.10}$$

Es ist möglich, M_5 so lokal zu beschreiben, daß a und b unter den fünf Parametern auftreten [2], wobei $a = 0$, $b = 0$ gerade $(M \mid P_{(1)} L_{(1)})$ beschreibt. Setzt man (2.10) so verstanden in (2.1) ein, ergibt sich

$$S_{ijk}(l, p) = p_i p_j p_k b, \qquad S^{ijk}(p, l) = l_i l_j l_k a, \tag{2.11}$$

wobei p und l in der oben genannten Parameterdarstellung zu denken sind.
Wird in (2.11) nun $(a, b) \to (0, 0)$ durch $a = \alpha\tau$, $b = \beta\tau$ und $\tau \to 0$ beschrieben, so ergibt sich (2.6), (2.7) mit beliebigem $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ aus (2.1) als Punkt von N_5.
Auf N_5 hängen die s_{ijk} und s^{ijk} linear von a und b ab. Da $a = 0$, $b = 0$ lokal $(M \mid P_{(1)} L_{(1)})$ definiert, ist die Projektion $\psi\colon N_5 \to M_5$ mit $\psi(p, l, s) = (p, l)$ eine *Aufblasung* von M_5 mit dem Zentrum $(M \mid P_{(1)} L_{(1)})$.
Die Untervarietät $(N \mid A) = \psi^{-1}(M \mid P_{(1)} L_{(1)})$ von N_5 ist ein Faserbündel (die Projektivierung eines Vektorraumbündels) über $(M \mid P_{(1)} L_{(1)})$ mit einer *projektiven Geraden* $\mathbf{C}P_1$ *als Faser*. N_5 ist *singularitätenfrei.*

3. Die Deutung durch das mittelbare Superoskulieren

Es sei $Sp(a, b)$ die Spur der Produktmatrix $((a)) \cdot ((b))$ zweier symmetrischer Matrizen $((a))$ und $((b))$. Sie ist eine Bilinearform in den Elementen von $((a))$ und $((b))$. Die Menge $(P \mid S)$ der einen allgemeinen p-l-Kegelschnitt (p, l) *mittelbar superoskulierenden*[1]) p-Kegelschnitte q ist eine *irreduzible Hyperfläche 6. Ordnung* in $\mathbf{C}P_5$. Ihre Gleichung lautet nach [4]

$$\begin{aligned} S(q) = {} & [Sp(l, q)]^2 \left[Sp\big(Ad(p, p), q\big)\right] \det\big((q)\big) \\ & - \left[Sp\big(p, Ad(q, q)\big)\right]^2 \left[Sp\big(Ad(l, l), Ad(q, q)\big)\right] = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die Glieder von $S(q)$ lassen sich so zusammenfassen, daß

$$S(q) = \sum_{(i,j,k) \in I} S^{ijk}(p, l)\, F^{ijk}(q) + \sum_{(i,j,k) \in I} S_{ijk}(l, p)\, F_{ijk}(q) \tag{3.2}$$

ist, wobei

$$F_{ijk}(q) = -2^m Ad_i(q, q)\, Ad_j(q, q)\, Ad_k(q, q), \tag{3.3}$$

$$F^{ijk}(q) = 2^m q_i q_j q_k \det\big((q)\big), \tag{3.4}$$

---

[1]) Es sei $b(p, 3)$ ein allgemeiner Punkt der Varietät der p-Kegelschnitte, die den p-Kegelschnitt p superoskulieren (4fach schneiden). Dann ist $b(b(p, 3), 3)$ ein allgemeiner Punkt von $(P \mid S)$ [4].

$S_{ijk}(l, p)$ bzw. $S^{ijk}(p, l)$ die Formen aus (2.1) und m geeignet aus $\{0, 1, \ldots, 4\}$ sind.
Für jeden speziellen Punkt (π, λ, σ) von N_5 verschwindet

$$\Sigma(q) = \sum_{(i,j,k)\in I} \sigma^{ijk} F^{ijk}(q) + \sum_{(i,j,k)\in I} \sigma_{ijk} F_{ijk}(q) \tag{3.5}$$

als Form in q nicht identisch, wie sich aus der folgenden Untersuchung ergeben wird.

Dies gestattet die *Deutung* der Punkte (π, λ, σ) von N_5 als Tripel von Punktkegelschnitt π, Linienkegelschnitt λ und Hyperfläche Σ mittelbar superoskulierender Kegelschnitte.

Für einen nicht ausgearteten p-l-Kegelschnitt (π, λ), also für den Fall, daß $Ad_i(\pi, \pi) \neq 0$ für mindestens ein i und $Ad_j(\lambda, \lambda) \neq 0$ für mindestens ein j, ist Σ eine irreduzible Hyperfläche 6. Ordnung wie im allgemeinen Fall. Wir beschreiben jetzt die spezielle Form von Σ für den Fall der Ausartungen von (π, λ) auf M_5.

Ein Punkt (π, λ) von M_5 heißt eine p-Ausartung, wenn $Ad_i(\pi, \pi) = 0$, $i = 1, \ldots, 6$, eine l-Ausartung, wenn $Ad_i(\lambda, \lambda) = 0$, $i = 1, \ldots, 6$.

Fall 1. Ist (π, λ) eine p- und l-Ausartung, d. h., liegt (π, λ) im Zentrum $(M \mid P_{(1)}L_{(1)})$ der Aufblasung ψ, so ergibt sich aus (3.5) durch Einsetzen von (2.6) und (2.7) zu jedem $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ eine Form

$$\Sigma(q) = \Sigma(q; \alpha, \beta) = \alpha[Sp(\lambda, q)]^3 \det\big((q)\big) - \beta\big[Sp\big(\pi, Ad(q, q)\big)\big]^3, \tag{3.6}$$

wobei $\big((\pi)\big) = \omega^T\omega$ und $\big((\lambda)\big) = \xi^T\xi$ mit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ und $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ sind. Diese Form verschwindet nicht identisch als Form in q. Das erkennt man, wenn man geeignete Potenzprodukte der q_i auswählt, die nur im zweiten Glied vorkommen.

Fall 2. Ist (π, λ) eine p-Ausartung, aber keine l-Ausartung, also π proportional zu $Ad(\lambda, \lambda)$, so erhält man aus (3.5) und (2.9)

$$\Sigma(q) = \big[Sp\big(\pi, Ad(q, q)\big)\big]^3. \tag{3.7}$$

Fall 3. Ist (π, λ) eine l-Ausartung, aber keine p-Ausartung, also λ proportional zu $Ad(\pi, \pi)$, so folgt

$$\Sigma(q) = [Sp(\lambda, q)]^3 \det\big((q)\big). \tag{3.8}$$

Die Hyperfläche Σ zerfällt im Fall 2 in die dreifach zu zählende Hyperfläche $(P \mid L)$ zweiter Ordnung der p-Kegelschnitte q, die in $\mathbf{C}P_2$ die Gerade ω zweifach schneiden, und im Fall 3 in die Hyperfläche $(P \mid P_{(2)})$ dritter Ordnung der ausgearteten p-Kegelschnitte q und die dreifach zu zählende Hyperebene $(P \mid P)$ der p-Kegelschnitte q, die durch den Punkt ξ von $\mathbf{C}P_2$ gehen.

Diese geometrische Beschreibung von Σ in $\mathbf{C}P_2$ erhält man auch im Fall 1, wenn $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$ sind. Es bleibt die Beschreibung im Fall 1 für $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$.
Wir zeigen zunächst: Sind $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$, so ist die Form $\Sigma(q; \alpha, \beta)$ aus (3.6) irreduzibel.

Es seien o. B. d. A. $\xi = (0, 0, 1)$ und $\omega = (1, 0, 0)$. Dann wird (3.6) zu

$$\Sigma'(q; \alpha, \beta) = \alpha q_3^3 \det\big((q)\big) - \beta(q_2q_3 - q_6^2)^3. \tag{3.9}$$

Jede Nullstelle von $\Sigma'(q; \alpha, \beta)$ mit $q_3 \neq 0$ und $q_2q_3 - q_6^2 \neq 0$ hat die Gestalt

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\beta}{\alpha} a^2 + ad^2 + e^2, \qquad q_2 = a + c^2, \qquad q_3 = 1, \\ q_4 &= ad + ce, \qquad q_5 = e, \qquad q_6 = c, \end{aligned} \tag{3.10}$$

wobei $a \neq 0$ ist. Dies ist ein allgemeiner Punkt einer Komponente von Σ'. Die Nullstellenmengen von $\Sigma'(q; \alpha, \beta)$ mit $q_3 = 0$ oder $q_2 q_3 - q_6^2 = 0$ sind aber niederer Dimension. Also ist $\Sigma'(q; \alpha, \beta)$ für $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$ irreduzibel.
Wir geben nun einen anderen allgemeinen Punkt von Σ' an, der eine geometrische Beschreibung gestattet. Der Punkt $\pi^{(0)}$ aus $\mathbf{C}P_5$ mit $\pi_2^{(0)} = \sqrt{\alpha}$, $\pi_5^{(0)} = \sqrt{-\beta}$ und $\pi_j^{(0)} = 0$ sonst ist ein Kegelschnitt aus $\mathbf{C}P_2$, der ω in ξ berührt.
Durch

$$\pi^{(3)} = \pi^{(0)} + \pi^{(1)} + \pi^{(2)}$$

mit $\pi_4^{(1)} = \gamma$, $\pi_1^{(2)} = \delta$ und $\pi_j^{(i)} = 0$ für $i = 1, 2$ und j sonst ist ein allgemeiner Punkt der Menge der Kegelschnitte gegeben, die $\pi^{(0)}$ in ξ oskulieren [4]. Man konstruiert nun den allgemeinen Punkt $\pi^{(4)} = b(\pi^{(3)}, 3)$ der Menge der $\pi^{(3)}$ superoskulierenden Kegelschnitte [4]. Es ergibt sich $((\pi^{(4)})) = ((\pi^{(3)})) + \tau^T\tau$ mit

$$\tau = \left(\left(\sqrt{-\alpha\beta}\,\sigma^2 - \sqrt{-\beta}\,\delta\right)\varepsilon, \left(-2\sqrt{-\alpha\beta}\,\sigma - 2\sqrt{-\beta}\,\gamma\right)\varepsilon, 2\beta\varepsilon\right).$$

Dieser ist vierdimensional über $\mathbf{C}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ und erfüllt die Gleichung $\Sigma'(q; \alpha, \beta) = 0$.

LITERATUR

[1] Drechsler, K., und U. Sterz: Punkt-Linien-Superoskulanten-Kegelschnitte. Beitr. Alg. Geom. **6** (1977), 37—54.

[2] Drechsler, K., und U. Sterz: Charakteristiken und Schnittzahlformeln für p-l-s-Kegelschnitte. Beitr. Alg. Geom. 8 (1979), 7—31.

[3] Drechsler, K., und U. Sterz: Vervollständigung von Kegelschnittmengen. Beitr. Alg. Geom. **10** (1980), 27—32.

[4] Drechsler, K., und U. Sterz: Berührungsbedingungen für p-l-s-Kegelschnitte. Beitr. Alg. Geom. **11** (1981), 109—118.

[5] Halphen, G.-H.: Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques. Proc. Lond. Math. Soc. **9** (1877—1878), 149—177; Abdruck in Math. Ann. **15** (1879), 16—44.

[6] Kleiman, S. L.: Chasles's enumerative theorie of conics: A historical introduction. Studies in algebraic geometry, MAA Stud. Math. **20**, Math. Assoc. America, Washington, D. C. (1980), 117—138.

[7] Severi, F.: I fondamenti della geometria numerativa. Annali di Matematica pura ed applicata IV, **19** (1940), 153—242. Übers.: Gröbner, W.: Grundlagen der abzählenden Geometrie. Math. Forsch. I, **2**, Wolfenbüttel 1948.

[8] Van der Waerden, B. L.: Zur algebraischen Geometrie XV. Lösung des Charakteristikenproblems für Kegelschnitte. Math. Ann. **115** (1938), 645—655.

Manuskripteingang: 4. 12. 1980

VERFASSER:

Konrad Drechsler und Ulrich Sterz, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg