Beiträge zur Algebra und Geometrie
13 (1982), 95–105

Über den Bezoutschen Satz seit den Untersuchungen von B. L. van der Waerden

Bodo Renschuch und Wolfgang Vogel

Einleitung

Mit dieser Arbeit wollen die Verfasser an die Abhandlung von J. C. Gerretsen über den Kalkül der abzählenden Geometrie [5] anknüpfen und die Diskussion zu Fragen der Multiplizitätstheorie im Hinblick auf die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes fortsetzen. Weitreichende Impulse hierzu gingen von B. L. van der Waerden seit den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts aus. Erstmals erkannte er 1928 in der Arbeit [33], daß die durch die Idealtheorie definierte Länge als Schnittmultiplizität für die uneingeschränkte Gültigkeit des Bezoutschen Satzes *nicht* geeignet ist. Damit begann für van der Waerden die Aufgabe einer Neubegründung der algebraischen Geometrie — insbesondere mit der Zielsetzung, eine Schnittmultiplizität für algebraische Varietäten anzugeben. Diese Schaffensperiode fällt in die Zeit seines Wirkens als Ordinarius an den Universitäten Groningen (1928—1931) und Leipzig (1931—1945). Seine dreijährige Tätigkeit in Groningen fand bereits schnell internationale Anerkennung, so auch durch die Berufung an die Universität Leipzig vor nunmehr 50 Jahren. Dieses Jubiläum und die weitgehende Vollendung seiner Ideen in der Leipziger Zeit möchten wir zum Anlaß nehmen, um im § 1 dieser Note das mathematische Wirken von B. L. van der Waerden von 1931 bis 1945 an der Universität Leipzig zu würdigen.

Im § 2 wollen wir dann zeigen, wie Ideen und Ansätze einerseits von van der Waerden und andererseits von Vertretern eines idealtheoretischen Aufbaus der algebraischen Geometrie heutzutage durchaus in Einklang gebracht werden können. Dies geschieht dadurch, daß wir folgendes zeigen: Es seien X, Y zwei projektive Varietäten im n-dimensionalen Raum, die sich eigentlich schneiden. Wir führen eine sukzessive Methode ein, die im $(2n + 1)$-dimensionalen Raum dann die Schnittmultiplizität von X und Y doch als Ideallänge gibt.

§ 1. Über das mathematische Wirken von B. L. van der Waerden in der Zeit von 1931 bis 1945 an der Universität Leipzig

Mit Schreiben vom 17. Mai 1930 an das Ministerium für Volksbildung in Dresden bemühte sich die Philosophische Fakultät der Universität Leipzig um die Berufung des niederländischen Mathematikers Bartel Leendert van der Waerden. Aus dem Schreiben zitieren wir die die Berufung begründenden Abschnitte ungekürzt:

„Zur Wiederbesetzung des durch die Emeritierung von Herrn Prof. Dr. O. Hölder

frei gewordenen Lehrstuhls für Mathematik schlägt die Fakultät Herrn Dr. B. L. van der Waerden, ordentlicher Professor an der Universität Groningen, vor.
B. L. van der Waerden, geboren am 2. März 1903 in Amsterdam, studierte an der dortigen Universität, promovierte daselbst 1926, habilitierte sich 1927 in Göttingen, erhielt Anfang 1928 einen Ruf nach Rostock und am 6. Mai 1928 einen Ruf als Ordinarius nach Groningen. Er wirkt seitdem als Ordinarius an dieser Universität.
In den vier Jahren seit dem Erscheinen seiner Dissertation hat van der Waerden eine große Zahl sehr wertvoller Arbeiten auf dem Gebiete der Algebra, der algebraischen Geometrie, der Zahlentheorie und der Topologie veröffentlicht, die seinen raschen Aufstieg vollauf rechtfertigen. Ein zentrales Problem der Algebra und der algebraischen Geometrie, die Theorie der Elimination ist es vor allem, dem die Bemühungen von van der Waerden gelten. Mit dem Problem der Elimination, mit dem aufs innigste die Begründung der abzählenden Geometrie zusammenhängt, haben sich die Algebraiker seit 200 Jahren intensiv beschäftigt, ohne daß es gelang, zu vollkommen befriedigenden, abschließenden Ergebnissen zu kommen. Wie unangenehm die hier noch vorhandenen Lücken empfunden wurden, erhellt unter anderem daraus, daß Hilbert in seinem berühmten Vortrage ‚Mathematische Probleme' (1900) unter den Aufgaben, deren Lösung ihm als dringend erwünscht erschien, die Begründung der abzählenden Geometrie nennt. Unter Zuhilfenahme funktionen-, zahlen- und mengentheoretischer Methoden sind zwar seit 1900 auf dem in Betracht kommenden Gebiete durch Hensel und Landsberg, Steinitz und namentlich E. Noether wichtige Einzelfortschritte gemacht worden, doch blieben die wesentlichen Aufgaben im ganzen noch ungelöst. In einer Reihe von Abhandlungen, die zumeist in den mathematischen Annalen erschienen sind, gelang es nun van der Waerden, gestützt auf die Resultate seiner Vorgänger, unter Verwendung neuer geistreicher Hilfsmittel sowohl algebraischer als auch mehr topologischer Natur den Problemen eine neue Wendung zu geben und entscheidende Fortschritte zu erzielen. Es ist zu erwarten, daß namentlich die abzählende Geometrie, deren Ergebnisse man bis jetzt mit nicht unberechtigter Skepsis gegenüberstand, von den Methoden und Resultaten von van der Waerden den größten Nutzen ziehen wird.
Neben der Theorie der Elimination und im Zusammenhang mit dieser beschäftigte sich van der Waerden mit großem Erfolg in mehreren Abhandlungen mit der Idealtheorie sowohl im engeren, zahlentheoretischen Sinne, als auch mit der Idealtheorie der Polynome, mit der Invariantentheorie sowohl in der Algebra als auch in der Riemannschen Geometrie, mit speziellen topologischen Fragen mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, in einigen kleineren Arbeiten schließlich mit Problemen der Theorie algebraischer Zahlkörper und der Mengenlehre.
Van der Waerden ist ein sehr starkes, vorwiegend algebraisch und algebraisch-geometrisch orientiertes Talent voll von jugendlichem Schwung und voll von Frische. Schon jetzt zählt er zu den bedeutendsten Mathematikern dieser Richtung in der jungen Generation, und es wird zweifellos manches heute noch ungelöste Problem durch ihn der Lösung zugeführt werden. Es mag in diesem Zusammenhang noch einmal darauf hingewiesen werden, daß gerade die Algebra und Geometrie, insbesondere ihre mehr algebraisch gefärbten Kapitel, es sind, die früher in Leipzig durch Hölder, Rohn und Herglotz mit Erfolg gepflegt wurden, eine Tradition, deren Fortführung durch van der Waerden als besonders willkommen bezeichnet werden müßte.“

Diese Erwartungen der Fakultät wurden durch VAN DER WAERDEN in den Jahren 1931 bis 1945 seiner Tätigkeit an der Universität Leipzig in Lehre und Forschung mehr als erfüllt.
Seine Lehrtätigkeit in dieser Zeit umfaßt ein breites Spektrum von Vorlesungen, von den Grundvorlesungen (Analytische und Darstellende Geometrie, Algebra und

auch Analysis) bis zu einer Reihe verschiedenartiger Spezialvorlesungen auf den Gebieten Gruppentheorie, Algebraische Geometrie, Zahlentheorie, Topologie, euklidische und nichteuklidische Geometrie, aber auch Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Statistische Methoden für Mediziner und Biologen, Grundlagen der Mathematik, Geschichte der Astronomie und der Mathematik im Altertum, Elementargeometrie vom höheren Standpunkt. Diese breite Vorlesungstätigkeit schlug sich auch in Lehrbüchern nieder, die noch heute zu den Standardwerken zählen. So gehörte er auch seit 1934 zu den Herausgebern der wichtigen Lehrbuchreihe „Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen", ferner war er ebenfalls seit 1934 Mitherausgeber der Mathematischen Annalen.

B. L. van der Waerden ist auch seit dem 31. 7. 1934 ordentliches Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Im Protokollbuch der mathematisch-physikalischen Klasse heißt es hierzu in bezug auf die Sitzung vom 18. Juni 1934:

„Von den Herren Hölder, Le Blanc, Debye, Heisenberg, Hund wird Herr Professor B. L. van der Waerden — Leipzig zur Präsentation als ordentliches Mitglied vorgeschlagen ..."

Wir können heute sagen, daß er Inhaber der Goldenen Cothenius-Medaille der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina ist, ferner ist er Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina in Halle, korrespondierendes Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München, der Akademie der Wissenschaften in Göttingen und der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, ausländisches Mitglied der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen in Amsterdam. Außerdem erhielt er 1961 die Ehrendoktorwürde an der Universität Athen wegen seiner Forschungen über die Mathematik und Astronomie der alten Griechen; der Vorschlag hierzu ging von Prof. D. Kappos (Athen) aus, der von 1942 bis 1945 Mitarbeiter von van der Waerden in Leipzig war.

Zusammen mit seinen Leistungen in der Forschung, von denen noch zu berichten sein wird, ergibt sich ein Tätigkeitsfeld, das um so mehr Bewunderung abnötigt, als auch van der Waerden als Ausländer zur Zeit des Faschismus starken Anfechtungen ausgesetzt war, wie die Leipziger Universitätsakten ausweisen (siehe hierzu auch die später verfaßte Arbeit [3a] von G. Eisenreich. Wieviel Kraft mag es gekostet haben, daß er der Fakultät bis 1945 treu geblieben ist (trotz ausgebombter Wohnung seit 1943) und eine Haltung bewahrt hat, die am besten in einem Schreiben des damaligen Rektors, Prof. Dr. H.-G. Gadamer vom 7. 8. 1947 wie folgt beurteilt wird:

„Herr Professor Bartel van der Waerden war Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Er hat der NSDAP oder einer ihrer Gliederungen nicht angehört und war mir auch persönlich als ein bewußter und entschiedener Gegner des nationalsozialistischen Regimes bekannt. Es bestehen gegen ihn also keinerlei politische Bedenken."

Dieser Einstellung entsprechend, betreute er auch mehrere Doktoranden aus dem Ausland; insgesamt promovierten bei ihm in dieser Zeit 10 Mathematiker auf verschiedenen Gebieten. Einer seiner bekanntesten Doktoranden dürfte Wei-Liang Chow aus Schanghai sein. Er promovierte sich am 25. 6. 1936 mit der Dissertation „Die geometrische Theorie der algebraischen Funktionen für beliebige vollkommene Körper". Auch ein Mathematiker der DDR, Prof. Dr. Georg Wintgen (Humboldt-Universität Berlin) promovierte bei ihm am 9. 2. 1942 mit der Dissertation „Zur Darstellungstheorie der Raumgruppen".

Wir wollen nun versuchen, einen Einblick in seine entsprechend umfangreiche Forschungstätigkeit zu vermitteln. Seine Schaffenskraft ging in den 14 Leipziger Jahren über das von der Fakultät abgesteckte Spektrum weit hinaus, wie das Studium seiner mathematischen Publikationen aus diesen Jahren beweist, vgl. z. B. „Poggendorff" VII A.

Der Hauptinhalt seines Schaffens in dieser Zeit wird jedoch durch seine richtungweisenden Beiträge zu wichtigen Problemen der algebraischen Geometrie bestimmt. Damit führte er eine Aufgabe weiter aus, der er sich bereits in den zwanziger Jahren zugewandt hatte. Es ging ihm damals um eine strenge Begründung der algebraischen Geometrie. Seine diesbezüglichen Ansätze wurden durch seinen engen wissenschaftlichen Kontakt zu EMMY NOETHER, den er seit 1924 in Göttingen hatte, vervollkommnet. Hieraus resultierten eine Reihe wichtiger Arbeiten, so u. a. [30, 31, 32] und [33]. In [30] zeigte er, daß die bisherige Begründung der algebraischen Geometrie *einfacher* und *vollständiger* gestaltet werden kann, und zwar ohne Hilfe der Eliminationstheorie. Sie erfolgte mit den Methoden der von E. STEINITZ aufgebauten Körpertheorie und der von E. NOETHER herrührenden allgemeinen Idealtheorie in Ringbereichen. Diese Arbeit enthält bereits etwas wesentlich Neues. In der italienischen algebraischen Geometrie spielt nämlich der Begriff des „allgemeinen Punktes" eine große Rolle, ohne daß genau feststand, was damit gemeint war. Es gelang VAN DER WAERDEN, mit Hilfe der Idealtheorie ein Objekt zu definieren, das in den geometrischen Betrachtungen alles das leistete, was man davon erwartete. Jede irreduzible Mannigfaltigkeit hat einen allgemeinen Punkt, und die algebraischen Eigenschaften dieses Objektes bestimmen die Dimension der Mannigfaltigkeit in Übereinstimmung mit dem aus der älteren algebraischen Geometrie geläufigen Begriff.

VAN DER WAERDEN ging es jedoch nicht nur um eine strenge Darstellung der Grundbegriffe der algebraischen Geometrie, sondern er hatte überdies die Bewältigung konkreter Probleme im Auge. Dabei handelt es sich um die aus dem 15. Hilbertschen Problem resultierenden Fragen des Multiplizitätsbegriffes und die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes. Dazu finden sich in den Arbeiten [31, 32, 33] auch wichtige Erkenntnisse zur Grundlegung, insbesondere zur Theorie der Polynomideale. Gleichzeitig mußte er jedoch die Grenzen dieser idealtheoretischen Methoden erkennen, indem er zeigte, daß die Ideallänge nicht in allen Fällen die geeignete Multiplizität für die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes liefert. In [32], S. 770, schätzt er dieses Ergebnis folgendermaßen ein: „In these cases we must reject the notion length and try to find another definition of multiplicity." Damit stand wohl für ihn der Verzicht auf die Idealtheorie als entscheidendes Hilfsmittel für die Grundlegung zur Diskussion. Gleichzeitig folgte er so auch der damals weithin verbreiteten Tendenz, die Idealtheorie durch andere Methoden zu ersetzen (vgl. [38], S. 440). GERRETSEN kommt in [5], S. 150, sogar zu der Einschätzung, daß „der Gebrauch von schwierigen idealtheoretischen Betrachtungen manchen Geometer zur Verzweiflung brachte".

Eine derartige „idealfreie" Begründung der algebraischen Geometrie durch VAN DER WAERDEN war daher folgerichtig, sie fällt zeitlich mit seinem Wirken an der Leipziger Universität zusammen.

Hierzu entstand in diesem Zeitraum eine Serie von Abhandlungen „Zur algebraischen Geometrie" in den „Mathematischen Annalen" ab Band 108 (1933), die in Fachkreisen als die „ZAG"-Arbeiten Berühmtheit erlangten. VAN DER WAERDEN formuliert in ZAG VI, [34], S. 134, das Ziel dieser Abhandlungen wie folgt: „Das Ziel ist nicht nur, neue Sätze aufzustellen, sondern auch die weitreichenden Methoden und Begriffsbildungen der italienischen geometrischen Schule in exakter algebraischer Begründung dem Leserkreis der Mathematischen Annalen näherzubringen." In einer neueren historischen Betrachtung [40] beschreibt VAN DER WAERDEN diese Situation wie folgt: "The italian school, headed by Corrado Segre, Castelnuovo, Enriques and Severi, erected an admirable structure, but its logical foundation was shaky. The notions were not well-defined, the proofs were insufficient." Ferner heißt es hierzu in [41]: „Die grundlegenden Ideen der großen italienischen Geometer bestanden, in diesem wie in vielen anderen Fällen, die Feuerprobe der logischen Kritik."

Seine Untersuchungen führten ihn in den Arbeiten ZAG XIII und XIV zu seiner „einfachsten" (siehe [39], S. 158) Darstellung der Begründung der algebraischen Geometrie. Hierzu ist es wohl gerechtfertigt, das gesamte Vorwort sowohl zu ZAG XIII [35] als auch zu ZAG XIV [36] zu zitieren:

Vorwort zu ZAG XIII: „In einer Reihe von Arbeiten habe ich versucht, eine rein algebraische und strenge Grundlage der algebraischen Geometrie zu schaffen. Da diese Arbeiten sich über mehr als zehn Jahre erstrecken, war es unvermeidlich, daß die in früheren Arbeiten entwickelten Begriffe später etwas verallgemeinert und abgewandelt wurden, daß der Schwerpunkt sich manchmal verschoben hat, daß Begriffsbildungen durch andere ersetzt wurden. Auch ergaben sich starke Vereinfachungen vor allem dadurch, daß die schwierigen idealtheoretischen Hilfsmittel, die anfangs herangezogen wurden, sich als unnötig herausgestellt haben. Schließlich bin ich durch Zuschriften und eigene Vorlesungserfahrungen auf die schwierige, manchmal etwas zu knappe Darstellung in einigen der erwähnten Arbeiten aufmerksam geworden. Aus allen diesen Gründen erschien eine neue, vereinfachte und verbesserte Darstellung der Grundlagen der algebraischen Geometrie angebracht. In dieser Arbeit beschränke ich mich in der Hauptsache darauf, die Ergebnisse der Arbeiten „Nullstellentheorie", „Multiplizitätsbegriff" und ZAG I sowie den Anfang von ZAG VI neu darzustellen, in einer anschließenden Arbeit (ZAG XIV) sollen die von ‚Bézout' neu bewiesen und erweitert werden. Dabei wird aus der Idealtheorie ausschließlich der Hilbertsche Basissatz (vgl. meine Moderne Algebra II, § 80), ferner aus der Eliminationstheorie der Hilbertsche Nullstellensatz und die Existenz des Resultantensystems für homogene Formen benutzt werden. Aus der Algebra wird sonst nur die Körpertheorie (Moderne Algebra I, Kap. 3, 4 und 10) als bekannt vorausgesetzt, aus der Geometrie der Begriff des projektiven Raumes und die einfachsten Sätze über lineare Unterräume.
Die vorliegende Arbeit ZAG XIII sowie die vorangehenden ZAG V, VI und IX und die nachfolgende ZAG XIV werden die Grundlage meiner weiteren Untersuchungen zur algebraischen Geometrie bilden."

Vorwort zu ZAG XIV: „1928 habe ich zum ersten Male eine Definition der Multiplizität eines Schnittpunktes von zwei Mannigfaltigkeiten M_d und M_{n-d} im projektiven Raum S_n gegeben und bewiesen, daß die Summe der Multiplizitäten der Schnittpunkte gleich dem Produkt der Gradzahlen ist. Mein Beweis beruhte auf einem einfachen Grundgedanken von G. Schaake, benutzte aber daneben schwierige, meist idealtheoretische Hilfsmittel. 1933 gab Severi von derselben Multiplizitätsdefinition ausgehend, einen einfacheren, auf dem Chasles-Schubertschen Korrespondenzprinzip beruhenden Beweis. Ich werde nun im ersten Teil dieser Arbeit zeigen, daß mein ursprünglicher Beweis sich unter Beibehaltung des Grundgedankens, aber unter Vermeidung der Idealtheorie so sehr vereinfachen läßt, daß er an Kürze und Natürlichkeit nichts zu wünschen übrig läßt (§§ 1 bis 3).
Der Grundgedanke ist folgender. Durch eine singuläre projektive Transformation wird die Mannigfaltigkeit M_d in eine zerfallende M_d verwandelt, die in so viele lineare Räume zerfällt, als der Grad von M_d beträgt. Die Zahl der Schnittpunkte dieser zerfallenden Mannigfaltigkeit mit der anderen M_{n-d} ist offenbar gleich dem Produkt der Gradzahlen.
Auf Grund des Prinzips der Erhaltung der Anzahl ist also die Schnittpunktanzahl irgend einer zu M_d projektiv äquivalenten Mannigfaltigkeit (insbesondere von M_d

selbst) mit M_{n-d} ebenfalls gleich dem Produkt der Gradzahlen, wenn noch bewiesen werden kann, daß beim Übergang von einer allgemeinen zu der singulären Projektivität keine Schnittpunkte zusammenrücken. Dieses nun hatte ich früher idealtheoretisch bewiesen, es folgt aber viel einfacher aus der Tatsache, daß die zerfallende Mannigfaltigkeit M_d die andere M_{n-d} bei passender Wahl der singulären Projektivität nicht berührt.
Die Tatsache, daß jede Mannigfaltigkeit durch eine singuläre Projektivität in eine voll zerfallende übergeführt werden kann, ist auch für den zweiten Teil dieser Abhandlung grundlegend.
Im § 4 wird folgender Satz bewiesen: Wenn eine algebraische Mannigfaltigkeit M_d ein algebraisches System von Mannigfaltigkeiten durchläuft, und man schneidet sie mit einer festen Mannigfaltigkeit M_e, so durchläuft die Schnittmannigfaltigkeit M_{d+e-n} ebenfalls ein algebraisches System, sofern ihre Bestandteile mit ihren Schnittmultiplizitäten gezählt werden. Der Satz ist leicht für den Fall eines linearen Raumes M_e zu beweisen, während eine beliebige M_e wieder durch eine singuläre lineare Transformation in lineare Räume zerlegt wird.
Im § 5 wird dieser Satz auf Mannigfaltigkeiten M_d und M_e in einer singularitätenfreien M_n übertragen. Dadurch wird eine algebraische Begründung sowohl des Schubertschen Kalküls der abzählenden Geometrie (siehe § 6) als auch der von Severi entwickelten Theorie der Äquivalenzscharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten ermöglicht."

Van der Waerdens langjährige Beschäftigung mit der algebraischen Geometrie in Forschung und Lehre legte es nahe, ein Buch über diesen Gegenstand zu schreiben, welches 1939 unter dem Titel „Einführung in die algebraische Geometrie" in der Reihe „Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen" als Band 51 erschien. Im Vorwort zur ersten Auflage heißt es dazu:

„... Die Erfahrung meiner mehrfach gehaltenen Vorlesungen über algebraische Kurven und Flächen kam mir bei der Ausführung sehr zustatten, ich konnte dabei eine von den Herren Dr. M. Deuring und Dr. V. Garten angefertigte Vorlesungsausarbeitung benutzen. Daneben wurde viel Material aus meiner Aufsatzreihe „Zur algebraischen Geometrie" in den Mathematischen Annalen entlehnt.
Bei der Auswahl des Stoffes waren nicht ästhetische Gesichtspunkte, sondern ausschließlich die Unterscheidung: notwendig — entbehrlich maßgebend. Alles das, was unbedingt zu den „Elementen" gerechnet werden muß, hoffe ich, aufgenommen zu haben. Die Idealtheorie, die mich bei meinen früheren Untersuchungen leitete, hat sich für die Grundlegung als entbehrlich herausgestellt, an ihre Stelle sind die weitertragenden Methoden der italienischen Schule getreten. ..."

Der Verzicht auf die Idealtheorie für die Grundlegung der algebraischen Geometrie erwies sich als nicht unproblematisch: So konnten die Mißverständnisse bei der Diskussion um das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker erst mit idealtheoretischen Hilfsmitteln durch Perron [16] völlig ausgeräumt werden. Das Festhalten an der Idealtheorie für die Grundlegung etwa durch Gröbner [6] und Krull [13] hat daher durchaus seine Bedeutung. H. L. Schmid sprach in diesem Zusammenhang von „sich einander ausschließenden Parteien" in der algebraischen Geometrie.
Bei der Neuentwicklung der algebraischen Geometrie seit der Mitte der vierziger Jahre kommt jedoch die kommutative Algebra unter Einschluß der Idealtheorie voll zum Tragen. Dies zeigt sich auch in neueren Arbeiten von van der Waerden, siehe z. B. [39]. Durch diese Entwicklung scheint die damalige Bedeutung des Verzichts auf die Idealtheorie bei der Grundlegung aus heutiger Sicht relativiert.
Somit lag es nahe, auch für den Ausgangspunkt des damaligen Verzichtes auf die

Idealtheorie (Multiplizitätstheorie und Bezoutscher Satz) nach „Synthesen" für die Auffassungen der verschiedenen „Parteien" zu suchen. Eine derartige Synthese ist z. B. bei P. SAMUEL [22] zu finden. Wir wollen im folgenden eine weitere Synthese auf der Grundlage der Untersuchungen in [17, 3, 26, 20, 27, 29, 18] beschreiben. Es wird sich dabei zeigen, daß wir heutzutage imstande sind, die Problematik des Bezoutschen Satzes allein mit idealtheoretischen Mitteln umfassend zu klären. Es geht also nicht nur darum, die Grenzen der Gültigkeit (bei Zugrundelegung der Ideallänge als Multiplizitätsdefinition) abzustecken, siehe z. B. [7], Vorwort. Vielmehr sind wir in der Lage, mittels einer induktiven Definition der Schnittmultiplizität, die nur Längen wohldefinierter Primärideale benutzt, eine rein idealtheoretische Beweisführung des Bezoutschen Satzes zu geben. Wir glauben, daß wir damit eine Severische Forderung erfüllen, die nach W. GRÖBNER, [8], S. 9/10, besagt, daß die Interpertation der Idealtheorie den Bezoutschen Satz ausnahmslos konservieren müßte, eine Forderung, die nach Ergebnissen von VAN DER WAERDEN [33] zunächst nicht realisierbar erschien. — In diesem Sinne soll daher im folgenden auch gezeigt werden, wie Ideen und Ansätze einerseits VAN DER WAERDEN und andererseits von Vertretern eines idealtheoretischen Aufbaus der algebraischen Geometrie, wie etwa durch W. GRÖBNER, heutzutage durchaus in Einklang gebracht werden können.

§ 2. Über den Bezoutschen Satz

Es ist unser Ziel, einige Ergebnisse zu den beiden folgenden Problemkreisen zusam menzustellen.

1. Hinreichende und *notwenige* Bedingungen für die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes bei Zugrundelegung einer Schnittmultiplizität durch die Ideallänge.

2. Ein idealtheoretischer Beweis des Bezoutschen Satzes.

Dieser Beweis erfolgt nach [29] und besteht aus drei wesentlichen Beweisschritten:
- Induktive Definition einer idealtheoretischen Schnittmultiplizität, die nur Längen wohldefinierter Primärideale benutzt und ein Vergleich mit anderen Multiplizitätstheorien.
- Beweis des Bezoutschen Satzes mittels der Idealtheorie.
- Zu beiden Problemkreisen benötigen wir die wichtige Aussage, daß man für den Beweis des Bezoutschen Satzes ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen darf, daß eine der beiden Varietäten durch ein Ideal der Hauptklasse gegeben ist.

Für unsere Darlegungen setzen wir nun einige Kenntnisse aus der Idealtheorie voraus, wie sie etwa in [19] entwickelt worden sind. Entsprechend unserem Anliegen arbeiten wir mit homogenen Polynomidealen eines Polynomringes $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit Unbestimmten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K.

Es sei $\mathfrak{a}$ ein homogenes Polynomideal. Die Anzahl der linear unabhängigen Formen t-ten Grades, die in $\mathfrak{a}$ enthalten sind, werde als *Volumenfunktion* $V(t; \mathfrak{a})$ bezeichnet. Wir bezeichnen mit $H(t; \mathfrak{a}) := \binom{t+n}{n} - V(t; \mathfrak{a})$ die *Hilbertfunktion* von $\mathfrak{a}$. Wir wissen, daß diese Funktion für genügend große Werte von t ein Polynom in t ist, das einen wohldefinierten Grad d besitzt; d heißt auch die (homogene) *Dimension* von $\mathfrak{a}$, die mit $d =: \dim(\mathfrak{a})$ bezeichnet wird. Dieses Polynom schreiben wir wie folgt auf:

$$H(t; \mathfrak{a}) = h_0 \binom{t}{d} + h_1 \binom{t}{d-1} + \cdots + h_d,$$

wobei die Koeffizienten $h_0 =: h_0(\mathfrak{a})$ (> 0), $h_1 =: h_1(\mathfrak{a}), \ldots, h_d =: h_d(\mathfrak{a})$ ganze Zahlen sind. Der Leitkoeffizient $h_0(\mathfrak{a})$ heißt auch *Ordnung* von $\mathfrak{a}$ (einen ersten vollständigen Beweis gab van der Waerden, siehe [32, 33]).

Für die Formulierung des Bezoutschen Satzes seien nun $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ungemischte homogene Polynomideale. Mit der Ungemischtheit von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ meinen wir, daß alle assoziierten Primideale einer Primärzerlegung (siehe z. B. [19], Kap. 2) von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ jeweils dieselbe Dimension besitzen. Wir setzen ferner die folgende Dimensionsbedingung voraus:

$$\dim(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \dim(\mathfrak{a}) + \dim(\mathfrak{b}) - n.$$

Wir bemerken, daß van der Waerden als erster bewies, daß stets $\dim(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \geqq \dim(\mathfrak{a}) + \dim(\mathfrak{b}) - n$ gilt. Im Falle der geforderten Gleichheit sprechen wir von einem „eigentlichen Schnitt“. Der Bezoutsche Satz — in idealtheoretischer Fassung — besagt nun folgendes:

Für jedes höchstdimensionale Primideal $\mathfrak{p}$, das zum Summenideal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gehört, existiert eine „Schnittmultiplizität“ $i_\mathfrak{p}$, so daß gilt:

$$h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{p}} i_\mathfrak{p} \cdot h_0(\mathfrak{p}).$$

Wir wollen hier nur bemerken, daß eine fast 200 Jahre intensive mathematische Forschung erforderlich war, um diesen Satz zu beweisen. Für weitere historische Bemerkungen verweisen wir etwa auf [17, 29, 12].

Um unseren ersten Problemkreis behandeln zu können, wollen wir die sogenannte idealtheoretische Schnittmultiplizität einführen.

Definition. Die (idealtheoretische) Multiplizität eines Primärideals $\mathfrak{q}$, das zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehört, ist gleich der Länge l (= Anzahl der Glieder) einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{q}$ nach $\mathfrak{p}$, d. h. einer echten Teilerkette

$$\mathfrak{q} =: \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_l := \mathfrak{p},$$

die aus lauter zu $\mathfrak{p}$ gehörenden Primäridealen besteht und durch Einschalten weiterer Glieder nicht mehr verlängert werden kann.

Wir bezeichnen diese Multiplizität mit $l_\mathfrak{p}(\mathfrak{q})$ oder kurz mit $l_\mathfrak{p}$, falls keine Mißverständnisse auftreten können. Mit dieser Multiplizität gilt z. B. die wohlbekannte Aussage (siehe z. B. [19], Kap. 6, 6.4, Satz 26, S. 278):

$$h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{p}} l_\mathfrak{p}(\mathfrak{q}) \cdot h_0(\mathfrak{p}),$$

wobei über alle höchstdimensionalen Primideale $\mathfrak{p}$ von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ summiert wird, und $l_\mathfrak{p}(\mathfrak{q})$ ist die Multiplizität des eindeutig bestimmten Primärideals $\mathfrak{q}$ von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, das zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehört. Ein Vergleich mit dem oben angegebenen Bezoutschen Satz läßt nun die Vermutung aufkommen, daß man für die gesuchte Schnittmultiplizität $i_\mathfrak{p}$ die idealtheoretische Multiplizität $l_\mathfrak{p}$ nehmen könnte. Wie bereits erwähnt, war es aber van der Waerden, der im Jahre 1928 durch ein Beispiel zeigte, daß dies nicht möglich ist. Vom Standpunkt der Idealtheorie wollen wir auch hier dieses Beispiel erneut durchrechnen (siehe z. B. auch [6], S. 180, und [15], S. 125):

Beispiel. Wir betrachten das wohlbekannte Primideal $\mathfrak{p}_M$, das bereits im Jahre 1916 von F. S. Macaulay angegeben worden ist (siehe [14], S. 98):

$$\mathfrak{p}_M := (x_1x_4 - x_2x_3, x_1^2x_3 - x_2^3, x_1x_3^2 - x_2^2x_4, x_2x_4^2 - x_3^3) \subset K[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4].$$

Wir setzen $\mathfrak{a} := \mathfrak{p}_M$ und $\mathfrak{b} := (x_1, x_4)$. Dann wird $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (x_1, x_4, x_2x_3, x_2^3, x_3^3)$ ein Primärideal $\mathfrak{q}$ mit dem assoziierten Primideal $\mathfrak{p} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Die idealtheoretische Multiplizität $l_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})$ von $\mathfrak{q}$ ergibt sich aus der folgenden Kompositionsreihe:

$$\mathfrak{q} =: \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 := (x_1, x_4, x_2x_3, x_2^2, x_3^3) \subset \mathfrak{q}_3 := (x_1, x_4, x_2, x_3^3)$$

$$\subset \mathfrak{q}_4 := (x_1, x_2, x_3^2, x_4) \subset \mathfrak{q}_5 := (x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathfrak{p},$$

d. h. $l_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}) = 5$.
Da $h_0(\mathfrak{p}_M) = 4$ ist (siehe z. B. [19], 8.2.1), verlangt aber der Bezoutsche Satz eine Schnittmultiplizität $i_{\mathfrak{p}} = 4$.

Es erhebt sich damit die Frage, was die tieferliegenden Ursachen dafür sind, daß der Bezoutsche Satz nicht gilt, wenn für die Schnittmultiplizität die idealtheoretische Multiplizität zugrunde gelegt wird. J.-P. Serre [23] beantwortet diese Frage im Jahre 1958 mit Hilfe der Cohen-Macaulay-Struktur lokaler Ringe.
Wir wollen im folgenden weitere einfache idealtheoretische Bedingungen angeben, die zu diesen strukturellen Aussagen äquivalent sind.

Für eine vollständige Beschreibung unserer Ergebnisse benötigen wir noch das Prinzip der Lokalisierung. Hierzu betrachten wir den Polynomring $R := K[x_0, \ldots, x_n]$, ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ und ein homogenes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p} \subset R$. Wir wollen den lokalen Ring von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{p}$ definieren. Wir betrachten Quotienten $f(x_0, \ldots, x_n)/g(x_0, \ldots, x_n)$ von Elementen f und g des Restklassenringes $R/\mathfrak{a}$, die homogen von demselben Grad sind, und g ist nicht enthalten in dem Primideal $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ in $R/\mathfrak{a}$. Die Gesamtheit dieser Quotienten bildet einen Ring, der genau ein maximales Ideal hat. Es ist das Ideal der Nichteinheiten dieses Ringes. Dies ist der lokale Ring von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{p}$, den wir mit $(R/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}}$ bezeichnen. Um das oben erwähnte Kriterium von Serre auch angeben zu können, beschreiben wir noch die Cohen-Macaulay-Eigenschaft lokaler Ringe. Sei hierzu A ein beliebiger lokaler Ring, d. h. ein kommutativer und noetherscher Ring mit Einselement, der genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ hat. Die kleinste Anzahl von Elementen, die ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal erzeugen, ist eine wohldefinierte nichtnegative ganze Zahl d und heißt die Krull-Dimension des Ringes A. Dafür schreiben wir kurz $\dim(A)$. Ein System von Elementen $a_1, \ldots, a_t \in \mathfrak{m}$ heißt eine *A-Sequenz*, wenn a_i kein Nullteiler im Restklassenring $A/(a_1, \ldots, a_{i-1})$ für alle $i = 1, \ldots, t$ ist. (Für $i = 1$ sei $(a_1, \ldots, a_{i-1})$ das Nullideal von A). Für die Anzahl t der Elemente einer A-Sequenz gilt stets $0 \leqq t \leqq \dim(A)$. Dies gibt nun Anlaß zur folgenden Definition.

Definition. A heißt *Cohen-Macaulay-Ring*, wenn eine A-Sequenz mit $t = \dim(A)$ Elementen existiert.

Wir wollen nun die Lösung unseres ersten Problemkreises beschreiben. Wie der später folgende Beweis des Bezoutschen Satzes deutlich macht, können wir die Untersuchung über den Bezoutschen Satz stets auf den Fall zurückführen, daß eine der beiden Varietäten durch ein Ideal der Hauptklasse gegeben ist. Wir werden daher im folgenden Satz von dieser Voraussetzung Gebrauch machen.

Satz 1. *Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ homogene Ideale des Polynomringes $R := K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, wobei $\mathfrak{b} = (f_1, \ldots, f_t)$ ein Ideal der Hauptklasse ist, d. h. $\dim(\mathfrak{b}) = n - t$. Für jedes höchstdimensionale Primideal $\mathfrak{p}$ von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ setzen wir die folgende Dimensionsbedingung voraus:*

$$\dim(R_{\mathfrak{p}}) = \dim\big((R/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}}\big) + \dim\big((R/\mathfrak{b})_{\mathfrak{p}}\big).$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $h_0\big((\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\big) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b})$.

(ii) $l_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}) = i_{\mathfrak{p}}$ *für alle höchstdimensionalen Primideale* $\mathfrak{p}$ *von* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, *wobei* $\mathfrak{q}$ *ein* $\mathfrak{p}$*-primäres Ideal und assoziiert ist zum Ideal* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

(iii) $(R/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}}$ *ist ein Cohen-Macaulay-Ring für alle höchstdimensionalen Primideale* $\mathfrak{p}$ *von* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

(iv) f_{i+1} *ist in keinem Primideal* $\mathfrak{p}$ *enthalten, das zu* $(\mathfrak{a}, f_1, \ldots, f_i)$ *gehört, so daß* $\dim(\mathfrak{p}) = \dim(\mathfrak{a}) - i - 1$ *ist für jedes* $i = 0, \ldots, t-1$.

(v) $h_1\big((\mathfrak{a}, f_1, \ldots, f_i)\big) = h_1\big((\mathfrak{a}, f_1, \ldots, f_i) : f_{i+1}\big)$ *für jedes* $i = 0, \ldots, t-1$

(vi) $\mathfrak{a} \cdot (R/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{b} \cdot (R/\mathfrak{b})_{\mathfrak{p}} = \big(\mathfrak{a} \cdot (R/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}}\big) \cdot \big(\mathfrak{b} \cdot (R/\mathfrak{b})_{\mathfrak{p}}\big)$ *für jedes höchstdimensionale Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Dieser Satz dürfte nicht nur die Grenzen für die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes bei Zugrundelegung einer Schnittmultiplizität durch die Ideallänge abstecken, sondern eröffnet im Sinne von [20] auch mehrere Möglichkeiten, über die Perfektheit beliebiger homogener Polynomideale zu entscheiden. Die Aussage (iv) des Satzes hellt den geometrischen Hintergrund für die Gültigkeit dieses ‚idealtheoretischen' Satzes gut auf und ergänzt die strukturelle Aussage (iii), die im wesentlichen auf J.-P. SERRE [23] zurückgeht. Die Beweise sind leider in verschiedenen Originalarbeiten verstreut, siehe [3, 9, 24, 26, 27]. Eine Darstellung, die einige Untersuchungen hierüber zusammenfaßt, wurde in [10], Kap. II, § 1, gegeben.
Es gibt auch Untersuchungen über die Gültigkeit der Aussage (i), wenn das Ideal $\mathfrak{b}$ kein Ideal der Hauptklasse ist. Hierzu wurde erstmals in [17] für eine beliebige Schnittdimension $h_0\big((\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\big) - h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b})$ explizit angegeben, siehe auch [28]. Im Hinblick auf die obige Bemerkung zur Voraussetzung über das Ideal $\mathfrak{b}$ wollen wir hier diese Untersuchungen nicht weiterverfolgen.

Wir wollen nun einen einfachen idealtheoretischen Beweis des Bezoutschen Satzes geben.

Bezoutscher Satz. *Es seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *ungemischte homogene Polynomideale in* $R_x := K[x_0, \ldots, x_n]$ *mit*

$$\dim(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \dim(\mathfrak{a}) + \dim(\mathfrak{b}) - n.$$

Für jedes höchstdimensionale Primideal $\mathfrak{p}$ *von* $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ *existiert eine Schnittmultiplizität* $i_{\mathfrak{p}}$, *so daß*

$$h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{p}} i_{\mathfrak{p}} \cdot h_0(\mathfrak{p})$$

gilt.

Wir führen zunächst die Polynomringe $R_y := K[y_0, \ldots, y_n]$ und $R := K[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n]$ ein. Es sei $\mathfrak{b}'$ dasjenige Ideal in R_y, für das eine Basis aus einer solchen für $\mathfrak{b}$ durch die Substitution $x_\nu \to y_\nu$ $(\nu = 0, \ldots, n)$ hervorgeht. Mit $\mathfrak{a} \cdot R$ und $\mathfrak{b}' \cdot R$ bezeichnen wir die Erweiterungsideale von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}'$ in R. Ein entscheidender Beweisschritt wird nun durch das folgende Lemma gegeben.

Lemma 1. $h_0(\mathfrak{a} \cdot R_x) \cdot h_0(\mathfrak{b} \cdot R_x) = h_0(\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R)$.

Der Nachweis kann mit Hilfe der folgenden Isomorphie erbracht werden (vgl. z. B. [44], Vol. I, Ch. III, 14, Theorem 35, S. 184):

$$R/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}') \cdot R \cong R_x/\mathfrak{a} \cdot R_x \otimes_K R_y/\mathfrak{b}' \cdot R_y,$$

d. h., die Hilbertfunktion $H\big(t, (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}') \cdot R\big)$ von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}') \cdot R$ kann aus den Hilbertfunktionen von $\mathfrak{a} \cdot R_x$ und $\mathfrak{b}' \cdot R_y$ berechnet werden; es gilt nämlich

$$H\big(t, (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}') \cdot R\big) = \sum_{i+j=t} H(i, \mathfrak{a}) \cdot H(j, \mathfrak{b}').$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß der Grad und der Leitkoeffizient des Hilbertpolynoms von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}') \cdot R$ durch $d + \delta + 1$ und $h_0\big((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}') \cdot R\big)$ (siehe z. B. [17], Satz 5) gegeben sind. Wir wählen nun eine Zahl r, so daß die Hilbertfunktionen $H(i, \mathfrak{a}) =: H_i$ und $H(i, \mathfrak{b}') =: H_i'$ durch ihre Hilbertpolynome h_i bzw. h_i' für $i > r$ gegeben sind. Wir zerlegen dann für $t \gg 0$ $(t > 2r)$:

$$\sum_{i=0}^{t} H_i \cdot H'_{t-i} = \sum_{i=0}^{t} h_i \cdot h'_{t-i} + \sum_{i=0}^{r} (H_i - h_i) \cdot h'_{t-i}$$
$$+ \sum_{i=t-r}^{t} h_i \cdot (H'_{t-i} - h'_{t-i}).$$

Einige Berechnungen über die Ordnungen ergeben dann

$$\sum_{i=0}^{t} H_i \cdot H'_{t-i} = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}') \left[\sum_{i=0}^{t} \binom{i}{d} \cdot \binom{t-i}{\delta}\right] + \text{(weitere Ausdrücke)}$$
$$= h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}') \binom{t}{d+\delta+1}$$
$$+ \text{(Ausdrücke, die einen Grad} \leqq d + \delta \text{ in } n \text{ haben).}$$

Dies liefert unser Lemma, da $h_0(\mathfrak{b}' \cdot R_y) = h_0(\mathfrak{b} \cdot R_x)$ ist.

Wir setzen nun $\mathfrak{c} := (x_0 - y_0, x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ und geben die folgende Bemerkung, die z. B. aus [44], Vol. II, Ch. VIII, § 8, Beweis des Theorems 27, folgt.

B e m e r k u n g. Es gibt eine eineindeutige Zuordnung zwischen den isolierten Primidealen des Ideals $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ in R_x und den isolierten Primidealen des Ideals $\big((\mathfrak{a} + \mathfrak{b}') \cdot R + \mathfrak{c} \cdot R\big)$ in R. Sie ist gegeben durch

$$\mathfrak{p} \mapsto (\mathfrak{p}, x_0 - y_0, \ldots, x_n - y_n),$$

d. h., die Dimensionen und Ordnungen der einander entsprechenden Primideale sind gleich.

Diese Bemerkung und unsere Dimensionsvoraussetzung

$$\dim(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \dim(\mathfrak{a}) + \dim(\mathfrak{b}) - n$$

im Bezoutschen Satz ergeben daher das folgende Lemma.

L e m m a 2. $\dim\big((\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R) + \mathfrak{c} \cdot R\big) = \dim\big((\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R)\big) - (n + 1).$

Wir wollen jetzt eine Definition geben, die es uns schließlich ermöglicht, Schnittmultiplizitäten $i_\mathfrak{p}$ als Längen wohldefinierter Primärideale einzuführen. Derartige Ansätze sind bereits seit einiger Zeit bekannt, siehe z. B. [11, 21, 25] und werden auch immer wieder benutzt, siehe z. B. [43, 1, 4]. Sie wurden jedoch nicht herangezogen, um eine globale Aussage, wie z. B. den Bezoutschen Satz, zu beweisen. Dies ist aber durch ein lokal-global-Prinzip möglich, das in unserem Fall erst durch unser Lemma realisiert werden kann. Das lokale Prinzip wird durch den unten folgenden Satz dargestellt.

Die Tragweite des lokal-global-Prinzips wird durch den hier dargelegten Beweis des Bezoutschen Satzes deutlich.

Zunächst führen wir folgende Bezeichnung ein.

Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ bezeichne $U(\mathfrak{a})$ den Durchschnitt aller höchstdimensionalen Primärideale, die zu $\mathfrak{a}$ gehören.

Definition. $(\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R)_{-1} := (\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R)$ *und* $(\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R)_k = \big((x_k - y_k) + U((\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R)_{k-1})\big)$ *für* $k = 0, \ldots, n$.

Lemma 3. *Die Ideale* $(\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R)_k$ *und* $\big((\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R) + (x_0 - y_0, \ldots, x_k - y_k)\big)$ *haben dieselben höchstdimensionalen assoziierten Primideale für* $k = 0, \ldots, n$.

Unter Benutzung von Lemma 1 und der Voraussetzung, daß die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ungemischt in R sind, kann der Beweis dieses Lemmas z. B. mit dem Krullschen Hauptidealsatz geführt werden. Das Lemma 2 und Lemma 3 liefern nun die folgende Proposition, die einen weiteren entscheidenden Beweisschritt in unserem Beweis des Bezoutschen Satzes darstellt.

Proposition. $h_0\big((\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R)\big) = h_0\big((\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R)_n\big)$.

Indem wir unser Lemma 1 und die Proposition benutzen, erhalten wir nun

$$h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{p}'} l_{\mathfrak{p}'} \cdot h_0(\mathfrak{p}'),$$

wobei $\mathfrak{p}'$ alle höchstdimensionalen assoziierten Primideale von $(\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R)_n$ durchläuft, und $l_{\mathfrak{p}'}$ bezeichnet die Länge des wohldefinierten Primärideals von $(\mathfrak{a} \cdot R + \mathfrak{b}' \cdot R)_n$, das zum Primideal $\mathfrak{p}'$ gehört. Auf Grund der obigen Bemerkung und des Lemmas 2 können wir für die Schnittmultiplizität $i_{\mathfrak{p}}$ im Bezoutschen Satz

$$i_{\mathfrak{p}} := l_{\mathfrak{p}}$$

für jedes höchstdimensionale assoziierte Primideal $\mathfrak{p}$ von $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ in R_x setzen. Ferner folgt, daß $h_0(\mathfrak{p}') = h_0(\mathfrak{p})$ ist, d. h., wir erhalten:

$$h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{p}} i_{\mathfrak{p}} \cdot h_0(\mathfrak{p}),$$

und dies beweist den Bezoutschen Satz.

Es ergibt sich natürlich jetzt die Frage, wie unsere Multiplizität $i_{\mathfrak{p}}$ mit den üblichen Schnittmultiplizitäten zusammenhängt. Den Zusammenhang wollen wir nun im folgenden beschreiben: Zunächst bemerken wir, daß — wie eingangs erwähnt — unser Beweis des Bezoutschen Satzes zeigt, daß wir für einen Beweis dieses Satzes o. B. d. A. voraussetzen dürfen, daß ein Ideal als Ideal der Hauptklasse gegeben ist. Unter dieser Annahme vereinfacht sich dann auch sehr die Beweisführung des Bezoutschen Satzes. Dies soll im folgenden kurz beschrieben werden.
Es sei $\mathfrak{b} = (F_1, \ldots, F_t)$ in R_x ein Ideal der Hauptklasse t, d. h. $\dim(\mathfrak{b}) = n - t$. Für ein ungemischtes Ideal $\mathfrak{a} \subset R_x$ mit $\dim(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \dim(\mathfrak{a}) - t$ definieren wir dann:

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_k = (F_k) + U(\mathfrak{a}_{k-1}) \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, t.$$

Es gilt wieder, daß $\mathfrak{a}_k$ und $(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_k)$ dieselben höchstdimensionalen assoziierten Primideale haben. Für ein höchstdimensionales assoziiertes Primideal $\mathfrak{p}$ von $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ definieren wir daher die Schnittmultiplizität $i_{\mathfrak{p}}$ als Länge $l_{\mathfrak{p}}\big(\mathfrak{q}(\mathfrak{a}_t)\big)$ des Primärideals $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}_t)$ von $\mathfrak{a}_t$, das zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehört. Die Beweismethoden, die wir für die Herleitung des Bezoutschen Satzes benutzt haben, liefern damit die

Folgerung. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein ungemischtes homogenes Ideal in* R_x *und* $\mathfrak{b} = (F_1, \ldots, F_t)$ *ein homogenes Ideal in* R_x *mit* $\dim(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \dim(\mathfrak{a}) - t$. *Dann gilt*

$$h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{p}} l_{\mathfrak{p}}\big(\mathfrak{q}(\mathfrak{a}_t)\big) \cdot h_0(\mathfrak{p}),$$

wobei summiert wird über alle höchstdimensionalen assoziierten Primideale $\mathfrak{p}$ *von* $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$.

Wir wollen nun noch die Frage untersuchen, wie die von uns eingeführte Multiplizität $l_{\mathfrak{p}}\big(\mathfrak{q}(\mathfrak{a}_t)\big)$ mit den anderen Schnittmultiplizitäten zusammenhängt. Es sei hierzu A

der lokale Ring von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{p}$, d. h. $A = (R_x/\mathfrak{a})_\mathfrak{p}$. Dann erzeugen die Elemente $F_1, \ldots, F_t$ in A ein Parameterideal $\mathfrak{q}$, und die Samuelsche Multiplizität $e_0(\mathfrak{q}, A)$ ist wohldefiniert (siehe z. B. [44], Vol. II, Ch. VIII, § 10). Standardmethoden der lokalen Algebra liefern nun den folgenden Satz (siehe [2]):

Satz 2. $l_\mathfrak{p}(\mathfrak{q}(\mathfrak{a}_t)) = e_0(\mathfrak{q}, A)$.

Der Reduktionssatz von P. SAMUEL [22], S. 83, zeigt nun, daß unsere Multiplizität $l_\mathfrak{p}(\mathfrak{q}(\mathfrak{a}_t))$ auch mit der Weilschen Schnittmultiplizität [42] übereinstimmt, d. h., die Länge des wohldefinierten Primärideals $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}_t)$ von $\mathfrak{a}_t$ stimmt mit den üblichen Schnittmultiplizitäten überein.
Wir möchten noch bemerken, daß die von uns eingeführte Schnittmultiplizität $i_\mathfrak{p}$ für beliebige sich eigentlich schneidende Varietäten auch generell als lokale Schnittmultiplizität mit den Methoden von [2] nachgewiesen werden kann.

Wir schließen nun unseren Artikel, indem wir noch einmal das von VAN DER WAERDEN [33] im Jahre 1928 studierte Beispiel mit Hilfe unserer Folgerung erörtern.
In $R = K[x_0, \ldots, x_4]$ seien

$$\mathfrak{a} = (x_1x_4 - x_2x_3, x_1^2x_3 - x_2^3, x_1x_3^2 - x_2^2x_4, x_2x_4^2 - x_3^3) \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = (x_1, x_4).$$

Da wir zur Berechnung der Schnittmultiplizität von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{p} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ unsere Folgerung benutzen wollen, müssen wir das Primärideal $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_2)}$ bestimmen Der Algorithmus zeigt, daß wir zunächst $U((\mathfrak{a}, x_1))$ zu bestimmen haben. Es is

$$(\mathfrak{a}, x_1) = (x_1, x_2^2, x_2x_3, x_2x_4^2 - x_3^3) \cap (x_1, x_2^3, x_3, x_4)$$

d. h. $U((\mathfrak{a}, x_1)) = (x_1, x_2^2, x_2x_3, x_2x_4^2 - x_3^3)$. Das Primärideal $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_2)}$ ist dann gegeben durch $(x_4) + U((\mathfrak{a}, x_1)) = (x_1, x_4, x_2^2, x_3^3, x_2x_3)$. Die Schnittmultiplizität $i_\mathfrak{p}$ ist daher durch die Länge der folgenden Kette von Primäridealen gegeben, die zu $\mathfrak{p}$ gehören:

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}(\mathfrak{a}_2) &= (x_1, x_4, x_2^2, x_3^3, x_2x_3) \subset (x_1, x_2, x_3^3, x_4) \subset (x_1, x_2, x_3^2, x_4) \\ &\subset (x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathfrak{p}, \quad \text{d. h.} \quad i_\mathfrak{p} = 4.\end{aligned}$$

Wir glauben, daß diese Diskussionen über den Bezoutschen Satz weitere Fragen zur Multiplizitätstheorie aufwerfen, die sich auch insbesondere aus einem Briefwechsel der letzten Monate zwischen STEVEN L. KLEIMAN und dem zweiten Verfasser dieses Artikels ergeben haben.

Zusatz bei der Korrektur: Siehe hierzu z. B. die folgende Arbeit:

STÜCKRAD, J., and W. VOGEL: On a new enumerative formula for projective varieties. In: The curves seminar at Queen's, Vol. II. Queen's papers in pure and applied mathematics. Queen's University, Kingston, Ontario, Canada 1982 (im Druck).

LITERATUR

[1] BOĎA, E.: Zur Berechnung von Schnittmultiplizitäten durch Längen. Math. Slovaca 28 (1978), 173–179.

[2] BOĎA, E., and W. VOGEL: On system of parameters, local intersection multiplicity and Bezout's Theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 78, (1980), 1–7.

[3] BUDACH, L., und W. VOGEL: Cohen-Macaulay-Moduln und der Bezoutsche Satz. Monatsh. Math. 73 (1969) 97–111.

[3a] EISENREICH, G.: B. L. van der Waerdens Wirken von 1931 bis 1945 in Leipzig. In: 100 Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität Leipzig. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1981, Teil III, S. 218–244.

[4] FULTON, W., and R. MACPHERSON: Defining algebraic intersections. In: Algebraic geometry, Tromsø, Norway 1977. Lect. Notes in Math. *687*, Springer-Verlag 1978, pp. 1—30.

[5] GERRETSEN, J. C. H.: Der Kalkül der abzählenden Geometrie. Nieuw Arch. Wisk. (3) *26* (1978), 142—160.

[6] GRÖBNER, W.: Moderne algebraische Geometrie. Springer, Wien 1949.

[7] GRÖBNER, W.: Algebraische Geometrie, 1. Teil. Allgemeine Theorie der kommutativen Ringe und Körper. BI-Hochschultaschenbücher 273/273a. Bibliogr. Inst., Mannheim 1968.

[8] GRÖBNER, W., und H. REITBERGER: Über einige neue Ergebnisse in der algebraischen Geometrie. Math. Studien I/Veröff. Univ. Innsbruck *91* (1974), 1—15.

[9] HERRMANN, M., und W. VOGEL: Bemerkungen zur Multiplizitätstheorie von Gröbner und Serre. J. Reine Angew. Math. *241* (1970), 42—46.

[10] HERRMANN, M., R. SCHMIDT und W. VOGEL: Theorie der normalen Flachheit. Teubner-Texte Math., Leipzig 1977.

[11] KLEIMAN, S. L.: Motives. In: Algebraic geometry, Oslo 1970. Proc. of the 5th Nordic Summer-School in Math., F. Ort, editor, Wolters-Noordhoff Publ. Groningen, The Netherlands, pp. 53—82.

[12] KLEIMAN, S. L.: Problem 15. Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus. Proc. Symposia in pure math. *28* (1976), 445—482.

[13] KRULL, W.: Idealtheorie. Erg. d. Math. und ihrer Grenzgebiete 4, Heft 3. Springer, Berlin 1935 (2. Aufl. 1968).

[14] MACAULAY, F. S.: The algebraic theory of modular systems. Cambridge Tracts in math. and physics nr. 19. Cambridge University Press 1916.

[15] MUMFORD, D.: Algebraic geometry I. Complex projective varieties. Die Grundlehren der math. Wissenschaft. in Einzeldarstellungen, Band 221. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1976.

[16] PERRON, O.: Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker. Math. Ann. *118* (1943), 441—448.

[17] RENSCHUCH, B.: Verallgemeinerungen des Bezoutschen Satzes. Sitz.-ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-nat. Kl. 107, Heft 4 (1966) = Math.-nat. Diss., Halle 1964.

[18] RENSCHUCH, B.: Zur Klassifizierung Veronesescher Projektionsideale. Math. Nachr. *67* (1975), 35—40.

[19] RENSCHUCH, B.: Elementare und praktische Idealtheorie. Math. f. Lehrer, Band 16. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.

[20] RENSCHUCH, B., und W. VOGEL: Zum Nachweis arithmetischer Cohen-Macaulay-Varietäten. Monatsh. Math. *85* (1978), 201—210.

[21] REUFEL, M.: Beiträge zur Multiplizitäten- und Spezialisierungstheorie I. In: Gesellsch. Math. Datenverarb. Bonn, Ber. Nr. 57, Bonn 1972, S. 177—201.

[22] SAMUEL, P.: Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique. Erg. d. Math. und ihrer Grenzgebiete N. F., Heft 4, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.

[23] SERRE, J.-P.: Algèbre locale — Multiplicités. Lect. Notes in Math. 11, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1965.

[24] STÜCKRAD, J., und W. VOGEL: Über die h_1-Bedingung in der idealtheoretischen Multiplizitätstheorie. Beiträge zur Algebra und Geometrie *1* (1971), 73—76.

[25] STÜCKRAD, J., und W. VOGEL: Ein Korrekturglied in der Multiplizitätstheorie von D. G. Northcott und Anwendung. Monatsh. Math. *76* (1972), 264—271.

[26] STÜCKRAD, J., und W. VOGEL: Über das Amsterdamer Programm von W. Gröbner und Buchsbaum Varietäten. Monatsh. Math. *78* (1974), 433—445.

[27] VOGEL, W.: Grenzen für die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes. Monatsb. Dt. Akad. Wiss. Berlin *8* (1966), 1—7.

[28] VOGEL, W.: Idealtheoretische Schnittpunktsätze in homogenen Ringen über Ringen mit Vielfachkettensatz. Math. Nachr. *34* (1967), 277—295.

[29] VOGEL, W.: On Bezout's Theorem. In: Seminar D. Eisenbud/B. Singh/W. Vogel. Teubner-Texte Math., Leipzig 1980.

[30] WAERDEN, B. L. VAN DER: Zur Nullstellentheorie der Polynomideale. Math. Ann. *96* (1926), 183—208.

[31] WAERDEN, B. L. VAN DER: Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie. Math. Ann. *97* (1927), 756—774.

[32] WAERDEN, B. L. VAN DER: On Hilberts function, series of composition of ideals and a generalization of the theorem of Bezout. Proc. Kon. Acad. Amsterdam *31* (1928), 749—770 [urspr. holländisch: Verl. Amsterdam *36* (1928), 903—924].

[33] WAERDEN, B. L. VAN DER: Eine Verallgemeinerung des Bezoutschen Theorems. Math. Ann. *99* (1928), 497—541.

[34] WAERDEN, B. L. VAN DER: Zur algebraischen Geometrie. VI. Algebraische Korrespondenzen und rationale Abbildungen. Math. Ann. *110* (1935), 134—160.

[35] WAERDEN, B. L. VAN DER: Zur algebraischen Geometrie. XIII. Vereinfachte Grundlagen der algebraischen Geometrie. Math. Ann. *115* (1938), 359—378.

[36] WAERDEN, B. L. VAN DER: Zur algebraischen Geometrie. XIV. Schnittpunktzahlen von algebraischen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. *115* (1938), 619—642.

[37] WAERDEN, B. L. VAN DER: Einführung in die algebraische Geometrie. Die Grundlehren der math. Wissensch. in Einzeldarstellung, Band 51. Springer, Berlin 1939 (2. Aufl. 1973).

[38] WAERDEN, B. L. VAN DER: The foundation of algebraic geometry. A very incomplete historical survey. Aus: ‚Studies and essays presented to R. Courant on his 60th birthday, January 8, 1948'. Interscience Publishers, New York, 1948, pp. 437—449.

[39] WAERDEN, B. L. VAN DER: Über André Weils Neubegründung der algebraischen Geometrie. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg *22* (1958), 158—170.

[40] WAERDEN, B. L. VAN DER: The Foundation of Algebraic Geometry from Severi to André Weil. Archive for History of Exact Sciences *7* (1971), 171—180 = Vortrag, Int. Math.-Kongreß Nizza, 1970 = Anhang zum Lehrbuch: Einführung in die algebraische Geometrie. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973.

[41] WAERDEN, B. L. VAN DER: Ein Briefwechsel zwischen P. Finsler und B. L. van der Waerden über die Grundlegung der algebr. Geometrie. Archive for History of Exact Sciences *9* (1972), 249—256.

[42] WEIL, A.: Foundations of algebraic geometry. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 29. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1946 (2nd ed. 1962).

[43] WRIGHT, D. J.: A characterization of multiplicity. Monatsh. Math. *79* (1975), 165—167.

[44] ZARISKI, O., and P. SAMUEL: Commutative algebra I, II. D. van Nostrand Comp., Princeton—New York—Toronto—London 1958 and 1960.

ERWÄHNUNGEN IN LEXIKA:

[L 1] Große Sowjet-Enzyklopädie, 2. Aufl. (Bol'šaja Sovetskaja Ènciklopedija, Izd. 2-e), T. *6*, 1951, Stichwort Van ..., Moskau.

[L 2] Große Sowjet-Enzyklopädie, 3. Aufl. (Bol'šaja Sovetskaja Ènciklopedija, Izd. 3-e), T. *4*, 1971, Stichwort Varden, Moskau.

[L 3] Meyers Neues Lexikon, 1. Aufl., Band *8*. 1964, Stichwort Waerden, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig.

[L 4] Lexikon der Mathematik, 1. Aufl., Stichwort Van ..., VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1977.

Für die Unterstützung bei dieser Arbeit danken die Verfasser Herrn Prof. Dr. E. STAMATIS (Athen), Fräulein CAROLA SPERLICH (Deutsche Staatbibliothek Berlin) und den Mitarbeitern des Archivs der Karl-Marx-Universität Leipzig.

Manuskripteingang: 3. 6. 1980

VERFASSER:

BODO RENSCHUCH, Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam

WOLFGANG VOGEL, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg