Beiträge zur Algebra und Geometrie
13 (1982), 77–88

Zu einigen Fragen der Beschreibung geometrischer Konstruktionen im Rahmen der Mathematiklehrerausbildung

GERHARD LIEBOLD

1. Einleitung

Die geometrischen Konstruktionen nehmen im Lehrplan der zehnklassigen polytechnischen Oberschule einen festen Platz ein. Nun sind wir gewöhnt, Bildungsinhalte, Bildungswerte durchaus in ihrer historischen Bedingtheit und Wandelbarkeit zu sehen [1]. Aber der Mensch lebt in Raum und Zeit und hat sich, erkenntnistheoretisch wie zum Zwecke technischer Beherrschung seiner Umwelt, mit dem Anschauungsraum auseinanderzusetzen. So unterstreicht KRÖTENHEERDT [1] (S. 106): „In Anbetracht der heute wachsenden Bedeutung der Konstruktiven Geometrie und der Entwicklung der Computergraphik verdienen geometrische Konstruktionen auch in der Schule wieder mehr Beachtung, allerdings unter einem neuen Aspekt, wobei auf Ablaufpläne und algorithmische Elemente besonderes Gewicht zu legen ist.“ Deutlicher noch als der gültige Lehrplan [2], der (S. 50) von „Fertigkeiten im Beschreiben der Konstruktionen sowie im schriftlichen Fixieren dieser Beschreibungen“ spricht, die der Schüler zu erwerben habe, betonen die Autoren der Geometriebände der Studienbücherei Mathematik für Lehrer [3] (S. 174), daß „auch in der Schule ... auf das Aufstellen klarer und gut durchdachter Konstruktionspläne großer Wert gelegt werden“ solle, „denn im Erwerb von Fähigkeiten und Fertigkeiten dieser Art sehen wir eines der Erziehungsziele des modernen Mathematikunterrichts“.
In der Ausbildung von Mathematiklehrern stellt sich somit die Frage, in welchem Umfange und auf welche Weise Studenten zur Realisierung moderner Aspekte des Lehrplankomplexes Geometrische Konstruktionen befähigt werden sollen. Es erscheint unbedingt erforderlich, dem Lehrerstudenten für diese seine künftige Aufgabe nicht nur einige Ratschläge, sondern praktizierbare und teilweise tatsächlich eingeübte Vorbilder anzubieten. Er ist mit einer Vielzahl von im Schulstoff auftretenden oder dort anklingenden Konstruktionsaufgaben zu konfrontieren. Das wirft das Problem der rationellen Übermittlung der Lösungen vieler und sehr verschiedenartiger Konstruktionsaufgaben, dazu in leicht reproduzierbarer Form, einer Fixierung der Lösungen auf. Ohne eine „milde Formalisierung“ ist die Aufgabe wohl nicht zu lösen.
Im folgenden soll ein Konzept zur Bewältigung der genannten Ausbildungsaufgabe vorgestellt werden. Dabei geht es nicht darum, einem Formalismus zu ungunsten umgangssprachlicher Formulierung das Wort zu reden oder gar diese oder jene Symbolik für die brauchbarste zu erklären. Angestrebt wird lediglich eine leicht lern- und lesbare, durch Nutzung gebräuchlicher Symbolik suggestive und dem realen konstruktiven Vorgehen im Schulunterricht angepaßte Sprech- und Schreibweise, die sich einmal grundsätzlich an einem modifizierten Hilbertschen Axiomen-

system, wie es — mit allen erforderlichen Abstrichen — dem Schulkurs Geometrie (vgl. [4, 5]) zugrunde liegt, als Rahmentheorie orientiert und zum anderen in Terminologie und Wahl der Symbolik sich bewußt an die Studienbücherei Mathematik für Lehrer hält (vgl. auch [6]). Die hier skizzierte Aufgabenstellung hat sich somit einerseits gegen den technisch orientierten Aspekt einer Computergeometrie (vgl. etwa [7, 8]) wie auch andererseits gegen den logisch-grundlagentheoretischen Aspekt, der geometrische Konstruktionen sieht als Modellfall einer konstruktiven Teiltheorie einer axiomatischen Theorie, abzugrenzen. So soll hier z. B. die Problematik der Auswahl von Hilfselementen ausgespart bleiben, wie sie auch im Geometrieband II [3] der Studienbücherei (Abschnitt 4.2) aus Gründen der Arbeitsökonomie ausgespart wurde. Das heißt z. B., daß es ohne Skrupel gestattet sein soll, einen Punkt, der nicht auf einer gegebenen Geraden liegt, zu wählen und als Hilfselement für die weitere Konstruktion zu verwenden. Denn die Ausgangssituation für die Schule ist doch die, daß die Basistheorie weder axiomatisch noch wenigstens inhaltlich in genügender Reichhaltigkeit vorliegt, weswegen Zweifel an der Wählbarkeit von Hilfselementen recht künstlich erscheinen würden. Freilich sollte im der Konstruktionsaufgabe zugeordneten Beweis stets auf die Unabhängigkeit des Ergebnisses von der speziellen Hilfselementewahl Bezug genommen werden (vgl. [9], S. 143 bzw. 174).

2. Vereinbarung einer symbolischen Schreibweise für geometrische Konstruktionspläne

2.1. Bezeichnungen für Objekte verschiedener Sorten

Vorgegeben sei die euklidische Ebene, beschrieben etwa mittels Hilbertschem Axiomensystem (unter Verwendung der als entscheidbar angesehenen Inzidenz-, Zwischen- und Kongruenzrelation), eventuell — falls man Fragen der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal im Sinne hat — „verdünnt" zu einer platonischen Ebene, ausgestattet mit allen Punkten, die aus einer Grundstrecke OE durch endlich vielen rationalen oder Quadratwurzeloperationen entsprechende Schritte hervorgehen. In dieser Ebene unterscheiden wir drei Sorten von Elementen: Punkte, Geraden und Kreise. Im Sinne einer impliziten Typenvereinbarung sollen Punktvariable mit X, Y, ..., Geradenvariable mit x, y, ..., Kreisvariable mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, ..., die entsprechenden Konstanten mit A, B, ..., P, Q, ... bzw. g, h, ... bzw. $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$, ... bezeichnet werden; sämtliche Symbole dürfen auch indiziert, mit Strich usw. versehen werden. Dagegen sollen die Buchstaben a, b, ... für die Bezeichnung von Streckenlängen reserviert werden.

2.2. Axiome des Lineals, des Zirkels; Schnittaxiome; Einführungsaxiom

Eine geometrische Konstruktionsaufgabe besteht für uns darin, aus gewissen vorgegebenen (oder bereits konstruierten) „Stücken" (Punkten, Geraden, Kreisen, aber auch ungerichteten Strecken, Elementarwinkeln) neue „Stücke" mit wohlbestimmten Eigenschaften zu gewinnen. Dazu sind als Konstruktionsmittel nur das ideale Lineal (unbegrenzter Länge) und der ideale Zirkel (unbegrenzter Zirkelöffnung) zugelassen, und beide dürfen nur endlich oft verwendet werden. Deren Verwendung wird geregelt durch die folgenden Axiome:

A_1 (Linealaxiom): Durch zwei verschiedene Punkte darf man mit dem Lineal die durch sie eindeutig bestimmte Gerade zeichnen.

A_2 (Zirkelaxiom): Um einen Punkt darf man durch einen zweiten Punkt mit dem Zirkel den eindeutig bestimmten Kreis zeichnen (zur sog. Kollaps-Eigenschaft des Zirkels vgl. [10]).

A_3 (1. Schnittaxiom): Zu zwei nichtparallelen Geraden kann deren Schnittpunkt als bekannt gelten.

A_4 (2. Schnittaxiom): Zu zwei sich schneidenden Kreisen können deren Schnittpunkte als bekannt gelten.

A_5 (3. Schnittaxiom): Zu einer Geraden und einem Kreis, die sich schneiden, können die Schnittpunkte als bekannt gelten.

Dazu tritt ein Axiom

A_0 (Einführungsaxiom): Man darf zwei Punkte beliebig einführen. Diese sollen mit O und E bezeichnet werden; der Strecke OE wird die Längenmaßzahl 1 zugeordnet.

2.3. Arbeitsschritte I: Die den Lineal-, Zirkel- und Schnittaxiomen zugeordneten Elementaroperationen

Als zulässige Arbeitsschritte, aufgefaßt als Elementaroperationen, denen bedingt eindeutige Existenzaussagen entsprechen, werden eingeführt:

gemäß A_1:	$\mathbf{g}(A, B)$	Gerade durch A und B (PUNKT, PUNKT) $\mapsto$ GERADE
gemäß A_2:	$\mathbf{k}(M, A)$	Kreis um M durch A (PUNKT, PUNKT) $\mapsto$ KREIS
gemäß A_3:	$\mathbf{S}_1(g, h)$	Schnittpunkt nichtparalleler Geraden (GERADE, GERADE) $\mapsto$ PUNKT
gemäß A_4:	$\mathbf{S}_2(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$	Schnittpunkte schneidender Kreise (KREIS, KREIS) $\mapsto$ PUNKTEPAAR
gemäß A_5:	$\mathbf{S}_3(\mathfrak{k}, g)$	Schnittpunkte schneidender Kreise und Geraden (KREIS, GERADE) $\mapsto$ PUNKTEPAAR

Es kann zuweilen zweckmäßig sein, die partiellen Operationen $\mathbf{S}_2$ und $\mathbf{S}_3$ auch im Berührungsfall als definiert anzusehen; das Ergebnis ist dann eine Einermenge. Die A_2 entsprechende Operation soll auch $\mathbf{k}(M, r)$ geschrieben werden können, wobei r aufzufassen ist als Länge einer vorgegebenen Strecke. Auf weitere nützliche Erweiterungen des Sprachgebrauchs sei hier der Kürze halber nicht eingegangen.

2.4. Arbeitsschritte II: Die A_0-Vereinbarung und ihre Erweiterung; Wahl von Hilfselementen, konstruktive Auswahl

A_0 erweitern wir zunächst folgendermaßen:

A_0': Es dürfen mindestens zwei Punkte beliebig gewählt werden.

Dabei *denkt* man sich weitere Punkte außer O, E natürlich so gewählt, daß sie durch endlich viele Operationen mit Zirkel und Lineal aus O und E hervorgehen. Als Symbol für die Wahl eines dergestalt beliebigen Punktes verwenden wir $\square : P$. Häufig soll ein Punkt nicht völlig beliebig, sondern etwa auf einer Geraden, auf einem Kreise liegend, allgemein aus einer Menge M gewählt werden. Wir schreiben: $\square : P \in M$. Geschieht die Auswahl aus einer Menge M noch unter einer zusätzlichen Bedingung, daß z. B. P nicht mit einem schon bekannten Punkt Q zusammenfallen möge, allgemein P die Eigenschaft H habe, schreiben wir: $\square : P \in M \mid H(P)$. Schließlich kann es sein, daß es sich um eine konstruktive Auswahl in dem Sinne handelt, daß wir uns entscheiden für *denjenigen* Punkt aus einer Menge, der allein eine ganz bestimmte zusätzliche Eigenschaft hat. Um der Einheitlichkeit der Symbolik willen schreiben wir hier statt $P := \iota X \mid X \in M \wedge H(X)$ lieber $\blacksquare : P \in M \mid H(P)$, was zu lesen ist im Sinne von: Wir wählen aus M denjenigen (eindeutig bestimmten) Punkt, der die Eigenschaft H hat, und nennen ihn P.

2.5. *Prüfschritte, entscheidbare Relationen*

Prüfschritte sind bedingte Folgeanweisungen, die eine Programmverzweigung hervorrufen. Um der Suggestivität willen sollen sie $?: H(X)$ geschrieben werden. Die in Frage stehenden Relationen sollen als entscheidbar angesehen werden. Erforderlich werdende Folgeanweisungen werden mittels $\Rightarrow$ notiert.

2.6. *Einige Regieanweisungen*

Die *Eingabe* besteht aus zwei Teilen: Nach $\triangleright$ erfolgt die Aufzählung gegebener Stücke (eventuell mit der Vereinbarung, daß unterschiedliche Zeichen auch tatsächlich verschiedene Objekte kennzeichnen sollen); nach $\blacktriangleright$ folgen einzuhaltende Bedingungen, Relationen. Beispielsweise wird etwa die Einhaltung der Dreiecksungleichung für drei gegebene Strecken gefordert. Das Programm *stoppt*, falls die gesuchten Objekte konstruiert sind, was durch Unterstreichung ihrer Symbole gekennzeichnet werden soll, oder aber, falls wir im JA-Zug von $?: M = \emptyset$ anlangen; dann soll ↯ stehen, was heißt: Es existiert kein Objekt der gewünschten Art, stop. Die Arbeits- und Prüfschritte werden *numeriert*. Über *Zyklenvereinbarungen* soll später kurz an einem Beispiel gesprochen werden. Die *Neu- oder Umbenennung* von Objekten ist ein Arbeitsschritt. Dabei soll für die Schrittfolge

$$
\begin{array}{ll}
(k) & \mathsf{S}_1(g, h) \\
(k+1) & P := \mathsf{S}_1(g, h)
\end{array}
$$

kurz $P := \mathsf{S}_1(g, h)$ geschrieben werden („Man bilde den Schnittpunkt beider Geraden und nenne ihn P“). *Kommentarzeilen* sollen erlaubt sein.

3. Ausbau der symbolischen Schreibweise und einige Anwendungen

3.1. *Unterprogrammtechnik*

(a) Grundkonstruktionen

Bei komplizierteren Konstruktionen kehren gewisse Teilkonstruktionen immer wieder. Sie spielen die Rolle von Unterprogrammen, die — einmal im Detail beschrieben — später nur als Ganzes wieder aufgerufen zu werden brauchen. Anfangs ist in der Schule das Fällen eines Lotes oder das Zeichnen des Thaleskreises eine aus etlichen Teilschritten zusammengesetzte Aktion; später genügt — hoffentlich — ein Stichwort, um diese Folge von Schritten wieder ablaufen zu lassen. In diesem Sinne werden in [3] einfache Konstruktionsaufgaben aufgezählt — wir wollen sie kurz Grundkonstruktionen nennen —, die, einmal präzise beschrieben, später nur „als Teilkonstruktionen genannt werden sollten“ (S. 167—168). Natürlich ist die Auswahl dessen, was zu den Grundkonstruktionen zählen sollte, recht willkürlich. Es sollte geradezu im Verlaufe der Zeit eine Art Unterprogramm-Bibliothek entstehen, in die, je nach Bedarf, immer weitere Konstruktionen als fertige Unterprogramme aufgenommen werden. So entsteht ein wachsendes Reservoir an beherrschten Teilkonstruktionen. Wir bezeichnen Unterprogramme für Grundkonstruktionen hier mit jeweils zwei Buchstaben in Grotesk-Versalien, die suggestiv den Inhalt des Programms assoziieren lassen. Dahinter stehen in Klammern die Eingabeelemente. Unterprogramme sind partielle Operationen; es muß also festgelegt sein, mit welchem Element sie jeweils enden. Das ist bei der Konstruktion von Mittelsenkrechten, Loten und dgl. klar, weniger aber bei Strecken- und Winkelantragung. Bei letzterer hat man dann gewöhnlich mit dem sogenannten „freien Schenkel“

weiterzuarbeiten, also bleibe das Winkelantrageprogramm auf eben diesem Schenkel, das Streckenantrageprogramm aber auf dem Endpunkt der angetragenen Strecke stehen. Einige Beispiele sollen das Gesagte erläutern. Zunächst benennen wir die Unterprogramme für die sieben Grundaufgaben im Sinne von [3]:

(1) $\mathbf{MI}(X, Y)$	Mittelpunkt einer Strecke, endend auf PUNKT
(2) $\mathbf{WH}^+(x^+, y^+)$	Winkelhalbierende eines Elementarwinkels, endend auf STRAHL (vgl. aber Abschnitt 3.3)
(3) $\mathbf{SK}(X, x)$	$(X \in x)$ Senkrechte, endend auf GERADE
(4) $\mathbf{LT}(X, x)$	$(X \notin x)$ Lot, endend auf GERADE
(5) $\mathbf{PA}(X, x)$	Parallele zu x durch X, endend auf GERADE
(6) $\mathbf{AS}(XY^+, c)$	$c = \|Z_1Z_2\|$ Streckenantragung, endend auf PUNKT
(7) $\mathbf{AW}(XY\varepsilon^\sigma, \xi)$	$\sigma \in \{+, -\}, \xi = \|\sphericalangle z_1^+ z_2^+\|$ Winkelantragung, endend auf STRAHL

Als weitere Unterprogramme führt man zweckmäßig ein: **MS**(X, Y) für die Konstruktion der Mittelsenkrechten, **WH**(x, y) $(x \nparallel y)$ für die Konstruktion des Paares der Winkelhalbierenden zweier nichtparalleler Geraden, **MP**(x, y) $(x \parallel y)$ für die Konstruktion der Mittelparallelen, **PD**(x, d) für die Konstruktion des Parallelgeradenpaares zu x im Abstand $|Z_1Z_2| = d$, **TH**(X, Y) für die Konstruktion des Thaleskreises über XY als Durchmesser. Je nach Bedarf schreibt man weitere Unterprogramme für gewisse Bestimmungslinien wie Ortskreise (**PW**), Kreis des Apollonius (**AP**), konzentrischen Kreis zu einem gegebenen Kreis (**KZ**), für den Teilpunkt einer Strecke bei innerer, äußerer oder bei stetiger Teilung (**TI**, **TÄ**, **TS**), für den Umkreis eines nichtkollinearen Punktetripels (**UK**), für Tangenten (**TG**), Polaren (**PO**), auch für Punkt- oder Geradenspiegelung von Punkten oder Geraden (**SP**, **SG**, **ZP**, **ZG**), für Inversion (**IV**) oder Antiinversion (**AV**) von Punkten, möglicherweise auch (als Hilfsmittel für die vollständige konstruktive Lösung des Apollonischen Berührungsproblems) ein Unterprogramm **KK**$_+(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, X)$, welches alle Kreise liefert, die durch den Punkt X gehen und die Kreise $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ gleichartig berühren. An dieser Aufstellung soll lediglich deutlich werden, daß die Unterprogramm-Bibliothek offen ist gegenüber „Neuanschaffungen“.
Die beiden folgenden Beispiele mögen zeigen, wie unterschiedlich umfänglich solche Unterprogramme für Grundkonstruktionen sein können:

MS(X, Y) MITTELSENKRECHTE EINES PUNKTEPAARES
$\triangleright$ X, Y
(1) $\mathbf{k}(X, Y)$ (2) $\mathbf{k}(Y, X)$ (3) $\{Z_1, Z_2\} := \mathbf{S}_2((1), (2))$ (4) $\underline{x} := \mathbf{g}(Z_1, Z_2)$

TI$(X, Y; p:q)$ INNERE TEILUNG EINER STRECKE IN GEGEBENEM VERHÄLTNIS
$\triangleright$ $X, Y; Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ $\blacktriangleright$ $\|Z_1Z_2\| = p, \|Z_3Z_4\| = q$
(1) $x := \mathbf{g}(X, Y)$ (2) $\square: X_1 \mid X_1 \notin x$ (3) $x' := \mathbf{g}(X, X_1)$ (4) $X' := \mathbf{AS}(XX_1^+, p)$ (5) $\mathbf{PA}(Y, x')$ (6) $\square: Y_1 \in (5) \mid Y_1 \in XYX_1^-$ (7) $Y' := \mathbf{AS}(YY_1^+, q)$ (8) $y := \mathbf{g}(X', Y')$ (9) $\underline{Z} := \mathbf{S}_1(x, y)$

(b) Maßzahlkonstruktionen

Natürlich lassen sich alle Aufgaben, aus gegebenen Strecken der Länge bzw. Maßzahl a, b Strecken einer Länge bzw. Maßzahl m, die sich aus a, b durch eine endliche Anzahl rationaler oder Quadratwurzeloperationen ergibt, zu konstruieren, bekanntlich auf obige Grundkonstruktionen zurückführen. Dennoch ist es für den praktischen Gebrauch nützlich aufschreiben zu können, daß man eine Strecke dieser oder jener Länge bzw. Maßzahl benötigt. In der Bezeichnung stellen wir uns dabei auf den abstrakten Standpunkt der Längenmessung, der Identifikation von Länge $|AB|$ und Maßzahl $\|AB\|$ einer Strecke AB im Sinne von [3] (S. 12). So benötigt man $\frac{2}{3}s_a$ bei der Konstruktion eines Dreiecks aus s_a, s_b, s_c oder $\frac{1}{h_a}$ bei der Konstruktion eines Dreiecks aus h_a, h_b, h_c usw. Zur Bezeichnung von Unterprogrammen für Maßzahlkonstruktionen verwenden wir das Symbol $\mathbf{m}$ mit einem Ausdruck als Index, welcher angibt, wie sich die gesuchte Maßzahl aus den gegebenen Maßzahlen berechnet, z. B. $\mathbf{m}_{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\mathbf{m}_{\frac{1}{x}}$, $\mathbf{m}_{\sqrt{x}}$, $\mathbf{m}_{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}$ usw. Für den Einbau dieser Programme in größere erweist sich als sinnvoll die Vereinbarung, daß das Programm $\mathbf{m}_y$ jeweils stehenbleibt auf demjenigen Punkt H des Strahles OE^+, für den $\|OH\| = y$ gilt. Bei allen Unterprogrammen für Maßzahlkonstruktionen denke man sich die Punkte O und E und die Verbindungsgerade g_0 beider Punkte stillschweigend vorgegeben. Als Beispiel sei die Konstruktion des geometrischen Mittels zweier Strecken ($\mathbf{m}_{\sqrt{ab}}$) angeführt (zum Arbeitsschritt $\mathbf{S}_3^*$ vgl. Abschnitt 3.4):

$\mathbf{m}_{\sqrt{ab}}$ GEOMETRISCHES MITTEL
$\triangleright$ a, b
(1) $A := \mathbf{AS}(OE^+, a)$
(2) $B := \mathbf{AS}(OE^-, b)$
(3) $\mathbf{TH}(A, B)$
(4) $\mathbf{SK}(O, g_0)$
(5) $\mathbf{S}_3\big((3), (4)\big)$
(6) $\blacksquare : H' \in (5) \mid H' \in OE^+$
(7) $\mathbf{k}(O, H')$
(8) $\underline{H} := \mathbf{S}_3^*\big((7), OE^+\big)$

3.2. *Abermalige Erweiterung der A_0-Vereinbarung*

Eine abermalige Erweiterung der A_0-Vereinbarung wird durch folgenden Sachverhalt nahegelegt: Hat man beispielsweise ein Dreieck aus c, h_c und α zu konstruieren — genauer gesagt: ein Dreieck mit positivem Umlaufsinn von allen untereinander kongruenten —, so begänne man mit dem Zeichnen einer Strecke, die zu einer Strecke P_1P_2 mit $|P_1P_2| = c$ kongruent ist, d. h., man wählt einen beliebigen Punkt (etwa $O = A$), danach einen zweiten (etwa E), trägt P_1P_2 von O aus auf OE^+ ab und erhält einen Endpunkt B. Statt dieser umständlichen und immer wiederkehrenden Prozedur sei es erlaubt zu schreiben $\square : |AB| = c$ oder auch $\square : AB \cong P_1P_2$, was bedeutet: AB ist irgendeine der Strecken, die zu P_1P_2 mit $|P_1P_2| = c$ kongruent sind. Analog sei die Schreibweise $\square : |\sphericalangle BAC| = \alpha$ erlaubt.

Es sei noch angemerkt, daß wir die Ebene als orientiert auffassen und die positive der beiden zu einer Geraden durch A und B gehörenden Halbebenen mit $AB\varepsilon^+$ bezeichnen, während ABC^+ diejenige Halbebene zur Geraden durch A und B kennzeichnet, die den Punkt C enthält.

3.3. *Indexvereinbarungen zur Zyklenorganisation*

Hat man mehrere Objekte nach gleicher Schrittfolge zu konstruieren, so empfiehlt es sich, eine Indexvereinbarung zu treffen: Werden für den Index i die Werte $1, 2, 3, \ldots, n$ vereinbart, so soll der Index $i + k$ stets gelesen werden als der in $\{1, \ldots, n\}$ gelegene Repräsentant der Restklasse $i + k$ modulo n. Selbstverständlich dürfen Zyklen auch verschachtelt werden. Der Zyklusbeginn wird durch „$i = 1, 2, \ldots, n$", das Zyklusende durch ----- unter dem Ergebnis (falls nicht bereits ——— steht) gekennzeichnet. Steht unter einem indizierten Ausdruck ein Stopstrich (———), so ist erst zu stoppen, wenn der Index alle zulässigen Werte durchlaufen hat. Als Beispiel sei ein Programm zur Konstruktion der Ankreise eines von drei paarweise nicht parallelen und nicht im Büschel liegenden Geraden gebildeten Dreiecks angeführt (dabei ist $\mathbf{WH}^\bullet(x^+, y^+)$ eine Modifikation des Unterprogramms $\mathbf{WH}$, die einem Elementarwinkel nicht den winkelhalbierenden Strahl, sondern dessen Trägergerade zuordnet):

ANKREISE DREIECK x_1, x_2, x_3	
$\triangleright\ x_i$ $\quad i = 1, 2, 3.$	
$\blacktriangleright\ x_i \nparallel x_{i+1},\ x_1 \cap x_2 \notin x_3$	
(1) $\underline{P_{i+2}} := \mathbf{S}_1(x_i, x_{i+1})$,	$i = 1, 2, 3$
(2) $\underline{w_i} := \mathbf{WH}^\bullet(P_iP_{i+1}^+, P_iP_{i+2}^-)$,	$i = 1, 2, 3$
(3) $\underline{M_{i+2}} := \mathbf{S}_1(w_i, w_{i+1})$,	$i = 1, 2, 3$
(4) $\mathbf{LT}(M_i, x_i)$,	$i = 1, 2, 3$
(5) $\mathbf{S}_1\big((4), x_i\big)$	
(6) $\underline{\mathfrak{k}_i} := \mathbf{k}\big(M_i, (5)\big)$	

Zur Organisation von Zyklen ist es bekanntermaßen oft nötig, zwei Elemente miteinander bzw. n Elemente zyklisch zu vertauschen, was durch mehrmalige Anwendung des Arbeitsschrittes Umbenennung und mittels einer „Hilfszelle" realisiert werden kann; wir schreiben für die so entstehenden Unterprogramme $\curvearrowright(A, B)$ bzw. $\curvearrowright(A_1, \ldots, A_n)$.

3.4. *Modifizierung der Schnittoperationen*

Die Operation $\mathbf{S}_1$ war anwendbar auf (nichtparallele) Geraden. Es kann zweckmäßig sein, eine entsprechende Operation für einen Strahl und eine Gerade oder sogar für zwei Strahlen zu definieren: $\mathbf{S}_1^*(g^+, h)$ mit $g^+ := P_1P_2^+$ führt zu einem Schnittpunkt für $d(P_1, h) > d(P_2, h)$, $\mathbf{S}_1^{**}(g^+, h^+)$ mit $g^+ := P_1P_2^+, h^+ := P_3P_4^+$ führt zu einem Schnittpunkt für $d(P_1, h) > d(P_2, h) \wedge d(P_3, g) > d(P_4, g)$.
Noch häufiger ist eine Modifizierung der Schnittoperationen $\mathbf{S}_3$ von Nutzen; nämlich gerade dann, wenn der Anfangspunkt des Strahles ein innerer Punkt des Kreises, im Spezialfall sogar der Mittelpunkt des Kreises ist; es wird dann Eindeutigkeit er-

zwungen: $\mathbf{S}_3^*(\mathfrak{k}, g^+)$ mit $\mathfrak{k} := \mathbf{k}(M, r)$ und $g^+ := P_1P_2^+$ führt zu genau einem Schnittpunkt für $d(P_1, M) < r$. Diese Modifizierung zahlt sich insbesondere auch bei Winkelantragungen aus. Als Beispiel sei jedoch das Programm der Konstruktion des Paares gemeinsamer innerer Tangenten zweier Kreise angeführt:

$\mathbf{GT}_i(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ GEMEINSAME INNERE TANGENTEN ZWEIER KREISE $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$
▷ $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ $\quad (\mathfrak{k}_i := \mathbf{k}(M_i, r_i), \quad i = 1, 2)$ ▶ $r_2 \geqq r_1, \quad \lvert M_1M_2 \rvert > r_1 + r_2$
(1) $\mathbf{k}(M_2, r_2 + r_1)$ (2) $\mathbf{TH}(M_1, M_2)$ (3) $\{H_i\}_{i=1,2} := \mathbf{S}_2\big((1), (2)\big)$ (4) $\underline{\mathbf{g}(M_2, H_i)}, \quad i = 1, 2$ (5) $\underline{T_i} := \mathbf{S}_3^*(\mathfrak{k}_2, M_2H_i^+), \quad i = 1, 2$ (6) $\underline{\mathbf{g}(M_1, H_i)}, \quad i = 1, 2$ (7) $\underline{t_i} := \mathbf{PA}\big(T_i, (6)\big), \quad i = 1, 2$

Für die Operation $\mathbf{S}_2$ liegt keine Modifikation so nahe, daß Eindeutigkeit der Operation stets in gleicher Weise erzeugt würde. Vielmehr ist häufig einer der beiden Schnittpunkte danach auszuwählen, ob er in einer bestimmten von der Zentralen erzeugten Halbebene liegt oder nicht (vgl. Anmerkung in 3.2. und [9], S. 127).

3.5. *Vermeidung zu starker Programmverzweigung durch entsprechende Determination*

Das soeben angeführte Beispiel der Konstruktion der gemeinsamen inneren Tangenten setzt eine ganz bestimmte Lage der Kreise voraus, sollen die Tangenten wirklich existieren. Es dürfte hier zur Vermeidung von Fallunterscheidungen (sprich: Programmverzweigungen) zweckmäßig sein, die „unergiebigen", „uninteressanten" Fälle durch entsprechend einschränkende Forderungen im Eingabeteil ▶ auszuschließen. Allerdings läßt sich dies im allgemeinen nicht mehr sinnvoll realisieren, wenn die entsprechende Konstruktion als Unterprogramm in ein größeres Programm eingebaut werden soll. Außerdem kann es selbst bei Grundkonstruktionen für den Lernenden zunächst außerordentlich nützlich sein, darüber nachzudenken, ob die gewöhnliche schwache Determination für einen unverzweigten Durchlauf ausreicht; d. h., es kann reizvoll sein, die starke Verzweigung echt auszukosten. Die angerissenen Probleme seien in 3.6. an zwei Beispielen demonstriert.

3.6. *Zwei Anwendungsbeispiele*

1. Zu konstruieren sind alle Kreise, die durch zwei feste Punkte gehen und eine feste Gerade berühren.
In die Vorbedingung werde zunächst nur aufgenommen, daß die beiden Punkte ein und derselben Halbebene der Geraden angehören mögen, da die Aufgabe andernfalls ohne Interesse ist.

PPG (P, Q, g)
KREISE, DIE GERADE BERÜHREN, DURCH ZWEI PUNKTE
(BERÜHRUNGSPROBLEM APOLLONIUS NR. 2 —
SCHWACHE DETERMINATION)

▷ $P, Q; g$
▶ $Q \in gP^+$

(1) $\mathbf{g}(P, Q)$
(2) $?: ((1) \nparallel g)$

ja | nein

(3) $S := \mathbf{S}_1((1), g)$ | (3′) $\mathbf{MS}(P, Q)$
(4) $?: d(P, g) > d(Q, g)$ | (4′) $\mathbf{S}_1((3'), g)$

ja | nein | (5′) $\underline{\mathfrak{k}} := \mathbf{UK}(P, Q, (4'))$

(5) $\mathbf{TH}(P, S)$ | (5″) $\curvearrowright (P, Q)$ $\Rightarrow (5)$

(6) $\mathbf{SK}(Q, (1))$
(7) $\mathbf{S}_3((5), (6))$
(8) $\blacksquare : H \in (7) \mid H \in SP^+$
(9) $\mathbf{k}(S, H)$
(10) $\{T_i\}_{i=1,2} := \mathbf{S}_3((9), g)$
(11) $\underline{\mathfrak{k}_i} := \mathbf{UK}(P, Q, T_i), \quad i = 1, 2$

Die beiden nein-Abzweige lassen sich vermeiden, nimmt man in ▶ die Bedingung $d(P, g) > d(Q, g)$ auf. Die Prüfschritte (2) und (4) entfallen dann, und wir erhalten

PPG*(P, Q, g)
KREISE, DIE GERADE BERÜHREN, DURCH ZWEI PUNKTE
(BERÜHRUNGSPROBLEM APOLLONIUS NR. 2 —
STARKE DETERMINATION)

▷ $P, Q; g$
▶ $Q \in gP^+, \qquad d(P, g) > d(Q, g)$

(1) $\mathbf{g}(P, Q)$
(2) $S := \mathbf{S}_1((1), g)$
(3) $\mathbf{TH}(P, S)$
(4) $\mathbf{SK}(Q, (1))$
(5) $\mathbf{S}_3((3), (4))$
(6) $\mathbf{k}(S, (5))$
(7) $\{T_1, T_2\} := \mathbf{S}_3((6), g)$
(8) $\underline{\mathfrak{k}_i} := \mathbf{UK}(P, Q, T_i), \quad i = 1, 2$

2. Zu konstruieren sind alle Kreise, die einen Kreis und eine Gerade berühren und durch einen Punkt gehen.
Die Lösung dieses Berührungsproblems wird bekanntlich auf die Lösung der in Beispiel 1 gestellten Aufgabe zurückgeführt. Verschafft man sich eine hinreichend

starke Determination, so läßt sich das unverzweigte Unterprogramm $\mathbf{PPG}^*$ verwenden, und man erhält:

$\mathbf{PGK}^*(P, g, \mathfrak{k})$
KREISE DURCH PUNKT, DIE GERADE UND KREIS BERÜHREN
(BERÜHRUNGSPROBLEM APOLLONIUS NR. 5
— STARKE DETERMINATION — 1. Fassung)

▷ $P; g; \mathfrak{k} := \mathbf{k}(M, r)$
▶ $\mathfrak{k} \subset gP^+, \quad d(P, M) > r, \quad M \notin \mathrm{LOT}(P, g), \quad d(P, g) \neq d(M, g) \pm r$

(1) $\mathbf{LT}(M, g)$
(2) $F := \mathbf{S}_1\big((1), g\big)$
(3) $\mathbf{S}_3\big(\mathfrak{k}, (1)\big)$
(4) $\blacksquare : C \in (3) \mid |CF| < |MF|$
(5) $\blacksquare : D \in (3) \mid D \neq C$

(6) $\mathbf{UK}(P, F, C)$
(7) $\mathbf{g}(P, D)$
(8) $\mathbf{S}_3\big((6), (7)\big)$
(9) $\blacksquare : Q_1 \in (8) \mid Q_1 \neq P$
(10) $\{\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2\} := \mathbf{PPG}^*(P, Q_1, g)$ — COMMENT: (10) liefert zwei Kreise der äußeren Berührung

(11) $\mathbf{UK}(P, F, D)$
(12) $\mathbf{g}(P, C)$
(13) $\mathbf{S}_3\big((11), (12)\big)$
(14) $\blacksquare : Q_2 \in (13) \mid Q_2 \neq P$
(15) $\{\mathfrak{k}_3, \mathfrak{k}_4\} := \mathbf{PPG}^*(P, Q_2, g)$ — COMMENT: (15) liefert zwei Kreise der inneren Berührung

(16) $\underline{\{\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \mathfrak{k}_4\}}$

Man erkennt, daß nach der Vorbereitung (Schritte (1) bis (5)) zwei gleichartige Konstruktionsphasen ablaufen. Durch geeignete Indizierung im Vorbereitungsteil können die Schrittfolgen (6) bis (10) bzw. (11) bis (15) in einem zweimal zu durchlaufenden Zyklus zusammengefaßt werden, so daß das Programm folgende Gestalt annimmt:

$\mathbf{PGK}^*(P, g, \mathfrak{k})$
KREISE DURCH PUNKT, DIE GERADE UND KREIS BERÜHREN
(BERÜHRUNGSPROBLEM APOLLONIUS NR. 5
— STARKE DETERMINATION — 2. Fassung)

▷ $P; g; \mathfrak{k} := \mathbf{k}(M, r)$
▶ $\mathfrak{k} \subset gP^+, \quad d(P, M) > r, \quad M \notin \mathrm{LOT}(P, g), \quad d(P, g) \neq d(M, g) \pm r$

(1) $\mathbf{LT}(M, g)$
(2) $F := \mathbf{S}_1\big((1), g\big)$
(3) $C_1 := \mathbf{S}_3^*(\mathfrak{k}, MF^+)$
(4) $C_2 := \mathbf{S}_3^*(\mathfrak{k}, MF^-)$

(5) $\mathbf{UK}(P, F, C_j), \quad j = 1, 2$
(6) $\mathbf{g}(P, C_{j+1})$
(7) $\mathbf{S}_3\big((5), (6)\big)$
(8) $\blacksquare : Q_j \in (7) \mid Q_j \neq P$
(9) $\underline{\mathbf{PPG}^*(P, Q_j, g)}$

Hieran ist wohl deutlich die Tragfähigkeit der vereinbarten Symbolik ablesbar. Ein Verzicht auf derart starke Determination läßt ein stark verzweigtes Programm entstehen, welches hier nicht gesondert aufgeführt werden soll.

4. Zusammenfassend sei festgestellt:

(1) Ohne allen Abstrich von ihrer Funktion, die Lust des Findens zu entwickeln, ist die Behandlung geometrischer Konstruktionen im Schulunterricht auch eine ausgezeichnete Möglichkeit, Verständnis für algorithmische Abläufe zu erzeugen. Sie sollte genutzt werden.

(2) Damit der künftige Lehrer die Möglichkeit einmal nutzen kann, sollte er geometrische Konstruktionen ausdrücklich unter diesem Aspekt kennenlernen. Er sollte über das Aufstellen von Konstruktionsplänen nicht nur etwas wissen; er sollte darin auch eine gewisse Übung haben.

(3) Somit scheint es unumgänglich, den Studenten mit einer Möglichkeit zur symbolischen Beschreibung von Konstruktionen auszurüsten. Dabei kommt es nicht darauf an, welcher speziellen Symbolik der Vorzug gegeben wird. Sie hat aber vergleichsweise leicht lern- und lesbar zu sein. Der Student sollte über eine Art Programmbibliothek für Grundkonstruktionen (insbesondere auch für eine Auswahl an Bestimmungslinien) und für Maßzahlkonstruktionen verfügen.

(4) Eine übersichtliche Gestaltung der Programme ist durchaus erreichbar durch
- Nutzung einer Unterprogramm-Technik für ein (nach oben offenes) System von Grund- und Maßzahlkonstruktionen,
- Nutzung zyklischer Durchläufe,
- Modifizierung der Schnittoperationen,
- Verwendung vertretbarer Erweiterungen der Zulässigkeit der Wahl von Elementen,
- Vermeidung zu starker Programmverzweigungen durch entsprechend starke Determination.

LITERATUR

[1] Krötenheerdt, O.: Geometrie im Mathematikunterricht und ihre Bedeutung für die Allgemeinbildung (Mit einigen Bemerkungen auch über die Geometrie in der Mathematikausbildung an Hochschulen). Mitteilungen der MGDDR, *2*–*3* (1979), 85–107.

[2] Lehrplan Mathematik Klassen 5–10, hrsg. v. Ministerium für Volksbildung der DDR, Berlin 1973.

[3] Böhm, J., W. Börner, E. Hertel, O. Krötenheerdt, W. Mögling und L. Stammler: Geometrie II, Studienbücherei Mathematik für Lehrer Bd. 7, 3. Aufl., Berlin 1980.

[4] Lorenz, G.: Der am Abbildungsbegriff orientierte Aufbau des Geometrielehrgangs in unserer Schule. Mathematik in der Schule 1974, Heft 1 und 2.

[5] Frank, B.: Bewegungen in der euklidischen Geometrie und im Geometrielehrgang der Oberschule — ein Beitrag zum Problem der Systematik und Kontinuität des Geometrieunterrichts an unseren Schulen. Mathematik in der Schule 1973, Heft 11 und 12; 1974, Heft 1.

[6] Stammler, L.: Zur geometrischen Terminologie und Symbolik in der Lehrerausbildung (Vortrag auf der Haupttagung der MGDDR in Halle 1974).

[7] Котов, И. И.: Алгоритмы машинной графики, Москва 1977.
[8] Harms, S., und W.-D. Klix: Ein Algorithmus zur automatischen Lösung konstruktiver Problemstellungen. Beiträge zur Algebra und Geometrie *6* (1977), 55—69.
[9] Schreiber, P.: Theorie der geometrischen Konstruktionen, Berlin 1975.
[10] Moise, E.: Elementary Geometry from an Advanced Standpoint, London 1963.

Manuskripteingang: 1. 4. 1980

VERFASSER:

Gerhard Liebold, Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt