Beiträge zur Algebra und Geometrie
13 (1982), 7–19

Ausgeartete Berührungsbedingungen auf Kegelschnitt-mannigfaltigkeiten

KONRAD DRECHSLER und ULRICH STERZ

1. Einleitung

Ein Motiv für die Einführung von vollständigen Kegelschnitten ist darin zu sehen, daß die Menge der einen nicht ausgearteten Kegelschnitt berührenden Kegelschnitte vierdimensional, die Menge der eine Doppelgerade einfach berührenden Kegelschnitte aber offenbar fünfdimensional ist, wenn man nur Punktkegelschnitte betrachtet. Bei einem entsprechenden Vergleich für Berührungen höherer Ordnung zeigt sich, wie wir schon in [1] und [4] bemerkt haben, daß die Vervollständigung der Menge P_5 der Punktkegelschnitte zur Menge M_5 der *Punkt-Linien-Kegelschnitte*[1]) nicht ausreicht, um einen derartigen Defekt zu beseitigen. Dies war für uns ein Anlaß, eine weitere Vervollständigung der Kegelschnitte vorzunehmen und die Varietät N_5 der *p-l-s-Kegelschnitte* zu konstruieren [1]. Hier soll nun gezeigt werden, daß ein solcher Dimensionsdefekt auf N_5 für jede mögliche Berührungsordnung beseitigt ist.
Dazu ist es zunächst notwendig, die auftretenden Bedingungen des Berührens streng zu fassen. Dies haben wir in [4] für die Mengen der einen nicht ausgearteten Kegelschnitt von r-ter Ordnung berührenden Kegelschnitte auf jeder der Kegelschnittmannigfaltigkeiten P_5, M_5 und N_5 getan. Außerdem haben wir dort gewisse Gleichungen für diese Mengen und Basisdarstellungen der zu diesen Mengen gehörenden Zyklen über den in [2] angegebenen Homologiebasen aufgestellt. Wir erweitern nun in der vorliegenden Arbeit mit Hilfe dieser Gleichungen, die wir hier übersichtlicher aufschreiben, die Definitionen auf die Mengen der einen *ausgearteten* Kegelschnitt von r-ter Ordnung berührenden Kegelschnitte und beschreiben diese Mengen. Damit zeigen wir für jedes mögliche r und jede der Kegelschnittmannigfaltigkeiten P_5, M_5 und N_5, ob ein Dimensionsdefekt beim Vergleich der Berührungsbedingungen r-ter Ordnung für nicht ausgeartete und ausgeartete bedingungstellende Kegelschnitte auftritt oder nicht. Außerdem untersuchen wir in gleicher Weise die interessante [5] Bedingung des mittelbaren Superoskulierens [4].

---

[1]) Das ist die von uns verwendete Bezeichnung für vollständige Kegelschnitte [8], wir schreiben kurz p-l-Kegelschnitte.

2. Berührungsbedingungen für p-Kegelschnitte

2.1. Es bezeichne

$$((a)) = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{pmatrix}$$

eine symmetrische Matrix und $(a) = (a_1, \ldots, a_6)$ ein geordnetes Tupel von Elementen a_i $(i = 1, \ldots, 6)$ eines Körpers k. Für zwei solche Tupel (a) und (b) seien

$$\operatorname{Sp}(a, b) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i + 2 \sum_{i=4}^{6} a_i b_i \tag{2.1}$$

und

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ad}_1(a, b) &= 1/2\{a_2 b_3 + a_3 b_2 - 2a_6 b_6\}, \\
\operatorname{Ad}_2(a, b) &= 1/2\{a_1 b_3 + a_3 b_1 - 2a_5 b_5\}, \\
\operatorname{Ad}_3(a, b) &= 1/2\{a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2a_4 b_4\}, \\
\operatorname{Ad}_4(a, b) &= 1/2\{a_5 b_6 + a_6 b_5 - a_3 b_4 - a_4 b_3\}, \\
\operatorname{Ad}_5(a, b) &= 1/2\{a_4 b_6 + a_6 b_4 - a_2 b_5 - a_5 b_2\}, \\
\operatorname{Ad}_6(a, b) &= 1/2\{a_4 b_5 + a_5 b_4 - a_1 b_6 - a_6 b_1\}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Die Bilinearform $\operatorname{Sp}(a, b)$ ist die Spur der Produktmatrix $((a))\,((b))$, und $\operatorname{Ad}_i(a, a)$ sind die Adjunkten der Matrix $((a))$. Für das geordnete Tupel $(\operatorname{Ad}(a, b))$ gilt

$$\operatorname{Sp}(\operatorname{Ad}(a, b), a) = \operatorname{Sp}(\operatorname{Ad}(a, a), b) \tag{2.3}$$

und insbesondere

$$\operatorname{Sp}(\operatorname{Ad}(a, a), a) = 3 \det ((a)). \tag{2.4}$$

2.2. Es sei p ein Punkt eines projektiven 5-Raumes P_5 über dem Körper k der komplexen Zahlen mit den Koordinaten (p). Dieser läßt sich als ein p-Kegelschnitt[1]) in einer projektiven Ebene X mit Koeffizientenmatrix $((p))$ deuten. Die Menge der *p-Kegelschnitte*, für die Rang $((p)) = \nu$ ist, bezeichnen wir mit $(P \mid P_{(\nu)})$.
Ist Rang $((p)) = 2$, so gibt es $(w^{(j)}) = (w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, w_3^{(j)})$, $j = 1, 2$, und $(x^{(0)}) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ mit

$$(w^{(j)})\,(x^{(0)})^T = 0, \tag{2.5}$$

so daß

$$((p)) = (w^{(1)})^T (w^{(2)}) + (w^{(2)})^T (w^{(1)}) \tag{2.6}$$

und

$$((\operatorname{Ad}(p, p))) = (x^{(0)})^T (x^{(0)}) \tag{2.7}$$

sind.
Ist Rang $((p)) = 1$, so gibt es $(w^{(0)}) = (w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, w_3^{(0)})$, so daß

$$((p)) = (w^{(0)})^T (w^{(0)}) \tag{2.8}$$

ist. Die Tripel $(w^{(k)})$, $k = 0, 1, 2$, und $(x^{(0)})$ lassen sich als Koordinaten von Geraden $w^{(k)}$ bzw. eines Punktes $x^{(0)}$ in X auffassen. Im Fall der Gleichungen (2.6) bzw. (2.8) schreiben wir $p = p(w^{(1)}, w^{(2)})$ bzw. $p = p(w^{(0)})$.

---

[1]) Punktkegelschnitt.

2.3. In [4] haben wir für die $(5-r)$-dimensionale Varietät der einen *nicht ausgearteten* p-Kegelschnitt π von r-ter Ordnung berührenden p-Kegelschnitte[1]) einen allgemeinen Punkt $b(\pi, r)$ angegeben durch

$$\begin{aligned}\big((b(\pi, 1))\big) &= \varkappa\big((\pi)\big) + \varrho[(w)^T(u) + (u)^T(w)] \\ &\quad + \sigma[(w)^T(v) + (v)^T(w)] + (w)^T(w),\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\big((b(\pi, 2))\big) = \varkappa\big((\pi)\big) + \varrho[(w)^T(u) + (u)^T(w)] + (w)^T(w), \tag{2.10}$$

$$\big((b(\pi, 3))\big) = \varkappa\big((\pi)\big) + (w)^T(w). \tag{2.11}$$

Dabei sind $(w) = \big(w(t)\big)$ und $(u) = \big(u(t)\big)$ Tripel mit

$$(w)\big((\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi))\big)(w)^T = 0, \qquad (w)(x)^T = 0, \qquad (u)(x)^T = 0,$$

(v) ist ein beliebiges Tripel und $x = x_\pi(t)$ ein allgemeiner Punkt von π.
Diese Varietät genügt den Gleichungen (siehe auch [4])

$$\begin{aligned}&[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), \pi)]^2\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), p)]^2 \\ &- 3[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), \pi)]^2\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), p)]^2 \\ &+ 4[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), \pi)]^3\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), \pi)] \\ &+ 4[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), p)]^3\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), p)] \\ &- 6[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), \pi)]\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), \pi)]\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), p)] \\ &\times [\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), p)] = 0\end{aligned} \tag{2.12}$$

für $r = 1$, d. h., p berührt π,

$$\left.\begin{aligned}&[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), p)]^2 - [\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), \pi)]\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), \pi)] = 0, \\ &[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), p)]\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), \pi)] \\ &- [\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), p)]\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), \pi)] = 0, \\ &[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), \pi)]^2 - [\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), p)]\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), p)] = 0\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

für $r = 2$, d. h., p oskuliert π,

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), \pi) \cdot \mathrm{Ad}_i(p, p) + \mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), \pi) \cdot \mathrm{Ad}_i\,(\pi, \pi) \\ &- 2\,\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), p) \cdot \mathrm{Ad}_i\,(p, \pi) = 0, \\ &\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), p) \cdot \mathrm{Ad}_i\,(\pi, \pi) + \mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), p) \cdot \mathrm{Ad}_i\,(p, p) \\ &- 2\,\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), \pi) \cdot \mathrm{Ad}_i\,(\pi, p) = 0, \qquad i = 1, \ldots, 6,\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

für $r = 3$, d. h., p superoskuliert π.
Die Gleichungen (2.13) folgen aus den Gleichungen (2.14) durch Spurbildung.
Die von uns in [4] eingeführte vierdimensionale Varietät der einen nicht ausgearteten p-Kegelschnitt π mittelbar superoskulierenden p-Kegelschnitte mit dem allgemeinen Punkt $b\big(b(\pi, 3), 3\big)$ genügt der Gleichung

$$\begin{aligned}&[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), \pi)]^3\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), \pi)] \\ &- [\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi), p)]^3\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(p, p), p)] = 0.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Die Lösungen der für die jeweilige Varietät angegebenen Gleichungen sind auch Spezialisierungen des allgemeinen Punkts dieser Varietät. Dies rechtfertigt eine Defi-

[1]) $r = 1, 2, 3$; $r = 2$ oskulieren, $r = 3$ superoskulieren.

nition der Berührungsbedingungen auch für ausgeartete Kegelschnitte durch diese Gleichungen.

2.4. Definition 1. Es sei π ein beliebiger p-Kegelschnitt.
$\big(P \mid B(\pi, 1)\big)$ sei die Lösungsmenge der Gleichung (2.12),
$\big(P \mid B(\pi, 2)\big)$ sei die Lösungsmenge der Gleichungen (2.13),
$\big(P \mid B(\pi, 3)\big)$ sei die Lösungsmenge der Gleichungen (2.14),
$\big(P \mid S(\pi)\big)$ sei die Lösungsmenge der Gleichung (2.15).

Diese heißen die Menge der π *berührenden, oskulierenden, superoskulierenden* bzw. *mittelbar superoskulierenden* p-Kegelschnitte.

Wir beschreiben nun die definierten Mengen für ausgeartetes π.

Satz 1. *Es sei* Rang $\big((\pi)\big) = 2$, *also* $\pi = \pi(\omega^{(1)}, \omega^{(2)})$ *und* $\big((\mathrm{Ad}\,(\pi, \pi))\big) = (\xi^{(0)})^T(\xi^{(0)})$. $\big(P \mid B(\pi, 1)\big)$ *zerfällt in drei Komponenten, nämlich die Menge der p-Kegelschnitte, die* $\xi^{(0)}$ *enthalten, und die Mengen der p-Kegelschnitte, die* $\omega^{(i)}$ *zweifach schneiden,* $i = 1$ *bzw.* $i = 2$. $\big(P \mid B(\pi, 2)\big)$ *zerfällt in zwei Komponenten, die Mengen der p-Kegelschnitte, die* $\xi^{(0)}$ *enthalten und* $\omega^{(i)}$ *zweifach schneiden,* $i = 1$ *bzw.* $i = 2$. $\big(P \mid B(\pi, 3)\big)$ *ist der Schnitt von* $\big(P \mid B(\pi, 2)\big)$ *mit* $(P \mid P_{(2)})$. *Er besteht aus der Menge der zerfallenden p-Kegelschnitte, deren Doppelpunkt mit* $\xi^{(0)}$ *zusammenfällt, und aus den Mengen der zerfallenden p-Kegelschnitte, die* $\omega^{(i)}$ *ganz enthalten,* $i = 1$ *bzw.* $i = 2$. $\big(P \mid S(\pi)\big)$ *zerfällt in die Komponente* $(P \mid P_{(2)})$ *und die Komponente der p-Kegelschnitte, die* $\xi^{(0)}$ *enthalten.*

Beweis. Für $\pi = \pi(\omega^{(1)}, \omega^{(2)})$ wird (2.12) zu

$$\big[(\xi^{(0)})\,\big((p)\big)\,(\xi^{(0)})^T\big]^2\,\big[(\omega^{(1)})\,\big((\mathrm{Ad}\,(p, p))\big)\,(\omega^{(1)})^T\big]\big[(\omega^{(2)})\,\big((\mathrm{Ad}\,(p, p))\big)\,(\omega^{(2)})^T\big] = 0,$$

aus (2.13) entsteht

$$(\xi^{(0)})\,\big((p)\big)\,(\xi^{(0)})^T = 0,$$
$$\big[(\omega^{(1)})\,\big((\mathrm{Ad}\,(p, p))\big)\,(\omega^{(1)})^T\big]\big[(\omega^{(2)})\,\big((\mathrm{Ad}\,(p, p))\big)\,(\omega^{(2)})^T\big] = 0.$$

Aus (2.14) erhält man $\mathrm{Sp}\,\big(\mathrm{Ad}\,(p, p), p\big) = 0$, und außerdem gelten die Gleichungen (2.13). Die Gleichung (2.15) wird zu $\big[(\xi^{(0)})\,\big((p)\big)\,(\xi^{(0)})^T\big]^3 \cdot \det\big((p)\big) = 0$.

Satz 2. *Es sei* Rang $\big((\pi)\big) = 1$, *also* $\pi = \pi(\omega^{(0)})$. *Dann ist* $\big(P \mid B(\pi, 1)\big) = \big(P \mid S(\pi)\big) = P_5$ *und* $\big(P \mid B(\pi, 2)\big) = \big(P \mid B(\pi, 3)\big)$ *die Menge der p-Kegelschnitte, die* $\omega^{(0)}$ *zweifach schneiden.*

Beweis. Für $\pi = \pi(\omega^{(0)})$ verschwinden alle Koeffizienten von (2.12) und von (2.15), und aus (2.13) und aus (2.14) ergibt sich $(\omega^{(0)})\,\big((\mathrm{Ad}\,(p, p))\big)\,(\omega^{(0)})^T = 0$.

3. Berührungsbedingungen für p-l-Kegelschnitte

3.1. Es sei M_5 die Varietät der *p-l-Kegelschnitte* mit dem allgemeinen Punkt $(p, l) = \big(p, \mathrm{Ad}\,(p, p)\big)$. Die Matrix $\big((l)\big)$ ist Koeffizientenmatrix eines Linienkegelschnitts l. Ist Rang $\big((l)\big) \leqq 2$, so ist dual zur Darstellung von $\big((p)\big)$ in 2.2. eine Darstellung

$$l = l(x^{(1)}, x^{(2)}) \quad \text{bzw.} \quad l = l(x^{(0)}) \tag{3.1}$$

möglich. Ein Punkt (p, l) von M_5 heißt eine *p-Ausartung,* wenn Rang $\big((p)\big) = 1$, eine *l-Ausartung,* wenn Rang $\big((l)\big) = 1$ und eine *p-l-Ausartung,* wenn Rang $\big((p)\big) = $ Rang $\big((l)\big) = 1$.

Für M_5 gibt es eine Parameterdarstellung [1] mit

$$
\begin{aligned}
\big((p)\big) &= \begin{pmatrix} 1 & c & e \\ c & a+c^2 & ad+ce \\ e & ad+ce & ab+ad^2+e^2 \end{pmatrix} \\
\big((l)\big) &= \begin{pmatrix} ab+bc^2+(cd-e)^2 & -bc-d(cd-e) & cd-e \\ -bc-d(cd-e) & b+d^2 & -d \\ cd-e & -d & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

3.2. In [4] haben wir die $(5-r)$-dimensionale Untervarietät von M_5 der einen nicht ausgearteten p-l-Kegelschnitt (π, λ) von r-ter Ordnung berührenden p-l-Kegelschnitte durch den allgemeinen Punkt $\big(b, \operatorname{Ad}(b, b)\big)$ definiert, wobei $b = b(\pi, r)$ gemäß (2.9), (2.10) und (2.11) zu setzen ist. Entsprechend definiert man die vierdimensionale Varietät der einen nicht ausgearteten p-l-Kegelschnitt mittelbar superoskulierenden p-l-Kegelschnitte. Diese vier Varietäten genügen den folgenden Gleichungen (siehe auch [4]):

1. $r = 1$:

$$
\begin{aligned}
&[\operatorname{Sp}(\lambda, \pi)]^2 [\operatorname{Sp}(l, p)]^2 - 3[\operatorname{Sp}(l, \pi)]^2 [\operatorname{Sp}(\lambda, p)]^2 \\
&+ 12[\operatorname{Sp}(l, \pi)]^2 \big[\operatorname{Sp}\big(\operatorname{Ad}(\lambda, \lambda), \operatorname{Ad}(p, p)\big)\big] \\
&+ 12[\operatorname{Sp}(\lambda, p)]^2 \big[\operatorname{Sp}\big(\operatorname{Ad}(\pi, \pi), \operatorname{Ad}(l, l)\big)\big] \\
&- 6[\operatorname{Sp}(\lambda, \pi)] [\operatorname{Sp}(l, \pi)] [\operatorname{Sp}(\lambda, p)] [\operatorname{Sp}(l, p)] = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

2. $r = 2$:

$$
\begin{aligned}
&[\operatorname{Sp}(\lambda, p)]^2 - 3\big[\operatorname{Sp}\big(\operatorname{Ad}(\lambda, \lambda), \operatorname{Ad}(p, p)\big)\big] = 0, \\
&[\operatorname{Sp}(\lambda, p)] [\operatorname{Sp}(l, \pi)] - [\operatorname{Sp}(l, p)] [\operatorname{Sp}(\lambda, \pi)] = 0, \\
&[\operatorname{Sp}(l, \pi)]^2 - 3\big[\operatorname{Sp}\big(\operatorname{Ad}(\pi, \pi), \operatorname{Ad}(l, l)\big)\big] = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

3. $r = 3$:

$$
\begin{aligned}
&6\big[l_i \operatorname{Ad}_j\big(\operatorname{Ad}(\lambda, \lambda), p\big) - l_j \operatorname{Ad}_i\big(\operatorname{Ad}(\lambda, \lambda), p\big)\big] - \operatorname{Sp}(\lambda, p)\,[l_i\lambda_j - l_j\lambda_i] = 0, \\
&6\big[\lambda_i \operatorname{Ad}_j\big(\operatorname{Ad}(l, l), \pi\big) - \lambda_j \operatorname{Ad}_i\big(\operatorname{Ad}(l, l), \pi\big)\big] - \operatorname{Sp}(l, \pi)\,[\lambda_i l_j - \lambda_j l_i] = 0, \\
&6\big[p_i \operatorname{Ad}_j\big(\operatorname{Ad}(\pi, \pi), l\big) - p_j \operatorname{Ad}_i\big(\operatorname{Ad}(\pi, \pi), l\big)\big] - \operatorname{Sp}(l, \pi)\,[p_i\pi_j - p_j\pi_i] = 0, \\
&6\big[\pi_i \operatorname{Ad}_j\big(\operatorname{Ad}(p, p), \lambda\big) - \pi_j \operatorname{Ad}_i\big(\operatorname{Ad}(p, p), \lambda\big)\big] - \operatorname{Sp}(\lambda, p)\,[\pi_i p_j - \pi_j p_i] = 0, \\
&i, j = 1, \ldots, 6,
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&[\operatorname{Sp}(\lambda, \pi)]^3\, l_\mu^3 p_h \operatorname{Ad}_i(p, p)\, \lambda_j \operatorname{Ad}_k(\lambda, \lambda) \\
&- \operatorname{Ad}_h(l, l)\, l_i \operatorname{Ad}_j(\pi, \pi)\, \pi_k\big[6 \operatorname{Ad}_\mu\big(\operatorname{Ad}(\lambda, \lambda), p\big) - \operatorname{Sp}(\lambda, p)\, \lambda_\mu\big]^3 = 0, \\
&[\operatorname{Sp}(l, p)]^3\, \lambda_\mu^3 \pi_h \operatorname{Ad}_i(\pi, \pi)\, l_j \operatorname{Ad}_k(l, l) \\
&- \operatorname{Ad}_h(\lambda, \lambda)\, \lambda_i \operatorname{Ad}_j(p, p)\, p_k\big[6 \operatorname{Ad}_\mu\big(\operatorname{Ad}(l, l), \pi\big) - \operatorname{Sp}(l, \pi)\, l_\mu\big]^3 = 0, \\
&[\operatorname{Sp}(\lambda, \pi)]^3\, p_\mu^3 l_h \operatorname{Ad}_i(l, l)\, \pi_j \operatorname{Ad}_k(\pi, \pi) \\
&- \operatorname{Ad}_h(p, p)\, p_i \operatorname{Ad}_j(\lambda, \lambda)\, \lambda_k\big[6 \operatorname{Ad}_\mu\big(\operatorname{Ad}(\pi, \pi), l\big) - \operatorname{Sp}(l, \pi)\, \pi_\mu\big]^3 = 0, \\
&[\operatorname{Sp}(l, p)]^3\, \pi_\mu^3 \lambda_h \operatorname{Ad}_i(\lambda, \lambda)\, p_j \operatorname{Ad}_k(p, p) \\
&- \operatorname{Ad}_h(\pi, \pi)\, \pi_i \operatorname{Ad}_j(l, l)\, l_k\big[6 \operatorname{Ad}_\mu\big(\operatorname{Ad}(p, p), \lambda\big) - \operatorname{Sp}(\lambda, p)\, p_\mu\big]^3 = 0, \\
&\mu, h, i, j, k = 1, \ldots, 6,
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

sowie die Gleichungen (3.4).

4. Mittelbares Superoskulieren:

$$[\mathrm{Sp}\,(l,\pi)]^2\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\lambda,\lambda),\,\mathrm{Ad}\,(p,p))] - [\mathrm{Sp}\,(\lambda,p)]^2\,[\mathrm{Sp}\,(\mathrm{Ad}\,(\pi,\pi),\,\mathrm{Ad}\,(l,l))] = 0. \tag{3.7}$$

Lemma 1. *Es sei (π,λ) ein nicht ausgearteter p-l-Kegelschnitt. Für jeden der oben angegebenen vier Fälle gilt: Ist (p,l) Lösung der angegebenen Gleichungen, dann ist (p,l) Spezialisierung des allgemeinen Punktes der Varietät.*

Beweis. Sind (π,λ) und (p,l) nicht ausgeartet und ist (p,l) eine Lösung, so ist (p) eine Lösung der Gleichungen der entsprechenden Varietät von p-Kegelschnitten (siehe 2.3.), also eine Spezialisierung des allgemeinen Punktes b. Damit ist (p,l) die eindeutig bestimmte Spezialisierung von $(b,\,\mathrm{Ad}\,(b,b))$ über $b\to p$.
Von den Fällen Rang $((p))=2$ und Rang $((l))=2$ genügt es aus Symmetriegründen, den ersten zu betrachten.
Es sei Rang $((p))=2$, also $p=p(w^{(1)},w^{(2)})$, $l=l(x^{(0)})$. Dann gilt für die Lösungen (p,l) von (3.3)

$$[(x^{(0)})\,((\pi))\,(x^{(0)})^T]^2\,[(w^{(1)})\,((\lambda))\,(w^{(1)})^T]\,[(w^{(2)})\,((\lambda))\,(w^{(2)})^T]=0,$$

von (3.4)

$$(x^{(0)})\,((\pi))\,(x^{(0)})^T=0,$$
$$[(w^{(1)})\,((\lambda))\,(w^{(1)})^T]\,[(w^{(2)})\,((\lambda))\,(w^{(2)})^T]=0$$

bzw. von (3.7)

$$(x^{(0)})\,((\pi))\,(x^{(0)})^T=0.$$

Damit schließt man wie bei Rang $((p))=3$.
Aus $\mathrm{Ad}\,(l,l)=0$ folgt mit (3.6) auch $\mathrm{Ad}\,(p,p)=0$, also gibt es keine Lösung von (3.6) mit Rang $((p))=2$.
Es sei nun Rang $((p))=$ Rang $((l))=1$, also

$$p=p(w^{(0)}),\qquad l=l(x^{(0)}).$$

1. Aus (3.3) folgt

$$[(x^{(0)})\,((\pi))\,(x^{(0)})^T]^2\,[(w^{(0)})\,((\lambda))\,(w^{(0)})^T]^2=0.$$

Aus Symmetriegründen genügt es, für $b=b(\pi,1)$ eine Spezialisierung $(b,\,\mathrm{Ad}\,(b,b))\to(p,l)$ für den Fall anzugeben, daß $(x^{(0)})\,((\pi))\,(x^{(0)})^T=0$ ist. Diese konstruieren wir durch eine Zusammensetzung zweier Spezialisierungen folgender Art:

$$(b,\,\mathrm{Ad}\,(b,b))\to(p',l)\to(p,l),$$

wobei Rang $((p'))=2$ und $l=l(x^{(0)})$ mit $(x^{(0)})\,((\pi))\,(x^{(0)})^T=0$ ist.

2. Aus (3.4) ergibt sich

$$(x^{(0)})\,((\pi))\,(x^{(0)})^T=0\quad\text{und}\quad(w^{(0)})\,((\lambda))\,(w^{(0)})^T=0.$$

Gehen in der Darstellung (2.10) von $b=b(\pi,2)$ die Parameter $\varkappa$ und ϱ gegen Null, und zwar $\varkappa$ von größerer Ordnung als ϱ^2, so ergibt sich $(p(w^{(0)}),\,l(x^{(0)}))$ als Spezialisierung von $(b,\,\mathrm{Ad}\,(b,b))$.

3. Die Lösungen von (3.4), (3.5) und (3.6) stimmen im Fall Rang $((p))=$ Rang $((l))=1$ mit denen von (3.4) überein. Mit $\varkappa$ gegen Null erhalten wir (p,l) als Spezialisierung von $(b,\,\mathrm{Ad}\,(b,b))$ mit (b) aus (2.11).

4. Im Fall des mittelbaren Superoskulierens finden wir alle p-l-Ausartungen (p, l) als Lösungen von (3.7). Es genügt, eine beliebige solche als Spezialisierung von $\big(\mathring{b}, \mathrm{Ad}\,(\mathring{b}, \mathring{b})\big)$, $\mathring{b} = b\big(b(\mathring{\pi}, 3), 3\big)$, zu finden, wobei $\mathring{\pi}$ ein spezieller nicht ausgearteter Kegelschnitt ist. Eine projektive Transformation T von X, die π in $\mathring{\pi}$ überführt, führt nämlich $\big(b, \mathrm{Ad}\,(b, b)\big)$ in $\big(\mathring{b}, \mathrm{Ad}\,(\mathring{b}, \mathring{b})\big)$ und eine p-l-Ausartung (p, l) in eine ebensolche $(\mathring{p}, \mathring{l})$ über, und aus $\big(\mathring{b}, \mathrm{Ad}\,(\mathring{b}, \mathring{b})\big) \to (\mathring{p}, \mathring{l})$ folgt $\big(b, \mathrm{Ad}\,(b, b)\big) \to (p, l)$.
Wir wählen $(\mathring{\pi})$ mit $\mathring{\pi}_2 = 1$, $\mathring{\pi}_5 = -2$, $\mathring{\pi}_1 = \mathring{\pi}_3 = \mathring{\pi}_4 = \mathring{\pi}_6 = 0$ und stellen den allgemeinen Punkt $\mathring{b} = b\big(b(\mathring{\pi}, 3), 3\big)$ und $\big(\mathring{b}, \mathrm{Ad}\,(\mathring{b}, \mathring{b})\big)$ auf, [4], 4.5.
Dieser ist ein p-l-Kegelschnitt, für dessen Werte a, b, c, d, e der Parameterdarstellung (3.2) gilt:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\varrho^2\varkappa\big(\varkappa + (t^2+1)^2\big)}{\big(\varkappa + (t^2-1)^2\big)^2}, \qquad b = \frac{-4\varrho^2\varkappa\big(\varkappa + (t^2-1)^2\big)}{\big(\varkappa + (t^2+1)^2\big)^2}\\
c &= \frac{\tau\varkappa + \tau(t^2-1)^2 + 2\varrho(t^3-t)}{\varkappa + (t^2-1)^2},\\
d &= \frac{2\tau\varkappa + 2\tau(t^2+1)^2 + 4\varrho(t^3+t)}{\varkappa + (t^2+1)^2}\\
e &= \frac{\varkappa(\tau^2 - 2\varrho^2) + 4\varrho(\varrho + \tau t)(t^2-1) + \tau^2(t^2-1)^2}{\varkappa + (t^2-1)^2}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Eine beliebige p-l-Ausartung, d. h. $a = 0$, $b = 0$, $c = c_0$, $d = d_0$, $e = e_0$, ergibt sich als Spezialisierung mit $\varkappa = 0$ und geeigneten ϱ, τ, t.
Damit ist Lemma 1 bewiesen und die folgende Definition gerechtfertigt.

3.3. Definition 2. Es sei (π, λ) ein beliebiger p-l-Kegelschnitt.

$\big(M \mid B(\pi, \lambda; 1)\big)$ sei die Lösungsmenge der Gleichung (3.3),

$\big(M \mid B(\pi, \lambda; 2)\big)$ sei die Lösungsmenge der Gleichungen (3.4),

$\big(M \mid B(\pi, \lambda; 3)\big)$ sei die Lösungsmenge der Gleichungen (3.4), (3.5), (3.6),

$\big(M \mid S(\pi, \lambda)\big)$ sei die Lösungsmenge der Gleichung (3.7).

Diese heißen die Menge der (π, λ) *berührenden*, *oskulierenden*, *superoskulierenden* bzw. *mittelbar superoskulierenden* p-l-Kegelschnitte.

Satz 3. *Für ausgeartete (π, λ) besteht $\big(M \mid B(\pi, \lambda; 1)\big)$ aus den Komponenten $C^{(i)}$, $D^{(j)}$, wobei $C^{(i)}$ die Menge der (p, l) mit $\xi^{(i)} \in p$ und $D^{(j)}$ die Menge der (p, l) mit $\omega^{(j)} \in l$ sind, und $\big(M \mid B(\pi, \lambda; 2)\big)$ besteht aus den Komponenten $E^{i,j}$, wobei $E^{i,j}$ die Menge der (p, l) mit $\xi^{(i)} \in p$ und $\omega^{(j)} \in l$ ist. Dabei ist $i = 0$, $j = 1, 2$ für* Rang $\big((\pi)\big) = 2$, $i = 1, 2$, $j = 0$ *für* Rang $\big((\lambda)\big) = 2$ *und* $i = 0$, $j = 0$ *für* Rang $\big((\pi)\big) =$ Rang $\big((\lambda)\big) = 1$.

Beweis. Für $\pi = \pi(\omega^{(1)}, \omega^{(2)})$, $\lambda = \lambda(\xi^{(0)})$ ergibt Gleichung (3.3)

$$\Big[(\xi^{(0)})\,\big((p)\big)\,(\xi^{(0)})^T\Big]^2 \Big[(\omega^{(1)})\,\big((l)\big)\,(\omega^{(1)})^T\Big] \Big[(\omega^{(2)})\,\big((l)\big)\,(\omega^{(2)})^T\Big] = 0,$$

und die Gleichungen (3.4) ergeben

$$
\begin{aligned}
&(\xi^{(0)})\,\big((p)\big)\,(\xi^{(0)})^T = 0,\\
&\Big[(\omega^{(1)})\,\big((l)\big)\,(\omega^{(1)})^T\Big] \Big[(\omega^{(2)})\,\big((l)\big)\,(\omega^{(2)})^T\Big] = 0.
\end{aligned}
$$

Für $\pi = \pi(\omega^{(0)})$, $\lambda = \lambda(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ besagt Gleichung (3.3)

$$\Big[(\xi^{(1)})\,\big((p)\big)\,(\xi^{(1)})^T\Big] \Big[(\xi^{(2)})\,\big((p)\big)\,(\xi^{(2)})^T\Big] \Big[(\omega^{(0)})\,\big((l)\big)\,(\omega^{(0)})^T\Big]^2 = 0,$$

und die Gleichungen (3.4) besagen

$$\left[(\xi^{(1)})\left((p)\right)(\xi^{(1)})^T\right]\left[(\xi^{(2)})\left((p)\right)(\xi^{(2)})^T\right] = 0, \qquad (\omega^{(0)})\left((l)\right)(\omega^{(0)})^T = 0.$$

Für $\pi = \pi(\omega^{(0)})$, $\lambda = \lambda(\xi^{(0)})$ ergibt (3.3)

$$\left[(\xi^{(0)})\left((p)\right)(\xi^{(0)})^T\right]^2\left[(\omega^{(0)})\left((l)\right)(\omega^{(0)})^T\right]^2 = 0$$

und (3.4)

$$(\xi^{(0)})\left((p)\right)(\xi^{(0)})^T = 0, \qquad (\omega^{(0)})\left((l)\right)(\omega^{(0)})^T = 0.$$

Bemerkung. Es bestehen die Homologierelationen

$$C^{(i)} \sim (M \mid P), \qquad D^{(j)} \sim (M \mid L), \qquad E^{i,j} \sim (M \mid \widehat{PL}).$$

Die Bestandteile sind also homolog zu den Zyklen aus den effektiven Darstellungen

$$\left(M \mid B(\pi, 1)\right) \sim 2(M \mid P) + 2(M \mid L)$$

bzw.

$$\left(M \mid B(\pi, 2)\right) \sim 6(M \mid \widehat{PL}),$$

die in [4] für nicht ausgeartete π angegeben wurden. $\left(M \mid B(\pi, \lambda; 1)\right)$ ist stets vierdimensional, und $\left(M \mid B(\pi, \lambda; 2)\right)$ ist stets dreidimensional.

Satz 4. *Es sei (π, λ) ausgeartet. Für* Rang $\left((\lambda)\right) = 2$, *also* $\pi = \pi(\omega^{(0)})$ *und* $\lambda = \lambda(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, *zerfällt* $\left(M \mid B(\pi, \lambda; 3)\right)$ *in vier Komponenten, und zwar die Menge der p-Ausartungen* (p, l), *also* $p = p(w^{(0)})$, *mit* $w^{(0)} = \omega^{(0)}$,
die Mengen der l-Ausartungen (p, l), *also* $l = l(x^{(0)})$, *mit* $x^{(0)} = \xi^{(i)}$, $i = 1, 2$,
und die Menge der l-Ausartungen (p, l), *für die p den Bestandteil* $\omega^{(0)}$ *enthält.*
Für Rang $\left((\pi)\right) = 2$ *zerfällt* $\left(M \mid B(\pi, \lambda; 3)\right)$ *dual.*
Für Rang $\left((\pi)\right) =$ Rang $\left((\lambda)\right) = 1$ *ist* $\left(M \mid B(\pi, \lambda; 3)\right) = \left(M \mid B(\pi, \lambda; 2)\right)$ *die Menge der* (p, l) *mit* $\xi^{(0)} \in p$ *und* $\omega^{(0)} \in l$.

Beweis. Ist Rang $\left((\lambda)\right) = 2$, so folgt aus (3.6), daß (p, l) ausartet. Man setzt nun (p, l) etwa für Rang $\left((l)\right) = 2$ in der Darstellung $p(w^{(0)})$, $l(x^{(1)}, x^{(2)})$ in (3.4) und (3.5) ein und erhält die Gleichungen

$$\omega_j^{(0)} w_k^{(0)} - \omega_k^{(0)} w_j^{(0)} = 0, \qquad j, k = 1, 2, 3, \qquad j \neq k,$$

also

$$w^{(0)} = \omega^{(0)}.$$

Entsprechend verfährt man für die anderen Ausartungsfälle von (p, l).
Ist Rang $\left((\pi)\right) =$ Rang $\left((\lambda)\right) = 1$, so erfüllen die Lösungen von (3.4), also die (π, λ) oskulierenden p-l-Kegelschnitte, auch (3.5) und (3.6).

Bemerkung. Die im Satz für Rang $\left((\lambda)\right) = 2$ angegebenen Komponenten sind homolog zu $(M \mid P_{(1)} W^2)$ bzw. $(M \mid L_{(1)} X^2)$ bzw. $(M \mid L_{(1)} G)$, also zu den Zyklen aus der für nicht ausgeartete π geltenden effektiven Darstellung [4]

$$\left(M \mid B(\pi, 3)\right) \sim 4(M \mid P_{(1)} W^2) + 2(M \mid L_{(1)} X^2) + 2(M \mid L_{(1)} G).$$

$\left(M \mid B(\pi, \lambda; 3)\right)$ ist für Rang $\left((\pi)\right) = 2$ oder Rang $\left((\lambda)\right) = 2$ wie für nicht ausgeartete (π, λ) zweidimensional, für Rang $\left((\pi)\right) =$ Rang $\left((\lambda)\right) = 1$ aber dreidimensional.

Satz 5. *Es sei (π, λ) ausgeartet.*
Für Rang $\big((\lambda)\big) = 2$ *besteht* $\big(M \mid S(\pi, \lambda)\big)$ *aus der Komponente* $D^{(0)}$ *der* (p, l) *mit* $\omega^{(0)} \in l$ *und dem Bestandteil der* (p, l), *für die sich* p *und die Gerade* $\omega^{(0)}$ *zweifach schneiden.*
Für Rang $\big((\pi)\big) = 2$ *zerfällt* $\big(M \mid S(\pi, \lambda)\big)$ *dual.*
Für Rang $\big((\pi)\big) =$ Rang $\big((\lambda)\big) = 1$ *ist* $\big(M \mid S(\pi, \lambda)\big) = M_5$.

Beweis. Für $\lambda = \lambda(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ und $\pi = \pi(\omega^{(0)})$ wird (3.7) zu

$$\big[(\omega^{(0)}) \big((l)\big) (\omega^{(0)})^T\big]^2 \big[(\omega^{(0)}) \big((\mathrm{Ad}\,(p, p))\big) (\omega^{(0)})^T\big] = 0$$

und bestimmt die genannten Bestandteile.

Für Rang $\big((\pi)\big) =$ Rang $\big((\lambda)\big) = 1$ verschwinden alle Koeffizienten in (3.7).

Bemerkung. Die Komponente $D^{(0)}$ ist homolog zu $(M \mid L)$, der andere durch eine quadratische Gleichung in p beschriebene Bestandteil ist homolog zu $2(M \mid P)$. Er zerfällt übrigens in die Komponente $D^{(0)}$ und die Komponente $(M \mid P_{(1)})$. Das sind die Zyklen aus der effektiven Darstellung (vgl. [4], (4.36))

$$\big(M \mid S(\pi)\big) \sim 2(M \mid L) + 2(M \mid P)$$

bzw.

$$\big(M \mid S(\pi)\big) \sim 3(M \mid L) + (M \mid P_{(1)}).$$

4. Berührungsbedingungen für p-l-s-Kegelschnitte

4.1. In [1] hatten wir die Varietät N_5 der p-l-s-Kegelschnitte durch einen allgemeinen Punkt $(p, l, \bar{s}^P, \bar{s}^L)$ definiert, wobei (p, l) der allgemeine Punkt von M_5 ist und $(\bar{s}^P)$, $(\bar{s}^L)$ davon rational abhängige Koordinaten für die Superoskulanten sind. Durch die allgemeinen Punkte von M_5 und N_5 sind birationale Abbildungen

$$\chi: N_5 \to P_5 \quad \text{und} \quad \psi: N_5 \to M_5$$

gegeben, [3].

Wir haben N_5 in [1] durch Parameterdarstellungen beschrieben. Jede solche stellt einen allgemeinen Punkt von N_5 dar. Darstellung I ergibt sich aus (3.2) mit

$$a = mb \tag{4.1}$$

und durch zusätzliche Angabe der $(\bar{s}_j)$, z. B.

$$\bar{s}_1^P = m, \quad \bar{s}_2^P = 1, \ldots,$$
$$\bar{s}_1^L = 1, \quad \bar{s}_2^L = m, \ldots$$

Entsprechend erhält man Darstellung II aus (3.2) mit

$$b = na, \qquad nm = 1. \tag{4.2}$$

Auf N_5 gibt es die vierdimensionalen Ausartungsvarietäten:

$(N \mid P_{(1)}^T)$ — die *p^T-Ausartungen,* die in Parameterdarstellung I durch $m = 0$ beschrieben sind und für die Rang $\big((p)\big) = 1$ ist.

$(N \mid L_{(1)}^T)$ — dual zu $(N \mid P_{(1)}^T)$ mit $n = 0$ in Darstellung II.

$(N \mid P_{(1)}L_{(1)})$ — die *p-l-Ausartungen* mit Rang $\big((p)\big) = 1$, Rang $\big((l)\big) = 1$.

$(N \mid P_{(1)}L_{(1)})$ schneidet $(N \mid P_{(1)}^T)$ in der dreidimensionalen Varietät $(N \mid P_{(1)}^T L_{(1)})$ der *p^T-l-Ausartungen.*

Dual dazu ist $(N \mid P_{(1)}L_{(1)}^T)$ definiert.

Ist $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ eine p-l-Ausartung, also $\pi = \pi(\omega^{(0)})$, $\lambda = \lambda(\xi^{(0)})$, aber keine p^T-l-Ausartung und keine p-l^T-Ausartung, so enthält die zugehörige p-Superoskulantenmenge gewisse lineare Mengen $E^{(j)}$ als Komponenten, [1], 7.4.4.1, die durch folgende allgemeine Punkte gegeben sind:

$$\big((e^{(j)}(\pi, \lambda, \bar{\sigma}))\big) = \varkappa\big((\varepsilon^{(j)})\big) + \varrho[(\omega^{(0)})^T (u^{(0)}) + (u^{(0)})^T (\omega^{(0)})] + (\omega^{(0)})^T (\omega^{(0)}), \tag{4.3}$$

$j = 1, 2$, wobei $\varepsilon^{(j)}$ nicht ausgeartete Kegelschnitte aus $E^{(j)}$ sind und $u^{(0)}$ eine Gerade durch $\xi^{(0)}$ ist. Alle Elemente von $E^{(j)}$ oskulieren einander in $\xi^{(0)}$ mit der Tangente $\omega^{(0)}$.

4.2. Wir wollen nun Berührungsbedingungen auf N_5 für solche bedingungstellende p-l-s-Kegelschnitte untersuchen und beschreiben, die durch Parameterdarstellung I erfaßt werden, also für nicht ausgeartete, für p^T-Ausartungen, für p-l-Ausartungen und insbesondere für p^T-l-Ausartungen. Untersuchungen für bedingungstellende l^T- bzw. p-l^T-Ausartungen verlaufen dual.
Es sei also im folgenden $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ ein p-l-s-Kegelschnitt gemäß (3.2), (4.1) mit $\mu, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ statt m, b, c, d, e.
Analog zu 3.2. betrachten wir die in [4] durch den allgemeinen Punkt $\chi^{-1}(b)$ definierten Untervarietäten berührender p-l-s-Kegelschnitte. Diese vier Varietäten genügen zunächst den Gleichungen (3.3), ..., (3.7), denen die entsprechenden Untervarietäten auf M_5 genügen.
Im Fall des Superoskulierens kommen zu (3.4), (3.5), (3.6) noch Gleichungen in den $\bar{s}_j$. Für $(p, l, \bar{s})$, die durch Darstellung I erfaßt werden, sind es (vgl. [4]) die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&m[b(c-\gamma) - (d-\delta)(e-\varepsilon) + (d-\delta)(c-\gamma)\,d]^3 - \mu\beta^3(c-\gamma)^3 = 0,\\
&m[(e-\varepsilon) - (c-\gamma)\,d]^3 - \mu[(e-\varepsilon) - (c-\gamma)\,\delta]^3 = 0,\\
&\mu^2\beta^3 m[d-\delta]^3 - [mb(d-\delta) + (c-\gamma)(e-\varepsilon) - (c-\gamma)^2\,\delta]^3 = 0,\\
&\mu^2 m[b + 2\beta + (d-\delta)^2]^3 - [mb + 2\mu\beta + (c-\gamma)^2]^3 = 0,\\
&m\big[2\big(mb^2 + b(c-\gamma)^2 + ((e-\varepsilon) - (c-\gamma)\,d)^2\big) + \mu\beta\big(b + (d-\delta)^2\big)\big]^3\\
&\quad - \mu\big[2\big(mb^2 + mb(d-\delta)^2 + \big((e-\varepsilon) - (c-\gamma)\,\delta\big)^2\big) + \beta\big(mb + (c-\gamma)^2\big)\big]^3 = 0,\\
&\mu m^2[(d-\delta)^2 + \beta]^3 + 6\mu\beta m[(c-\gamma)^2 + \mu\beta]\,[(d-\delta)^2 + \beta]\\
&\quad - 8\mu^2\beta^3 m + [(c-\gamma)^2 + \mu\beta]^3 = 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Entsprechende Gleichungen erhält man auch für die anderen Parameterdarstellungen (vgl. [1]) von N_5.
Im Fall des mittelbaren Superoskulierens erhalten wir für $(p, l, \bar{s})$, die durch Darstellung I erfaßt werden, aus (3.7) die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\mu\big[mb^2 + mb(d-\delta)^2 + \big((e-\varepsilon) - (c-\gamma)\,\delta\big)^2 + \beta\big(mb + (c-\gamma)^2\big) + \mu\beta^2\big]^3\\
&- m\big[\mu\beta^2 + \mu\beta(d-\delta)^2 + \big((e-\varepsilon) - (c-\gamma)\,d\big)^2\\
&+ b\big(\mu\beta + (c-\gamma)^2\big) + mb^2\big]^3 = 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Eine entsprechende Gleichung erhält man auch für die anderen Parameterdarstellungen von N_5.

Lemma 2. *Es sei $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ ein nicht ausgearteter p-l-s-Kegelschnitt. Jede Lösung von (3.3) auf N_5 ist eine Spezialisierung von $\chi^{-1}\big(b(\pi, 1)\big)$. Jede Lösung von (3.4) auf N_5 ist eine Spezialisierung von $\chi^{-1}\big(b(\pi, 2)\big)$. Jede Lösung von (3.4), (3.5), (3.6), (4.4) auf N_5 ist eine Spezialisierung von $\chi^{-1}\big(b(\pi, 3)\big)$. Jede Lösung von (3.7), (4.5) auf N_5 ist eine Spezialisierung von $\chi^{-1}\big(b(b(\pi, 3), 3)\big)$.*

Beweis. Da für p-l-s-Kegelschnitte, die nicht p-l-Ausartungen sind, $\bar{s}_j$ durch p, l eindeutig bestimmt sind, genügt es, unter Beachtung von Lemma 1 und dessen Beweis hier die als Lösungen auftretenden p-l-Ausartungen zu betrachten.

Es sei erstens $(p, l, \bar{s})$ mit $p = p(w^{(0)})$, $l = l(x^{(0)})$ eine Lösung von (3.4), (3.5), (3.6), (4.4) oder von (3.7), (4.5), wobei im zweiten Fall nicht zugleich $x^{(0)} \in \pi$ und $w^{(0)} \in \lambda$ gelten möge. Nach Lemma 1 ist (p, l) Spezialisierung von $\big(b, \operatorname{Ad}(b, b)\big)$. Mit (p, l) sind zugehörige Parameterwerte $b = 0$, $c = c_0$, $d = d_0$, $e = e_0$ aus (3.2) und (4.1) bestimmt. Hierdurch sind dann mit (4.4) bzw. (4.5) ein Wert m_0 für m, also die $\bar{s}_j$ zu (p, l), eindeutig bestimmt. Somit gibt es zu der genannten Spezialisierung eine eindeutig bestimmte Fortsetzung auf N_5.

Es sei zweitens $(p, l, \bar{s})$ eine p-l-ausgeartete Lösung von (3.7), (4.5) mit $x^{(0)} \in \pi$ und $w^{(0)} \in \lambda$ oder von (3.4) oder von (3.3). Jeweils besagen die Gleichungen, daß mit (p, l) alle auf N_5 zu $\big(p(w^{(0)}), l(x^{(0)})\big)$ möglichen $\bar{s}_j$ vorkommen, also ist $(p, l, \bar{s}) = \psi^{-1}(p, l)$. Für die Parameterwerte aus (3.2), (4.1) bedeutet das, daß m unbestimmt bleibt. Es bleibt zu zeigen, daß sich die Parameterwerte m, b, c, d, e des jeweils allgemeinen Punktes $\chi^{-1}(b)$ zu m_0, b_0, c_0, d_0, e_0 mit beliebigem m_0 spezialisieren lassen, wobei $b_0 = 0$, c_0, d_0, e_0 zu $\big(p(w^{(0)}), l(x^{(0)})\big)$ einer der oben genannten Lösungen gehören. Dabei genügt es (vgl. Beweis zu Lemma 1), von $\pi = \mathring{\pi}$ auszugehen.

Im Fall des mittelbaren Superoskulierens entnehmen wir zu $\chi^{-1}(b)$ die Werte b, c, d, e aus (3.8) und erhalten mit $a = mb$ dazu

$$m = \frac{-[\varkappa + (t^2 + 1)^2]^3}{4[\varkappa + (t^2 - 1)^2]^3}.$$

Für $\varkappa = 0$, $\varrho = 0$, $\tau = c_0$, t beliebig, erhält man die gesuchten Spezialisierungen. Entsprechend schließt man bei den zu $\chi^{-1}\big(b(\pi, 2)\big)$ bzw. zu $\chi^{-1}\big(b(\pi, 1)\big)$ gehörenden Parameterwerten.

4.3. Definition 3. Es sei $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ ein beliebiger p-l-s-Kegelschnitt. $\big(N \mid B(\pi, \lambda, \bar{\sigma}; 1)\big)$ sei auf N_5 bestimmt durch die Gleichung (3.3). $\big(N \mid B(\pi, \lambda, \bar{\sigma}; 2)\big)$ sei auf N_5 bestimmt durch die Gleichungen (3.4). $\big(N \mid B(\pi, \lambda, \bar{\sigma}; 3)\big)$ sei auf N_5 bestimmt durch die Gleichungen (3.4), (3.5), (3.6), (4.4). $\big(N \mid S(\pi, \lambda, \bar{\sigma})\big)$ sei auf N_5 bestimmt durch die Gleichungen (3.7), (4.5). Diese Untermengen von N_5 heißen die Mengen der $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ *berührenden, oskulierenden, superoskulierenden* bzw. *mittelbar superoskulierenden* p-l-s-Kegelschnitte.

$\big(N \mid B(\pi, \lambda, \bar{\sigma}; r)\big)$ wird also für $r = 1, 2$ durch dieselben Gleichungen beschrieben wie $\big(M \mid B(\pi, \lambda; r)\big)$. Damit sind für $r = 1, 2$ die Komponenten von $\big(N \mid B(\pi, \lambda, \bar{\sigma}; r)\big)$ die vollständigen Urbilder bei ψ von den entsprechenden Komponenten von $\big(M \mid B(\pi, \lambda; r)\big)$ aus Satz 3.

Satz 6. *Es sei $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ eine p^T-Ausartung mit $\pi = \pi(\omega^{(0)})$, $\lambda = \lambda(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$. Für diese besteht $\big(N \mid B(\pi, \lambda, \bar{\sigma}; 3)\big)$ aus fünf Bestandteilen:*

der Menge der p^T-Ausartungen $(p, l, \bar{s})$, $p = p(w^{(0)})$, mit $w^{(0)} = \omega^{(0)}$,

der Menge der p-l-Ausartungen $(p, l, \bar{s})$, $p = p(w^{(0)})$, mit $w^{(0)} = \omega^{(0)}$,

den Mengen der l^T-Ausartungen $(p, l, \bar{s})$, $l = l(x^{(0)})$, mit $x^{(0)} = \xi^{(i)}$, $i = 1, 2$, und

der Menge der l^T-Ausartungen $(p, l, \bar{s})$, für die p den Bestandteil $\omega^{(0)}$ enthält.

Für eine l^T-Ausartung $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ zerfällt $\big(N \mid B(\pi, \lambda, \bar{\sigma}; 3)\big)$ dual. Es sei $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ eine p-l-Ausartung mit $\pi = \pi(\omega^{(0)})$, $\lambda = \lambda(\xi^{(0)})$, die weder p^T-l-Ausartung noch p-l^T-Ausartung ist. Für diese besteht $\big(N \mid B(\pi, \lambda, \bar{\sigma}; 3)\big)$ aus vier Bestandteilen:

der Menge der p^T-Ausartungen $(p, l, \bar{s})$, $p = p(w^{(0)})$, mit $w^{(0)} = \omega^{(0)}$,

der Menge der l^T-Ausartungen $(p, l, \bar{s})$, $l = l(x^{(0)})$, mit $x^{(0)} = \xi^{(0)}$, *den Komponenten* $\chi^{-1}(E^{(j)})$ *mit allgemeinem Punkt* $\chi^{-1}(e^{(j)})$ *derjenigen p-l-s-Kegelschnitte, die den nicht ausgearteten Kegelschnitt* $\chi^{-1}(\varepsilon^{(j)})$ *in* $\xi^{(0)}$ *oskulieren,* $j = 1, 2$.

Beweis. Für eine p^T-Ausartung $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ gilt $\mu = 0$ in der Parameterdarstellung I. Zu den Lösungen $(p, l, \bar{s})$ gehören (p, l) wie in Satz 4 unter 1., 2., 3. beschrieben. Zu den unter 1. genannten (p, l) ergeben die Gleichungen (4.4) mit $\mu = 0$ nun $mb = 0$, d. h. ein Zerfallen auf N_5 in die Mengen von p^T-Ausartungen mit $w^{(0)} = \omega^{(0)}$, nämlich für $m = 0$, und die auf N_5 ebenfalls zweidimensionale Menge von p-l-Ausartungen mit $w^{(0)} = \omega^{(0)}$, nämlich für $b = 0$. Da l^T-Ausartungen von Darstellung I nicht erfaßt werden, bilden wir nun die (4.4) entsprechenden Gleichungen für die Parameterdarstellung II. Damit finden wir als Lösungsmengen einmal wieder die zuletzt genannten p-l-Ausartungen und zum anderen, daß die zu (p, l) aus Satz 4 unter 2. und 3. gehörenden Lösungen l^T-Ausartungen auf N_5 sind.
Nun sei $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ eine p-l-Ausartung mit $\mu \neq 0$ in Darstellung I, also weder eine p^T-l-Ausartung noch eine p-l^T-Ausartung. Für $(p, l, \bar{s})$ folgen aus (3.4), (3.5) und (3.6) die Beziehungen

$$(\xi^{(0)})\big((p)\big)(\xi^{(0)})^T = 0 \quad \text{und} \quad (\omega^{(0)})\big((l)\big)(\omega^{(0)})^T = 0$$

(Satz 4). Aus (4.4) erhalten wir dann zum einen mit $m = 0$ die p^T-Ausartungen mit $p = p(w^{(0)})$, $w^{(0)} = \omega^{(0)}$ — dual dazu findet man bei Verwendung von Parameterdarstellung II die l^T-Ausartungen mit $l = l(x^{(0)})$, $x^{(0)} = \xi^{(0)}$ —, zum anderen die Lösungen mit $m \neq 0$. Ist die p-l-Ausartung $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ in (3.2) und (4.1) durch $\beta = 0$, $\mu = \mu_0 \neq 0$, $\gamma = \gamma_0$, $\delta = \delta_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ gegeben, d. h. $\pi = \pi(\omega^{(0)})$ mit $(\omega^{(0)}) = (1, \gamma_0, \varepsilon_0)$, $\lambda = \lambda(\xi^{(0)})$ mit $(\xi^{(0)}) = (\gamma_0\delta_0 - \varepsilon_0, -\delta_0, 1)$, so erhalten wir damit unter der Voraussetzung $m \neq 0$ aus den für $\big(N \mid B(\pi, \lambda, \bar{\sigma}; 3)\big)$ geltenden Gleichungen

$$c = \gamma_0 + \varrho, \quad d = \delta_0 + \frac{\varrho\varkappa}{\varrho^2 - (-1)^j\sqrt{-\mu_0}\,\varkappa}, \quad e = \varepsilon_0 + \varkappa + \varrho\delta_0,$$
$$b = -\frac{(-1)^j\sqrt{-\mu_0}\,\varkappa^3}{\big(\varrho^2 - (-1)^j\sqrt{-\mu_0}\,\varkappa\big)^2}, \quad m = \frac{\big(\varrho^2 - (-1)^j\sqrt{-\mu_0}\,\varkappa\big)^3}{(-1)^j\sqrt{-\mu_0}\,\varkappa^3},$$

das heißt $\chi^{-1}(e^{(j)})$ mit

$$\big((e^{(j)})\big) = \varkappa\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & (-1)^j\sqrt{-\mu_0} & \gamma_0 + (-1)^j\sqrt{-\mu_0}\,\delta_0 \\ 1 & \gamma_0 + (-1)^j\sqrt{-\mu_0}\,\delta_0 & 2\varepsilon_0 + (-1)^j\sqrt{-\mu_0}\,\delta_0^2 \end{pmatrix}$$
$$+ \varrho\begin{pmatrix} 0 & 1 & \delta_0 \\ 1 & 2\gamma_0 & \gamma_0\delta_0 + \varepsilon_0 \\ \delta_0 & \gamma_0\delta_0 + \varepsilon_0 & 2\delta_0\varepsilon_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \gamma_0 & \varepsilon_0 \\ \gamma_0 & \gamma_0^2 & \gamma_0\varepsilon_0 \\ \varepsilon_0 & \gamma_0\varepsilon_0 & \varepsilon_0^2 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Dies ist ein allgemeiner Punkt von $E^{(j)}$ zur vorgegebenen p-l-Ausartung $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$, [1], 6.2.4.

Bemerkung. Die im Satz 6 im Fall einer p^T-Ausartung $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ genannten Bestandteile sind homolog zu $(N \mid P_{(1)}^T W^2)$, $(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2)$, $(N \mid L_{(1)}^T X^2)$ bzw. $(N \mid L_{(1)}^T G)$, **also zu den Zyklen aus der für nicht ausgeartete** π **geltenden effektiven Darstellung,** vgl. [4], (4.19)

$$\big(N \mid B(\pi, 3)\big) \sim 4(N \mid P_{(1)}^T W^2) + 6(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2) + 2(N \mid L_{(1)}^T G)$$
$$+ 2(N \mid L_{(1)}^T X^2).$$

Die Dimension von $(N \mid B(\pi, \lambda, \bar{\sigma}; 3))$ ist für alle $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ gleich 2, also tritt auf N_5 in bezug auf das Superoskulieren kein Defekt auf.
Auch für das mittelbare Superoskulieren tritt auf N_5 kein Dimensionsdefekt auf, denn für kein $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$ verschwinden alle Koeffizienten von (4.5). Im Fall einer p^T-Ausartung $(\pi, \lambda, \bar{\sigma})$, $\pi = \pi(\omega^{(0)})$, zerfällt mit $\mu = 0$ Gleichung (4.5) und bestimmt die Komponente $(N \mid P^T_{(1)})$ und die zu $(N \mid L)$ homologe Komponente der $(p, l, \bar{s})$ mit $\omega^{(0)} \in l$. Dies entspricht der Homologierelation, vgl. [4], (4.38), $(N \mid S(\pi)) \sim (N \mid P^T_{(1)}) + 3(N \mid L)$.

LITERATUR

[1] Drechsler, K., und U. Sterz: Punkt-Linien-Superoskulanten-Kegelschnitte. Beiträge zur Algebra und Geometrie *6* (1977), 37—54.
[2] Drechsler, K., und U. Sterz: Charakteristiken und Schnittzahlformeln für *p-l-s*-Kegelschnitte. Beiträge zur Algebra und Geometrie *8* (1979), 7—31.
[3] Drechsler, K., und U. Sterz: Vervollständigung von Kegelschnittmengen. Beiträge zur Algebra und Geometrie *10* (1980), 27—32.
[4] Drechsler, K., und U. Sterz: Berührungsbedingungen für *p-l-s*-Kegelschnitte. Beiträge zur Algebra und Geometrie *11* (1981), 109—118.
[5] Drechsler, K., und U. Sterz: Eine Anzahlbestimmung für mittelbar superoskulierende Kegelschnitte. Beiträge zur Algebra und Geometrie *11* (1981), 145—147.
[6] Kleiman, S. L.: Problem 15. Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus. Proc. Symposia in pure math. *28* (1976), 445—482.
[7] Kleiman, S. L.: Chasles's enumerative theory of conics: A historical introduction. Preprint.
[8] Van der Waerden, B. L.: Zur algebraischen Geometrie XV. Lösung des Charakteristikenproblems für Kegelschnitte. Math. Ann. *115* (1938), 645—655.

Manuskripteingang: 20. 12. 1979

VERFASSER:

Konrad Drechsler und Ulrich Sterz, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg